Complexidade e Estrutura: a aparente facilidade dos Grafos-(k, ℓ) Bem Cobertos

Sulamita Klein

IM / COPPE-Sistemas - UFRJ, Brasil

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

Em colaboração com:

Luerbio Faria

IME/UERJ, Brasil

Sancrey Rodrigues Alves

FAETEC/RJ e UFRJ, Brasil

Motivação

- Vamos pensar em uma rede social.

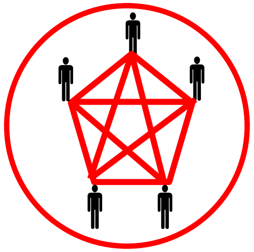
Motivação

- Vamos pensar em uma rede social.
  - Queremos identificar os grupos de pessoas que se conhecem mutuamente (dois a dois) e os grupos de pessoas que não se conhecem mutuamente.

Motivação

- Vamos pensar em uma rede social.

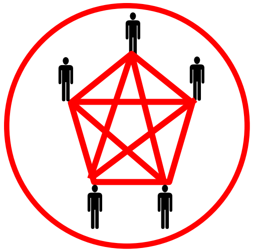
    - Queremos identificar os grupos de pessoas que se conhecem mutuamente (dois a dois) e os grupos de pessoas que não se conhecem mutuamente.



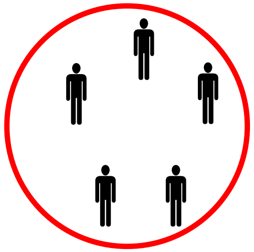
Grupo de pessoas que se conhecem
(Clique)

Motivação

- Vamos pensar em uma rede social.
  - Queremos identificar os grupos de pessoas que se conhecem mutuamente (dois a dois) e os grupos de pessoas que não se conhecem mutuamente.

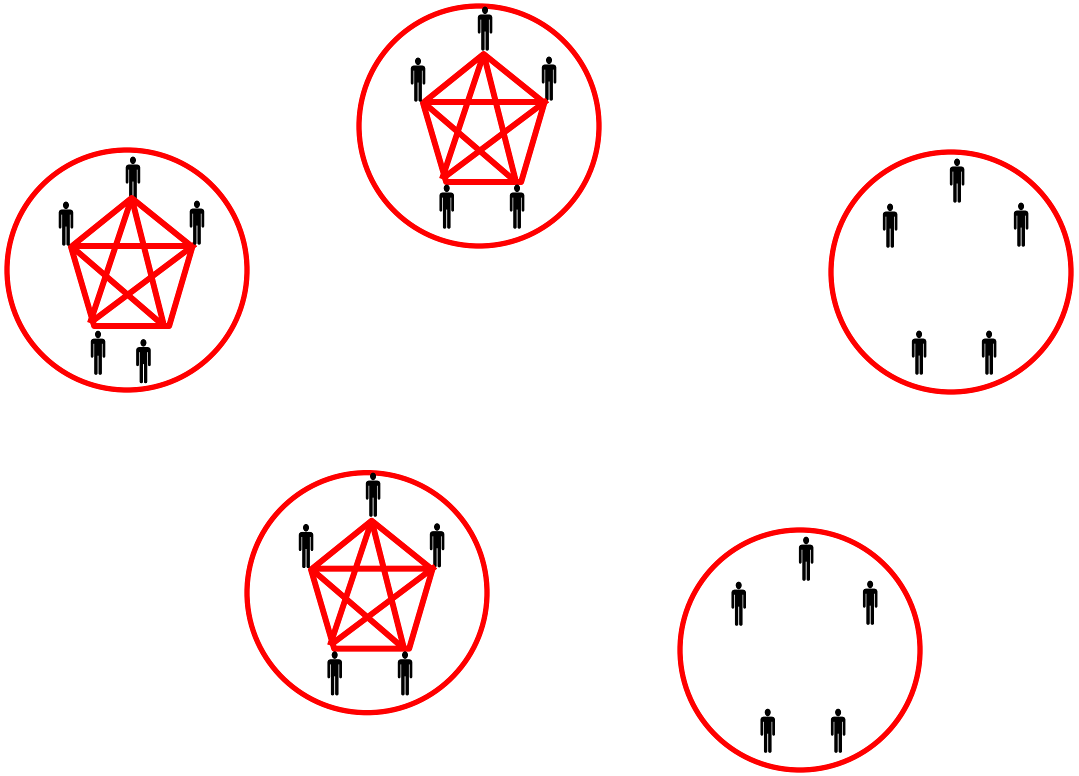


Grupo de pessoas que se conhecem
(Clique)

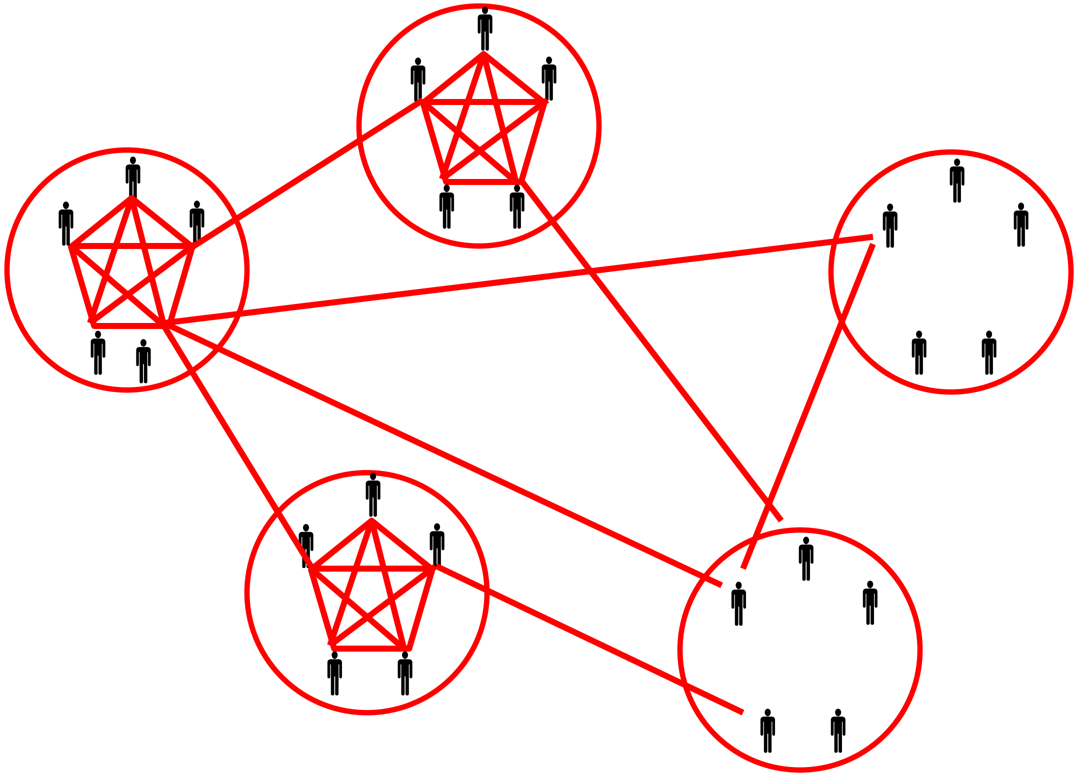


Grupo de pessoas que não se conhecem
(Conjunto Independente)

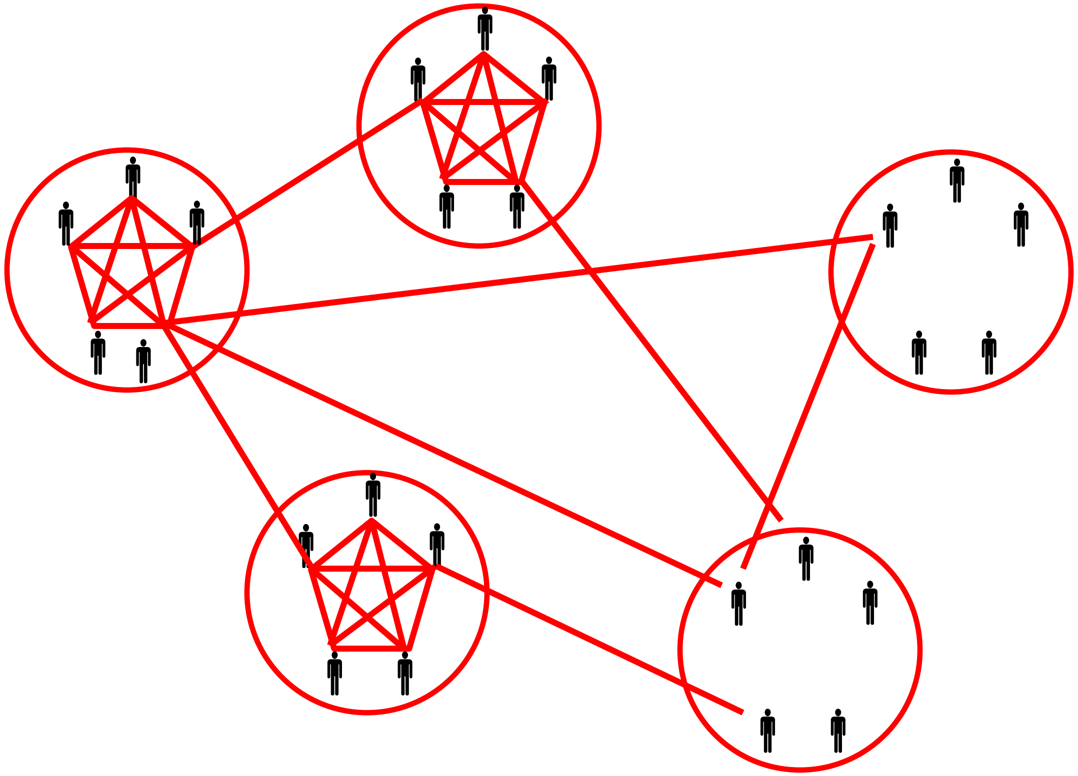
Motivação



Motivação



Motivação



Qualquer relação entre pessoas de grupos diferentes

Motivação

Problemas importantes

- Achar o maior número de pessoas que se conhecem mutuamente

(**clique máxima**).

Motivação

Problemas importantes

- Achar o maior número de pessoas que se conhecem mutuamente

  (**clique máxima**).

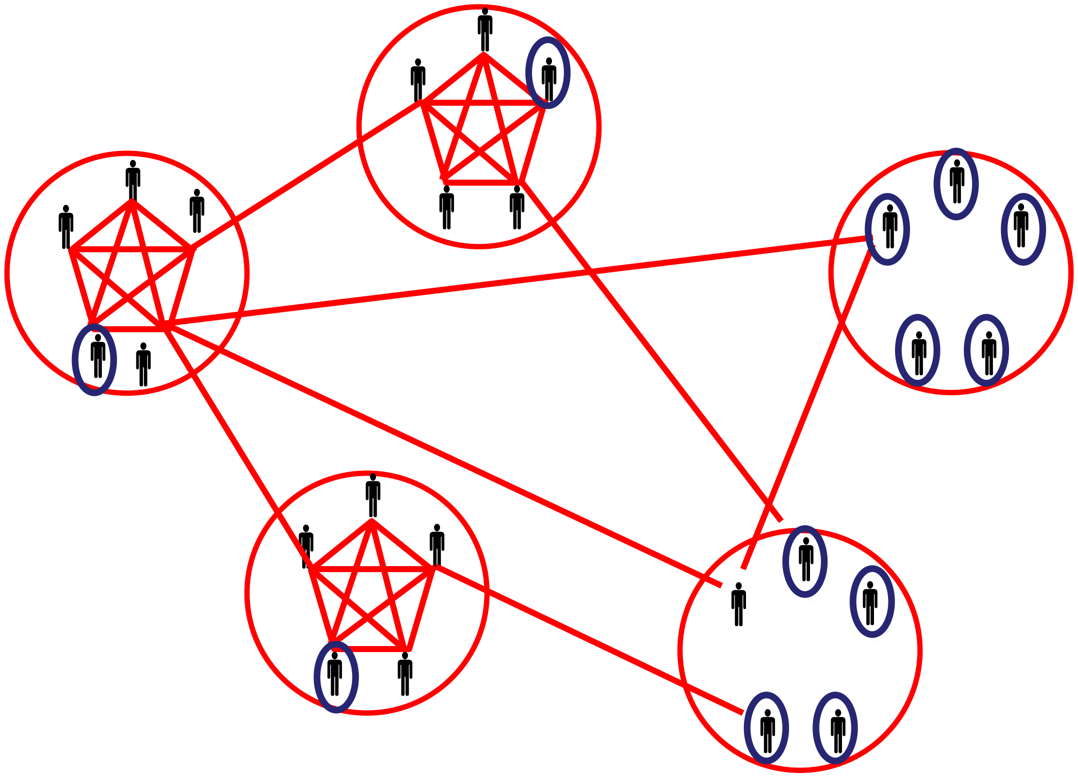
- Achar o maior número de pessoas que não se conhecem mutuamente

  (**conjunto independente máximo**).

Motivação

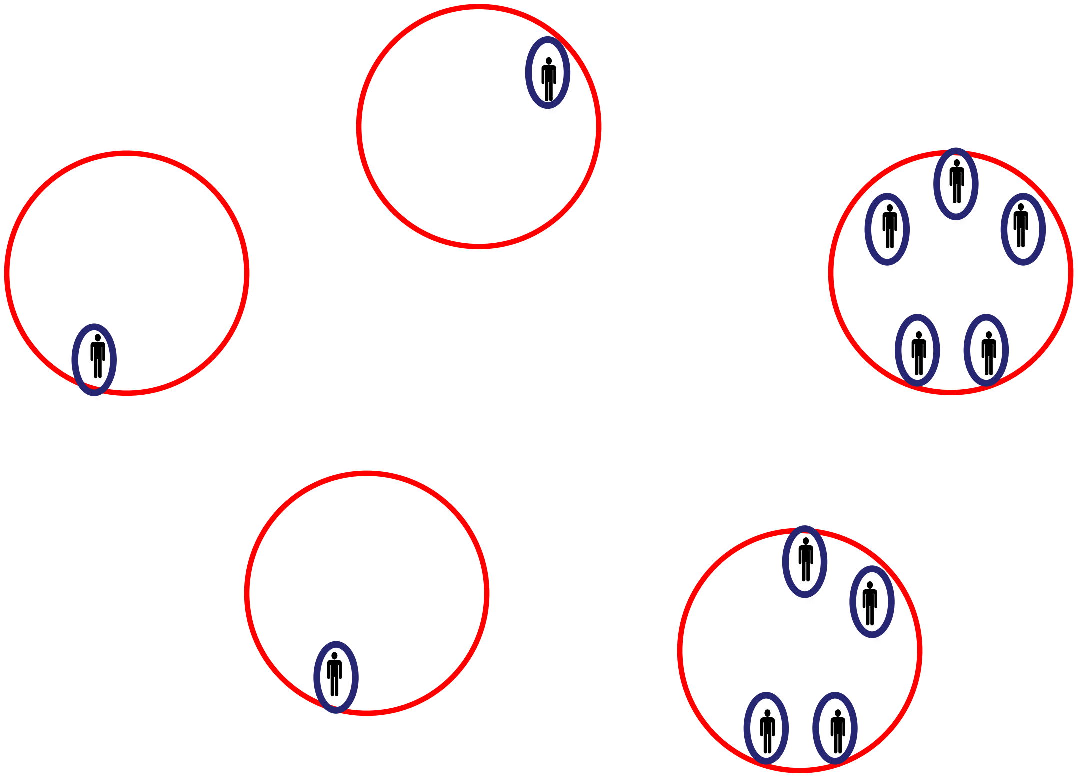
- **Conjunto Independente Máximo**

É o conjunto independente de maior tamanho (cardinalidade).



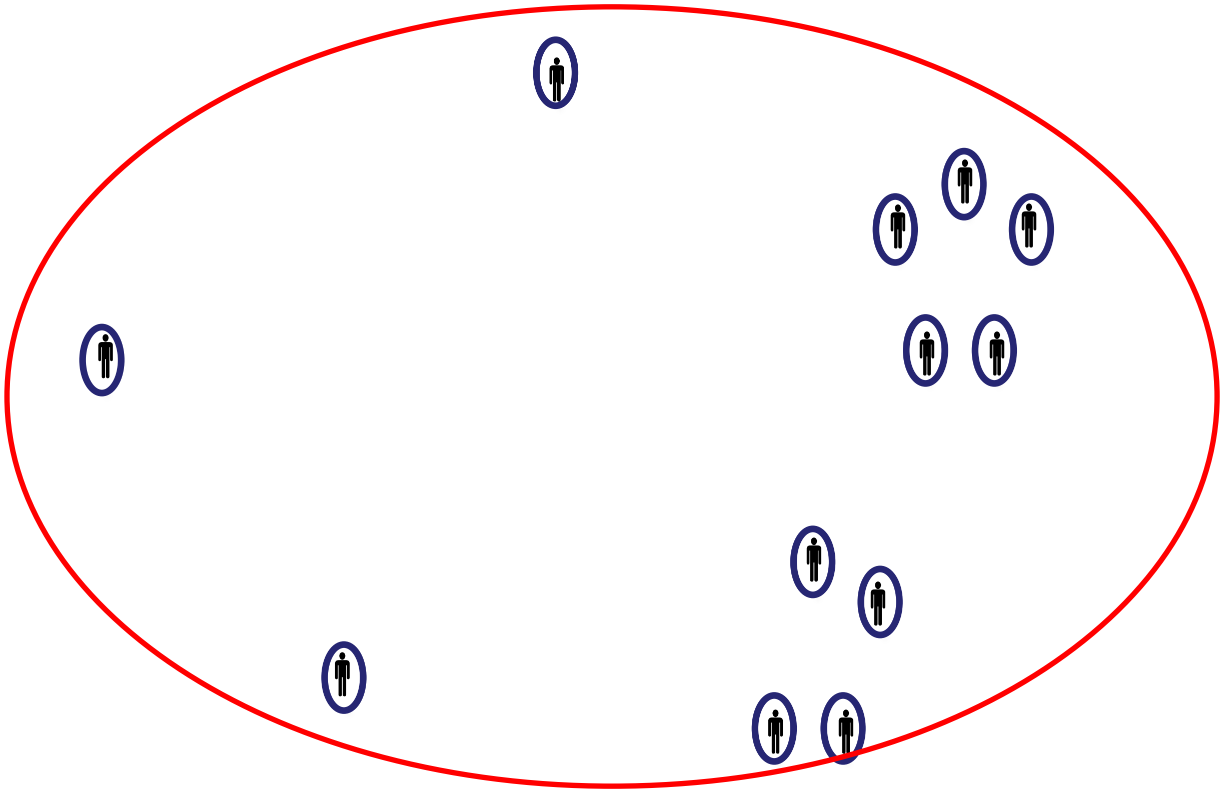
Motivação

- **Conjunto Independente Máximo**



Motivação

- **Conjunto Independente Máximo**



conjunto independente máximo tem tamanho 12.

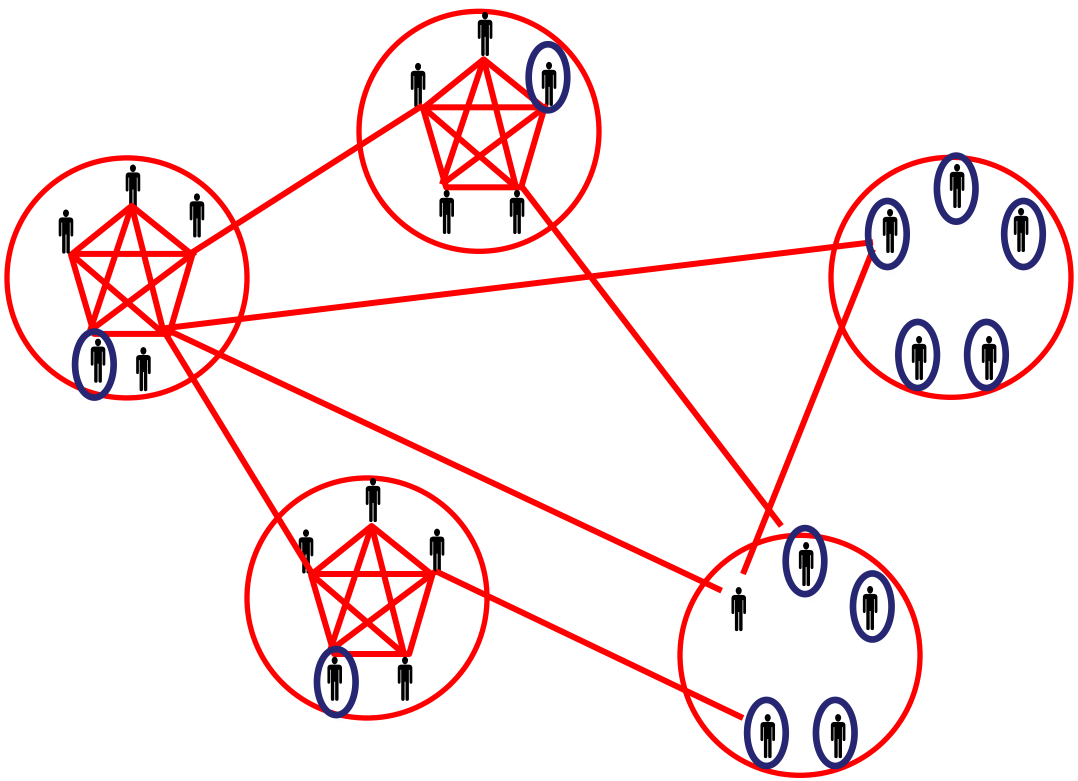
Motivação

$\alpha(G)$ = número de independência de G

i.e., o tamanho de um conjunto independente máximo de G.

Motivação

- **Conjunto Independente Máximo**



α(G) = 12

Motivação

Problemas envolvendo conjunto independente são difíceis.

Teorema: [Karp, 1972] Determinar $\alpha(G)$ é NP-difícil.

Motivação

- **Conjunto Independente Maximal**

  É maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

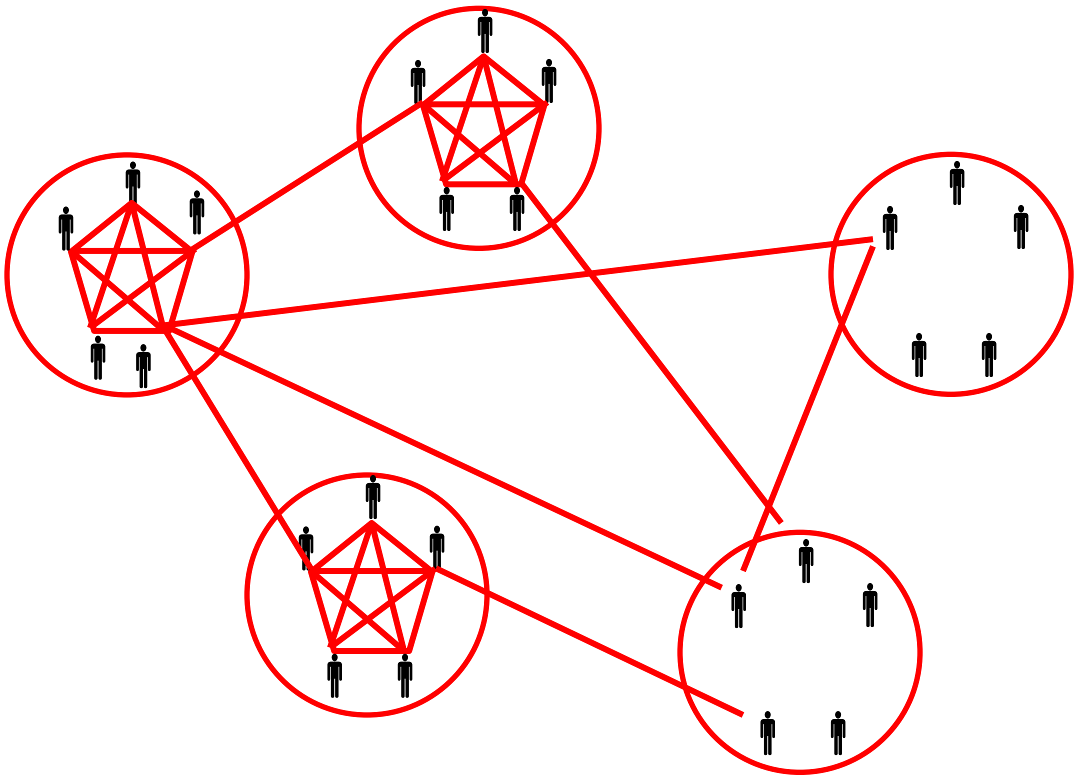
  É um conjunto independente que não pode ser aumentado.

Motivação

- **Conjunto Independente Maximal**

  É maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

  É um conjunto independente que não pode ser aumentado.

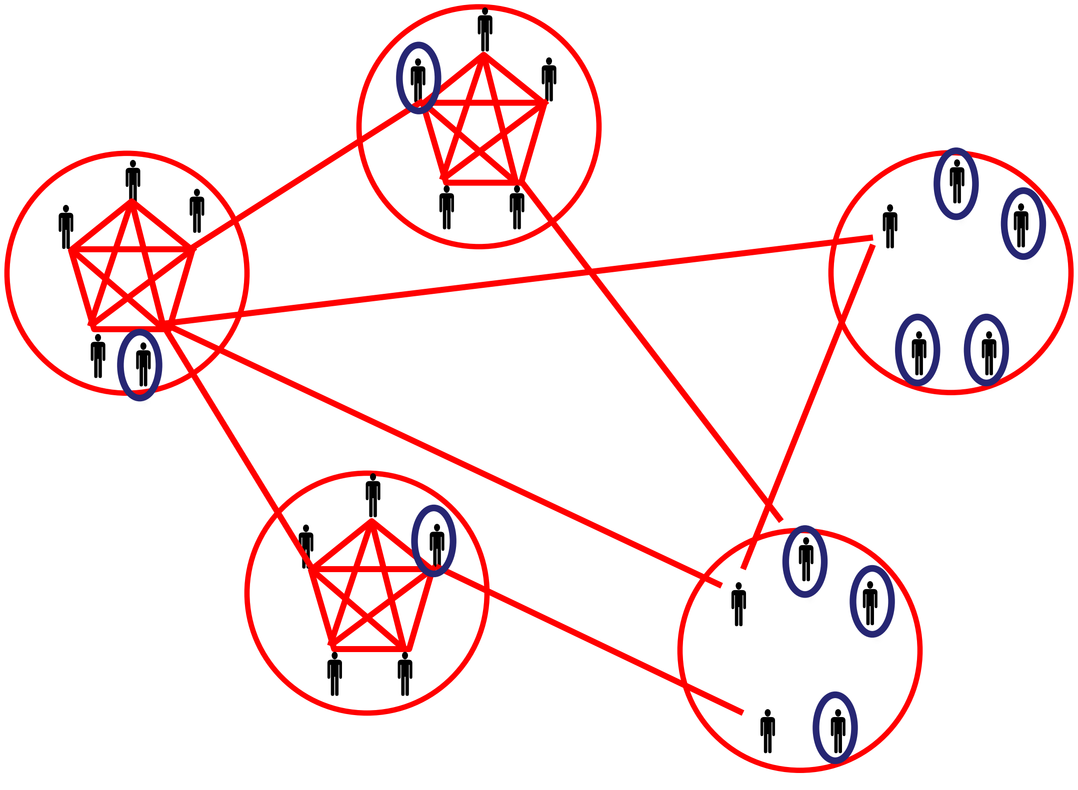


Motivação

- **Conjunto Independente Maximal**

  É maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

  É um conjunto independente que não pode ser aumentado.

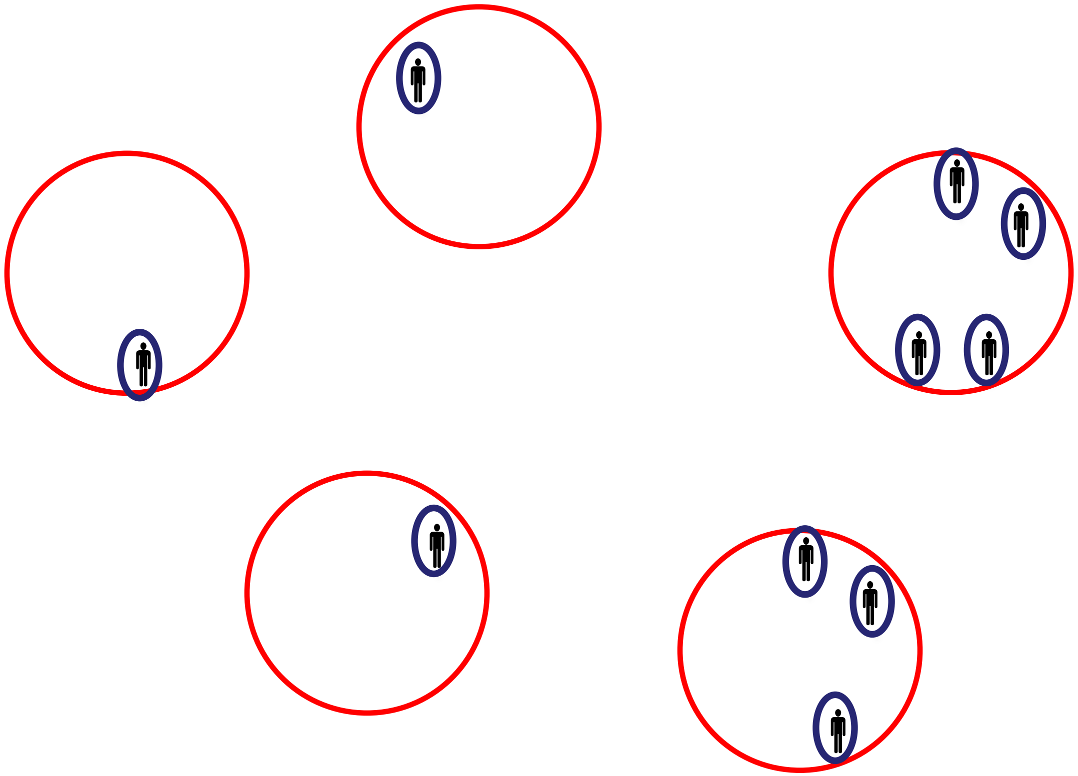


Motivação

- **Conjunto Independente Maximal**

  É maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

  É um conjunto independente que não pode ser aumentado.

