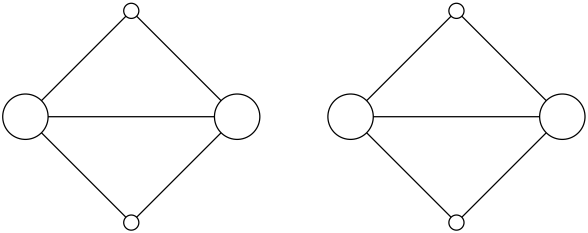
Alguns aspectos sobre b-coloração

Ana Silva
Cláudia Linhares Sales

ParGO – Parallelism, Graphs and Optimization
Universidade Federal do Ceará, Brazil

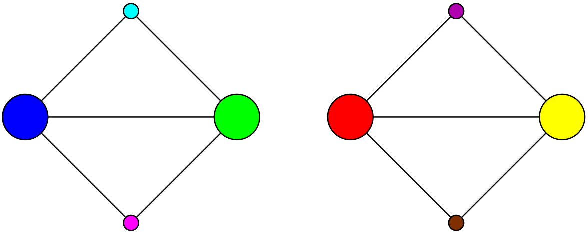
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

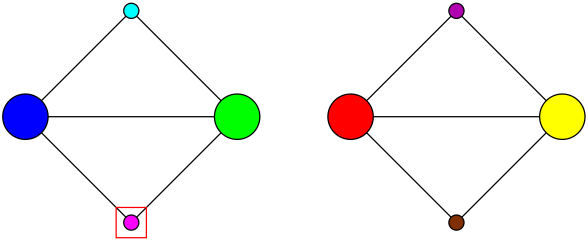
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

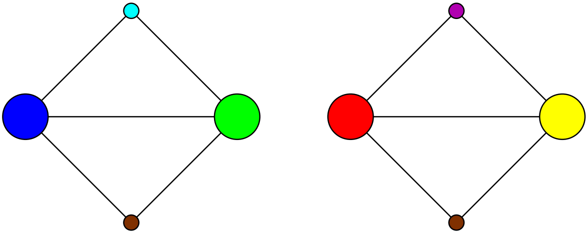
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

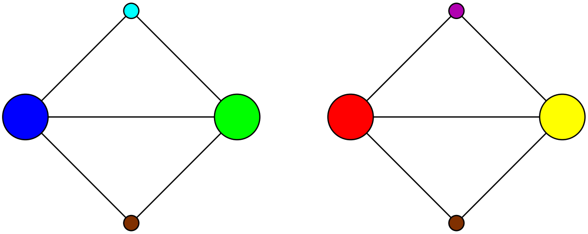
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

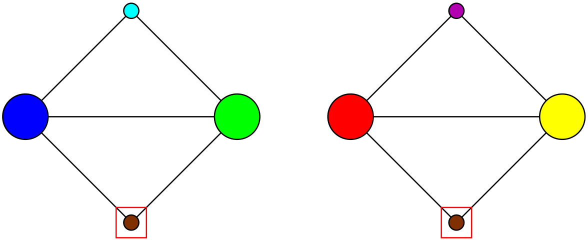
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

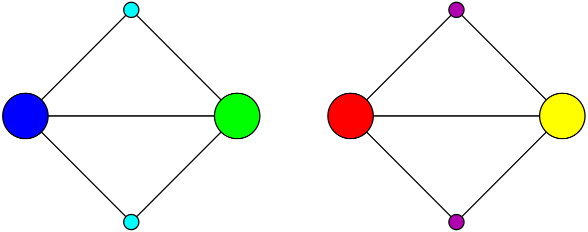
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

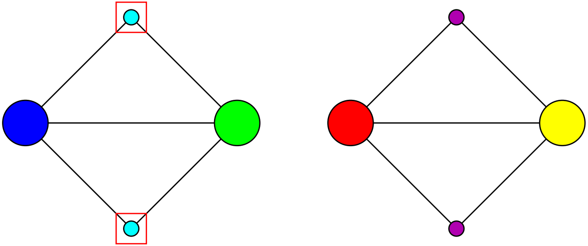
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

