Keep coloring, even it's hard

Part 1

Cláudia Linhares Sales

Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará

Novembro, 2018

Frédéric Maffray – 19/08/1960-22/08/2018

Figura: Vercors, final de julho de 2018

Frédéric era como essas pessoas um pouco misteriosas. Dessas pessoas que plantam ternura por onde passam ao longo de suas vidas, sem nenhuma razão ou objetivo preciso aparente.
Era desse tipo de gente rara que provoca sempre sorrisos, e abraça com o olhar quem lhes vê. Desse tipo de gente que a gente sempre quer sentar ao lado delas.
Dessas pessoas que lembram o tempo todo que não existe métrica para a felicidade, e que a maior liberdade parece ser ter um olhar livre sobre tudo e todos.
Era assim que eu via Frédéric. É esse Frédéric que deixou um enorme vazio e imensa saudade.

Coloração de Vértices

k-coloração de vértices

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma k-coloração de G é uma atribuição $c : V(G) \longmapsto \{1, \cdots, k\}$ de cores aos vértices de G de forma que $c(u) \neq c(v)$, sempre que $uv \in E(G)$.

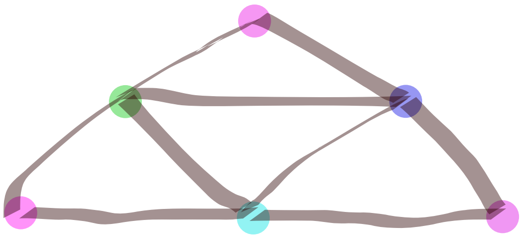


Figura: 4-coloração do grafo de Hajös

Coloração de Vértices

Número cromático

Dado um grafo $G = (V, E)$, o número cromático de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k para o qual G admite uma k-coloração.

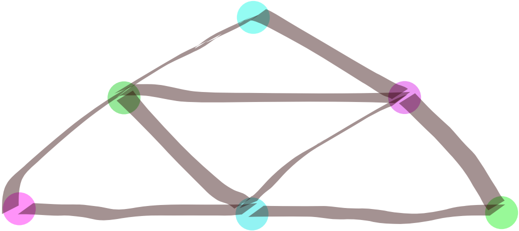


Figura: 3-coloração do grafo de Hajös

Coloração de Vértices

- O problema clássico e suas dezenas de variações modelam diversos problemas práticos que envolvem particionamento e conflitos (escalonamentos e atribuições diversas, tais como de freqüências, de canais, de registradores, *buffers*, etc.)
- Não se conhece algoritmo polinomial para determinar $\chi(G)$ para um grafo G qualquer. Na realidade, sabe-se que o problema é *NP*-difícil. Mais do que isso, sabe-se que o problema é inaproximável.

F. Maffray, M. Preissmann. On the NP-completeness of the k-colorability problem for triangle-free graphs. Discrete Mathematics 162 (1996), 313-317.

C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. Journal of the ACM, 41(5):960–981, 1994.

Grafos Perfeitos

Grafos Perfeitos

Um grafo G é perfeito se para todo subgrafo induzido $H \subseteq G$, $\chi(H) = \omega(H)$

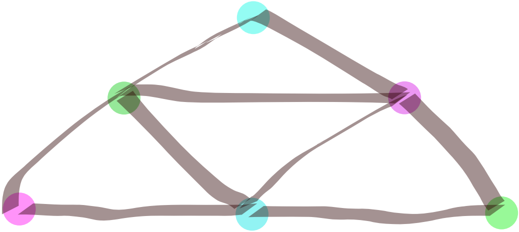


Figura: $\chi(G) = \omega(G)$

C. Berge, Some classes of perfect graphs, in: Six Papers on Graph Theory (Indian Statistical Institute, Calcutá, 1963), 1-21.

Grafos Perfeitos

- Se G é perfeito, $\chi(G)$ pode ser determinado em tempo polinomial.
- O algoritmo polinomial que determina $\chi(G)$ não é puramente combinatório.

Problema em aberto:

Encontrar um algoritmo puramente combinatório polinomial para determinar $\chi(G)$, G perfeito.

A despeito de todos os avanços em grafos perfeitos, esse algoritmo ainda não existe!

M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, Combinatorica 1 (1981), 169- 197.