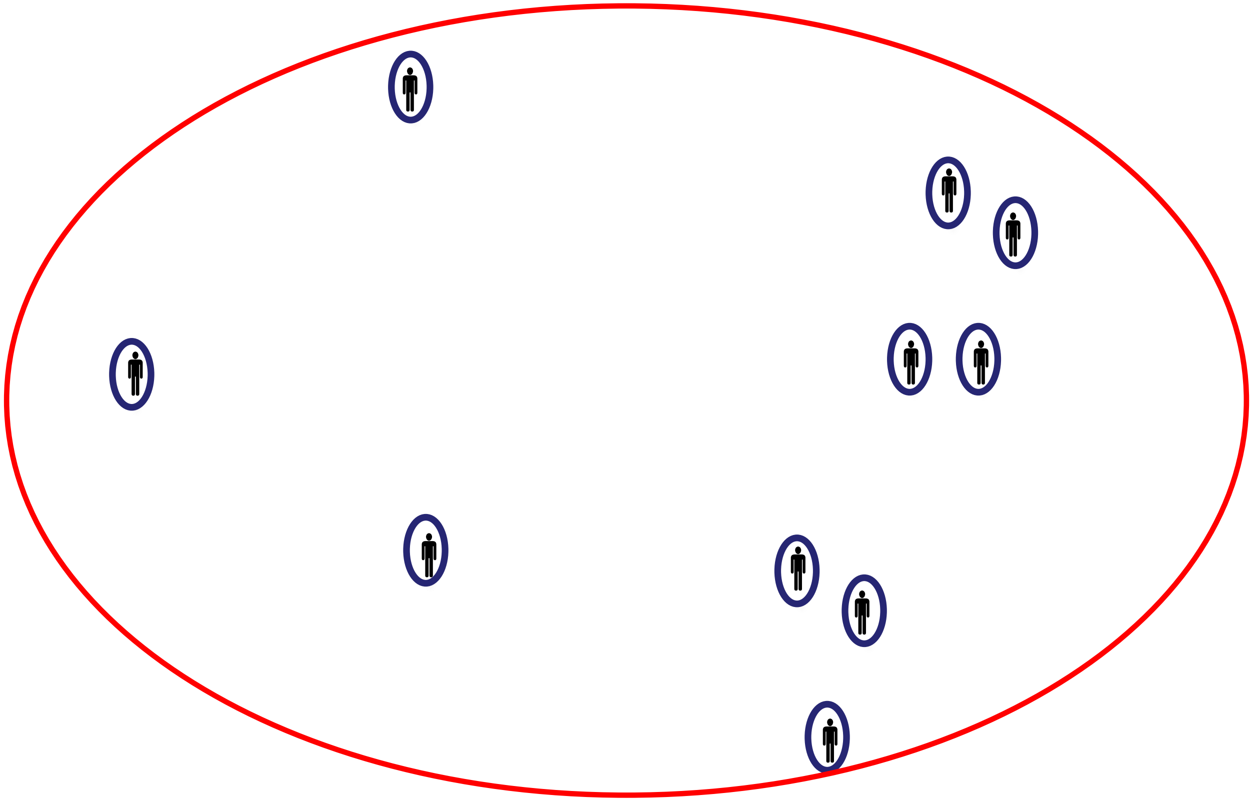


Motivação

- **Conjunto Independente Maximal**

  É maximal quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

  É um conjunto independente que não pode ser aumentado.



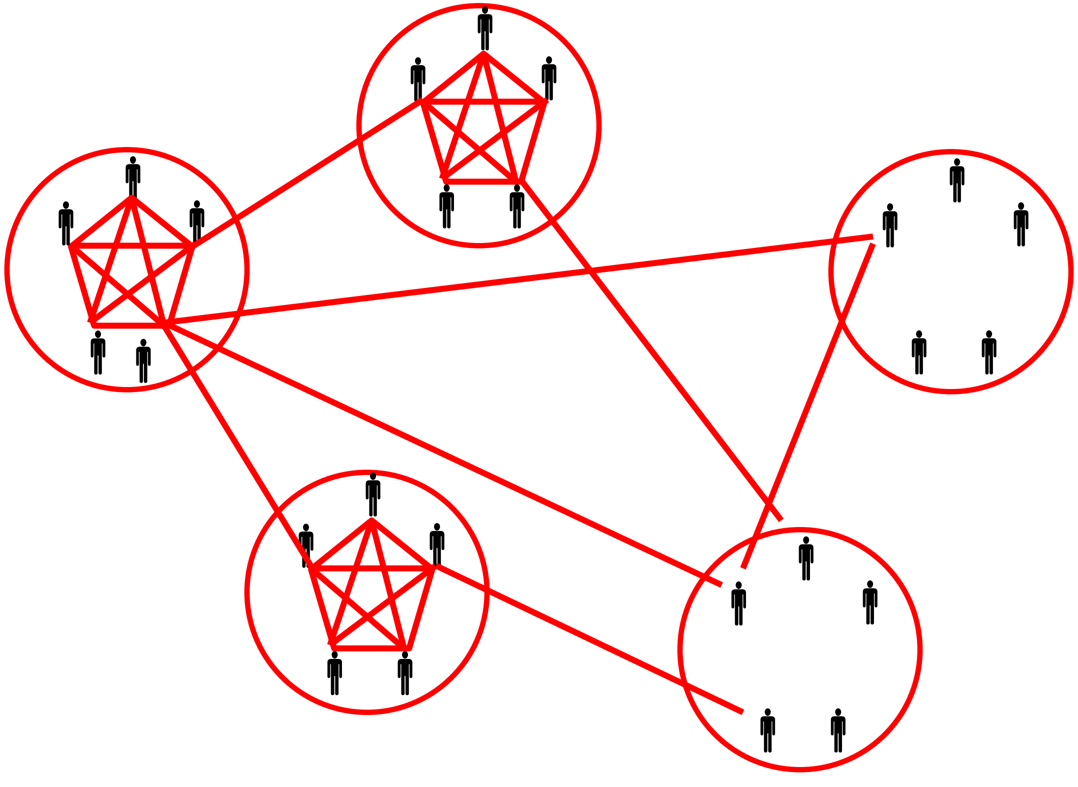
conjunto independente maximal de cardinalidade 10.

Motivação

É fácil achar um conjunto independente maximal?