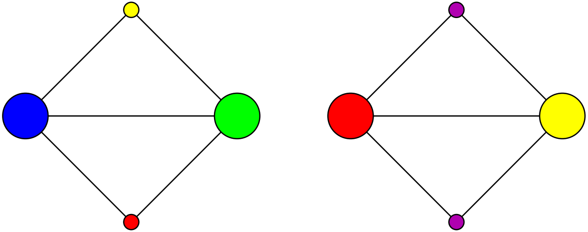
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

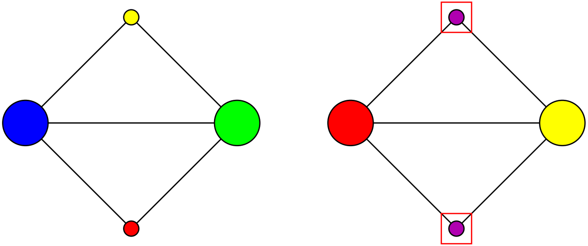
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

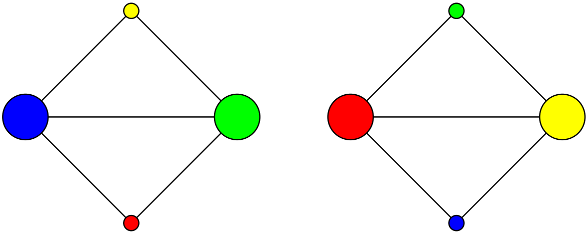
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

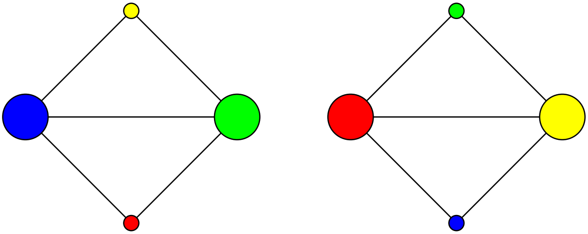
Heurística b-coloração



Heurística:

1. Dê cores distintas para cada vértice de G.
2. Escholha uma cor para eliminar.
3. Recolorimos cada vértice nesta cor.
4. Quando possível, volte ao passo 2.

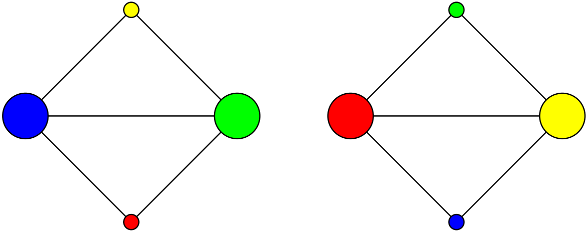
b-coloração



Definition:

- b-vértice: tem ao menos um vizinho em cada classe de cor;
- b-coloração: cada classe de cor tem ao menos um b-vértice;
- $b(G) =$ max cores em uma b-coloração de G.

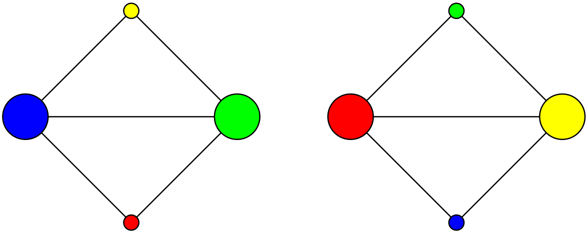
b-coloração



Definition:

- b-vértice: tem ao menos um vizinho em cada classe de cor;
- b-coloração: cada classe de cor tem ao menos um b-vértice;
- $b(G) =$ max cores em uma b-coloração de G.

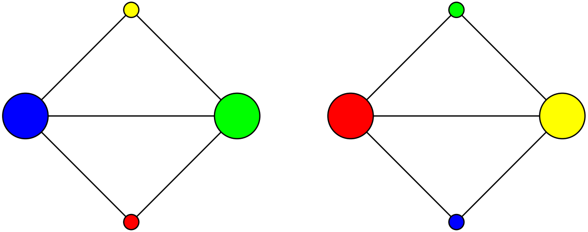
b-coloração



Definition: b-chromatic number

- b-vértice: tem ao menos um vizinho em cada classe de cor;
- b-coloração: cada classe de cor tem ao menos um b-vértice;
- $b(G)$ = max cores em uma b-coloração de G.