Grafos Perfeitos

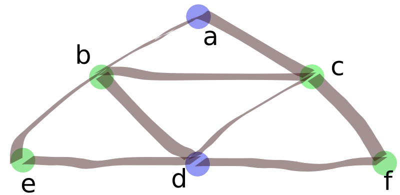
- Um par de amigos (*even pair*) em um grafo $G = (V, E)$ é um par de vértices não adjacentes de G tais que todos os caminhos induzidos entre eles tem comprimento par.
- A contração de pares de amigos em um grafo perfeito G preserva a perfeição e o número cromático de G.

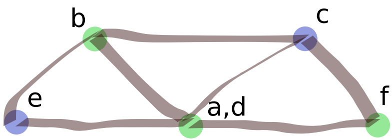
Figura: Beberibe, maio de 2015

Figura: Celina+Fred = 100, 2010

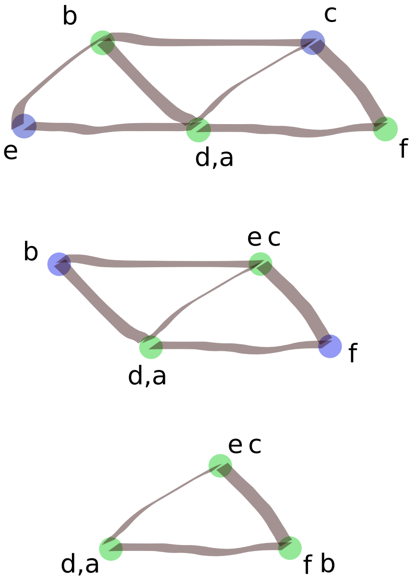
J. Fonlupt, J.P. Uhry, Transformations which preserve perfectness and H-perfectness of graphs. Annals of Discr. Math., 16 (1982), pp. 83–95

Um algoritmo de Coloração

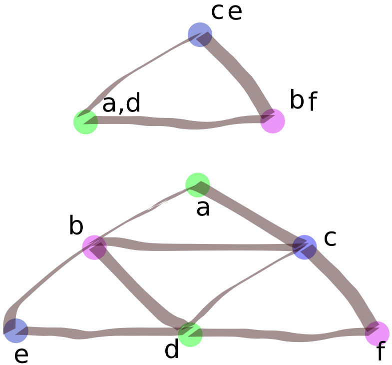




Um algoritmo de Coloração



Um algoritmo de Coloração



Classes de grafos perfeitos

- Um grafo G é de quasi-paridade estrita (SQP) se G e cada subgrafo induzido de G possui um par de amigos.
- Um grafo G é perfeitamente contractível (PC) se G e cada subgrafo induzido de G possui uma seqüência de contração de pares de amigos que leva a um grafo completo.

Conjectura de S. Hougardy

Se um grafo G é minimal não SQP, então G é um ciclo ímpar ou um complemento de um ciclo ímpar ou um grafo linha de bipartido.

Conjectura de H. Everett e B. Reed

Um grafo G é minimal não PC se e somente se G é um ciclo impar ou o complemento de um ciclo impar ou prisma ímpar.

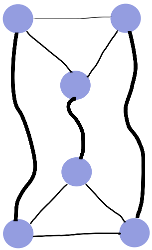


Figura: Prisma

As duas conjecturas seguem abertas!

Reed B.A., Problem session on parity problems (Public communication). DIMACS Workshop on Perfect Graphs, Princeton University, New Jersey, 1993.

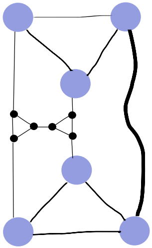
Hougardy S., Even and odd pairs in linegraphs of bipartite graphs. Eur. J. Comb. 16(1): 17-21 (1995)

Resultados em Grafos Planares

Theorem (Linhares Sales, Maffray, Reed, 2008)

Todo grafo planar minimal não SQP é um buraco ímpar ou um grafo linha de um grafo bipartido.

Nós conhecemos toda a familia de grafos planares não SQP minimais que são grafos linha de bipartidos.



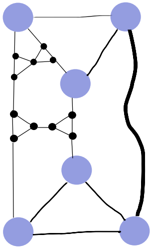
Linhares Sales, C.; Mafray, F. ; Reed, B. A., On Planar Strict Quasi Parity Graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, v. 22, p. 329-347, 2008.