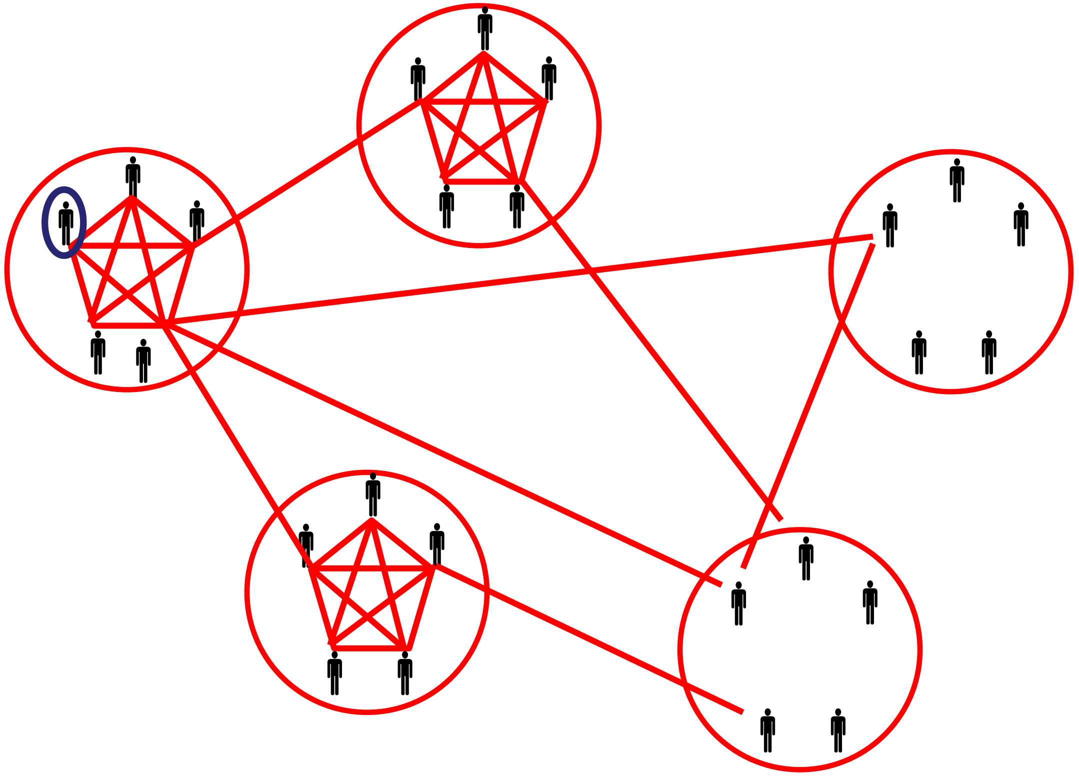
Motivação

Algoritmo Guloso



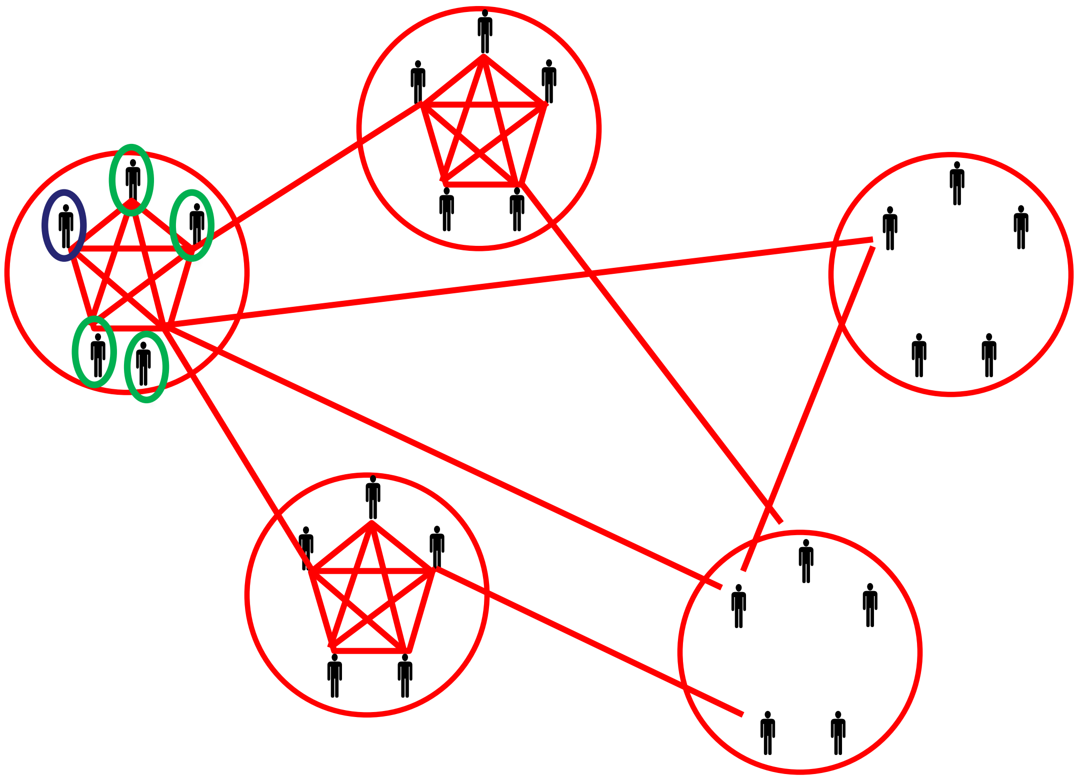
Motivação

Algoritmo Guloso



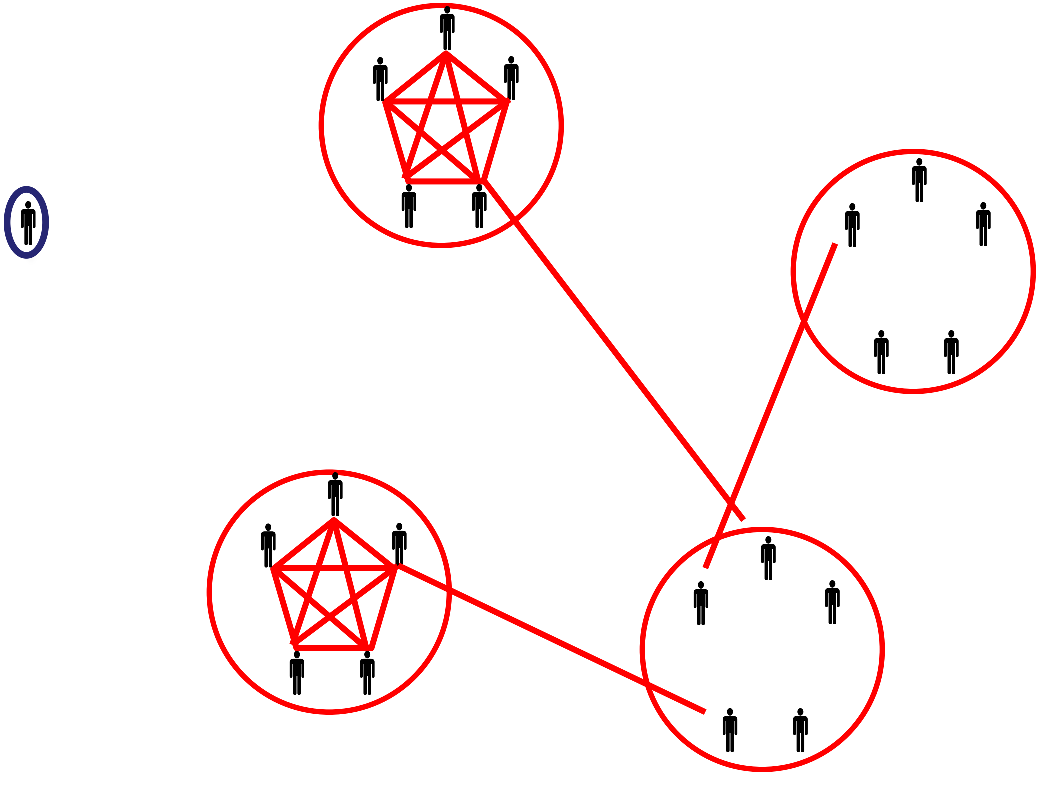
Motivação

Algoritmo Guloso



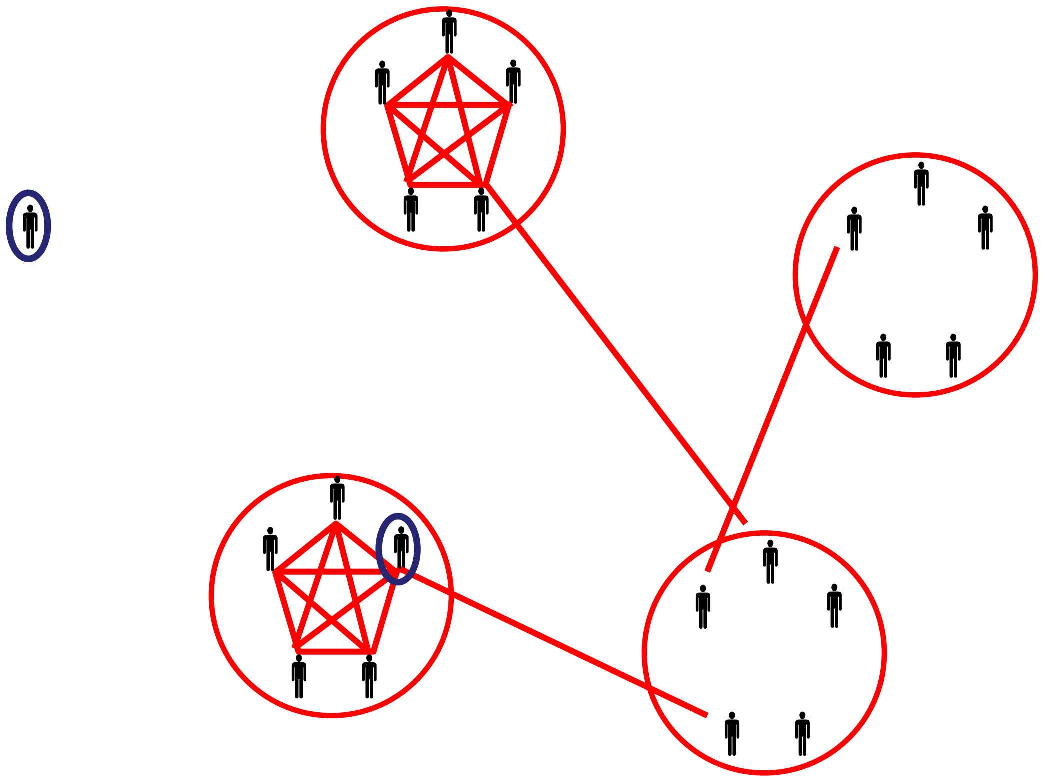
Motivação

Algoritmo Guloso



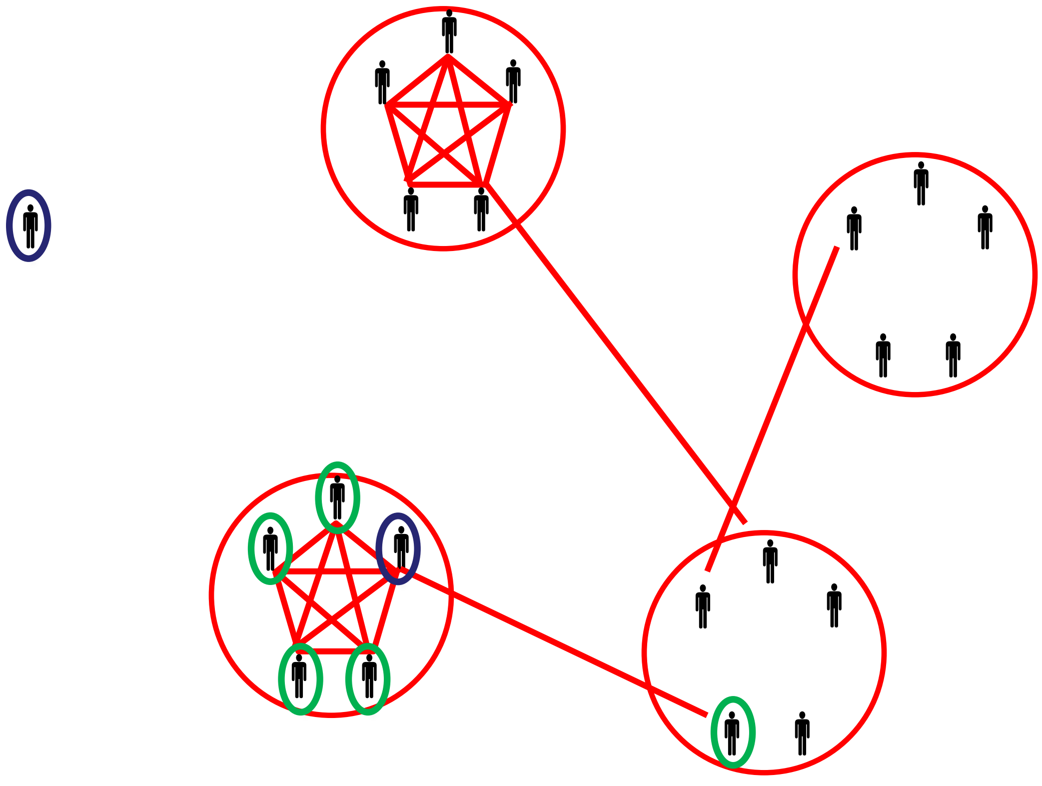
Motivação

Algoritmo Guloso



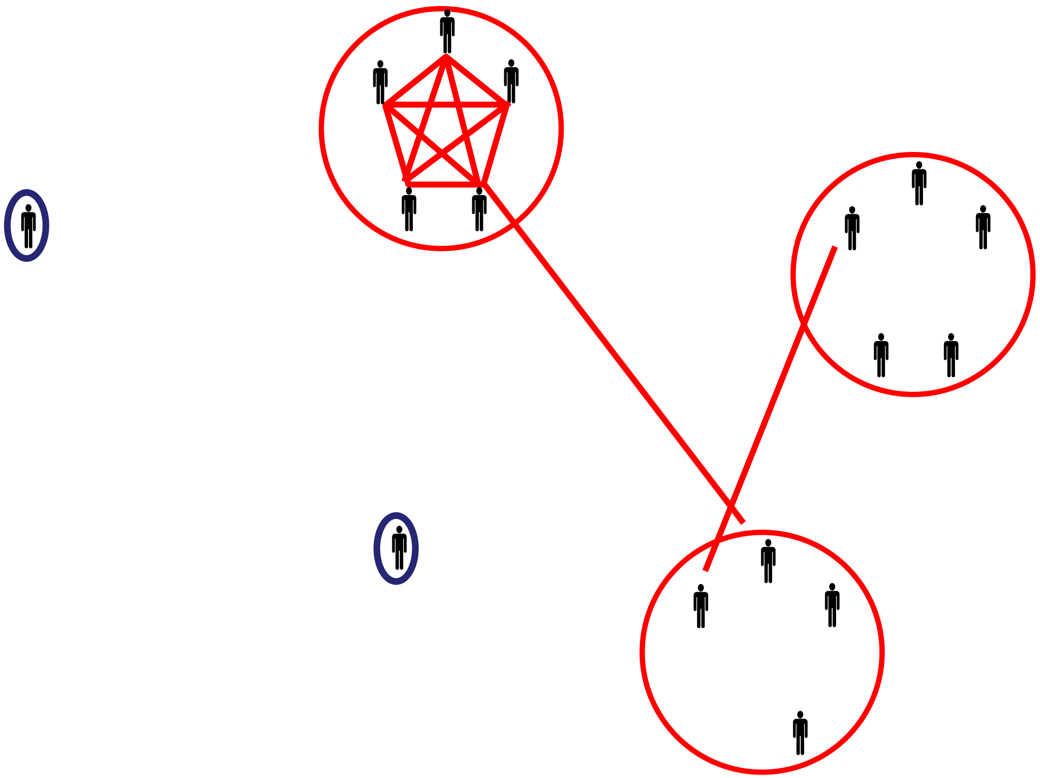
Motivação

Algoritmo Guloso



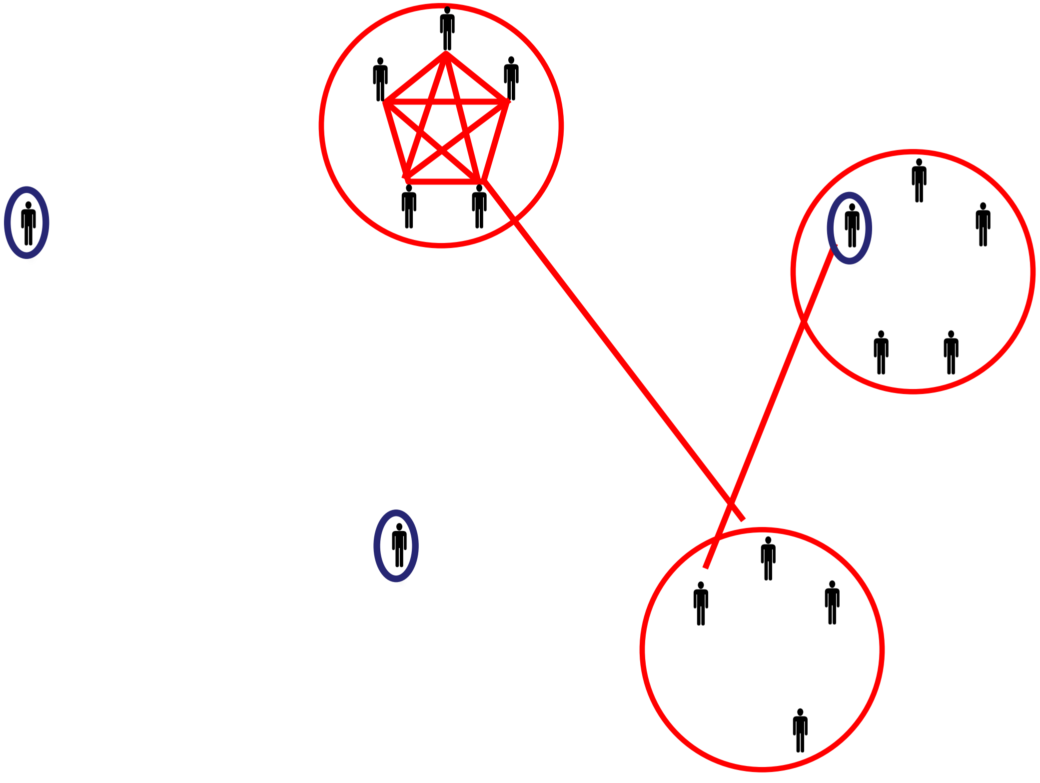
Motivação

Algoritmo Guloso



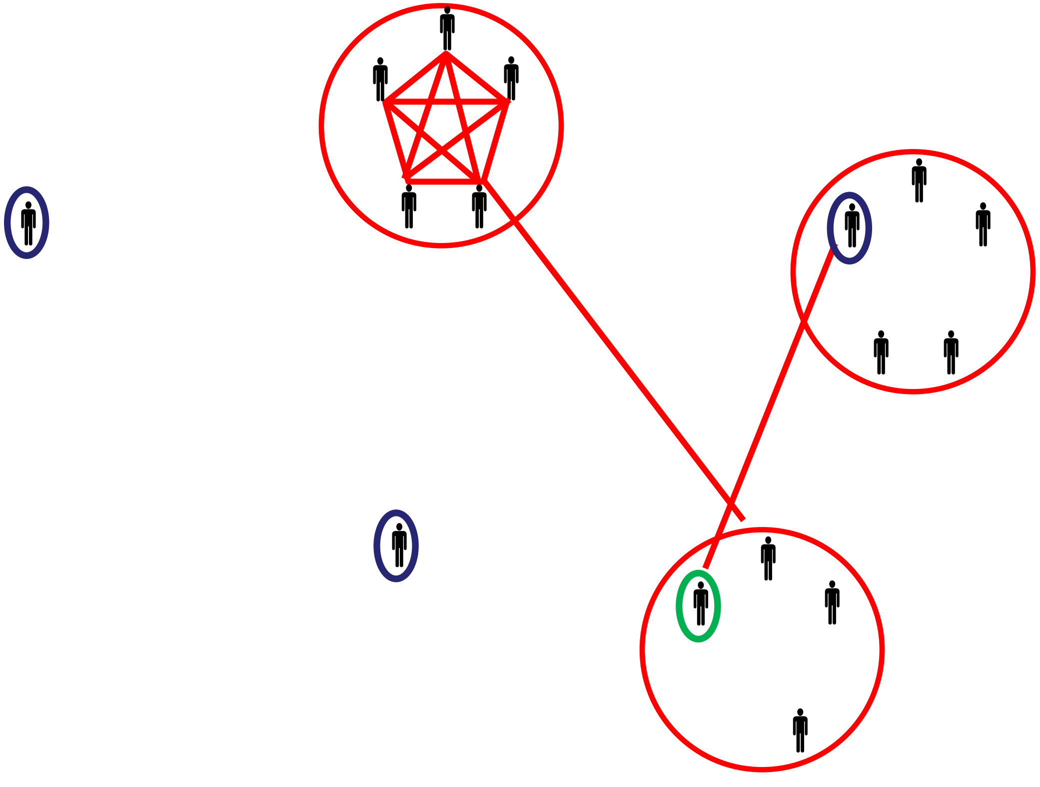
Motivação

Algoritmo Guloso



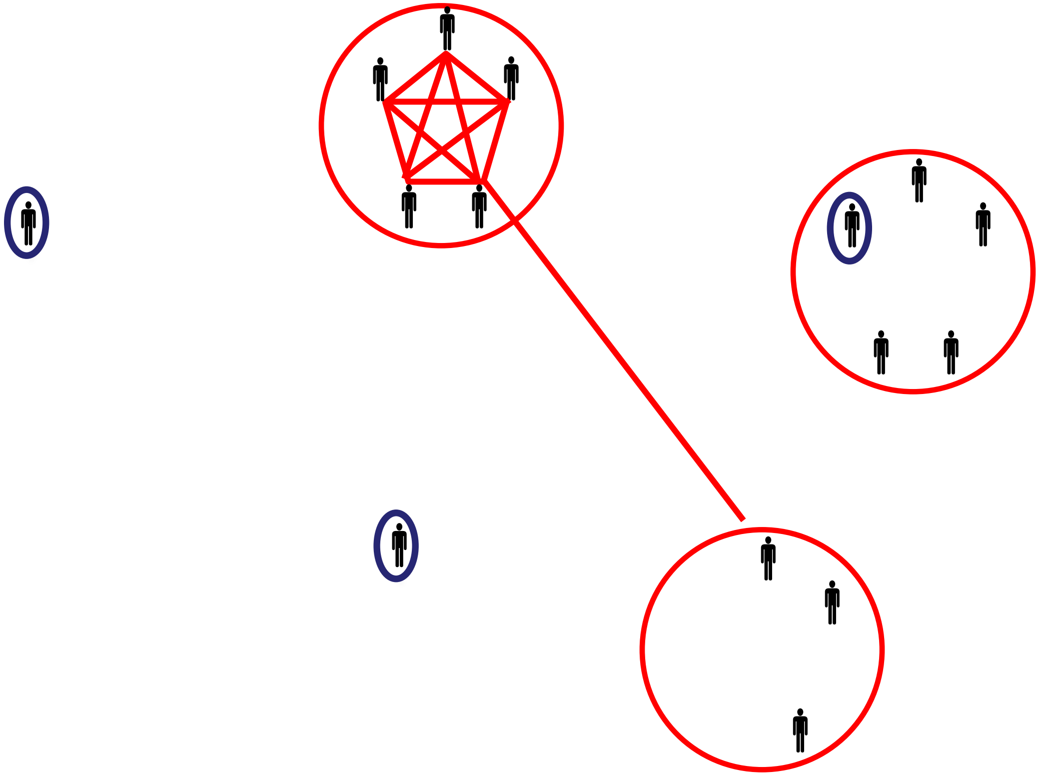
Motivação

Algoritmo Guloso



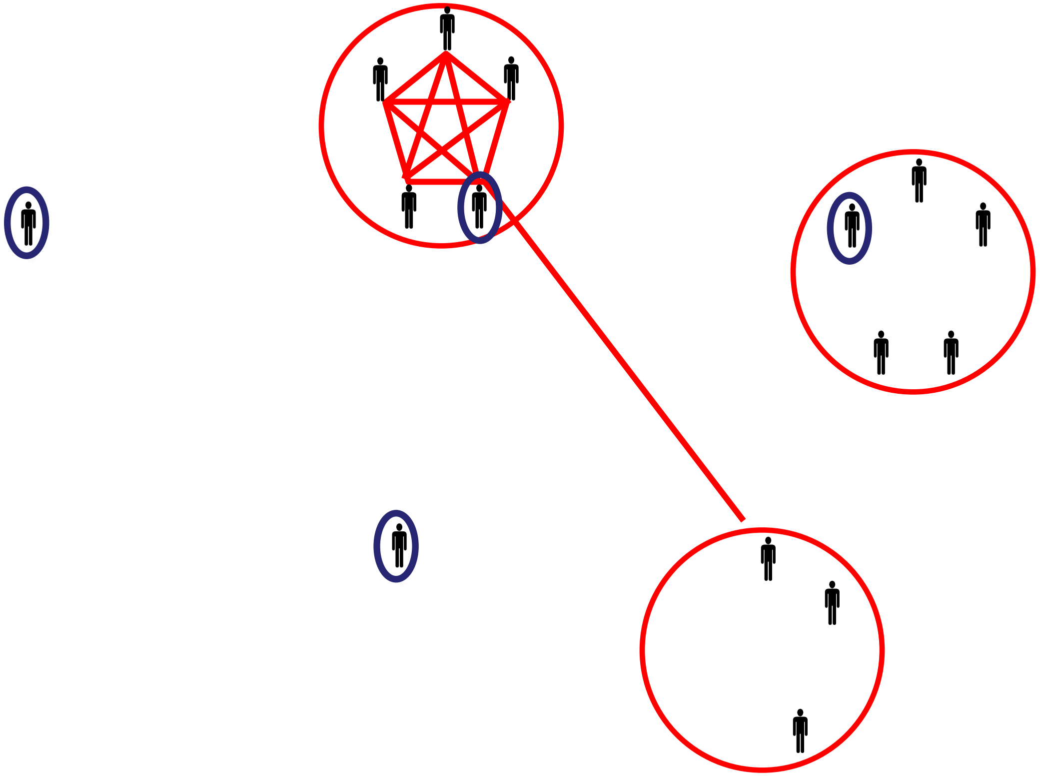
Motivação

Algoritmo Guloso



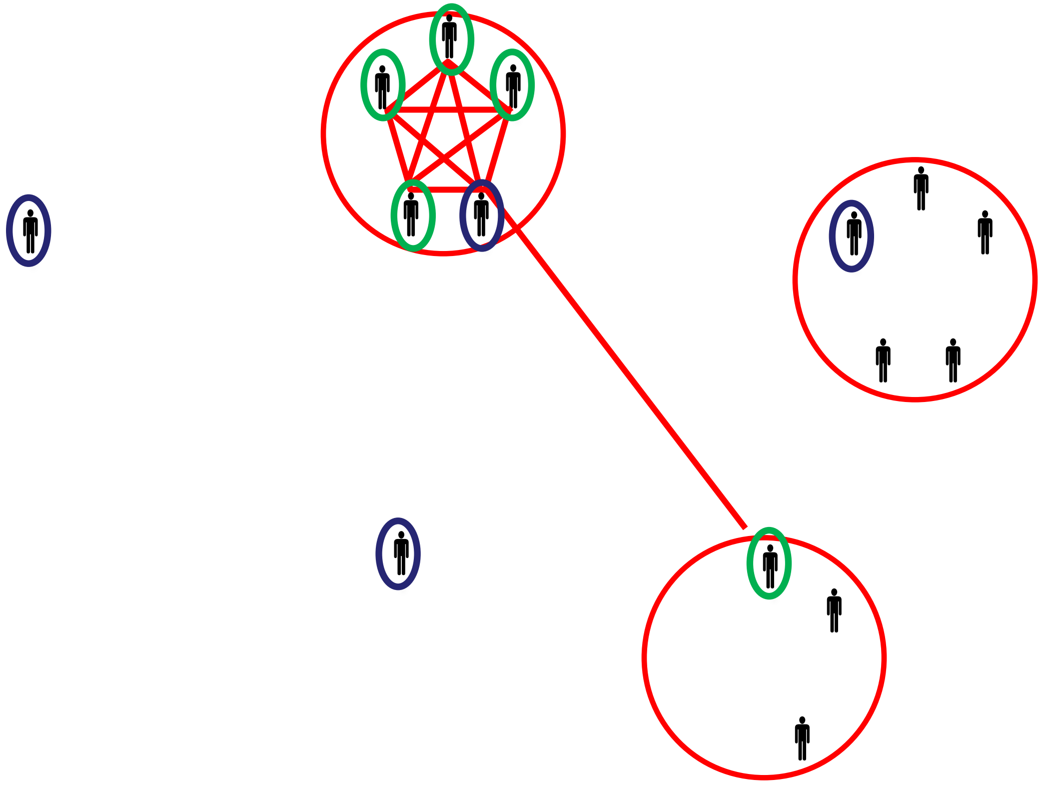
Motivação

Algoritmo Guloso



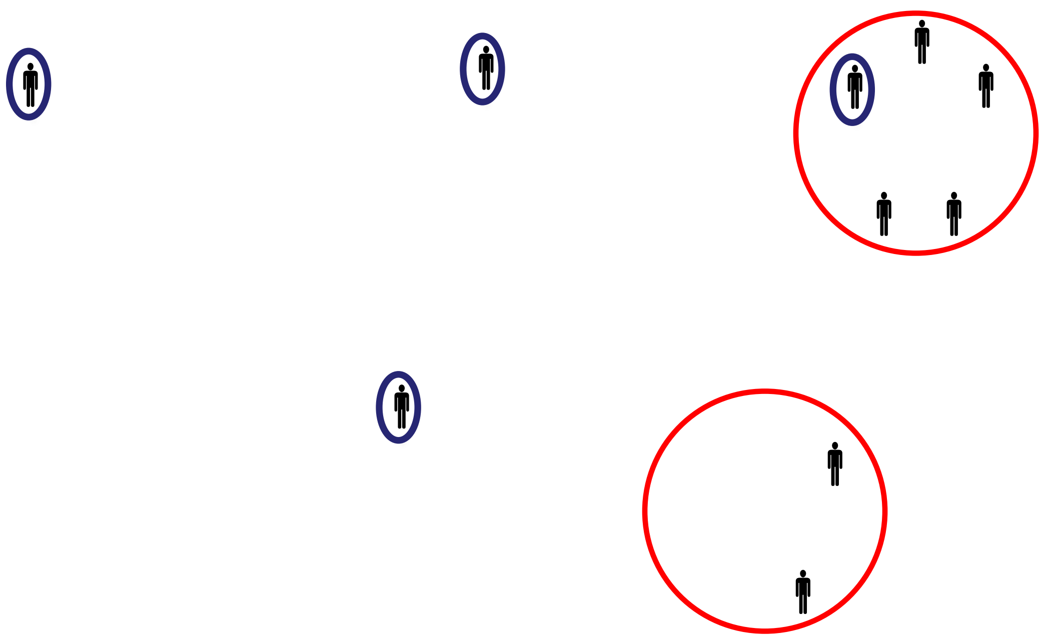
Motivação

Algoritmo Guloso



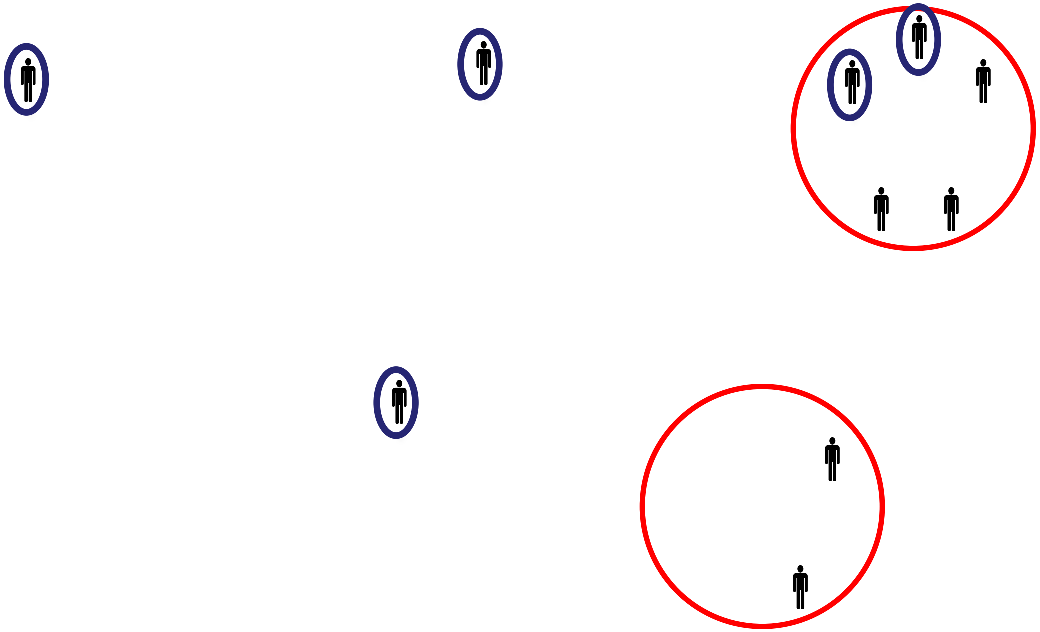
Motivação

Algoritmo Guloso



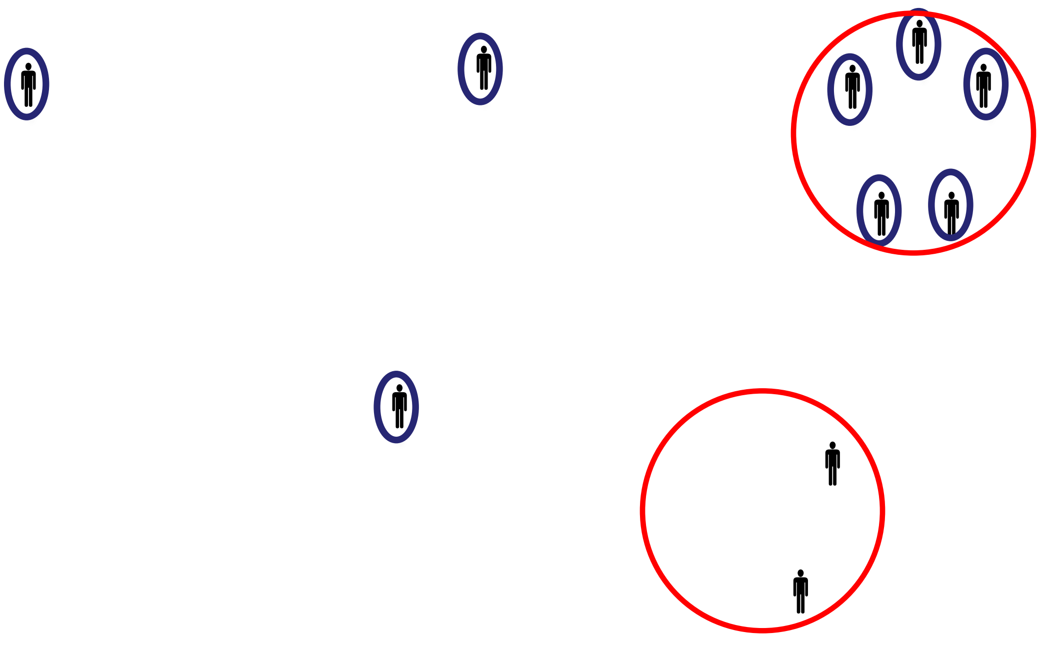
Motivação

Algoritmo Guloso



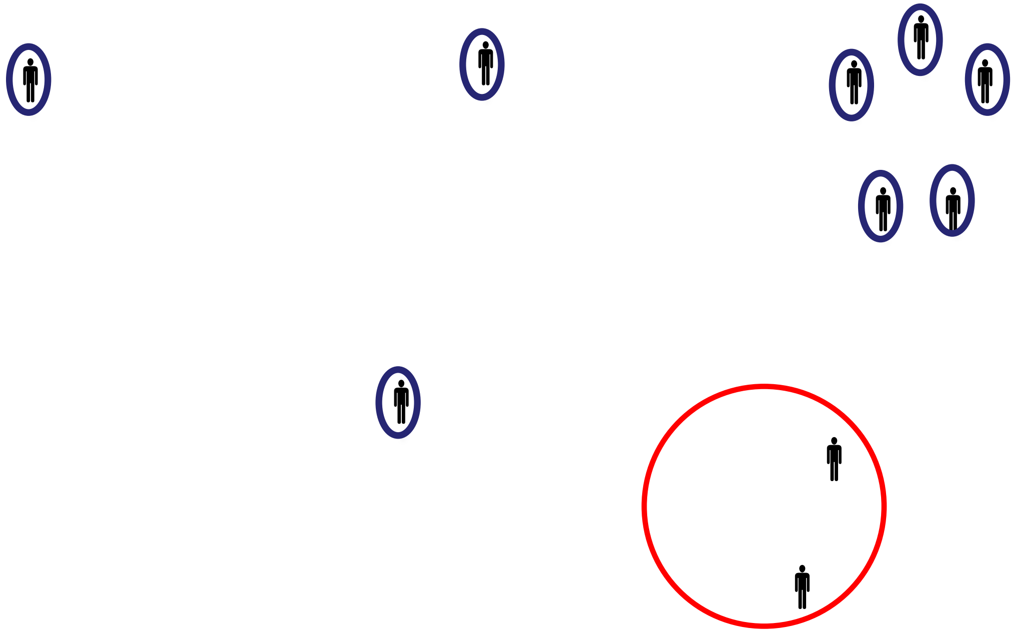
Motivação

Algoritmo Guloso



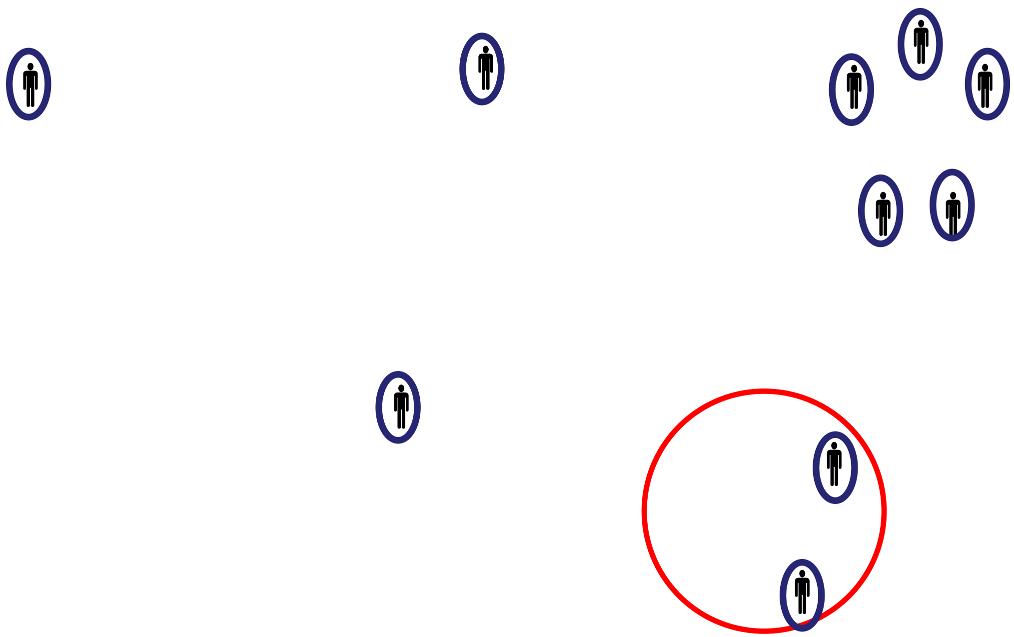
Motivação

Algoritmo Guloso



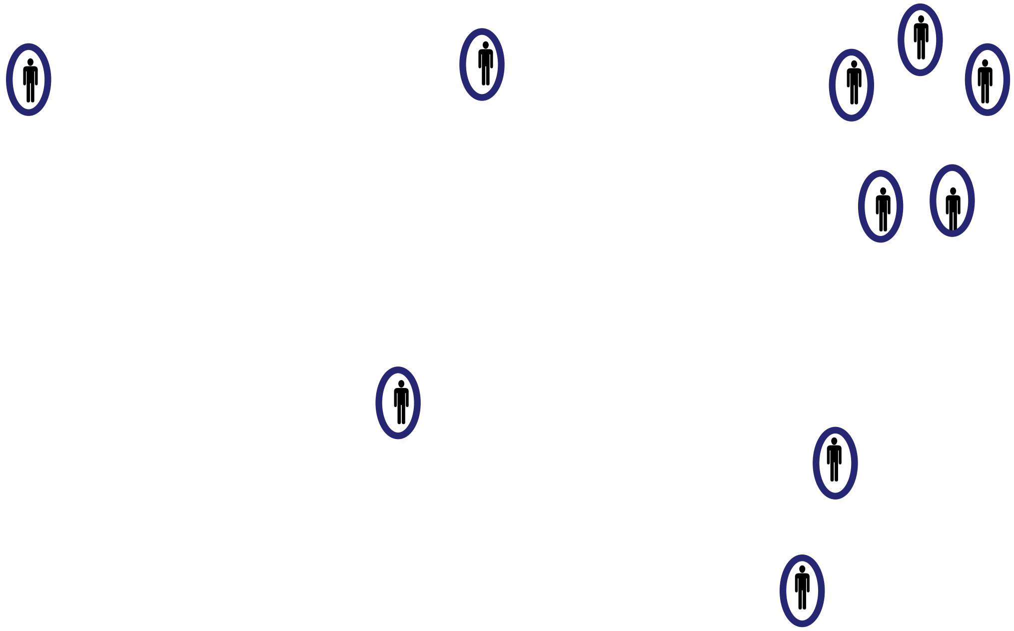
Motivação

Algoritmo Guloso



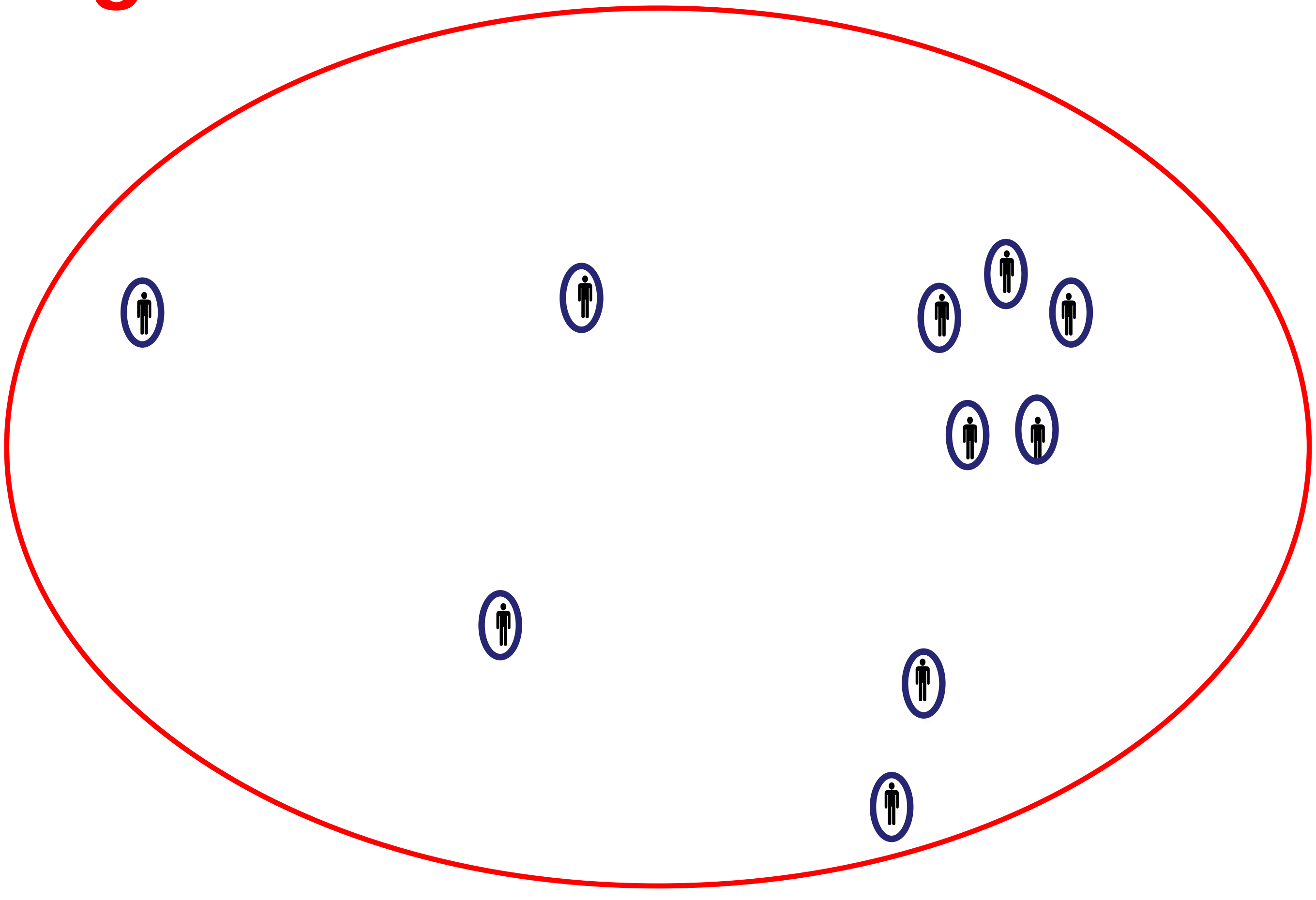
Motivação

Algoritmo Guloso



Motivação

Algoritmo Guloso



conjunto independente maximal de cardinalidade 10.

Motivação:

- Obter o número de independência $\alpha(G)$ de um grafo G qualquer é um problema difícil!

Motivação:

- E se quisermos aproximar $\alpha(G)$ em tempo polinomial?

Motivação:

- E se quisermos aproximar α(G) em tempo polinomial?
  - Não é possível aproximar com valor inferior a 1.36 α(G) a menos que P = NP.

Motivação:

- Então quando é **fácil** (polinomial) achar **α(G)?**

Motivação:

- Então quando é **fácil** (polinomial) achar **α(G)**?

  - É **fácil** (polinomial) achar **α(G)** se:

  no grafo G todo conjunto independente maximal é MÁXIMO.

Motivação:

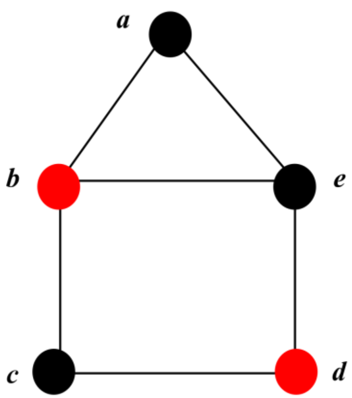
Grafos com essa propriedade são chamados **bem cobertos** **(well-covered)**.

Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].

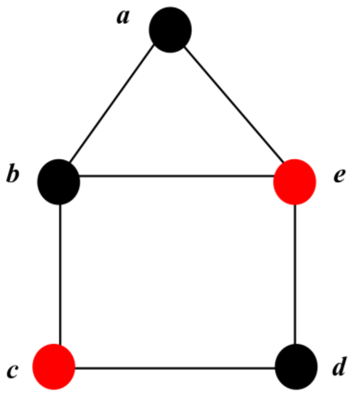
Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].



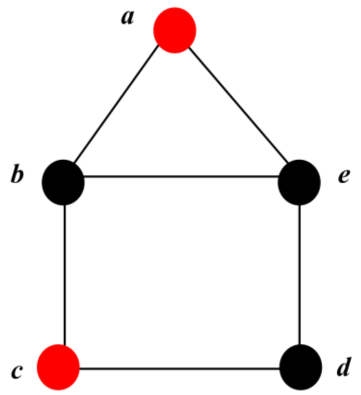
Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].



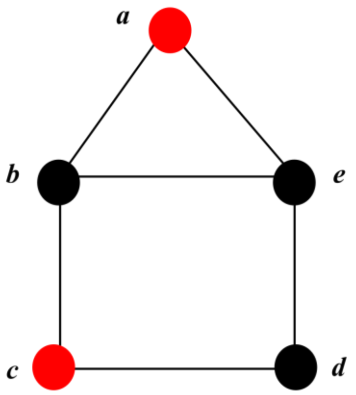
Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].



Grafo bem coberto

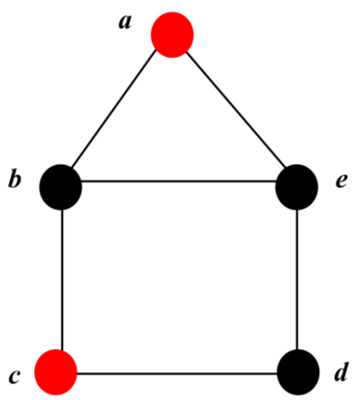
Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].



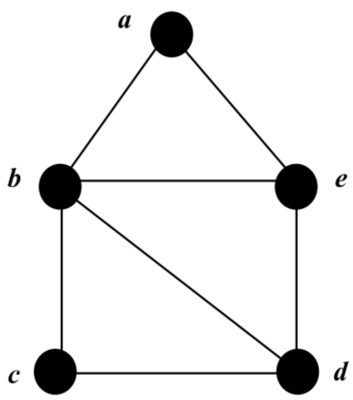
Grafo bem coberto

Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].

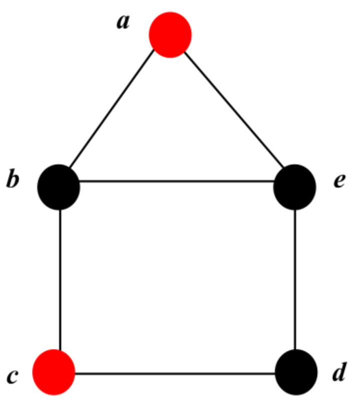


Grafo bem coberto

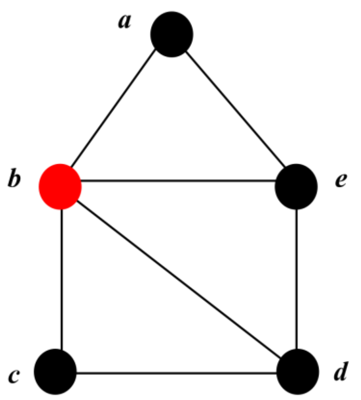


Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].

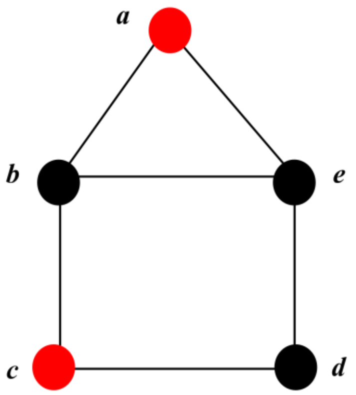


Grafo bem coberto

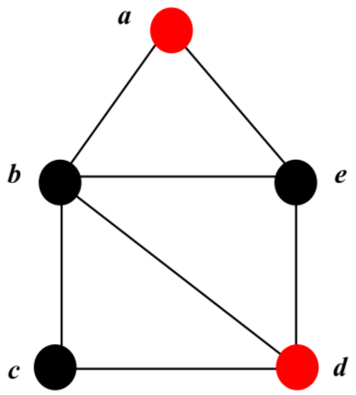


Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].

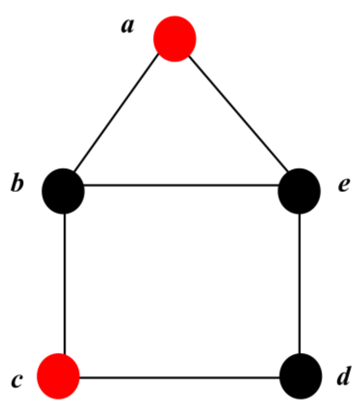


Grafo bem coberto

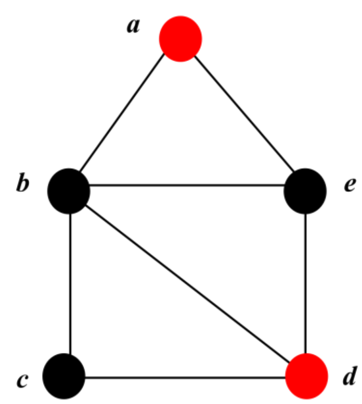


Grafo bem coberto

Um grafo é **bem coberto** se todo conjunto independente maximal possui a mesma cardinalidade. [Plummer, 1970].



Grafo bem coberto



Grafo que não é bem coberto

Grafo bem coberto

É fácil decidir se um grafo **G** é **bem coberto**?

Grafo bem coberto

É fácil decidir se um grafo **G** é **bem coberto**?