Limite superior

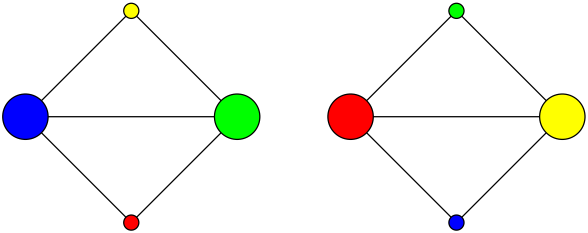


Possui 4 vértices com grau ao menos 3.

$$m(G) = \max\{k \mid G \text{ tem } k \text{ vértices de grau } \geq k-1\}$$

$$\chi(G) \leq b(G) \leq m(G).$$

Limite superior

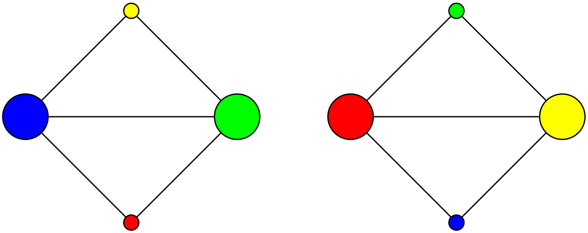


Possui 4 vértices com grau ao menos 3.

$$m(G) = \max\{k \mid G \text{ tem } k \text{ vértices de grau } \geq k-1\}$$

$$\chi(G) \leq b(G) \leq m(G).$$

Limite superior



Possui 4 vértices com grau ao menos 3.

$$m(G) = \max\{k \mid G \text{ tem } k \text{ vértices de grau } \geq k-1\}$$

$$\chi(G) \leq b(G) \leq m(G).$$

Uma propriedade interessante de árvores

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

Irving and Manlove.
The b-chromatic number of a graph.
Discrete App. Math. 91 (1999) 127–141.

Uma propriedade interessante de árvores

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

E que outros grafos com estrutura de árvore tem a mesma propriedade? (Maffray)

Irving and Manlove.
The b-chromatic number of a graph.
Discrete App. Math. 91 (1999) 127–141.

Grafos com estrutura de árvore

Teorema (Campos, Linhares-Sales, Maffray e **S.**, 2009)

Se G é um cactus e $m(G) \geq 7$, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Campos, Linhares Sales, Maffray e Silva.
b-chromatic number of cacti.
LAGOS'09.

Grafos com estrutura de árvore

Teorema (Campos, Linhares-Sales, Maffray e S., 2009)

Se G é um cactus e $m(G) \geq 7$, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Teorema (Maffray e S., 2012)

Se G é periplanar com cintura ao menos 8, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Maffray e Silva.
b-coloring outerplanar graphs with large girth.
Discrete Math. 312 (2012) 1796–1803.

Grafos com estrutura de árvore

Teorema (Campos et al., 2015)

Se G é linha de caterpillar, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Campos, Lima, Martins, Sampaio, Santos e Silva.
The b-chromatic index of graphs.
Discrete Math. 338 (2015) 2072–2079.

Grafos com estrutura de árvore

Teorema (Campos et al., 2015)

Se G é linha de caterpillar, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Teorema (**S.**, 2015)

Se G é linha de árvore, então $m(G) - b(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

Silva.
Trees with small b-chromatic index.
arXiv:1511.05847.

Grafos com estrutura de árvore

Teorema (Campos et al., 2015)

Se G é linha de caterpillar, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Teorema (S., 2015)

Se G é linha de árvore, então $m(G) - b(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

Teorema (Campos e S., 2018)

Se G é linha de árvore, então é polinomial calcular $b(G)$.

Campos e Silva.
b-edge-coloring trees.
Algorithmica 80 (2018) 104–115.

Qual aspecto das árvores ajuda?

Teorema (Kratochvíl, Tuza e Voigt, 2002)

Se G é bipartido, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Kratochvil, Tuza e Voigt
On the b-chromatic number of graphs.
WG 2002, Lecture Notes in Computer Science 2573.

Qual aspecto das árvores ajuda?

Teorema (Kratochvíl, Tuza e Voigt, 2002)
Se G é bipartido, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Teorema (Havet, Linhares-Sales e Sampaio, 2012)
Se G é cordal, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Havet, Linhares-Sales and Sampaio.
b-coloring of tight graphs.
Discrete Appl. Math. 160 (18) (2012) 2709–2715.

Qual aspecto das árvores ajuda?