Resultados em Grafos Planares

Theorem (Linhares Sales, Maffray, Reed, 2008)

Todo grafo planar minimal não SQP é um buraco ímpar ou um grafo linha de um grafo bipartido.

Nós conhecemos toda a familia de grafos planares não SQP minimais que são grafos linha de bipartidos.



Linhares Sales, C.; Mafray, F. ; Reed, B. A., On Planar Strict Quasi Parity Graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, v. 22, p. 329-347, 2008.

Theorem (Linhares Sales, Maffray, Reed, 1997)

Todo grafo planar minimal não PC é um buraco ímpar ou um prisma ímpar.

Depois de decompor G, planar, por cortes cliques, cortes especiais de tamanho 2 e cortes P_3, emcpntramos pares de vértices faciais que eram pares de amigos em faces não triangulares. No caso de todas as faces de G serem triangulares, G é PC, uma vez que G é de comparabilidade.

Nós usamos a decomposição de Hsu de grafos planares perfeitos para reconhecer os grafos planares perfeitamente contractíveis

Linhares Sales, C.; Mafray, F. ; Reed, B. A., Recognizing Planar Strict Quasi-Parity Graphs. Graphs and Combinatorics, v. 17, n.4, p. 745-757, 2001.

Linhares Sales, C.; Mafray, F. ; Reed, B. A., On Planar Perfectly Contractile Graphs. Graphs and Combinatorics, JAPAO, v. 13, p. 167-187, 1997.

Hsu, W.L.: Recognizing planar perfect graphs. J. Assoc. Compo Mach. 34, 255-288 (1987).

Grafos sem Garras

Theorem (Linhares Sales, Maffray, Reed, 1998)

Todo grafo sem garras minimal não SQP é um buraco ímpar ou complemento de um buraco ímpar ou um grafo linha de um grafo bipartido.

Theorem (Linhares Sales, Maffray, Reed, 1998)

Todo grafo sem garras minimal não PC é um buraco ímpar ou complemento de um buraco ímpar ou um prisma ímpar.

Grafos elementares e peculiares

Um grafo $G = (V, E)$ é elementar se as suas arestas podem ser coloridas com 2 cores de forma que todo P_3 é bicolorido. Um grafo $G = (V, E)$ é peculiar se $V(G)$ pode ser particionado em 6 conjuntos com relações bem definidas entre eles.

Linhares Sales, C.; Maffray, F., Even Pairs In Claw-Free Perfect Graphs. Journal of Combinatorial Theory. Series B, UNITED STATES, v. 74, p. 169-191, 1998.

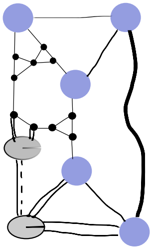
Theorem (Chvátal, Sbihi, 1988)

Um grafo $G = (V, E)$ sem garras e sem cortes clique é perfeito se e somente se G é peculiar ou elementar.

Grafos peculiares sem anti-buracos ímpares são PC.

Theorem (Maffray, Reed, 1999)

Um grafo é elementar se e somente se ele é a aumentação de um grafo linha de um multigrafo bipartido.



F. Maffray, B.A. Reed. A description of claw-free perfect graphs. Journal of Combinatorial Theory B, 75 (1999), 134-156.

V. Chvátal and N. Sbihi, Recognizing claw-free perfect graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 44 (1988), 154-176.

Mais pares de amigos

Theorem (Linhares Sales, Maffray, 2004)

Todo grafo sem pipas minimal não PC é um buraco ímpar ou complemento de um buraco ímpar ou um prisma ímpar.

Theorem (de Figueiredo, Maffray, Villela, 2006)

Seja $G = (V, E)$ *um grafo touro-redutível perfeito com pelo menos 2 vértices. Então* G *ou* $\bar{G}$ *tem um par de amigos, ou seja, é um grafo de quasi-paridade.*

Theorem (Maffray, Trotignon, 2006)

Todo grafo sem prismas ímpares ou pares é PC.

C.M.H. de Figueiredo, F. Maffray, C.R. Villela Maciel. Even pairs in bull-reducible graphs. In: Graph Theory in Paris, Proc. Conf. in Memory of Claude Berge. A. Bondy, J. Fonlupt, J.-L. Fouquet, J.-C. Fournier, J.L. Ramírez-Alfonsín (Eds.), Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 2006, pp. 179-195.