O certificado para o problema de decidir se um grafo **G** **não é** **bem coberto** é exibir dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

Grafo bem coberto

É fácil decidir se um grafo **G** é **bem coberto**?

O certificado para o problema de decidir se um grafo **G** **não é** **bem coberto** é exibir dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

O problema de decidir se um grafo **G** **não é bem coberto** está em NP.

Grafo bem coberto

É fácil decidir se um grafo **G** é **bem coberto**?

O certificado para o problema de decidir se um grafo **G** **não é** **bem coberto** é exibir dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

O problema de decidir se um grafo **G** **não é** **bem coberto** está em NP.

O problema de decidir se um grafo **G** é **bem coberto** está em co-NP.

Grafo bem coberto

Problema GRAFO BEM COBERTO
Instância: grafo **G**.
Pergunta: **G** é bem coberto?

Grafo bem coberto

Problema GRAFO BEM COBERTO
Instância: grafo **G**.
Pergunta: **G** é bem coberto?

[Chvátal e Slater, 1993] e [Sankaranarayana e Stewart, 1993] provaram que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo.

Porém...

O reconhecimento de grafos bem cobertos para algumas classes de grafos é polinomial:

Porém...

O reconhecimento de grafos bem cobertos para algumas classes de grafos é polinomial:

- Bipartidos [Ravindra, 1977]

Porém...

O reconhecimento de grafos bem cobertos para algumas classes de grafos é polinomial:

- Bipartidos [Ravindra, 1977]

- Planares e 3-conexos [Campbell, Plummer, 1988]

Porém...

O reconhecimento de grafos bem cobertos para algumas classes de grafos é polinomial:

- Bipartidos [Ravindra, 1977]
- Planares e 3-conexos [Campbell, Plummer, 1988]
- Simpliciais, Cordais e Arco Circulares [Prisner, Topp, Vestergaard, 1996]

Porém...

O reconhecimento de grafos bem cobertos para algumas classes de grafos é polinomial:

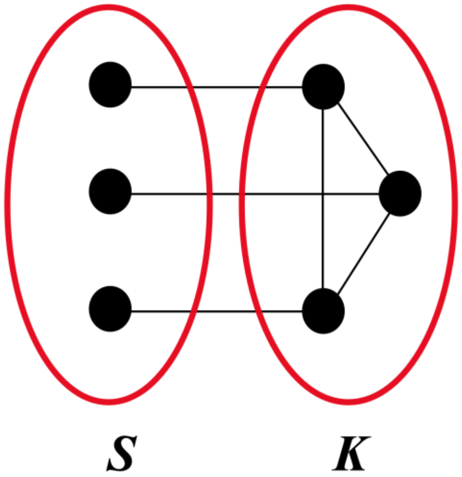
- Bipartidos [Ravindra, 1977]
- Planares e 3-conexos [Campbell, Plummer, 1988]
- Simpliciais, Cordais e Arco Circulares [Prisner, Topp, Vestergaard, 1996]
- Cografos, P4-esparsos [Klein, Melo, Morgana, 2003]

Grafos-(k, ℓ)

- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, $\boldsymbol{\ell}$) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1,S^2,\ldots,S^k}$ e $\boldsymbol{\ell}$ cliques $\mathbf{K^1,K^2,\ldots,K^\ell}$.

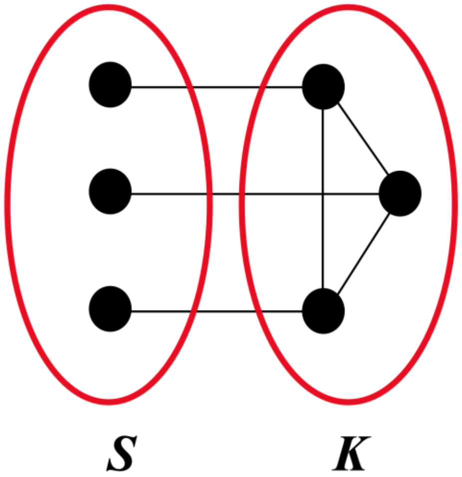
Grafos-(k, ℓ)

- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1, S^2, \ldots, S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1, K^2, \ldots, K^\ell}$.



Grafos-(k, ℓ)

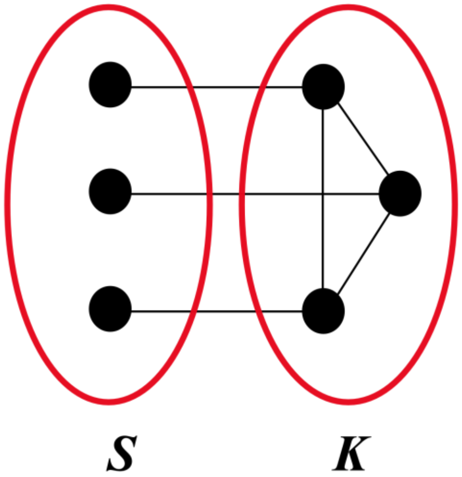
- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1, S^2, \ldots, S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1, K^2, \ldots, K^\ell}$.



grafo-(1,1)

Grafos-(k, ℓ)

- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1,S^2,\ldots,S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1,K^2,\ldots,K^\ell}$.



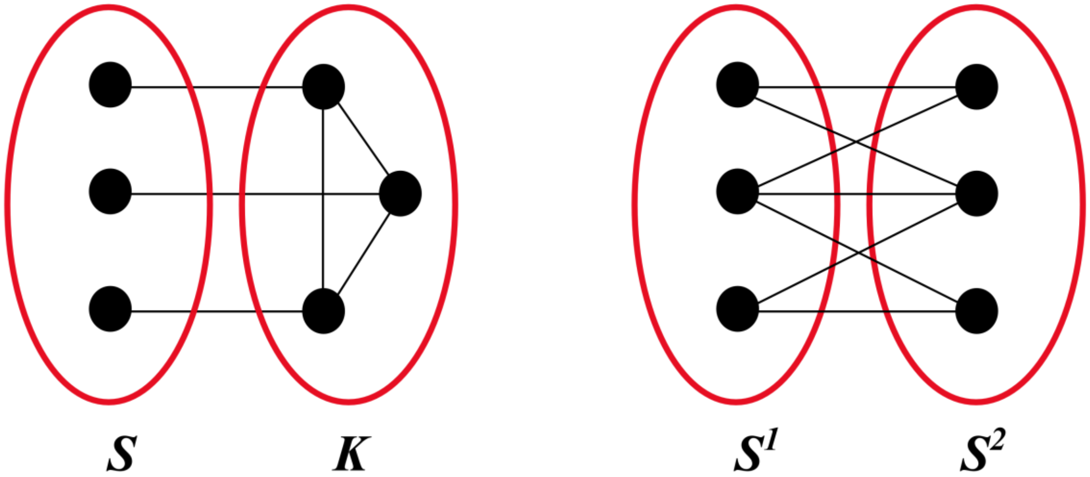
grafo-(1,1)

||

split

Grafos-(k, ℓ)

- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1,S^2,\ldots,S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1,K^2,\ldots,K^\ell}$.



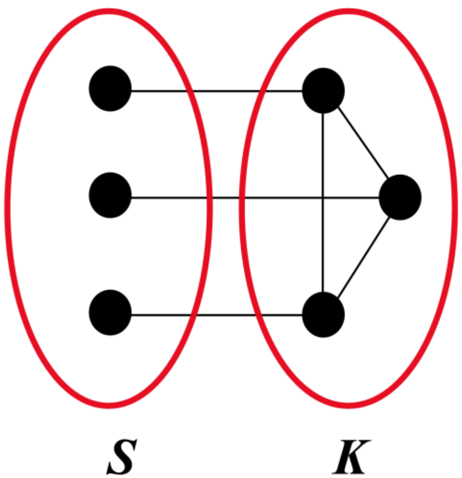
grafo-(1,1)

||

split

Grafos-(k, ℓ)

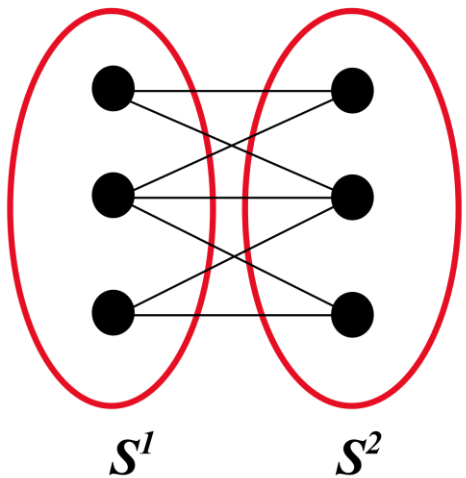
- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes **S^1,S^2,...,S^k** e **ℓ** cliques **K^1,K^2,...,K^ℓ**.



grafo-(1,1)

||

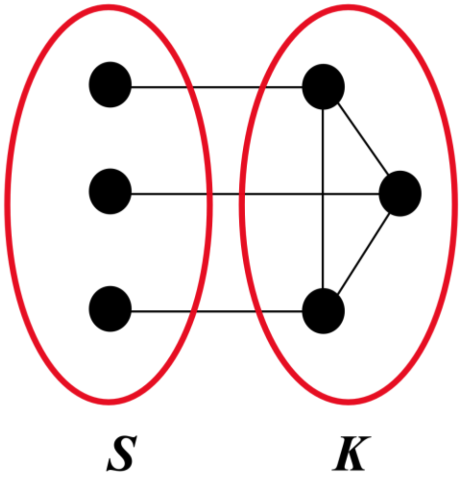
split

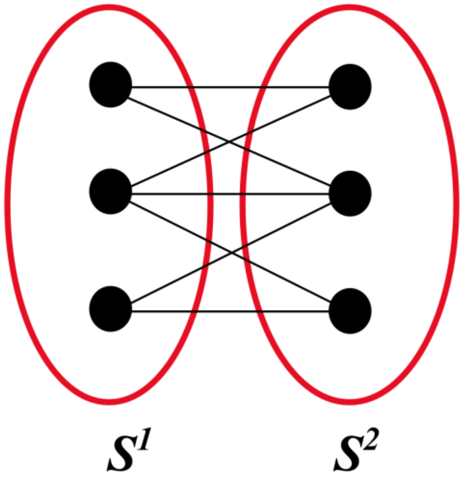


grafo-(2,0)

Grafos-(k, ℓ)

- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes **$S^1, S^2, \ldots, S^k$** e **ℓ** cliques **$K^1, K^2, \ldots, K^\ell$**.





grafo-(1,1)

||

split

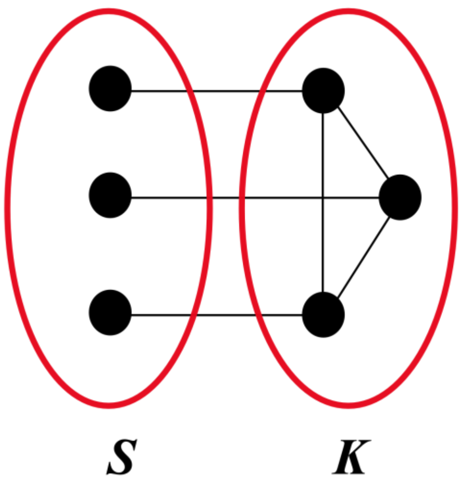
grafo-(2,0)

||

bipartido

Grafos-(k, ℓ)

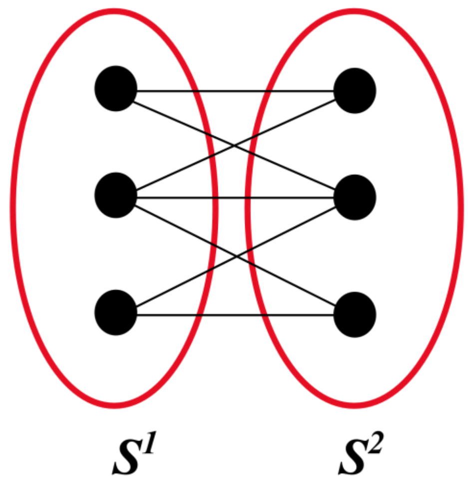
- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1, S^2, \ldots, S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1, K^2, \ldots, K^\ell}$.



grafo-(1,1)

||

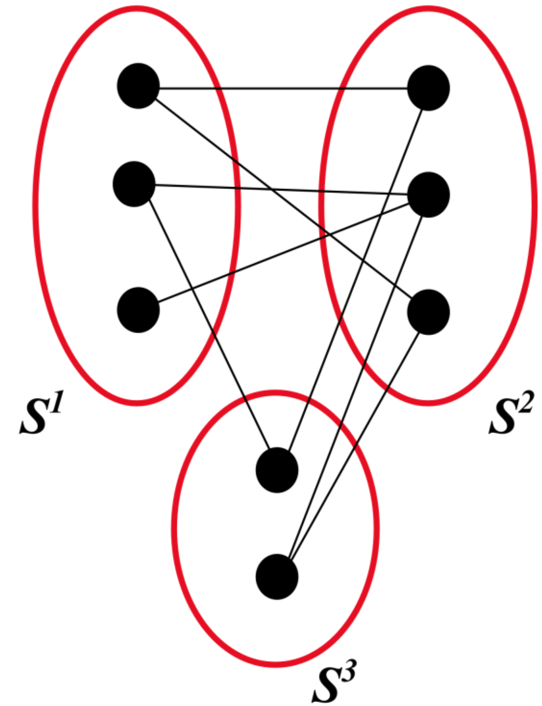
split



grafo-(2,0)

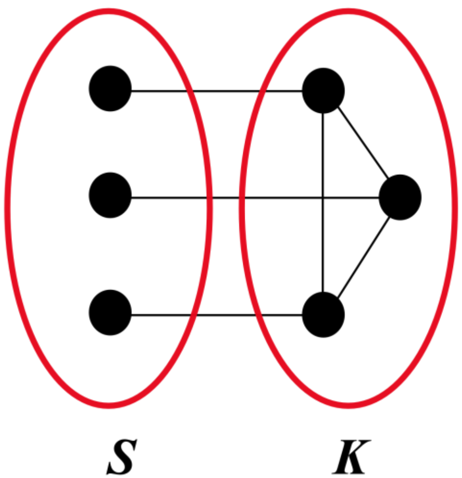
||

bipartido



Grafos-(k, ℓ)

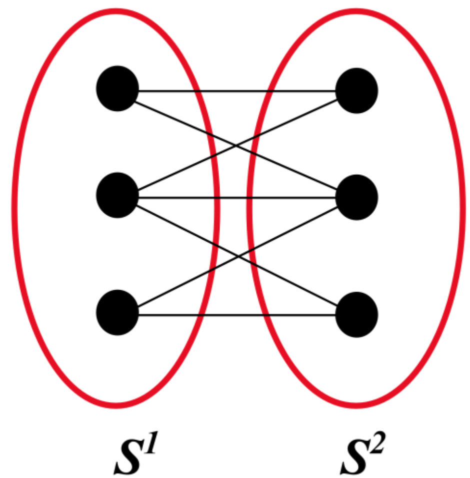
- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1,S^2,\ldots,S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1,K^2,\ldots,K^\ell}$.



grafo-(1,1)

||

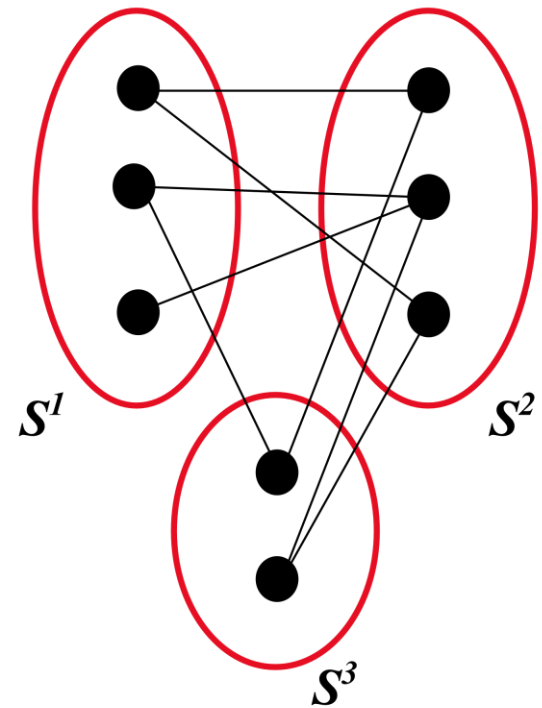
split



grafo-(2,0)

||

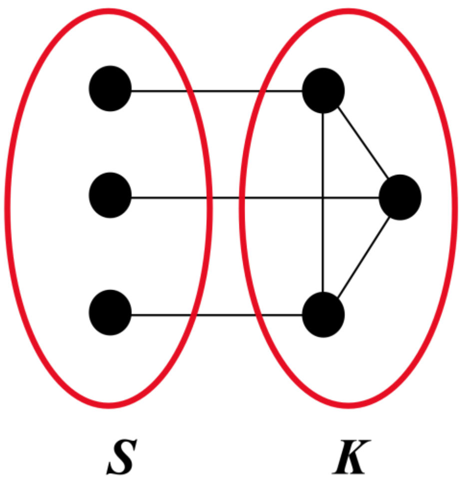
bipartido



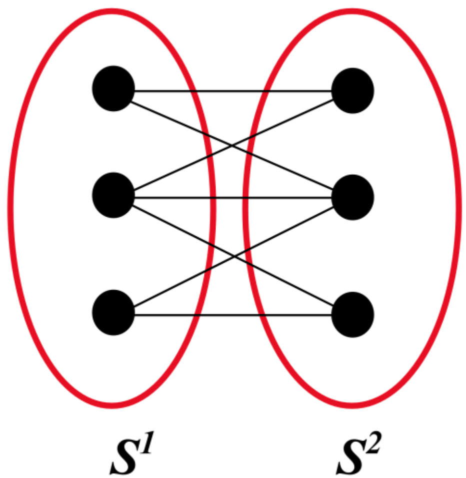
grafo-(3,0)

Grafos-(k, ℓ)

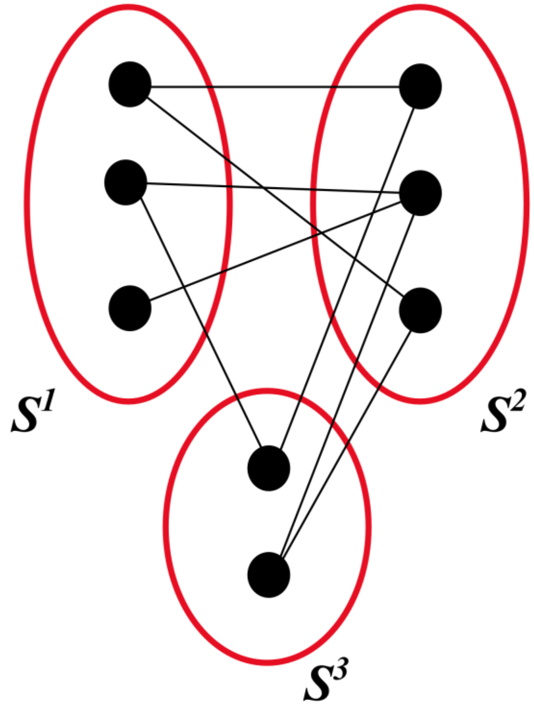
- Um grafo **G**=(V,E) é (**k**, **ℓ**) se V tem uma partição em **k** conjuntos independentes $\mathbf{S^1, S^2, \ldots, S^k}$ e **ℓ** cliques $\mathbf{K^1, K^2, \ldots, K^\ell}$.



grafo-(1,1)
||
split

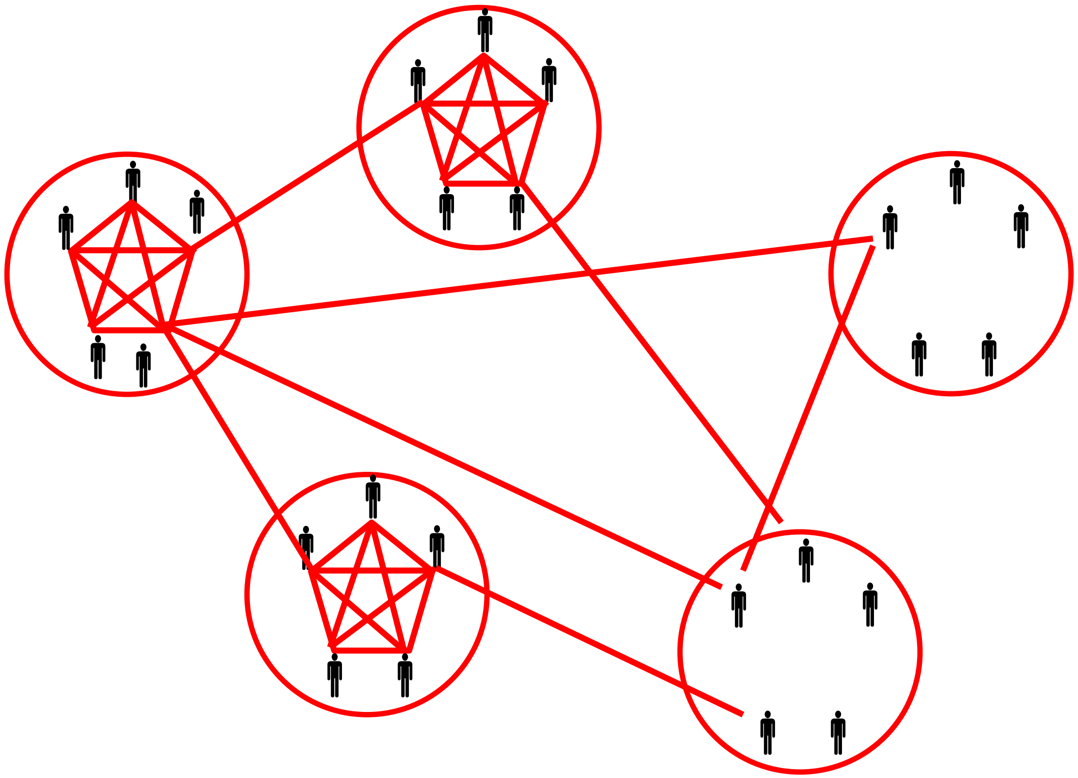


grafo-(2,0)
||
bipartido



grafo-(3,0)
||
tripartido

Grafos-(k, ℓ)



grafo-(2,3) (possui 2 conjuntos independentes e 3 cliques).

Grafos-(k, ℓ)

Problema GRAFO-(k,ℓ)

Instância: grafo G.

Pergunta: G é um grafo-(k,ℓ)?

Grafos-(k, ℓ)

Problema GRAFO-(k,ℓ)

Instância: grafo G.

Pergunta: G é um grafo-(k,ℓ)?

O **Problema GRAFO-(k,ℓ)** é polinomial para para **$k \leq 2$ e $\ell \leq 2$** e NP-completo caso contrário. [Brandstädt, 1996]

Grafos-(k, ℓ)

Reconhecimento polinomial para algumas classes de grafos:

Grafos-(k, ℓ)

Reconhecimento polinomial para algumas classes de grafos:

- Cordais-(k, ℓ) [Hell, Klein, Nogueira, Protti, 2004]

- Cografos-(k, ℓ) [Feder, Hell, Hochstattler, 2007]

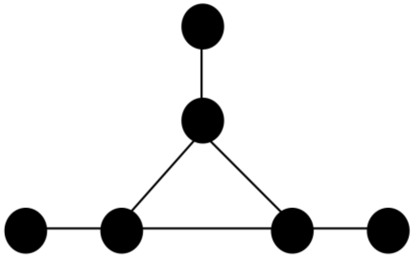
- P4-esparsos-(k, ℓ) [Bravo, Klein, Nogueira, Protti, 2009]

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.

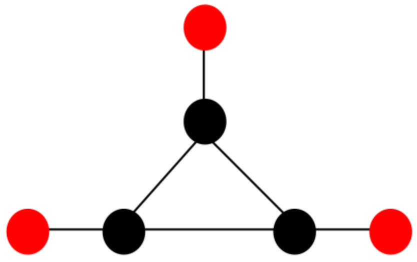
Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.



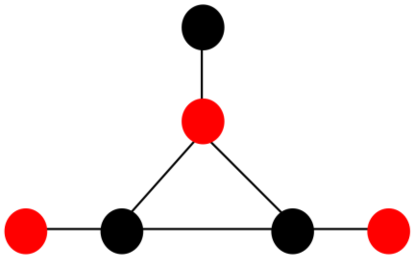
Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.



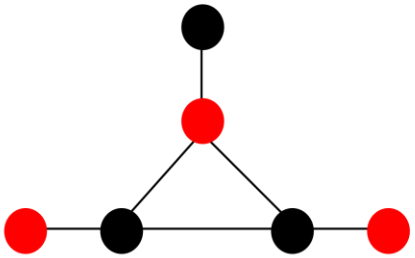
Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.



Grafo-(k, ℓ) bem coberto

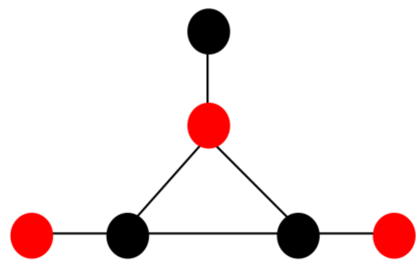
Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.



grafo-(1,1) bem coberto

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Um grafo é dito **(k, ℓ) bem coberto** se é **(k, ℓ)** e **bem coberto**.



grafo-(1,1) bem coberto
ou grafo split bem coberto

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO (G(k, ℓ)BC)

Instância: grafo **G**.

Pergunta: G é um **grafo-(k, ℓ) bem coberto**?

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO (G(k, ℓ)BC)
Instância: grafo **G**.
Pergunta: **G** é um **grafo-(k, ℓ) bem coberto**?

k \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	NPc
1	P	P	P	NPc
2	P	coNPc	coNPc	(co)NPh
≥ 3	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh

Tabela 1: Complexidade do problema de decisão grafo-(k, ℓ) bem coberto, onde P: polinomial, NPc: NP-completo, coNPc: coNP-completo, NPh: NP-difícil and (co)NPh: significa que o problema é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil.

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC
- ✓ G(1,0)BC

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC
- ✓ G(1,0)BC
- ✓ G(0,2)BC

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC
- ✓ G(1,0)BC
- ✓ G(0,2)BC
- ✓ G(2,0)BC (grafos bipartidos bem cobertos)

Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC
- ✓ G(1,0)BC
- ✓ G(0,2)BC
- ✓ G(2,0)BC (grafos bipartidos bem cobertos)
- ✓ G(1,1)BC (grafos splits bem cobertos)

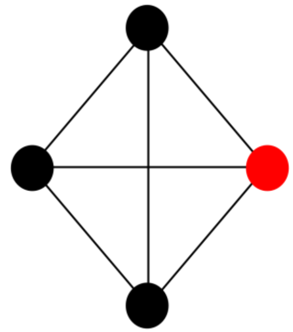
Grafo-(k, ℓ) bem coberto

Vamos analisar cada um dos casos polinomiais:

- ✓ G(0,1)BC
- ✓ G(1,0)BC
- ✓ G(0,2)BC
- ✓ G(2,0)BC (grafos bipartidos bem cobertos)
- ✓ G(1,1)BC (grafos splits bem cobertos)
- ✓ G(1,2)BC

Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

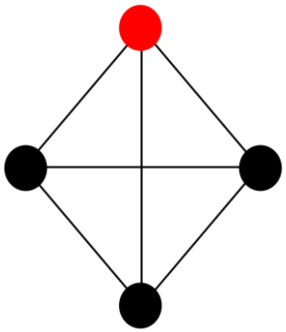
Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



K_4

Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

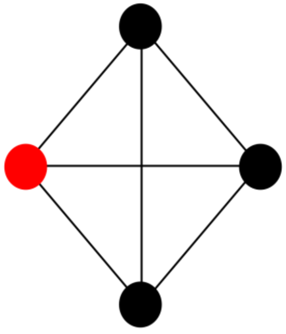
Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



K_4

Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

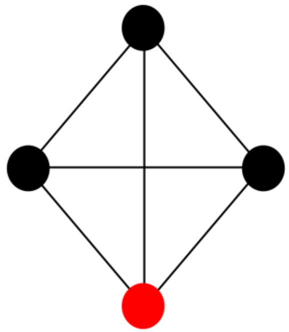
Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



K_4

Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

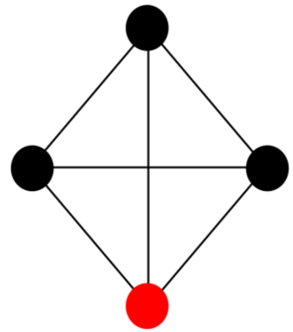
Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



K_4

Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.

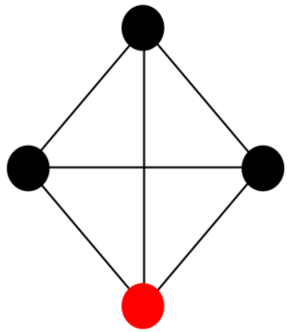


K_4

Fato 2: Um grafo completamente independente é bem coberto.

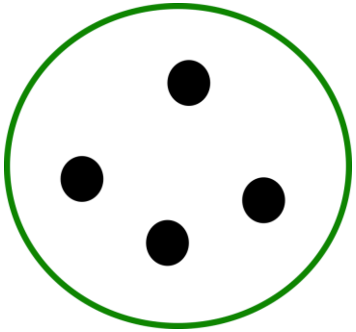
Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



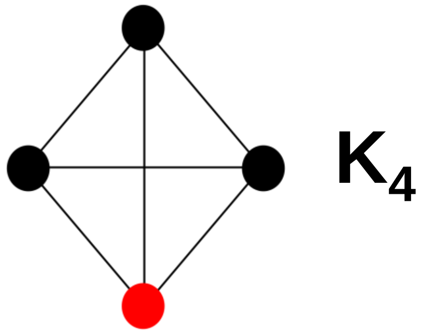
K_4

Fato 2: Um grafo completamente independente é bem coberto.