Teorema (Kratochvíl, Tuza e Voigt, 2002)

Se G é bipartido, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Teorema (Havet, Linhares-Sales e Sampaio, 2012)

Se G é cordal, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Teorema (Campos et al., 2015)

Se G é grafo linha, então calcular $b(G)$ é NP-difícil.

Campos, Lima, Martins, Sampaio, Santos and Silva.
The b-chromatic index of graphs.
Discrete Math. 338 (11) (2015) 2072–2079.

Grafos localmente acíclicos

Conjectura (Blidia, Maffray and Zemir, 2009)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

M. Blidia, F. Maffray and Z. Zemir.
On b-colorings in regular graphs.
Discrete Applied Math. 157 (2009) 1787–1793.

Grafos localmente acíclicos

Conjectura (Blidia, Maffray and Zemir, 2009)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

Teorema (Kouider e Sahili, 2006)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e sem C_6, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

M. Kouider e A. E. Sahili.
b-chromatic number of a graph, subgraphs and degrees.
Thechnical report, Université Paris Sud, 2006.

Grafos localmente acíclicos

Conjectura (Blidia, Maffray and Zemir, 2009)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

Teorema (Kouider e Sahili, 2006)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e sem C_6, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

Teorema (Cabello e Jakovac, 2011)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5, então $b(G) \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$.

S. Cabello e M. Jakovac
On the b-chromatic number of regular graphs.
Discrete Appl. Math. 159 (2011) 1303–1310.

Teorema (S., 2010)

Se G tem cintura ao menos 11, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

A. Silva.
Le nombre b-chromatique de quelques classes de graphes généralisant les arbres.
Tese de doutorado, Universidade de Grenoble, 2010.

Grafos localmente acíclicos

Teorema (**S.**, 2010)

Se G tem cintura ao menos 11, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Teorema (Campos, Limas e **S.**, 2010)

Se G tem cintura ao menos 7, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Campos, Lima and Silva.
Graphs with girth at least 7 have high b-chromatic number.
European J. Combinatorics 48 (2015) 154–164.

Grafos localmente acíclicos

Teorema (S., 2010)

Se G tem cintura ao menos 11, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Teorema (Campos, Limas e S., 2010)

Se G tem cintura ao menos 7, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Qual o menor g^* t.q. $b(G) \geq m(G) - 1$ se G tem cintura $\geq g^*$?

$$5 \leq g^* \leq 7.$$

Campos, Lima and Silva.
Graphs with girth at least 7 have high b-chromatic number.
European J. Combinatorics 48 (2015) 154–164.

Grafos bipartidos localmente acíclicos

$$\mathcal{B}_m = G \text{ com } m(G) \text{ vertices de grau } m(G) - 1, \text{ bipartido e com cintura} \geq 6.$$

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}_m$, *então* $b(G) \geq m(G) - 1$.

F. Havet, C. Linhares, and L. Sampaio.
b-coloring of tight graphs.
Discrete Appl. Math. 160 (2012) 2709–2715.

Grafos bipartidos localmente acíclicos

$\mathcal{B}_m = G$ com $m(G)$ vertices de grau $m(G) - 1$, bipartido e com cintura ≥ 6.

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.

Teorema (Lin e Chang, 2013)

Erdős-Faber-Lovász implica Havet-Linhares-Sampaio.

W-H. Lin e G.J. Chang.
b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdő-Faber-Lovász Conjecture.
Discrete App. Math. 161 (2013) 1060–1066.

Grafos bipartidos localmente acíclicos

$\mathcal{B}_m = G$ com $m(G)$ vertices de grau $m(G) - 1$, bipartido
e com cintura ≥ 6.

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.

Teorema (Lin e Chang, 2013)

Erdős-Faber-Lovász implica Havet-Linhares-Sampaio.

Se $g^* \leq 6$, então HLS10 vale.

W-H. Lin e G.J. Chang.
b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdő-Faber-Lovász Conjecture.
Discrete App. Math. 161 (2013) 1060–1066.

Conjectura (Maffray e S., 2013)

Se G é conexo sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \,\square\, C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.

F. Maffray e A. Silva.
b-coloring the cartesian product of trees and some other graphs.
Discrete Appl. Math. 161 (2013) 650–669.