F. Maffray, N. Trotignon. A class of perfectly contractile graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 96 (2006), 1-19.

Linhares Sales, C.; Maffray, F. . On Dart-free Perfectly Contractile Graphs. Theoretical Computer Science, Amsterdan, v. 321, p. 171-194, 2004.

Heurísticas para colorir grafos

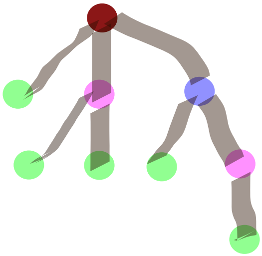
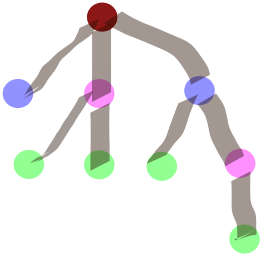
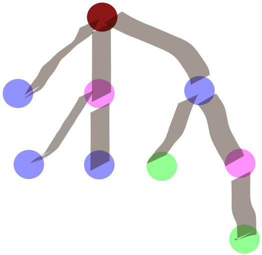


Figura: Árvore não pivoteada T

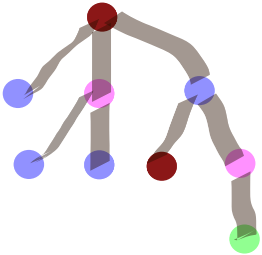
Heurística *b* para colorir grafos



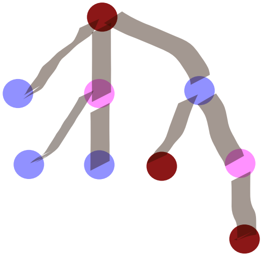
Heurística *b* para colorir grafos



Heurística *b* para colorir grafos



Heurística *b* para colorir grafos



b-colorações e número *b*-cromático

Número *b*-cromático

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma *b*-coloração de G com k cores é uma k-coloração dos vértices de G de tal forma que, em cada classe de cor, existe um vértice com vizinhos de todas as outras cores. O número de *b*-cromático de G, denotado por $\chi_b(G)$, é maior inteiro k tal que G admite uma *b*-coloração com k cores.

- Determinar $\chi_b(G)$ para um grafo qualquer G é *NP*-difícil;
- Refinamento da heurística *a* de coloração.

Irving, R.W., and Manlove D.F., The b-chromatic number of a graph, Discrete Appl. Math. 91, 127–141, 1999.

Resultados

Grafos *b*-perfeitos

Um grafo G é *b*-perfeito se para todo subgrafo induzido H de G, $\chi_b(H) = \chi(H)$.

Nós conjecturamos que a lista abaixo continha todos os grafos *b*-imperfeitos minimais, e provamos que era verdade para grafos sem diamantes e para grafos com número cromático no máximo 3.

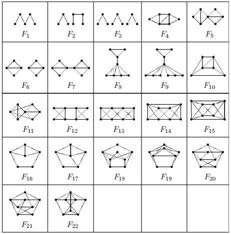


Figura: Lista dos 22 grafos *b*-imperfeitos minimais

Hoàng, C., Linhares Sales, C. Maffray, F., On minimally b-imperfect graphs. Discrete Applied Mathematics, v. 157, p. 3519-3530, 2009.

Hoàng, C., Maffray F., Mechebbek M., A characterization of b-perfect graphs. Journal of Graph Theory 71 (2012) 95-122.

A descendência

m-grau de um grafo

Denota-se por $m(G)$ o maior inteiro k tal que G possui pelo menos k vértices de grau pelo menos $k-1$. Daí tem-se que:

$$\chi_b(G) \leq m(G)$$

Theorem (Victor Campos, Linhares Sales, Maffray e Ana Silva, 2009)

Seja G um cactus com $m(G) \geq 7$. Então, $\chi_b(G) \geq m(G) - 1$.

Silva, A.S., ; Campos, V. A. ; Linhares Sales, C. ; Maffray, F. . b-chromatic Number of Cacti. In: V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, 2009, Gramado. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2009. v. 35. p. 281-286.

Figura: Mariele, Bruno, Frédéric e Hugo — Grenoble, fevereiro de 2007

Saudades...