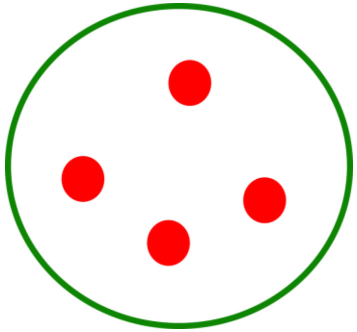


Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.

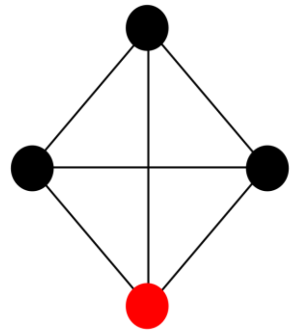


Fato 2: Um grafo completamente independente é bem coberto.



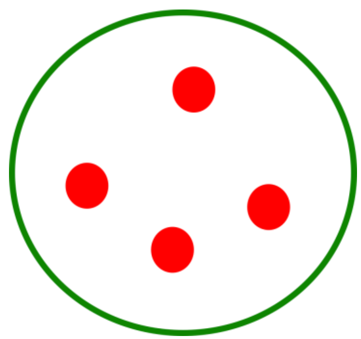
Problemas G(0,1)BC e G(1,0)BC

Fato 1: Um grafo completo é bem coberto.



K_4

Fato 2: Um grafo completamente independente é bem coberto.



Teorema: G é (0,1) bem coberto ↔ G é um grafo-(0,1).
G é (1,0) bem coberto ↔ G é um grafo-(1,0).

Problema G(0, 2)BC

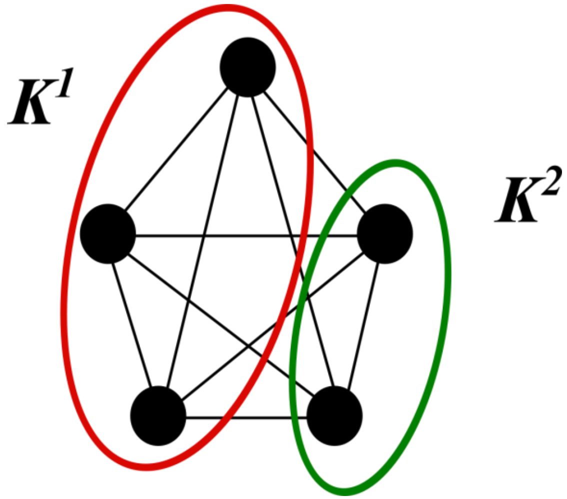
Grafos-(0,2) bem cobertos

Teorema: **G**=(V,E) é um **grafo-(0,2) bem coberto** se e somente se **G** é **(0,1),** ou **G** é **(0,2)** sem vértice universal.

Problema G(0, 2)BC

Grafos-(0,2) bem cobertos

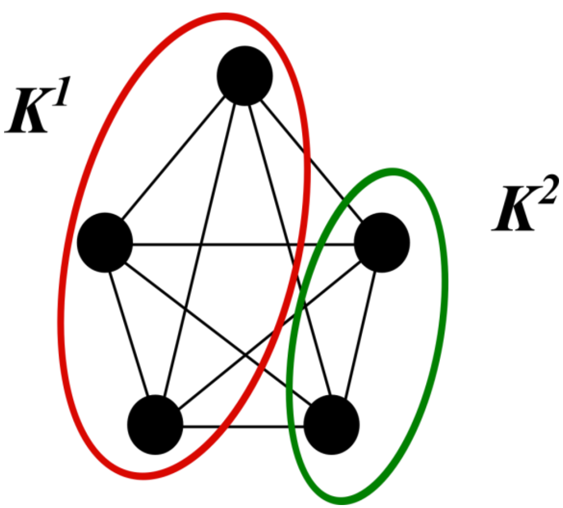
<u>Teorema:</u> G=(V,E) é um **grafo-(0,2) bem coberto** se e somente se **G** é **(0,1),** ou **G** é **(0,2)** sem vértice universal.

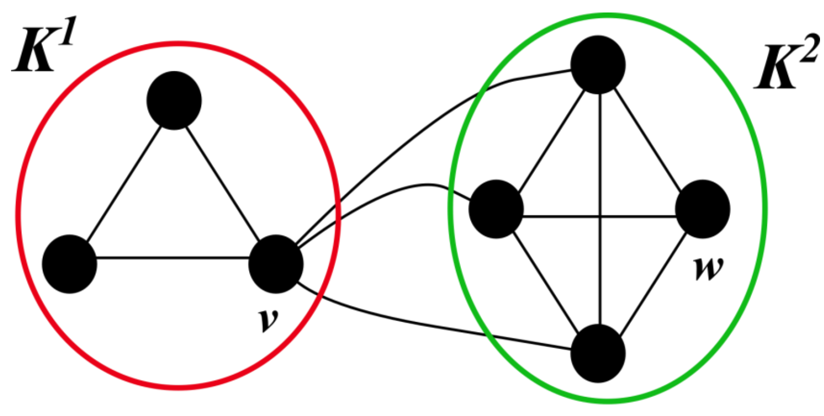


Problema G(0, 2)BC

Grafos-(0,2) bem cobertos

<u>Teorema:</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(0,2) bem coberto** se e somente se **G** é **(0,1),** ou **G** é **(0,2)** sem vértice universal.





vértice v perde o vértice w

Problema G(2, 0)BC

Grafos-(2,0) bem cobertos foram caracterizados por [Ravindra,1977].

Problema G(2, 0)BC

Grafos-(2,0) bem cobertos foram caracterizados por [Ravindra,1977].

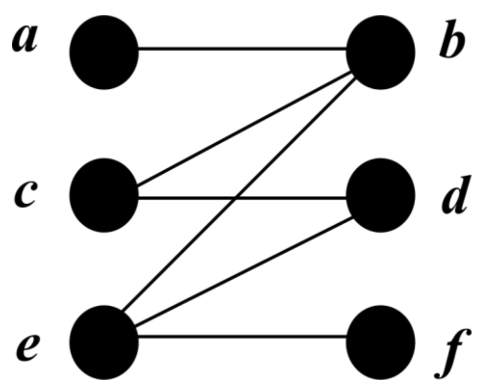
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um grafo conexo.

G é um **grafo-(2,0) bem coberto** se e somente se **G** contém um emparelhamento perfeito **M,** e para cada **uv ϵ M, G[N(u)**∪**N(v)]** é uma biclique**.**

Problema G(2, 0)BC

Grafos-(2,0) bem cobertos foram caracterizados por [Ravindra,1977].

Teorema: Seja **G** um grafo conexo.
G é um **grafo-(2,0) bem coberto** se e somente se **G** contém um emparelhamento perfeito **M,** e para cada **uv ϵ M, G[N(u)UN(v)]** é uma biclique**.**



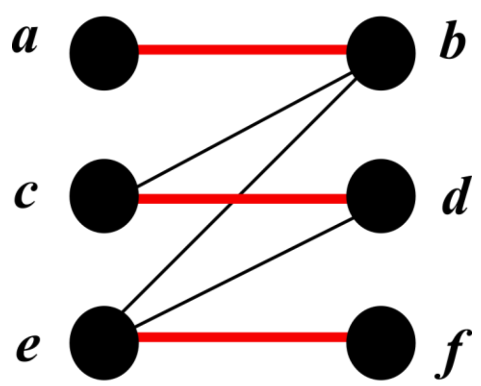
Problema G(2, 0)BC

Grafos-(2,0) bem cobertos foram caracterizados por [Ravindra,1977].

<u>Teorema:</u> Seja **G** um grafo conexo.
G é um **grafo-(2,0) bem coberto** se e somente se **G** contém um emparelhamento perfeito **M,** e para cada **uv ϵ M, G[N(u)UN(v)]** é uma biclique**.**

M={ab, cd, ef}

Tomamos ab

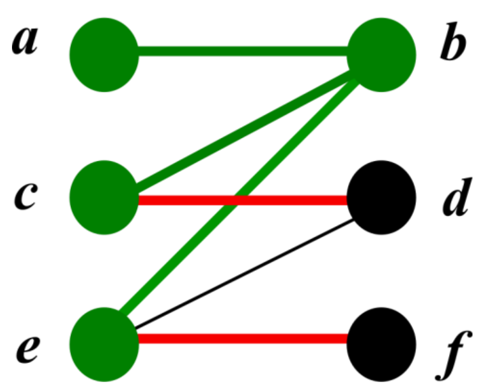


Problema G(2, 0)BC

Grafos-(2,0) bem cobertos foram caracterizados por [Ravindra,1977].

Teorema: Seja **G** um grafo conexo.
G é um **grafo-(2,0) bem coberto** se e somente se **G** contém um emparelhamento perfeito **M,** e para cada **uv ϵ M, G[N(u)∪N(v)]** é uma biclique**.**

M={ab, cd, ef}



Problema G(1, 1)BC

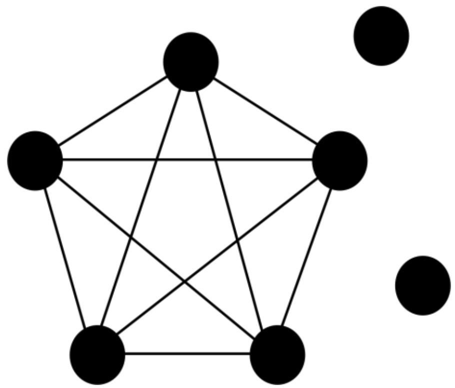
Grafos-(1, 1) bem cobertos

Teorema: **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo $v \in$ **K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

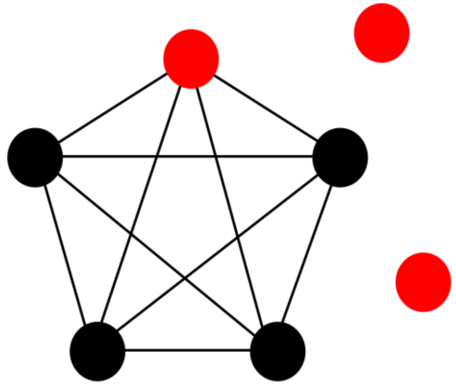
Teorema: **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo v∊**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

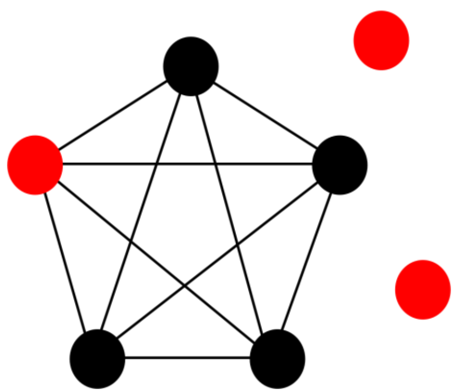
<u>Teorema:</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

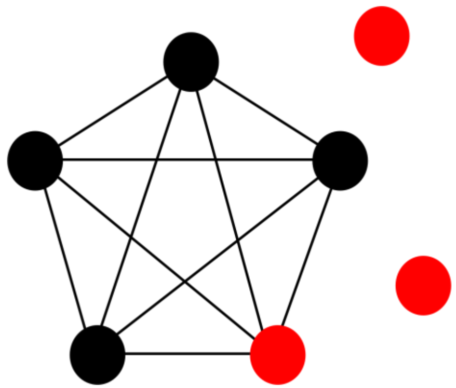
<u>Teorema:</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo v∈**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

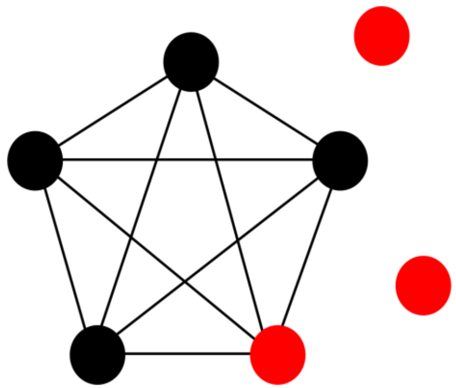
<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

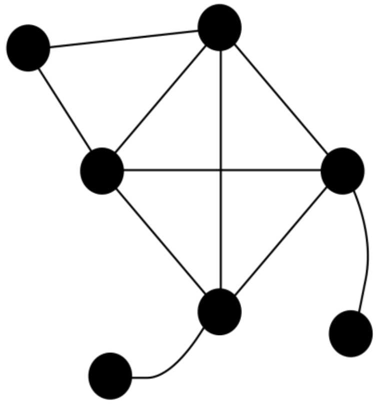


Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo v∈**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

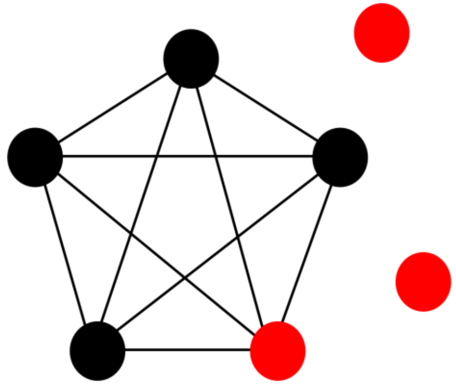


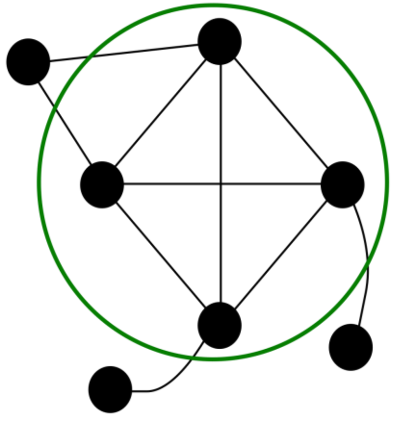


Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

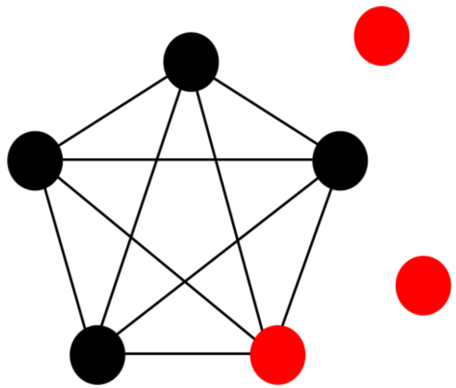


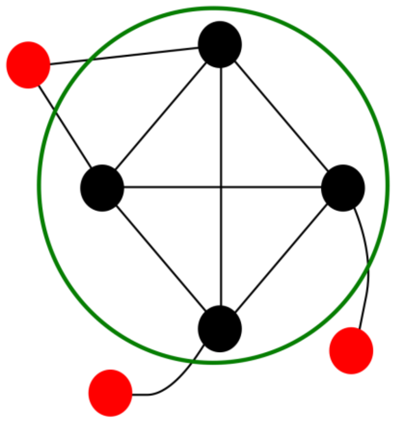


Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo v$\in$**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

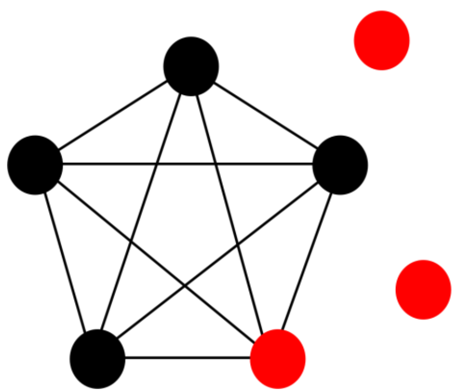


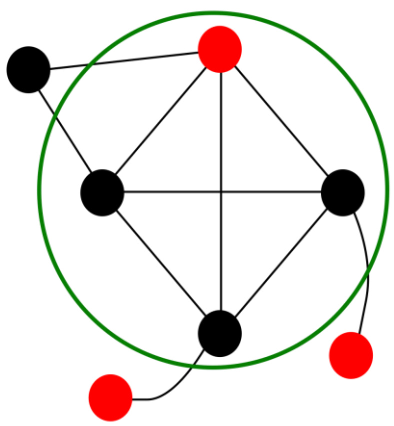


Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.

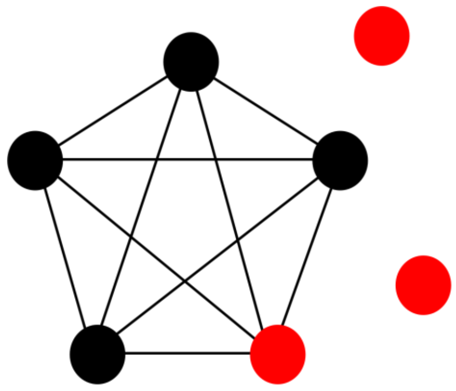


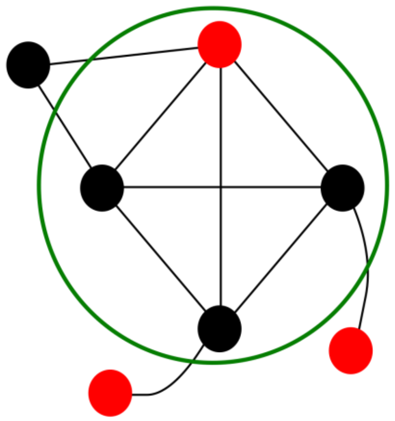


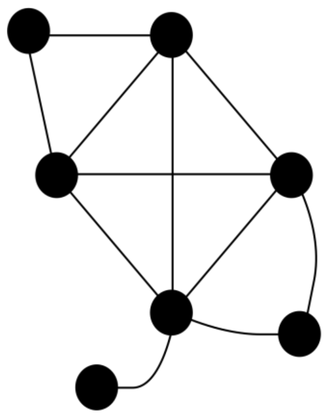
Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



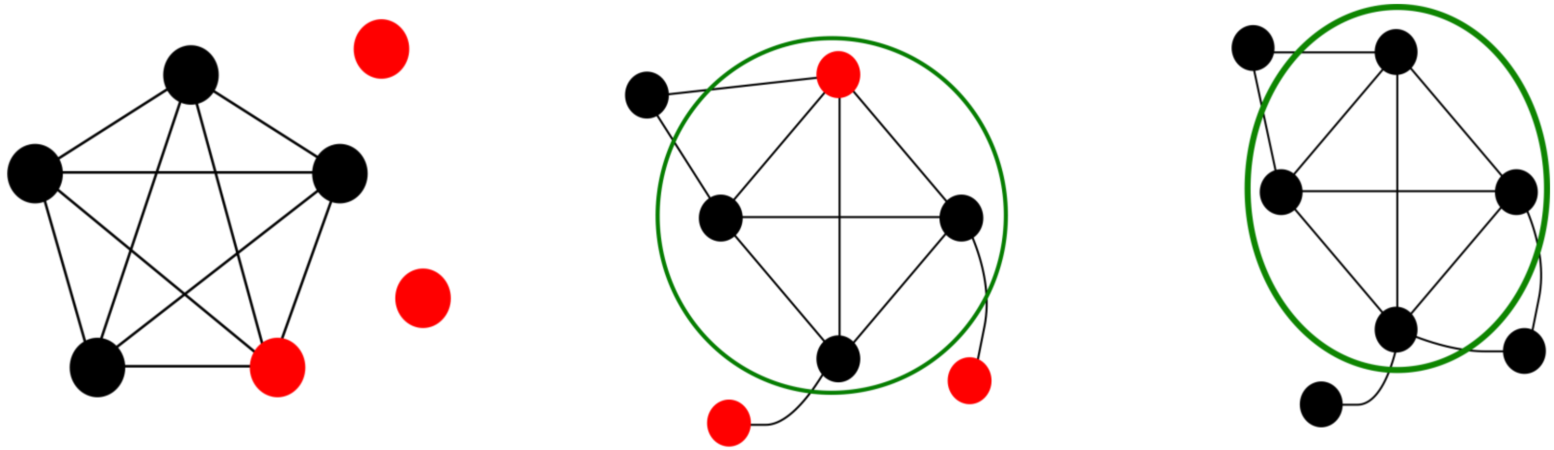




Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

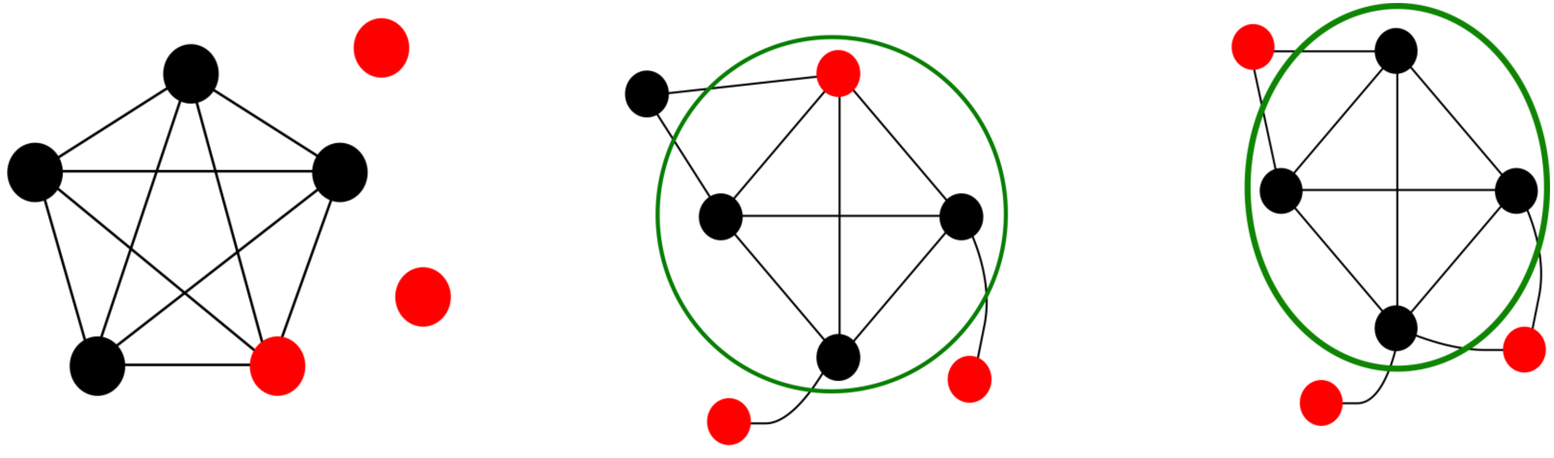
<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo v∊**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



Problema G(1, 1)BC

Grafos-(1, 1) bem cobertos

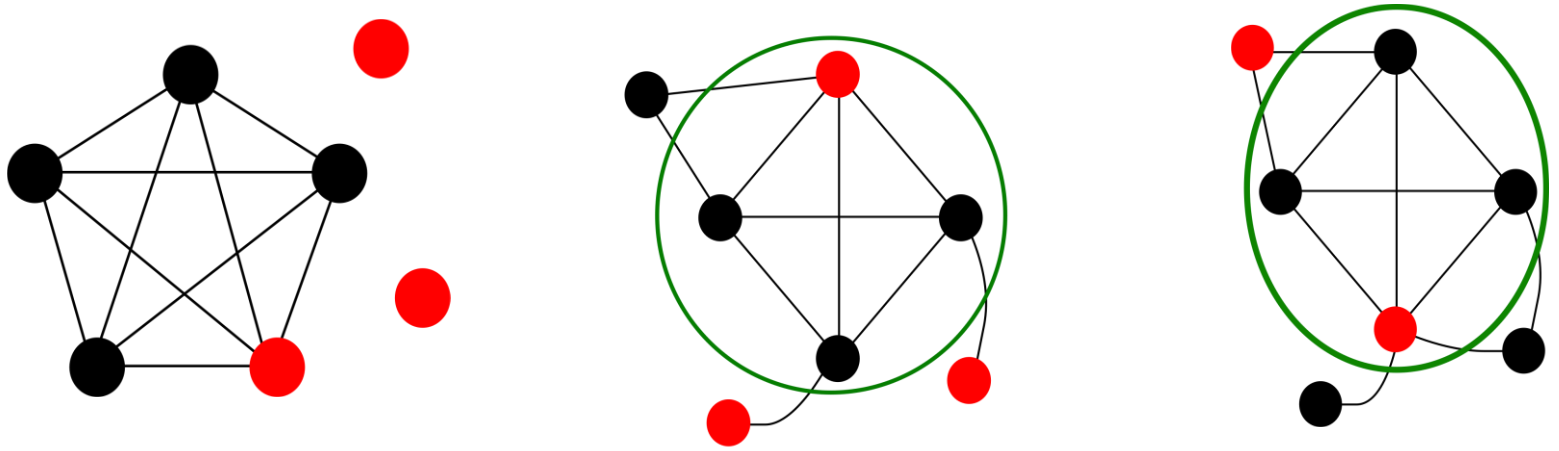
<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



Problema G(1, 1)BC

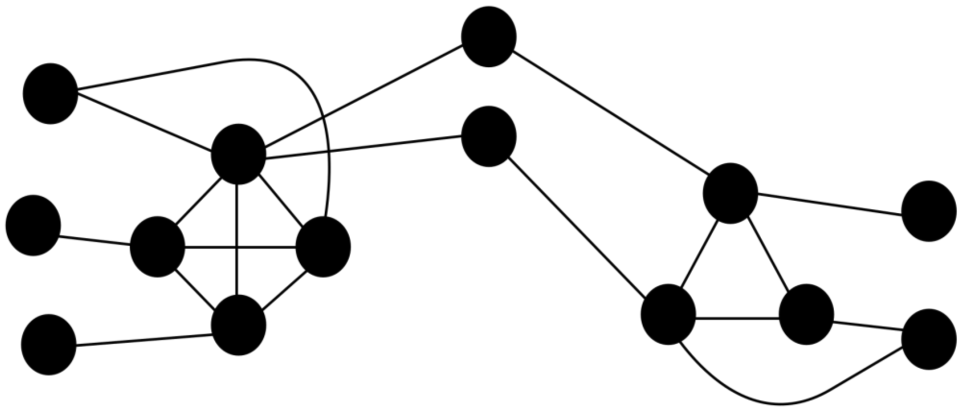
Grafos-(1, 1) bem cobertos

<u>**Teorema:**</u> **G**=(V,E) é um **grafo-(1,1) bem coberto** se e somente se admite uma partição V=(**S**,**K**) e para todo vϵ**K**, ou $|N_S(v)|=0$, ou $|N_S(v)|=1$.