Vértices com poucos vizinhos em comum

Conjectura (Maffray e **S.**, 2013)

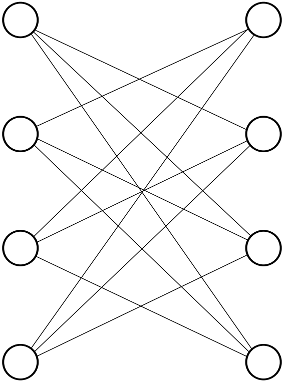
Se G é conexo sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.

Se MS13 vale, então $g^* = 5$.
Segue HLS10.
Segue uma versão mais fraca de BMZ09.

F. Maffray e A. Silva.
b-coloring the cartesian product of trees and some other graphs.
Discrete Appl. Math. 161 (2013) 650–669.

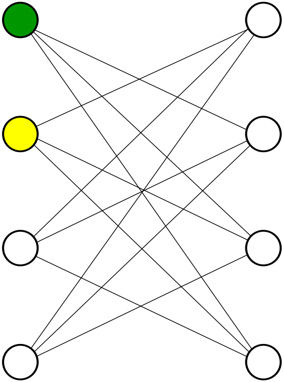
Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



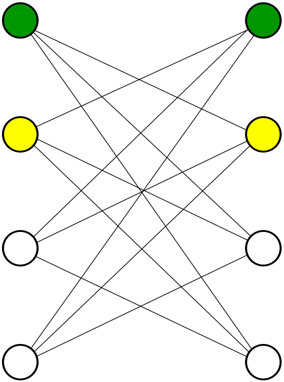
Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



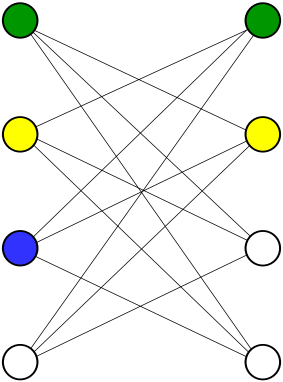
Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



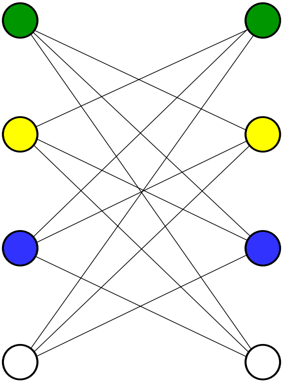
Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



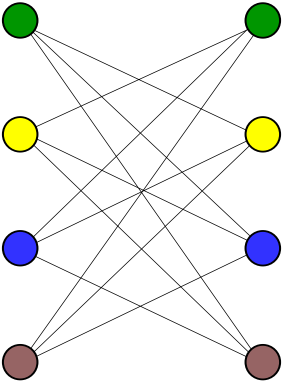
Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



Um aspecto interessante

G pode não ter coloração com k cores, para $k \in \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$.



b-continuidade

Definição: b-espectro

- $S_b(G)$: todo k t.q. G admite b-coloração com k cores;
- Se $S_b(G) = \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$, diz-se que G é b-contínuo.

b-continuidade

Definição: b-contínuo

- $S_b(G)$: todo k t.q. G admite b-coloração com k cores;
- Se $S_b(G) = \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$, diz-se que G é b-contínuo.

Existência e complexidade

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)

Para todo $S \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$, *existe* G *t.q.* $S_b(G) = S$.

D. Barth, J. Cohen and T. Faik.
On the b-continuity property of graphs.
Discrete Appl. Math. 155 (2007) 1761–1768.

Existência e complexidade

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)

Para todo $S \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$, existe G t.q. $S_b(G) = S$.

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)

Decidir se G é b-contínuo é NP*-completo, mesmo se fornecidas colorações com $\chi(G)$ e $b(G)$ cores.*

D. Barth, J. Cohen and T. Faik.
On the b-continuity property of graphs.
Discrete Appl. Math. 155 (2007) 1761–1768.

E grafos com cintura alta?

Teorema (Linhares-Sales e **S.**, 2017)

Se G tem cintura ≥ 10, então G é b-contínuo.

C. Linhares Sales e A. Silva.
The b-continuity of graphs with large girth.
Graphs and Combinatorics 33 (2017) 1139–1146.

E grafos com cintura alta?

Teorema (Linhares-Sales e S., 2017)

Se G tem cintura ≥ 10, então G é b-contínuo.