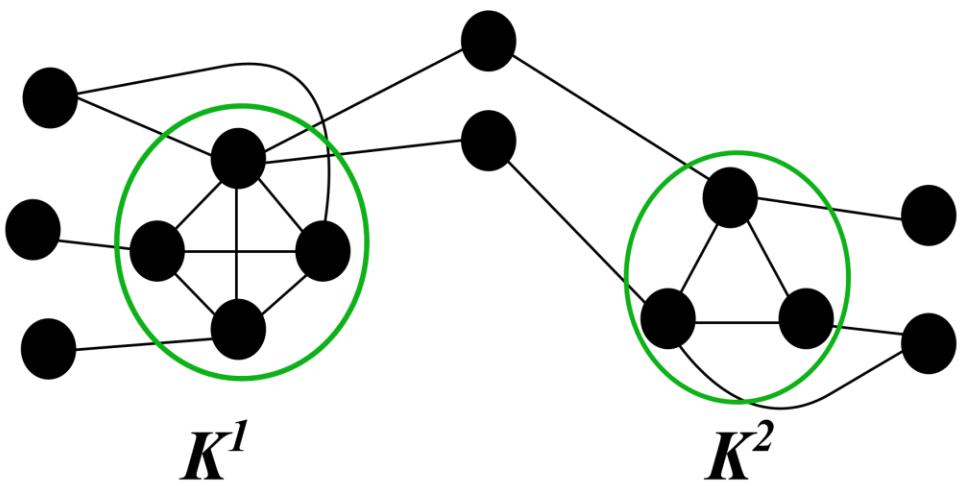
Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2)



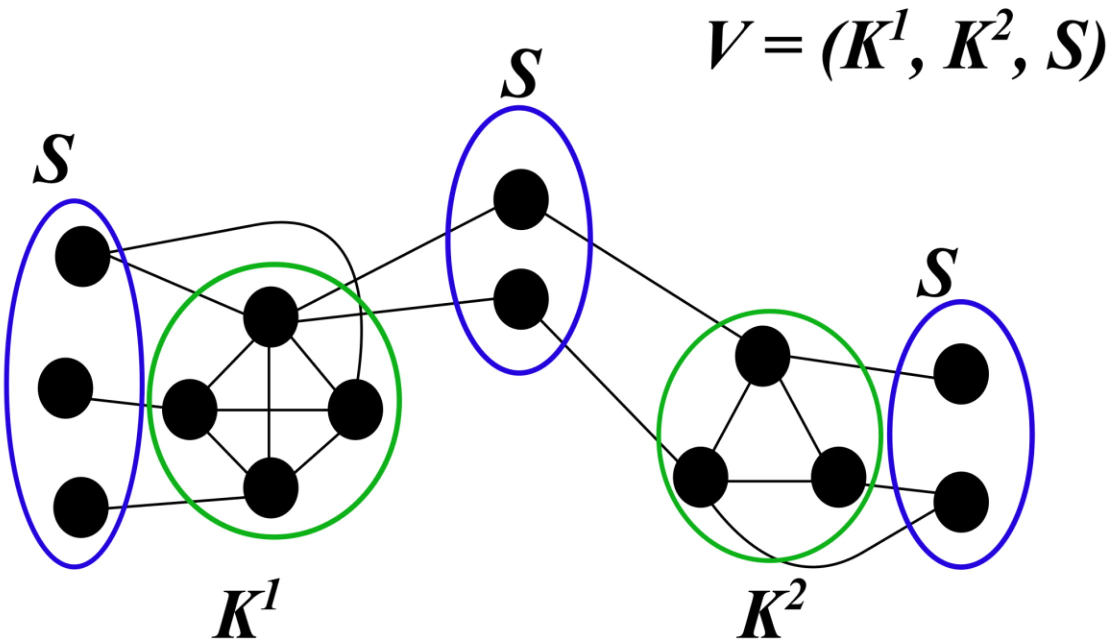
Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2)



Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2)

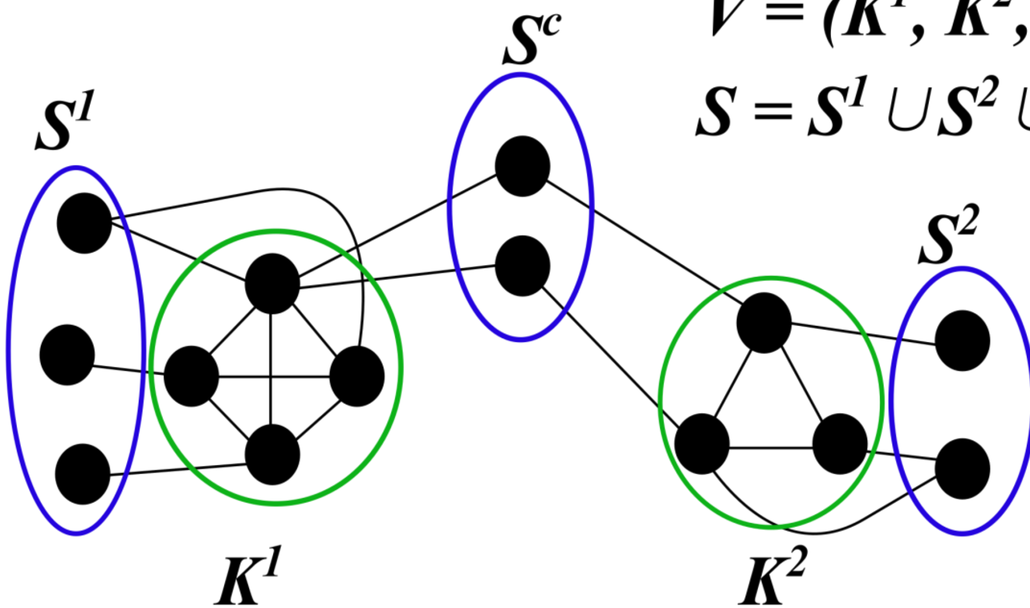


Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2)

$$V = (K^1, K^2, S)$$

$$S = S^1 \cup S^2 \cup S^c$$



$$S^1 = \{x \in S : N(x) \subset K^1\}$$

$$S^2 = \{x \in S : N(x) \subset K^2\}$$

$$S^c = S \setminus (S^1 \cup S^2)$$

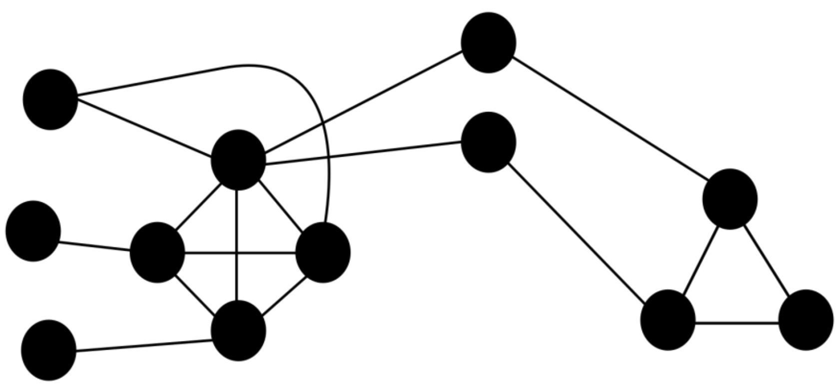
Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Uma clique $\mathbf{K^i}$ é:

careca quando $\mathbf{S^i}=\emptyset$

cabeluda quando $|N_{\mathbf{S^i}}(v)|=1$ para todo $v \in \mathbf{K^i}$, $i \in \{1,2\}$



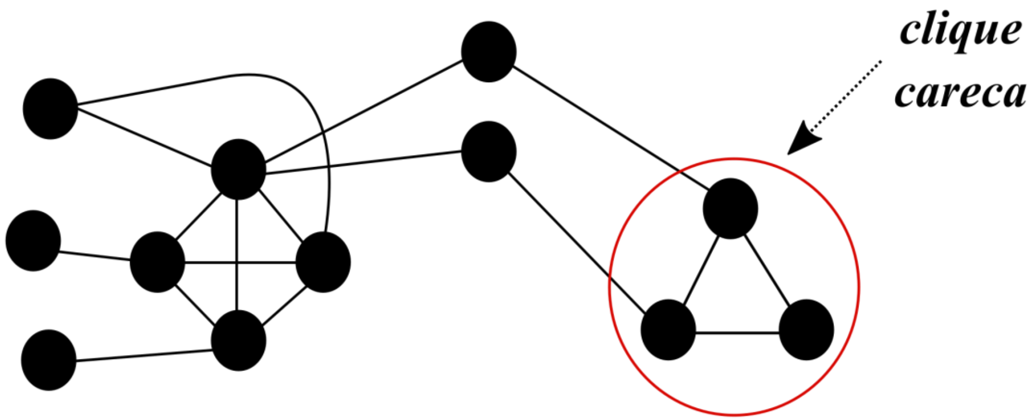
Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Uma clique $\mathbf{K}^i$ é:

careca quando $\mathbf{S}^i = \varnothing$

cabeluda quando $|N_{S^i}(v)| = 1$ para todo $v \in \mathbf{K}^i$, $i \in \{1,2\}$



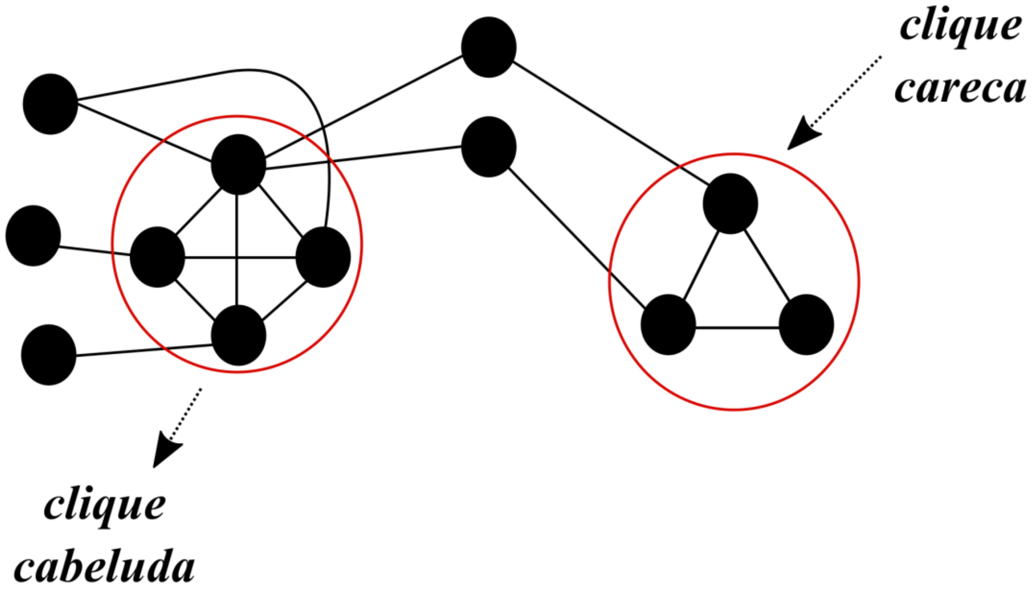
Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Uma clique **K^i** é:

careca quando **S^i**$=\emptyset$

cabeluda quando $|N_{S^i}(v)|=1$ para todo $v \in$ **K^i**, $i \in \{1,2\}$



Problema G(1, 2)BC

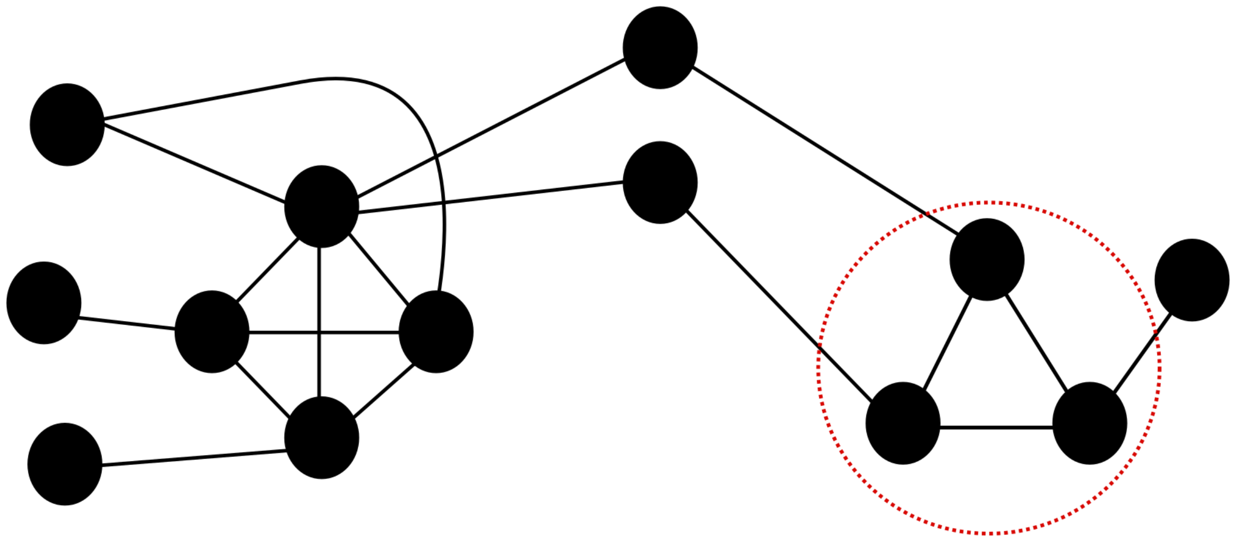
Grafos-(1, 2) bem cobertos – Condição necessária

Teorema: Em um **grafo-(1,2) bem coberto, cada clique K^i, i** ϵ **{1,2}, ou** é **careca ou** é **cabeluda**.

Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos – Condição necessária

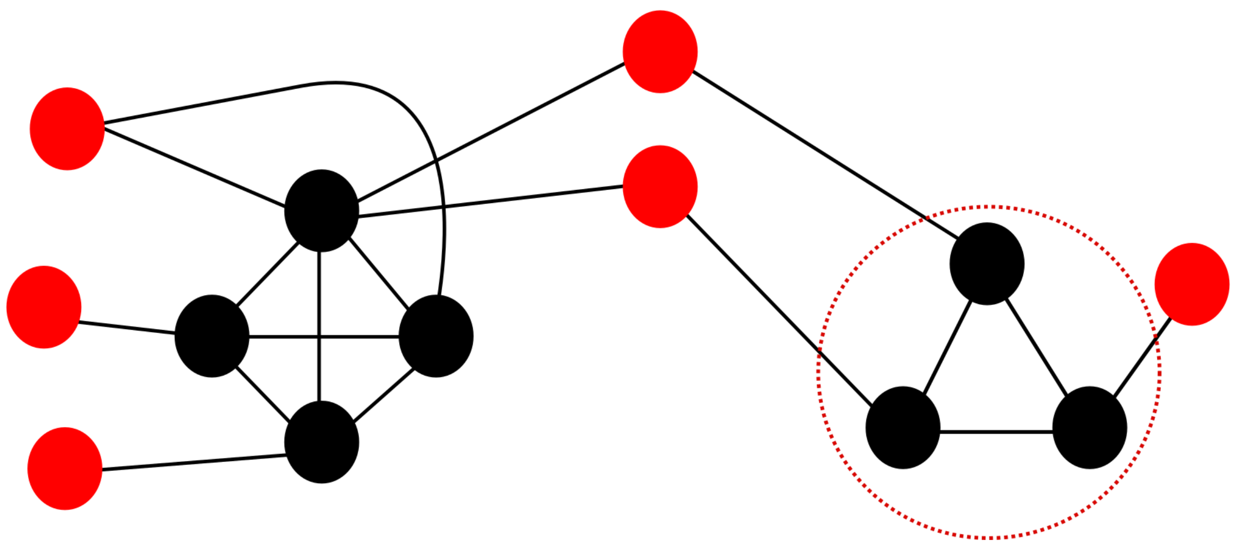
<u>**Teorema:**</u> Em um **grafo-(1,2) bem coberto, cada clique K^i, i** ϵ **{1,2}, ou** é **careca ou** é **cabeluda**.



Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos – Condição necessária

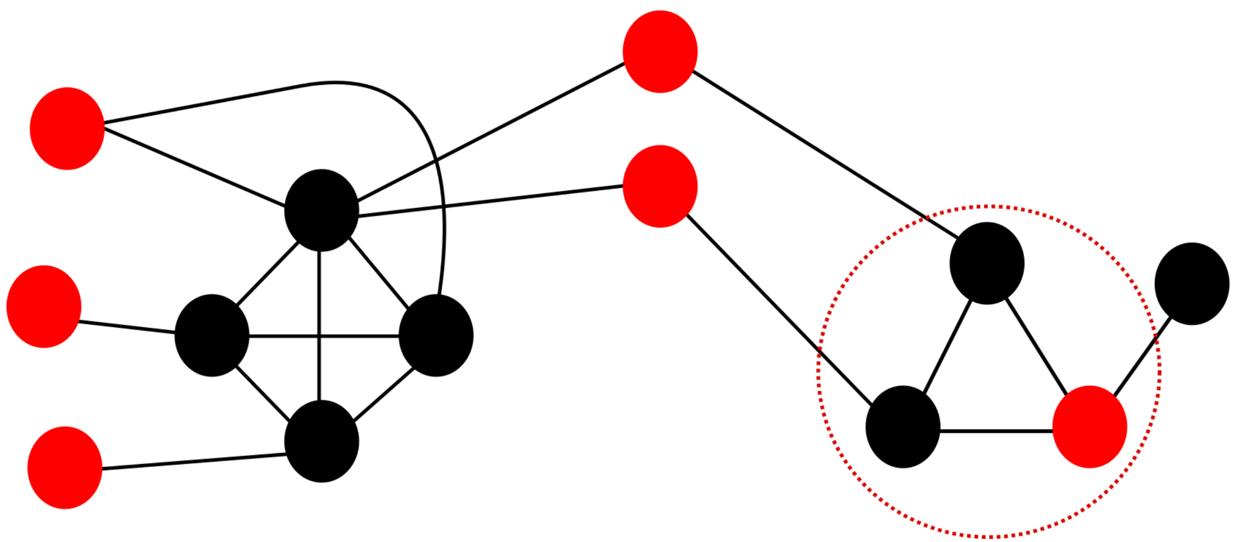
<u>**Teorema:**</u> Em um **grafo-(1,2) bem coberto, cada clique K^{i}, i** ϵ **{1,2}, ou** é **careca ou** é **cabeluda**.



Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos – Condição necessária

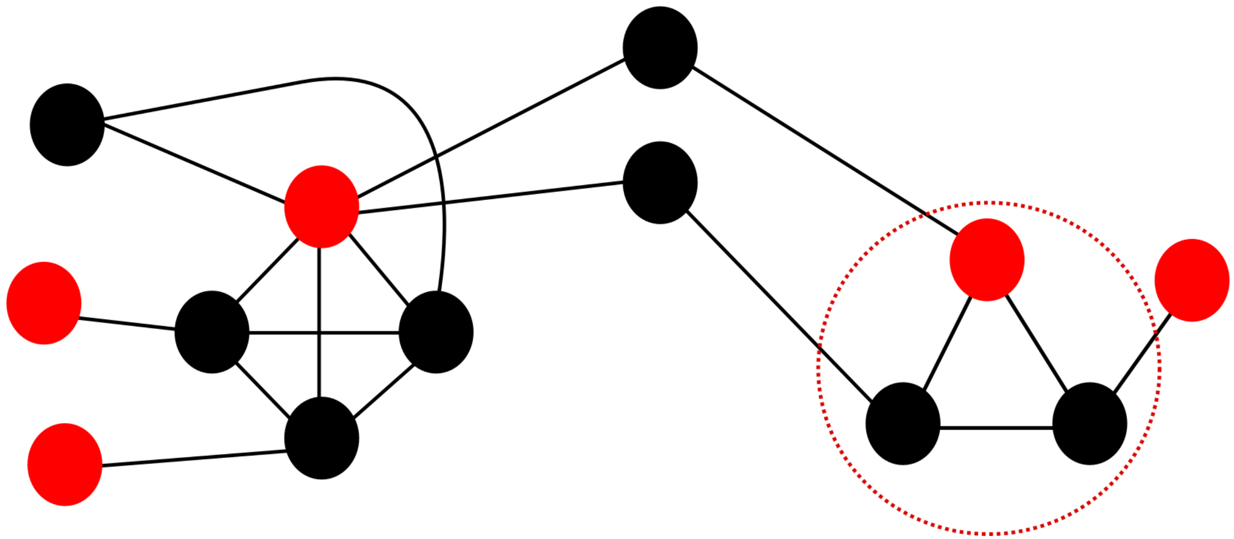
<u>Teorema:</u> Em um **grafo-(1,2) bem coberto, cada clique K^i, i** ϵ **{1,2}, ou** é **careca ou** é **cabeluda**.



Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos – Condição necessária

<u>Teorema:</u> Em um **grafo-(1,2) bem coberto, cada clique K^i, i** ϵ **{1,2}, ou** é **careca ou** é **cabeluda**.



Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Temos três casos possíveis para um **grafo-(1,2) bem coberto**:

Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Temos três casos possíveis para um **grafo-(1,2) bem coberto**:

Caso 1: **cabeluda-cabeluda**

Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Temos três casos possíveis para um **grafo-(1,2) bem coberto**:

Caso 1: **cabeluda-cabeluda**

Caso 2: **careca**-**cabeluda**

Problema G(1, 2)BC

Grafos-(1, 2) bem cobertos

Temos três casos possíveis para um **grafo-(1,2) bem coberto**:

Caso 1: **cabeluda-cabeluda**

Caso 2: **careca**-**cabeluda**

Caso 3: **careca**-**careca**

Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

Problema G(1, 2)BC

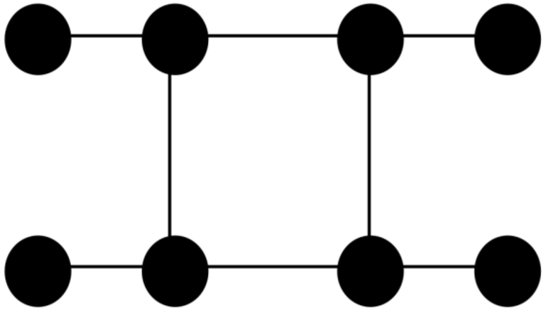
Caso 1: cabeluda-cabeluda

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \emptyset$.

Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

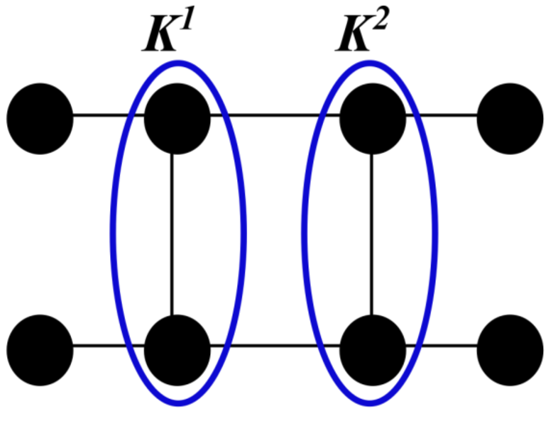
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \varnothing$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

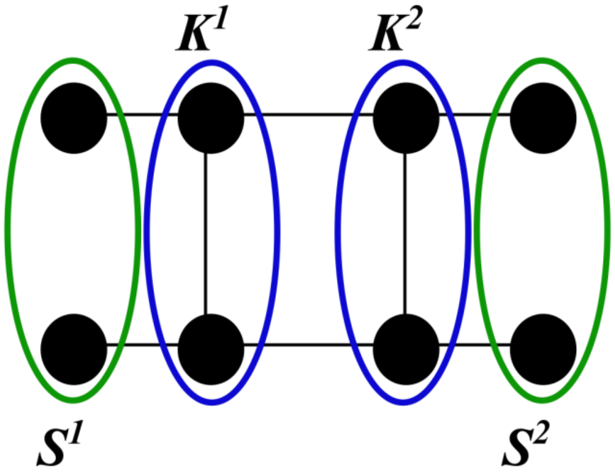
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \emptyset$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

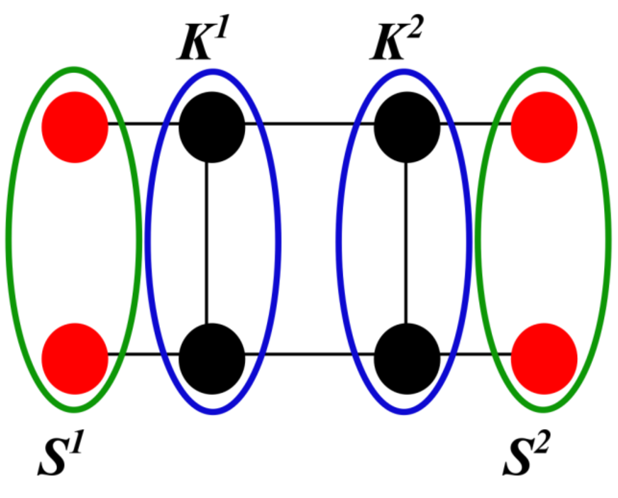
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \varnothing$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

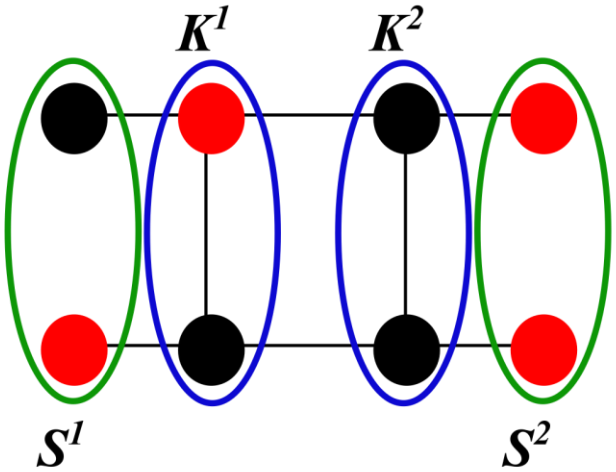
Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \emptyset$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

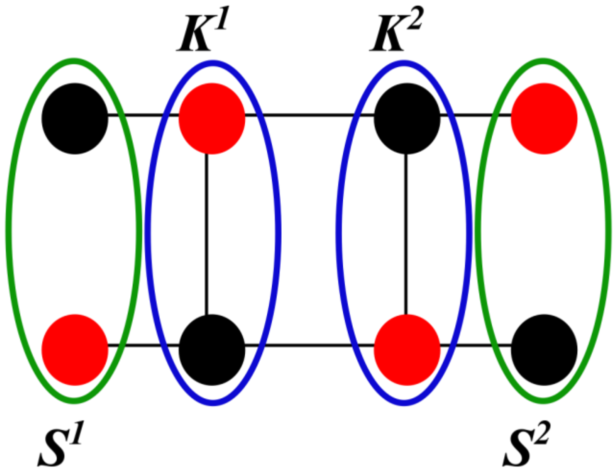
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \varnothing$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

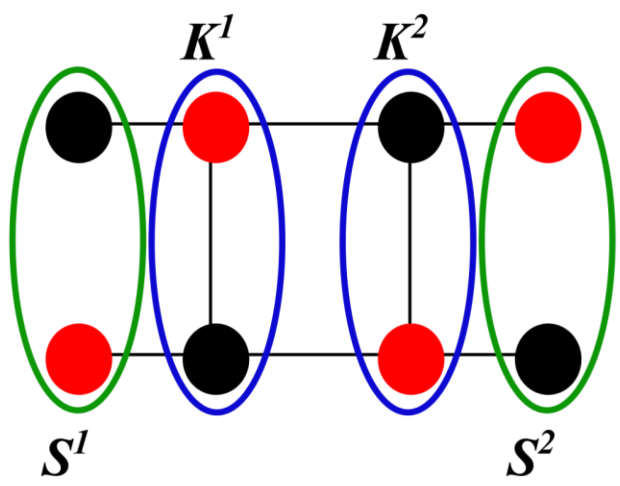
Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \varnothing$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 1: cabeluda-cabeluda

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)** onde $\mathbf{K^1}$ e $\mathbf{K^2}$ são cliques **cabeludas**. **G** é **bem coberto** se e somente se $\mathbf{S^c} = \varnothing$.

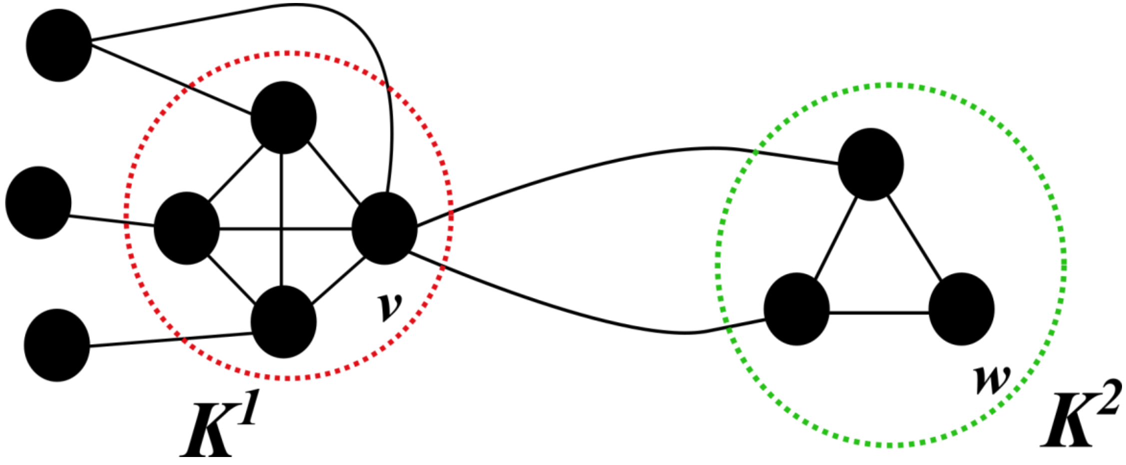


Todo c.i. maximal de G possui cardinalidade $|S^1|+|S^2|$

Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C = \emptyset$)

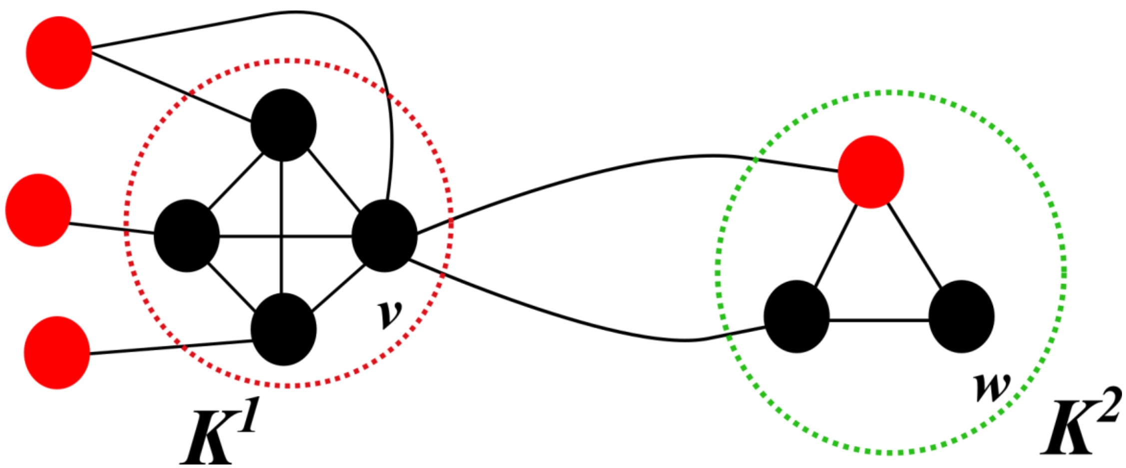
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1 cabeluda**, **K^2 careca** e **$S^C = \emptyset$**. **G** é (**1,2) bem coberto** se e somente se não existe vértice de **K^1** universal a **K^2**.



Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C = \varnothing$)

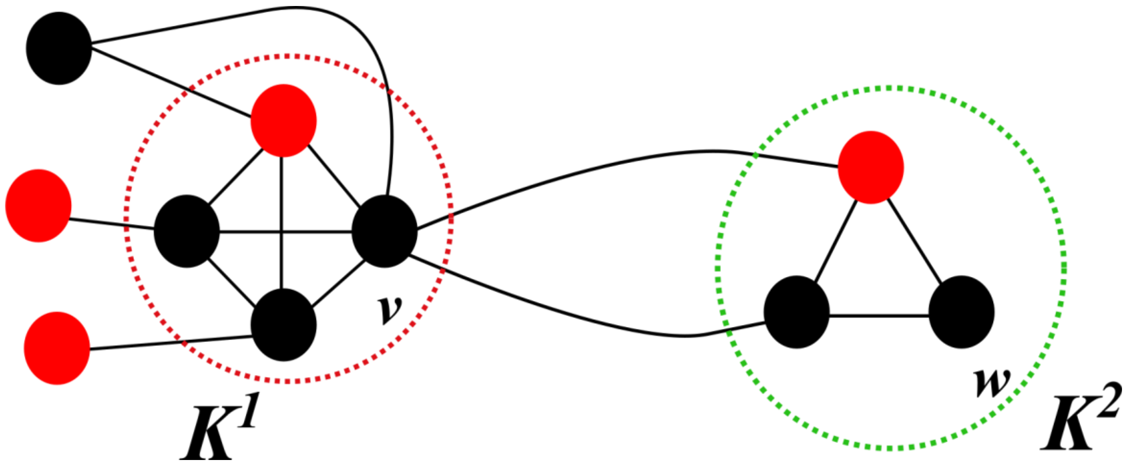
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K¹** cabeluda, **K²** careca e $S^C = \varnothing$. **G** é (**1,2**) **bem coberto** se e somente se não existe vértice de **K¹** universal a **K²**.



Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C = \emptyset$)

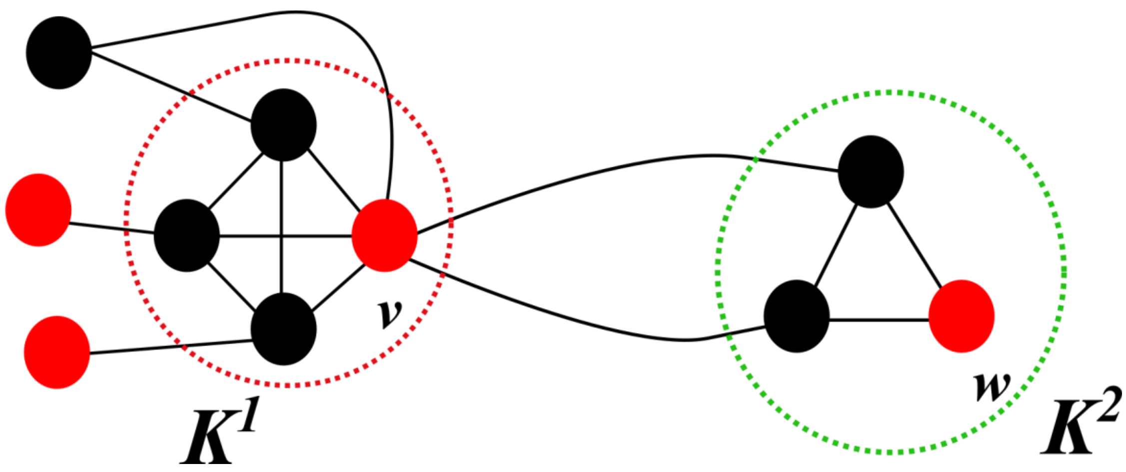
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K¹** cabeluda, **K²** careca e $S^C = \emptyset$. **G** é (**1,2) bem coberto** se e somente se não existe vértice de $\mathbf{K^1}$ universal a $\mathbf{K^2}$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda (S^C = ∅)

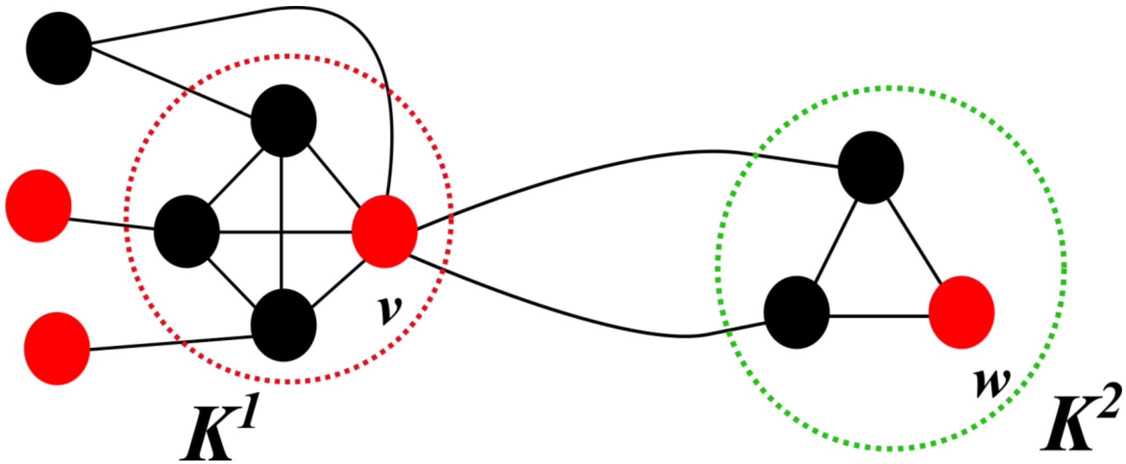
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1 cabeluda**, **K^2 careca** e **S^C** = ∅. **G** é (**1,2) bem coberto** se e somente se não existe vértice de **K^1** universal a **K^2**.



Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C = \emptyset$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2),** **K^1** **cabeluda**, **K^2** **careca** e **S^C** = $\emptyset$. **G** é (**1,2) bem coberto** se e somente se não existe vértice de **K^1** universal a **K^2**.



Todo c.i. maximal de G possui cardinalidade $|S^1|+1$

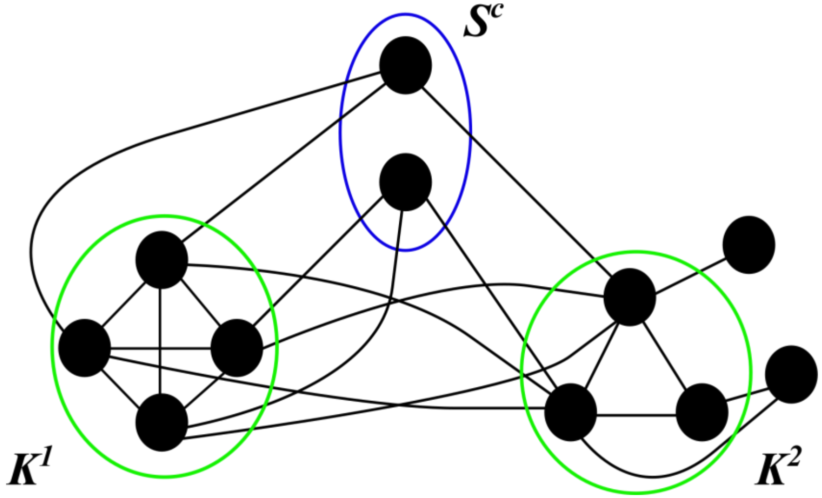
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda   ($S^C \neq \emptyset$)

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)**, **K^1** careca, **K^2** cabeluda e $S^c \neq \emptyset$, tal que $|N_{Sc}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{Sc}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K1} \in S^c$ é um vértice universal a **K^1**, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1, w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



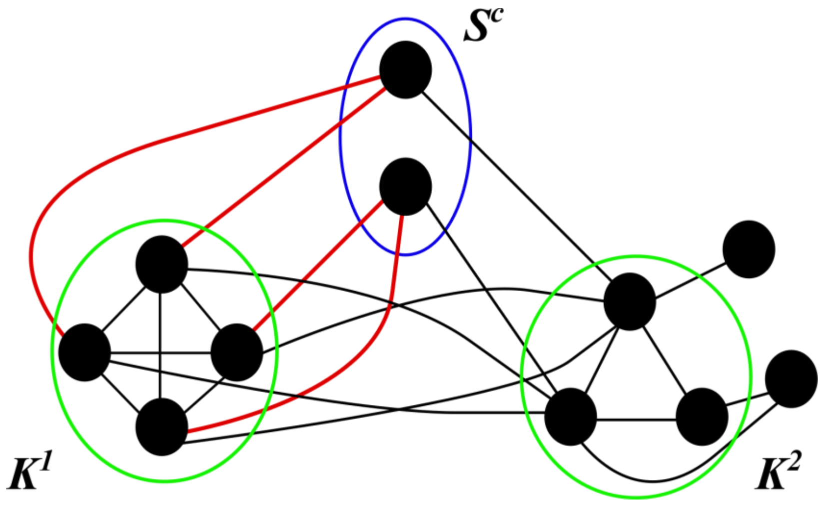
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda   ($S^C \neq \emptyset$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)**, **K^1 careca**, **K^2 cabeluda** e $S^c \neq \emptyset$, tal que $|N_{Sc}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{Sc}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K1} \in S^c$ é um vértice universal a K^1, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1,w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



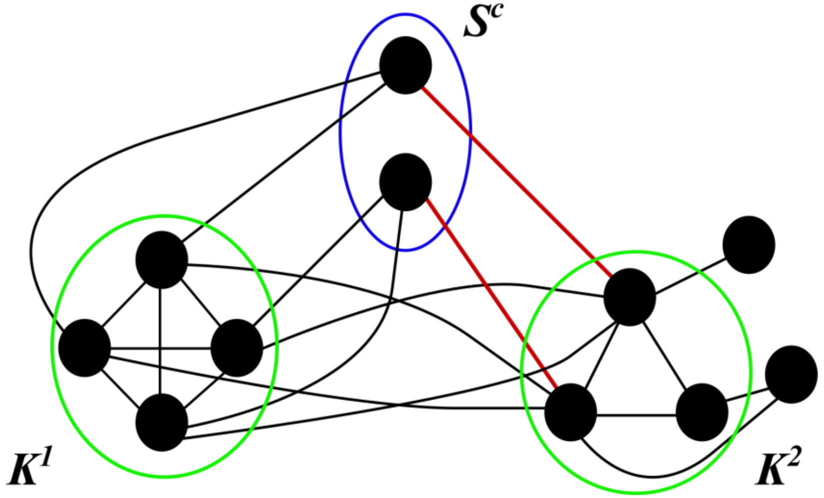
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C \neq \emptyset$)

Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2)**, $\mathbf{K^1}$ **careca**, $\mathbf{K^2}$ **cabeluda** e $S^c \neq \emptyset$, tal que $|\mathbf{N_{Sc}(u)}|=1 \; \forall u \in \mathbf{K^1}$ e $|\mathbf{N_{Sc}(v)}| \leq 1 \; \forall v \in \mathbf{K^2}$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K1} \in S^c$ é um vértice universal a $\mathbf{K^1}$, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in \mathbf{K^1}$ e $v \in \mathbf{K^2}$ tal que $\exists\, w_1, w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



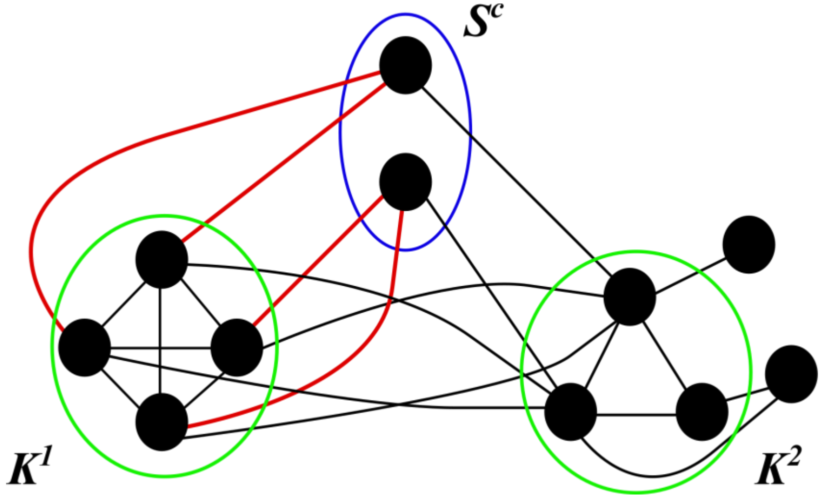
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda   ($S^C \neq \varnothing$)

Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2)**, **K^1 careca**, **K^2 cabeluda** e $S^c \neq \varnothing$, tal que $|N_{Sc}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{Sc}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K^1} \in S^c$ é um vértice universal a K^1, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1,w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



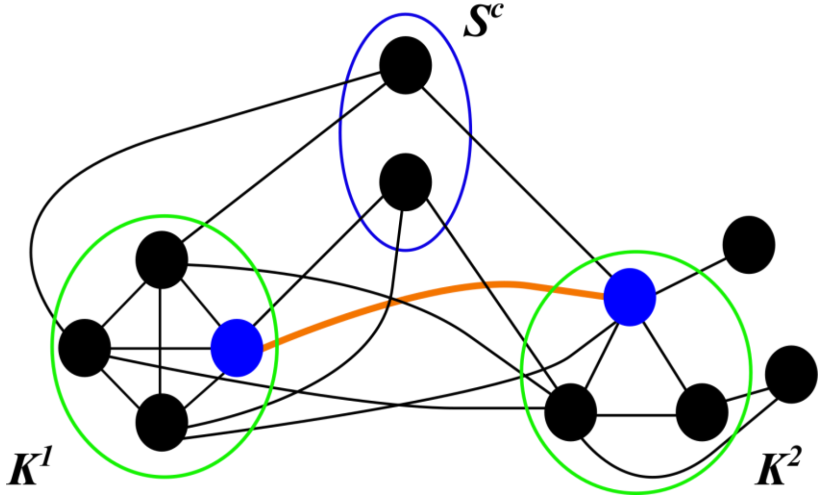
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda ($S^C \neq \emptyset$)

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)**, K^1 **careca**, K^2 **cabeluda** e $S^c \neq \emptyset$, tal que $|N_{S^c}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K^1} \in S^c$ é um vértice universal a K^1, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1,w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



Problema G(1, 2)BC

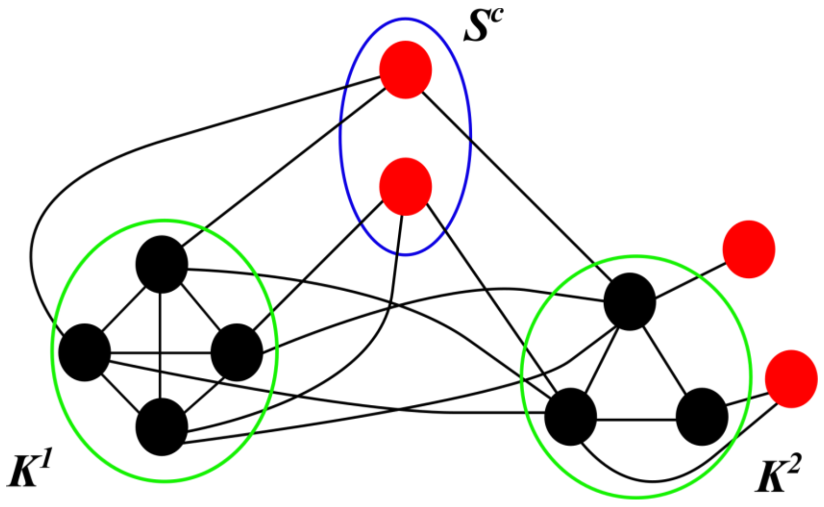
Caso 2: careca-cabeluda ($S^C \neq \emptyset$)

Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2)**, K^1 careca, K^2 cabeluda e $S^c \neq \emptyset$, tal que $|N_{Sc}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{Sc}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.

G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K1} \in S^c$ é um vértice universal a K^1, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1, w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.

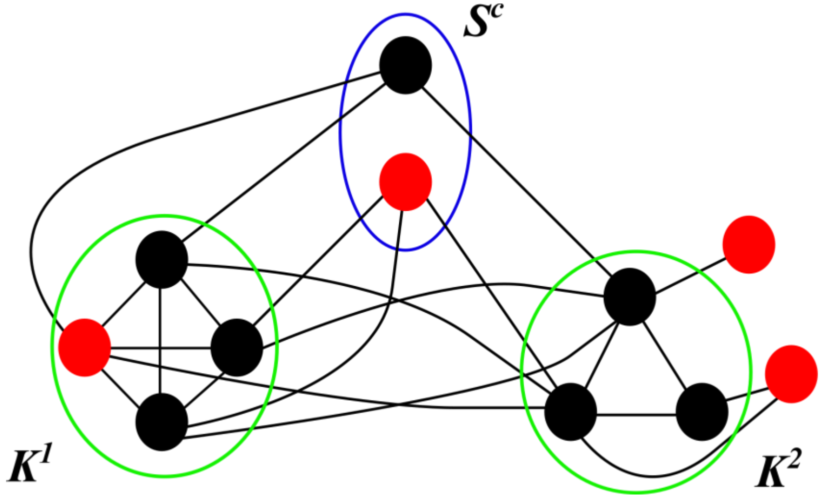


Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda $(S^C \neq \varnothing)$

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2)**, K^1 **careca**, K^2 **cabeluda** e $S^c \neq \varnothing$, tal que $|N_{Sc}(u)|=1\ \forall u \in K^1$ e $|N_{Sc}(v)| \leq 1\ \forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K1} \in S^c$ é um vértice universal a K^1, **ou**
(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists\ w_1, w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



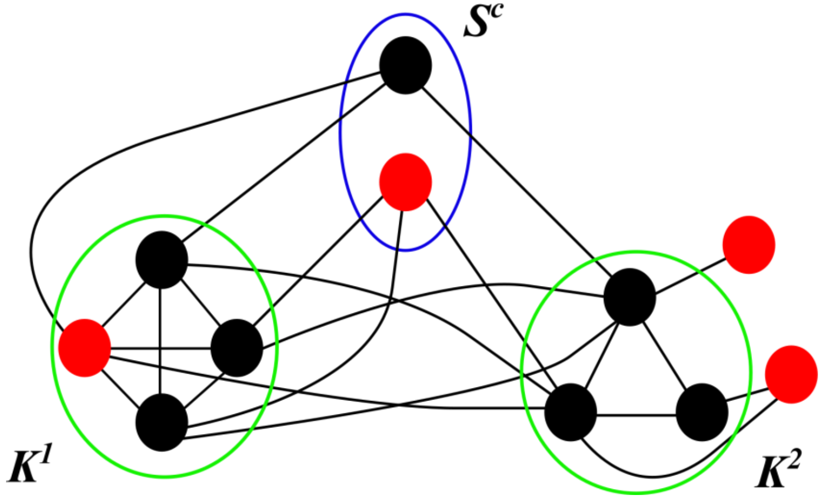
Problema G(1, 2)BC

Caso 2: careca-cabeluda   ($S^C \neq \varnothing$)

__Teorema:__ Seja **G** um **grafo-(1,2)**, **K^1** careca, **K^2** cabeluda e $S^c \neq \varnothing$, tal que $|N_{S^c}(u)|=1$ $\forall u \in K^1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$ $\forall v \in K^2$.
G é **(1,2) bem coberto** se e somente se

(i) $|S^c|=1$ e $u_{K^1} \in S^c$ é um vértice universal a **K^1**, **ou**

(ii) $|S^c|>1$ e para cada par de vértices $u \in K^1$ e $v \in K^2$ tal que $\exists$ $w_1, w_2 \in S^c$ com $w_1 \neq w_2$ e $uw_1, vw_2 \in E$ então $uv \in E$.



Todo c.i. maximal de G possui cardinalidade $|S^2|+|S^c|$

Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca
($S^1 = S^2 = \emptyset$)

G está na **classe** $|S^C|$ se todo conjunto independente maximal tem cardinalidade $|S^C|$

G está na **classe** $|S^C|+1$ se todo conjunto independente maximal tem cardinalidade $|S^C|+1$

Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca ($S^1=S^2=\emptyset$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** é **um grafo-(1,2)** onde K^1 e K^2 são duas cliques **carecas**. Se **G** é **bem coberto** então **G** pertence à classe $|S^c|$ ou **G** pertence à classe $|S^c|+1$.

Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

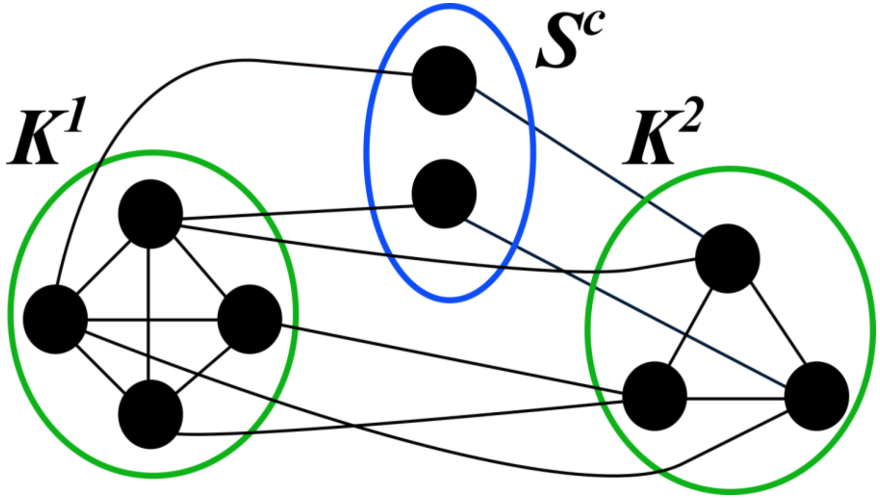
__Teorema:__ Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $\mathbf{G} \backslash N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K}^i$ universal a $\mathbf{K}^j$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

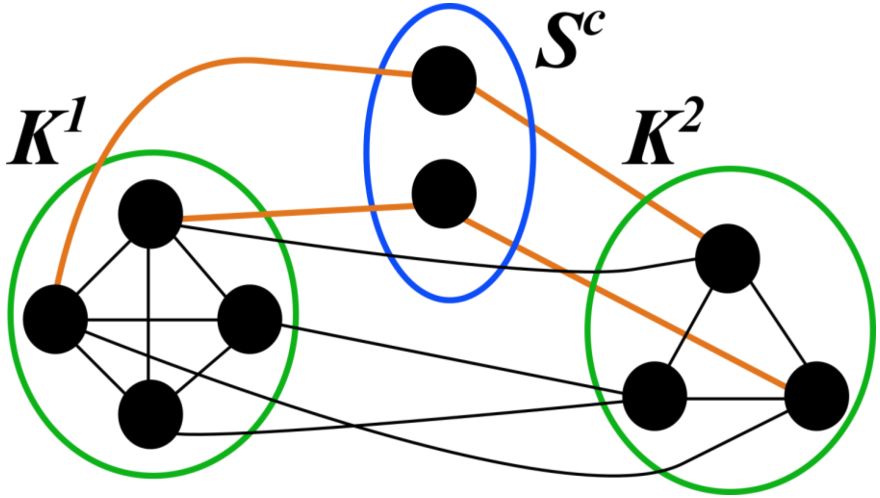
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** **carecas**, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $\mathbf{G} \setminus N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K}^i$ universal a $\mathbf{K}^j$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

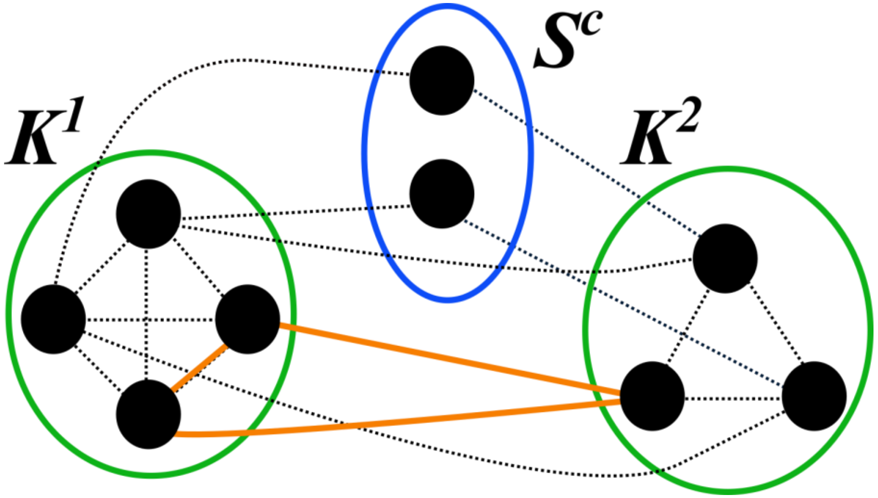
Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas**, $u \in K^1$, $v \in K^2$. **G** é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $G \setminus N_G[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in K^i$ universal a K^j tal que $u_K \in N_G[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(G)$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

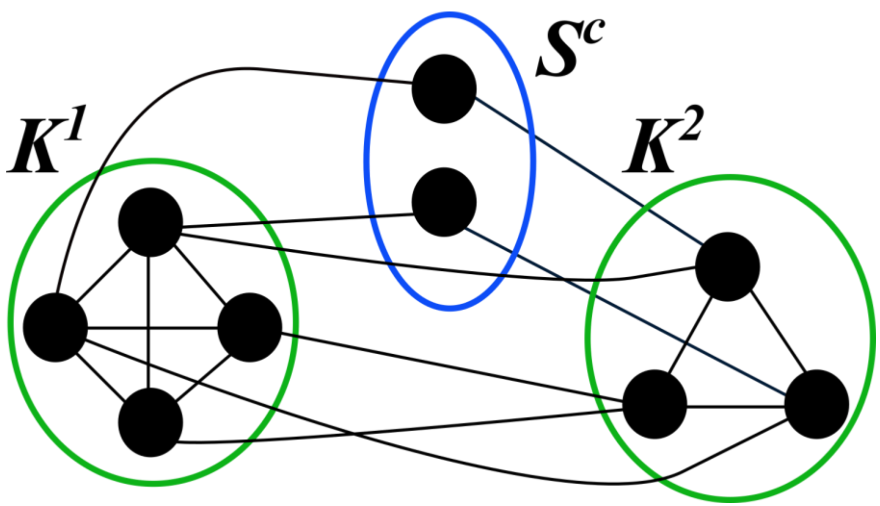
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in K^1$, $v \in K^2$**.**
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $\mathbf{G} \backslash N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K}^i$ universal a $\mathbf{K}^j$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})| = 1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

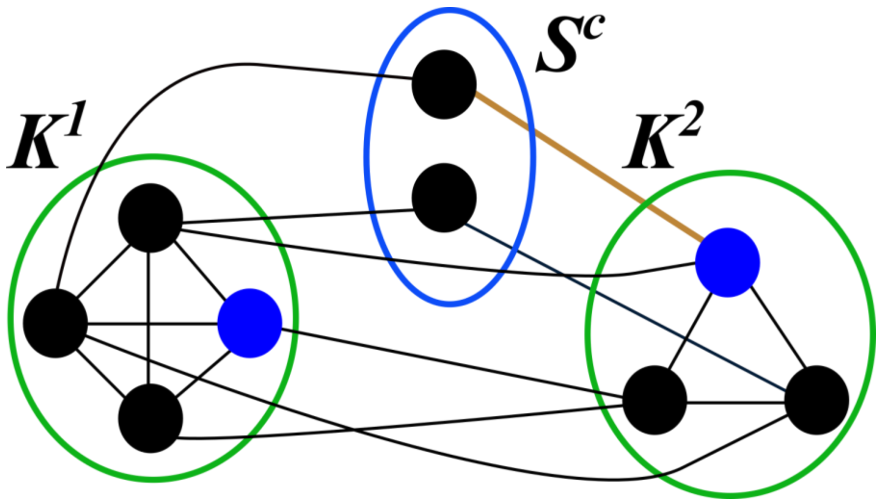
Teorema: Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas**, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $G \setminus N_G[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in K^i$ universal a K^j tal que $u_K \in N_G[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(G)$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

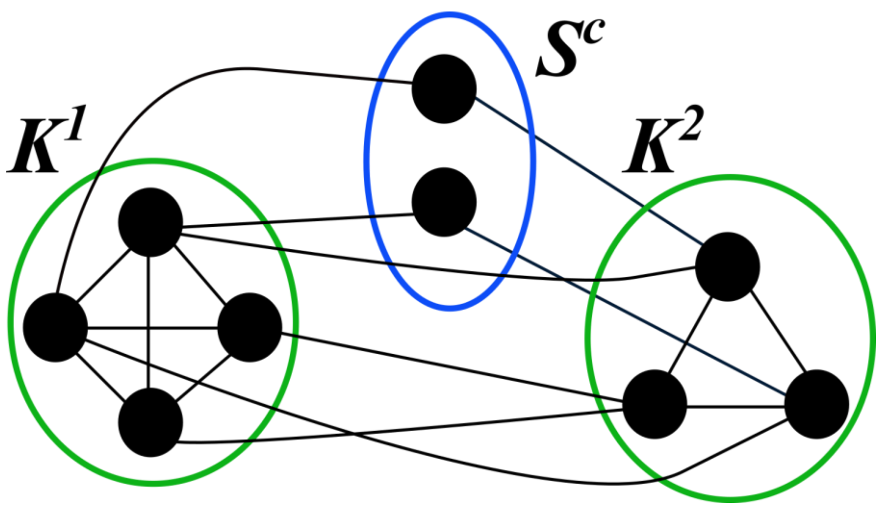
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** carecas, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $\mathbf{G} \setminus N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K}^i$ universal a $\mathbf{K}^j$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

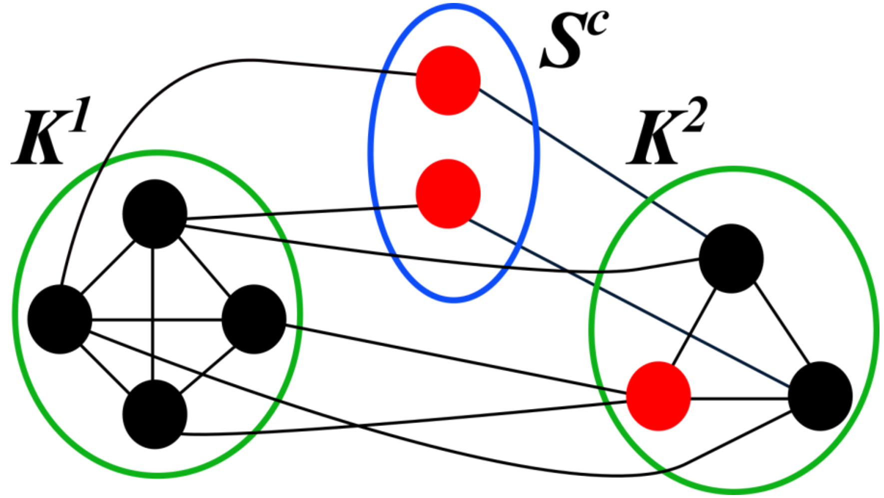
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** carecas**,** u$\in$**K^1**, v$\in$**K^2.**
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)|\leq 1$ e $|N_{S^c}(v)|\leq 1$

(ii) **G**$\backslash N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K^i}$ universal a $\mathbf{K^j}$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

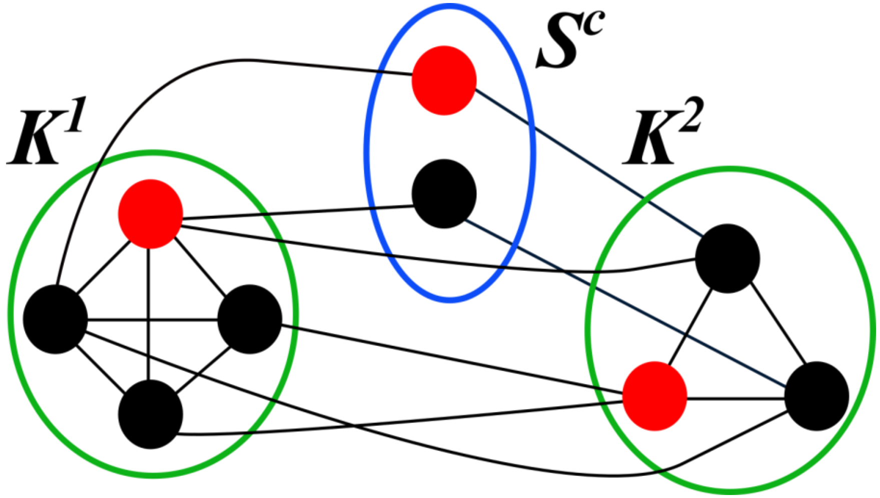
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** **carecas**, $u \in$ **K^1**, $v \in$ **K^2**. **G** é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $\mathbf{G} \backslash N_{\mathbf{G}}[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in \mathbf{K^i}$ universal a $\mathbf{K^j}$ tal que $u_K \in N_{\mathbf{G}}[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(\mathbf{G})$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|+1$)

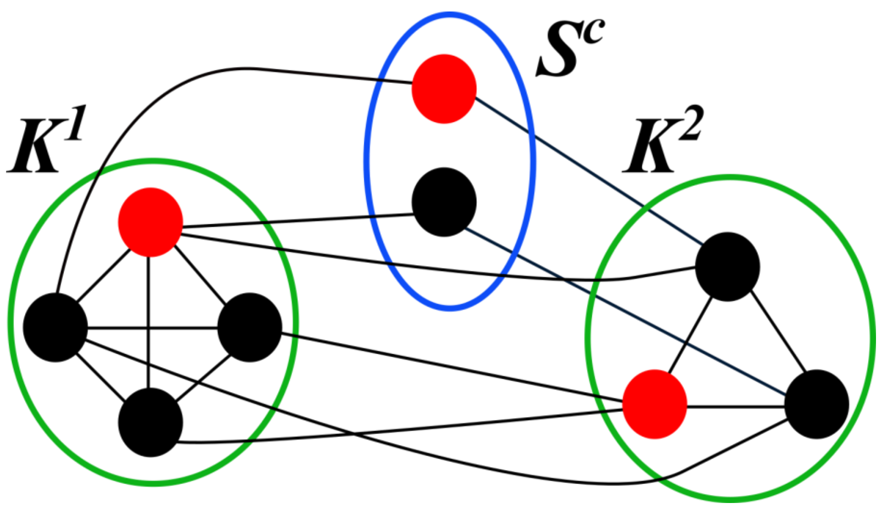
<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** carecas, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|+1$ se e somente se

(i) $|N_{S^c}(u)| \leq 1$ e $|N_{S^c}(v)| \leq 1$

(ii) $G \setminus N_G[S^c]$ é uma clique não vazia,

(iii) não existe $u_K \in K^i$ universal a K^j tal que $u_K \in N_G[S^c]$; $i,j \in \{1,2\}$,

(iv) se $uv \notin E(G)$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=1$.