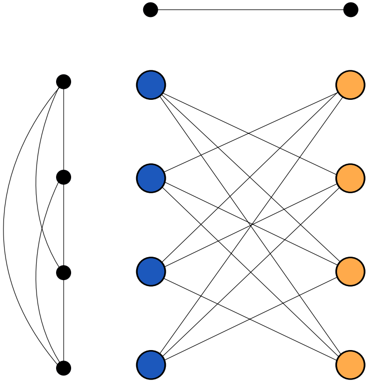
Teorema (Ibiapina e S., 2018)

Se G tem cintura ≥ 8, então G é b-contínuo.
E se G tem cintura ≥ 7, então $[2\chi(G), b(G)] \subseteq S_b(G)$.

A. Ibiapina e A. Silva.
The b-continuity of graphs with large girth.
LAWCG'2018.

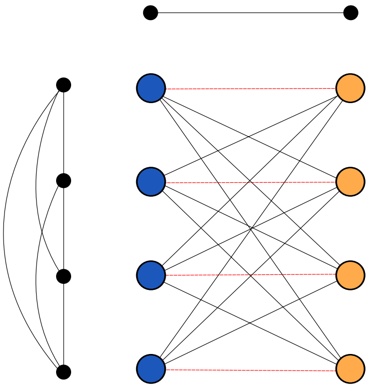
Produtos preservam b-continuidade?

Direto e cartesiano não.



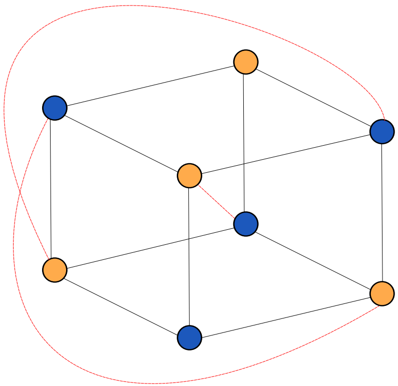
Produtos preservam b-continuidade?

Direto e cartesiano não.



Produtos preservam b-continuidade?

Direto e cartesiano não.



E quanto a produtos lexicográficos?

Teorema (Linhares-Sales, Vargas e Sampaio, 2015.)

Se G e H são b-contínuos e $b(H) > \chi(H)$, então

$$[\chi(G[H]), b(G)b(H)] \subseteq S_b(G[H]).$$

Linhares-Sales, Vargas and Sampaio.
b-continuity and the lexicographic product of graphs.
LAGOS'15. Electron. Notes in Discrete Math. 50 (2015) 134–144.

E quanto a produtos lexicográficos?

Teorema (Linhares-Sales, Vargas e Sampaio, 2015.)
Se G e H são b-contínuos e $b(H) > \chi(H)$, então

$$[\chi(G[H]), b(G)b(H)] \subseteq S_b(G[H]).$$

Teorema (Linhares-Sales, Sampaio e S., 2017.)
Se $G[K_x]$ é b-contínuo, $\forall x \in \mathbb{Z}^+$, e H é b-contínuo ($t = b(H)$), então

$$[\chi(G[H]), b(G[K_t])] \subseteq S_b(G[H]).$$

C. Linhares Sales, L. Sampaio and A. Silva.
On the b-continuity of the lexicographic product of graphs.
Graphs and Combinatorics 33 (2017) 1165–1180.

E quanto a produtos lexicográficos?

Teorema (Linhares-Sales, Sampaio e **S.**, 2017.)

If G is an interval graph or a block graph or a cograph, and H is a b-continuous graph, then $G[H]$ is b-continuous.

C. Linhares Sales, L. Sampaio and A. Silva.
The lexicographic product of some chordal graphs and of cographs preserves b-continuity.
LAGOS'2017.

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \,\square\, C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \square C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \,\square\, C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Problemas abertos

- [Blidia-Maffray-Zemir] G d-regular com cintura ≥ 5 e G não é o grafo de Petersen, então $b(G) = m(G) = d + 1$.
- [Havet-Linhares-Sapaio] Se $G \in \mathcal{B}_m$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- [Maffray-Silva] Se G sem $K_{2,3}$ e $G \neq C_3 \,\square\, C_3$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.
- Quais os menores valores $g^*, \hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. $b(G) \geq m(G) - 1$, se cintura $\geq g^*$; $(5 \leq g^* \leq 7)$
  2. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  3. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo.
- $G[K_\ell]$ é b-contínuo sempre que G é b-contínuo?

Obrigada!