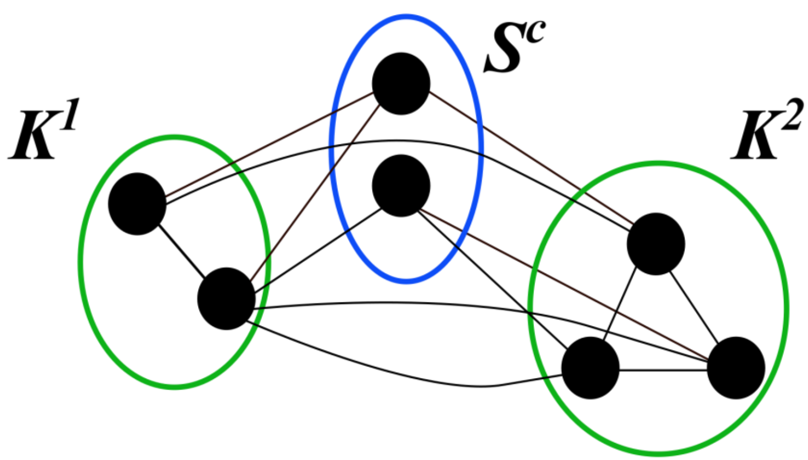


Todo c.i. maximal de G possui cardinalidade $|S^c|+1$

Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

__Teorema:__ Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in \mathbf{K^1}$, $v \in \mathbf{K^2}$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se
(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,
(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})| = 2$
(iii) se $|N_{S^c}(u)| = 2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})| = 2$, então há um vértice $w \in \mathbf{K^2}$
tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

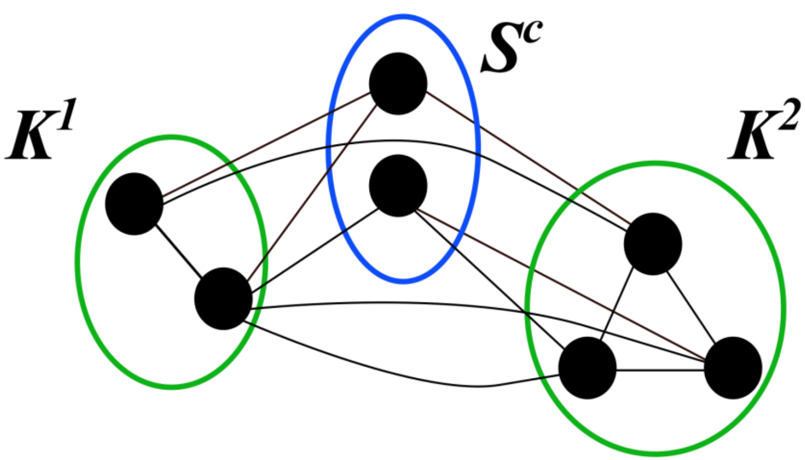
Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in$ **K^1**, $v \in$ **K^2**.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se

(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,

(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$

(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in$ **K^2** tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

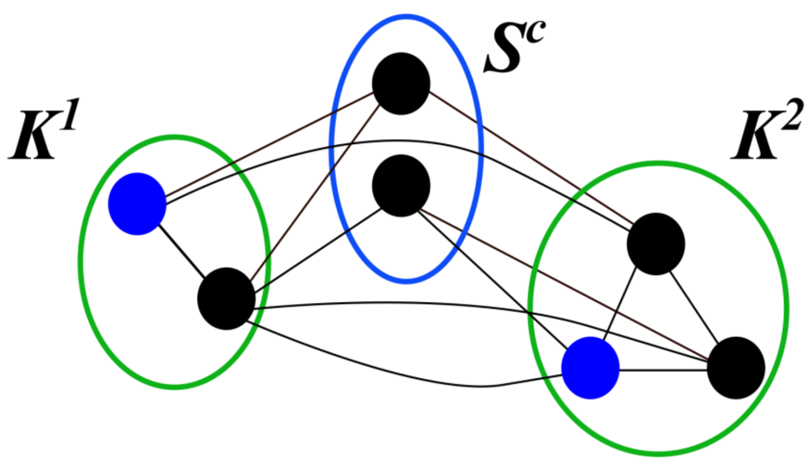
Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>Teorema:</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se

(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,

(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$

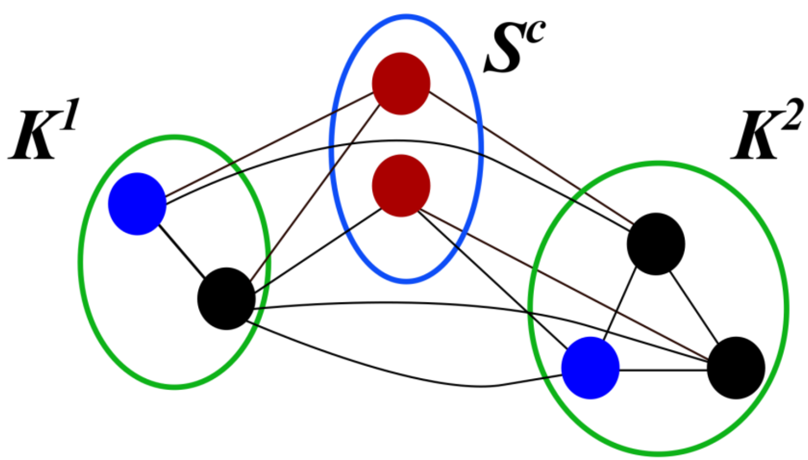
(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in \mathbf{K^1}$, $v \in \mathbf{K^2}$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se
(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,
(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$
(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in \mathbf{K^2}$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

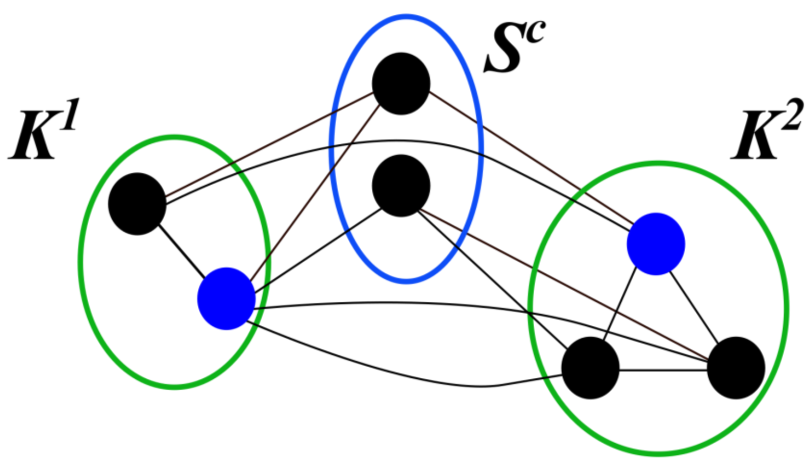
Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas**, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se

(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,

(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})| = 2$

(iii) se $|N_{S^c}(u)| = 2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})| = 2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

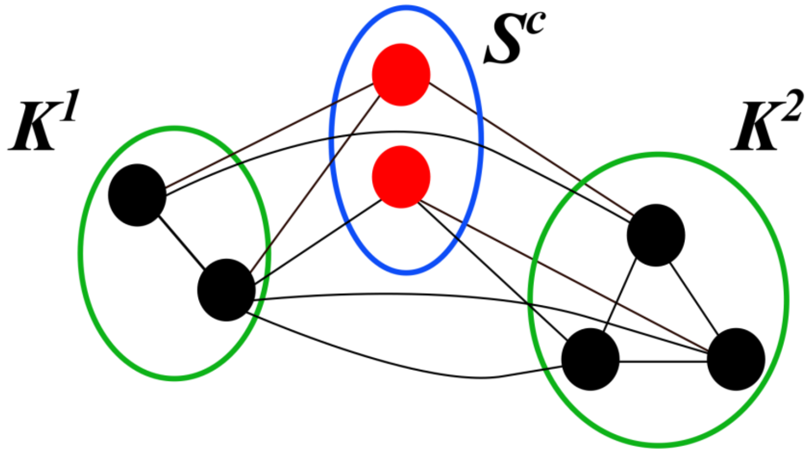
Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas,** $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se

(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,

(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$

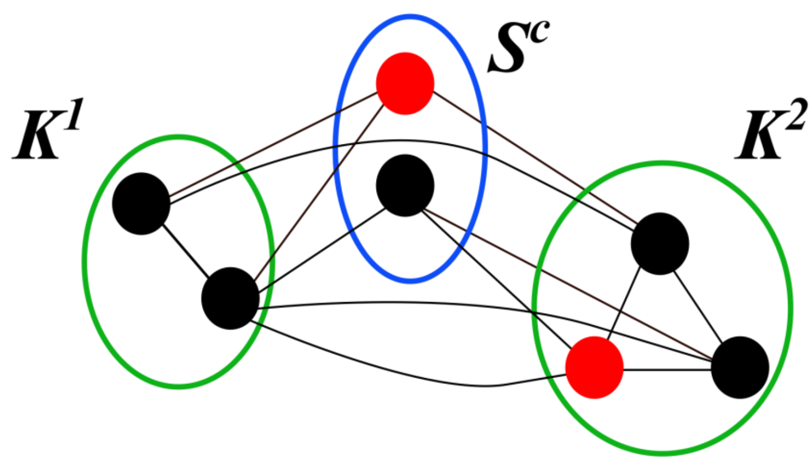
(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

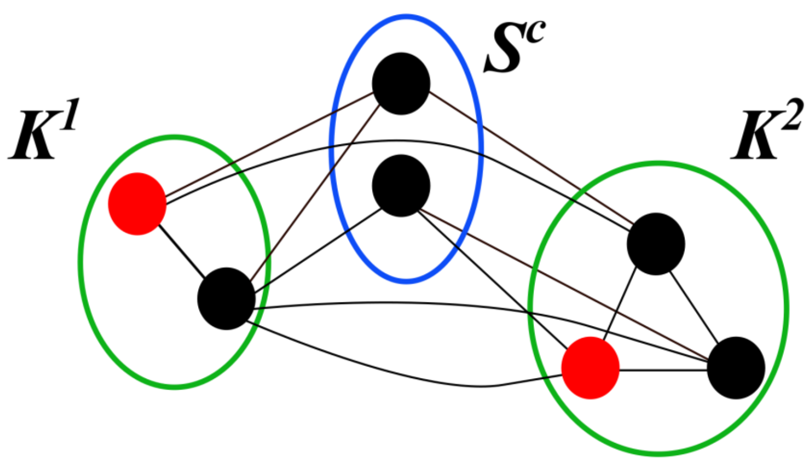
<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** carecas, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se
(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,
(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$
(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

__**Teorema:**__ Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2** carecas, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se
(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,
(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$
(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Problema G(1, 2)BC

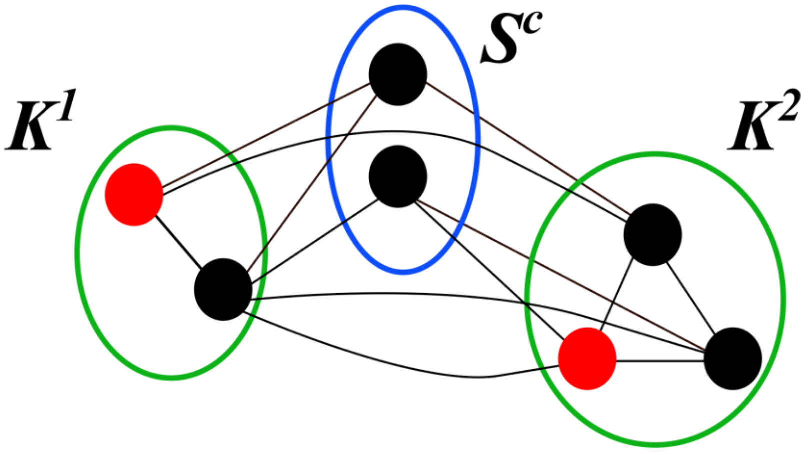
Caso 3: careca-careca (classe $|S^c|$)

<u>**Teorema:**</u> Seja **G** um **grafo-(1,2), K^1, K^2 carecas**, $u \in K^1$, $v \in K^2$.
G é **bem coberto** de classe $|S^c|$ se e somente se

(i) $1 \leq |N_{S^c}(u)| \leq 2$ e $1 \leq |N_{S^c}(v)| \leq 2$,

(ii) se $uv \notin E$ então $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$

(iii) se $|N_{S^c}(u)|=2$ e $|N_{S^c}(\{u,v\})|=2$, então há um vértice $w \in K^2$ tal que $N(w) \subset N(u)$ e $uw \notin E$.



Todo c.i. maximal de G possui cardinalidade $|S^c|$

Problema G(k, ℓ)BC

Problema **GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO** – Casos polinomiais

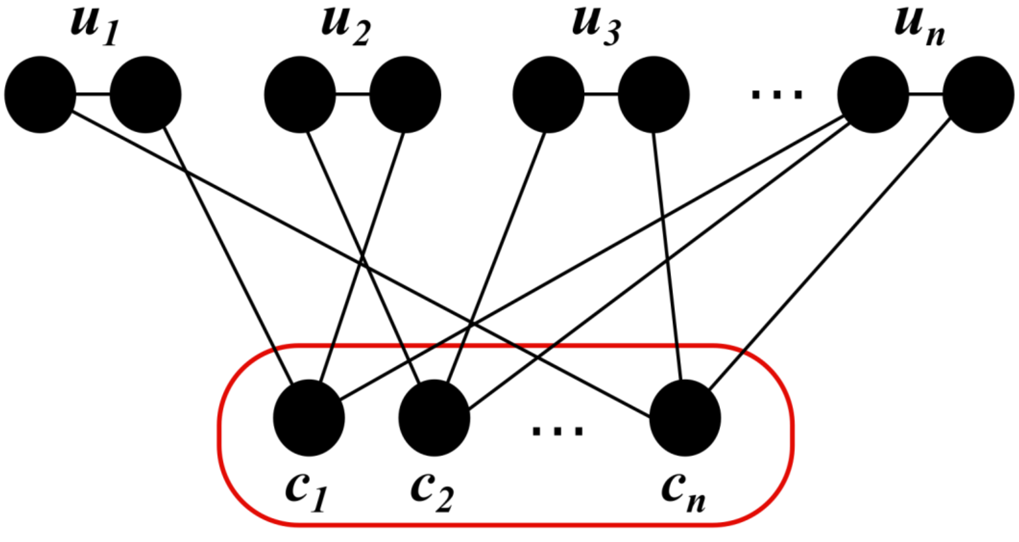
$r \backslash \ell$	0	1	2	≥3
0	-	P	P	
1	P	P	P	
2	P			
≥3				

Tabela 2: Complexidade do problema de decisão grafo-(r, ℓ) bem coberto, onde P: polinomial.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

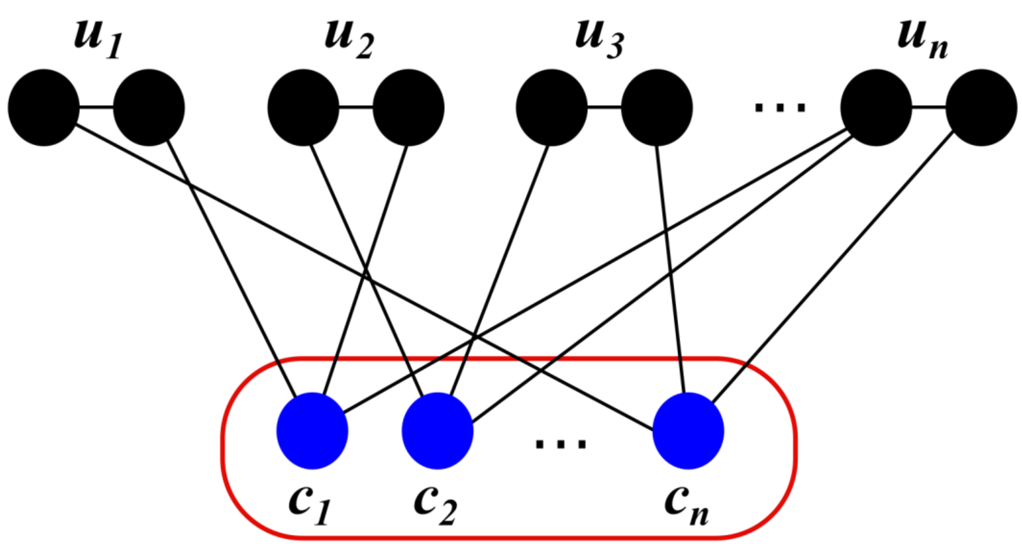
Observação: O grafo proposto por [Chvátal e Slater, 1993] para demonstrar que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo é um grafo-(2,1).



Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

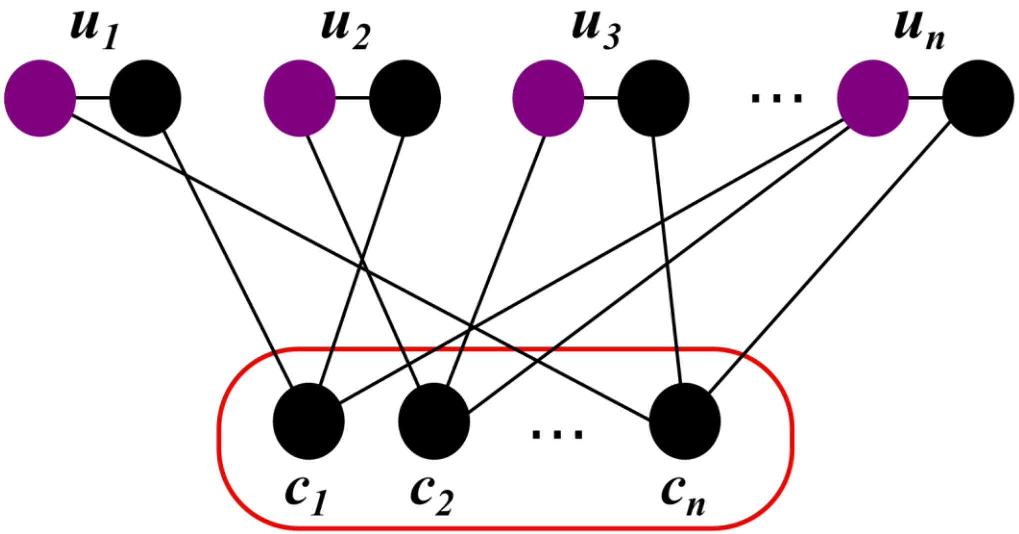
Observação: O grafo proposto por [Chvátal e Slater, 1993] para demonstrar que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo é um grafo-(2,1).



Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

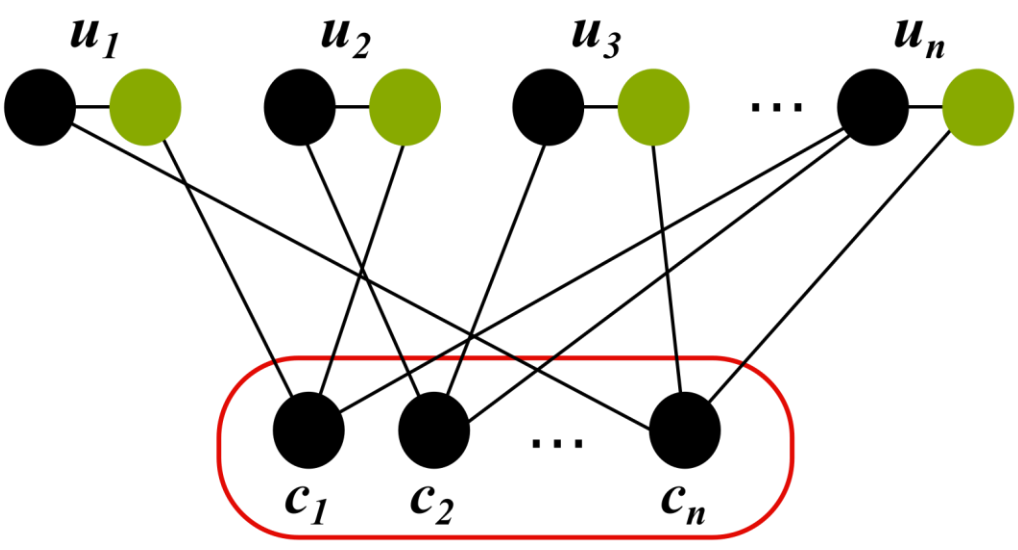
Observação: O grafo proposto por [Chvátal e Slater, 1993] para demonstrar que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo é um grafo-(2,1).



Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

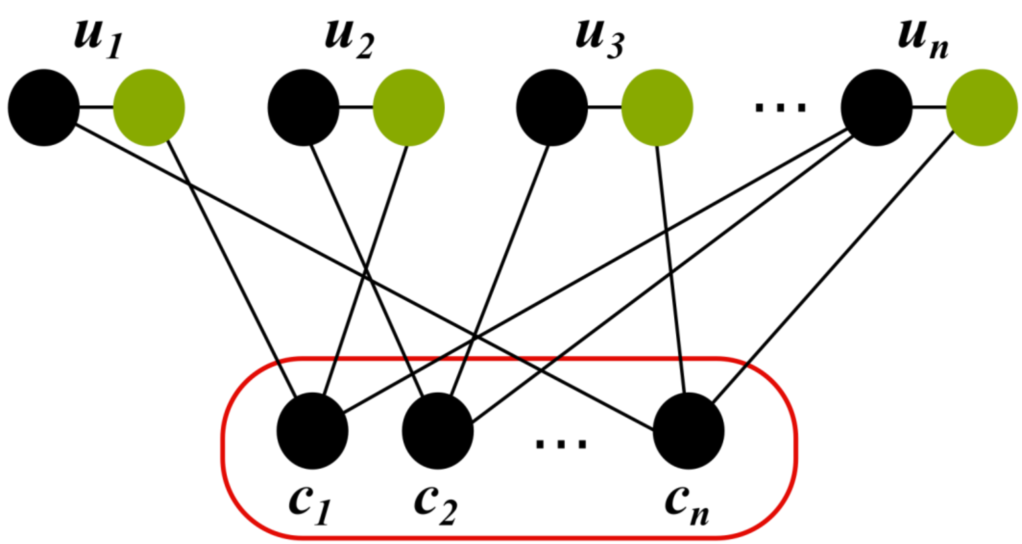
Observação: O grafo proposto por [Chvátal e Slater, 1993] para demonstrar que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo é um grafo-(2,1).



Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Observação: O grafo proposto por [Chvátal e Slater, 1993] para demonstrar que o **Problema GRAFO BEM COBERTO** é coNP-completo é um grafo-(2,1).



Corolário: G(2,1)BC é coNP-completo.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

r \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	
1	P	P	P	
2	P	coNPc		
≥ 3				

Tabela 2: Complexidade do problema de decisão grafo-(r, ℓ) bem coberto, onde P: polinomial, NPc: NP-completo, coNPc: coNP-completo.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

Teorema [Alves, Dabrowski, Faria, Klein, Sau, Souza, 2016]**:**
G(3,0)BC é (co)NP-difícil.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

Teorema [Alves, Dabrowski, Faria, Klein, Sau, Souza, 2016]**:**
G(3,0)BC é (co)NP-difícil.

G(0,3)BC é NP-completo.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

Teorema [Alves, Dabrowski, Faria, Klein, Sau, Souza, 2016]**:**
G(3,0)BC é (co)NP-difícil.

G(0,3)BC é NP-completo.

G(1,3)BC é NP-completo

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

r \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	NPc
1	P	P	P	NPc
2	P	coNPc	coNPc	(co)NPh
≥ 3	(co)NPh			

Tabela 1: Complexidade do problema de decisão grafo-(r, ℓ) bem coberto, onde P: polinomial, NPc: NP-completo, coNPc: coNP-completo, NPh: NP-difícil and (co)NPh: significa que o problema é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil.

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

Teorema da Monotonicidade

(i) Se G(k, ℓ)BC é NPh (resp. coNPh) então G(k, ℓ+1)BC é NPh (resp. coNPh).

Problema G(k, ℓ)BC

<u>Casos difíceis</u>

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

<u>Teorema da Monotonicidade</u>

(i) Se G(k, ℓ)BC é NPh (resp. coNPh) então G(k, ℓ+1)BC é NPh (resp. coNPh).

(ii) Se k≥1 e G(k, ℓ)BC é NPh (resp. coNPh) então G(k+1, ℓ)BC é NPh (resp. coNPh).

Problema G(k, ℓ)BC

Casos difíceis

Problema GRAFO-(k, ℓ) BEM COBERTO

k \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	NPc
1	P	P	P	NPc
2	P	coNPc	coNPc	(co)NPh
≥ 3	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh

Tabela 1: Complexidade do problema de decisão grafo-(k, ℓ) bem coberto, onde P: polinomial, NPc: NP-completo, coNPc: coNP-completo, NPh: NP-difícil and (co)NPh: significa que o problema é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil.

Problemas em aberto

1. **Problema GRAFO BEM COBERTO-(k, ℓ) (GBC)(k, ℓ)**
   Instância: Grafo **G=(V,E)**, e $V=(S^1,\ldots, S^k, K^1,\ldots, K^\ell)$.
   Pergunta: **G** é um **grafo bem coberto**?

Problemas em aberto

1. **Problema GRAFO BEM COBERTO-(k, ℓ) (GBC)(k, ℓ)**
   Instância: Grafo **G=(V,E)**, e $V=(S^1,\ldots, S^k, K^1,\ldots, K^\ell)$.
   Pergunta: **G** é um **grafo bem coberto**?

$\mathrm{GBC}(k,\ell)$	0	1	2	≥ 3
0	–	P	P	P
1	P	P	P	P
2	P	coNPc	coNPc	coNPc
≥ 3	?	coNPc	coNPc	coNPc

Problemas em aberto

1. **Problema GRAFO BEM COBERTO-(k, ℓ) (GBC)(k, ℓ)**
   <u>Instância</u>: Grafo **G=(V,E)**, e $V=(S^1,\dots, S^k, K^1,\dots, K^\ell)$.
   <u>Pergunta</u>: G é um **grafo bem coberto**?

$GBC(k, \ell)$	0	1	2	≥ 3
0	–	P	P	P
1	P	P	P	P
2	P	coNPc	coNPc	coNPc
≥ 3	?	coNPc	coNPc	coNPc

2. **Problema GRAFO COM CLIQUE Máxima $r \in \mathbb{N}$, r fixo**
   <u>Instância</u>: Grafo **G=(V,E) com clique máxima *r***.
   <u>Pergunta</u>: G é um **grafo bem coberto**?

sula@cos.ufrj.br

Obrigada !!!