



COPPE/UFRJ

CICLOS HAMILTONIANOS EM GRAFOS KNESER

Letícia Rodrigues Bueno

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Luerbio Faria
Peter Horák

Rio de Janeiro
Dezembro de 2009

CICLOS HAMILTONIANOS EM GRAFOS KNESER

Letícia Rodrigues Bueno

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

Prof. Candido Ferreira de Xavier Mendonça Neto, Ph.D.

Prof. Daniel Ratton Figueiredo, Ph.D.

Prof. Guilherme Dias da Fonseca, Ph.D.

Prof. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2009

Bueno, Letícia Rodrigues

Ciclos Hamiltonianos em Grafos Kneser/Letícia Rodrigues Bueno. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XV, 76 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luerbio Faria

Peter Horák

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 73 – 76.

1. Ciclos hamiltonianos. 2. Caminhos hamiltonianos.
3. Grafos Kneser. 4. Grafos ímpares. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*A Jesus Cristo.
Porque dEle, por meio dEle e
para Ele são todas as coisas.*

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CICLOS HAMILTONIANOS EM GRAFOS KNESER

Letícia Rodrigues Bueno

Dezembro/2009

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luerbio Faria

Peter Horák

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O grafo Kneser $K(n, k)$ tem como seu conjunto de vértices todos os subconjuntos de tamanho k de um conjunto de n elementos e dois destes subconjuntos são adjacentes se eles são disjuntos. O grafo ímpar O_k é o caso especial do grafo Kneser quando $n = 2k + 1$. Uma conjectura aberta de Lovász afirma que O_k tem um caminho hamiltoniano para todo $k \geq 1$. Até agora, a conjectura de Lovász foi comprovada em O_k para $k \leq 13$. Nós melhoramos estes valores mostrando que O_k tem um caminho hamiltoniano para $14 \leq k \leq 17$. Fazemos isso sem executar quaisquer algoritmos. Ao invés disso, utilizamos resultados existentes para o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo B_k : o grafo dos níveis médios do $(2k + 1)$ -cubo; assim relacionando estes dois importantes problemas. Por fim, estabelecemos quão próximos os grafos ímpares estão de ser hamiltonianos segundo uma interpretação bem definida de “próximo”. Mostramos que, para todo k par, O_k tem um passeio gerador fechado no qual todo vértice aparece no máximo duas vezes. Além disso, mostramos que para todo k ímpar, O_k tem uma trilha geradora fechada na qual cada vértice aparece no máximo duas vezes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

HAMILTONIAN CYCLES IN KNESER GRAPHS

Letícia Rodrigues Bueno

December/2009

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luerbio Faria

Peter Horák

Department: Systems Engineering and Computer Science

The Kneser graph $K(n, k)$ is a graph whose vertices are all subsets with k elements of a set that has n elements, and two vertices are joined by an edge if the corresponding pair of k -subsets is disjoint. The odd graph O_k is the special case of the Kneser graph when $n = 2k + 1$. A long standing conjecture due to Lovász claims that O_k has a hamiltonian path for all $k \geq 1$. Previously, Lovász's conjecture has been proved for $k \leq 13$. We have improved these values by showing that O_k has a hamiltonian path for $14 \leq k \leq 17$. Our proofs do not use the execution of algorithms, relying instead upon existing results on the problem of finding a hamiltonian cycle in the graph B_k — the middle levels graph of the $(2k + 1)$ -cube — thus relating these two important problems. At last, we have established how close the odd graphs are to being hamiltonian, according to a well-defined interpretation of “close”. We have shown that, for every k even, O_k has a closed spanning walk in which every vertex appears at most twice. Moreover, for every k odd, we have shown that O_k has a closed spanning trail in which every vertex appears at most twice.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Definições em Grafos	4
2.2 O Problema do Ciclo Hamiltoniano	14
2.2.1 Grafos Kneser	15
2.2.2 Grafos Ímpares	17
2.2.3 Grafos Kneser Bipartidos	19
3 Caminhos Hamiltonianos em Grafos Ímpares	26
3.1 O Grafo Reduzido	27
3.2 Caminhos Hamiltonianos no Grafo Ímpar	31
4 Prisma Hamiltoniano sobre os Grafos Ímpares	42
4.1 Preliminares	44
4.2 Prova do Resultado Principal	54
5 Conclusões	71
Referências Bibliográficas	73

Lista de Figuras

1.1	Um ciclo e um caminho hamiltonianos no dodecaedro.	1
1.2	Exemplo para o Problema do Caixeiro Viajante.	2
2.1	Vizinhança de um vértice.	5
2.2	Um grafo cúbico.	5
2.3	Grafos completos K_2 , K_3 e K_4	6
2.4	Grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$	6
2.5	Grafos Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4	6
2.6	Torneios em K_4	7
2.7	Um grafo G : (a) (v, u, z, p, y, u, v) é um passeio fechado; (b) (v, u, y) e (v, w, k, p, y) são dois possíveis caminhos entre v e y ; (c) (v, u, y, x, v) é um ciclo.	8
2.8	Grafo 1-conexo em vértices e 2-conexo em arestas.	9
2.9	Subgrafos.	9
2.10	Ilustração do Teorema 5.	10
2.11	Uma 1-fatorização do $K_{3,3}$: decomposição do $K_{3,3}$ em três emparelhamentos perfeitos disjuntos em arestas.	11
2.12	Árvore geradora de um grafo.	11
2.13	Grafos isomorfos.	11
2.14	Um automorfismo no grafo K_3	12
2.15	Um desenho planar de um grafo G com 3 faces.	12
2.16	O quadrado de um grafo G . Observe que somente as arestas vp , uk , xz e yw não estão em G^2 porque a distância em G entre os vértices de cada uma dessas arestas é maior que 2.	13
2.17	A operação de expansão sobre K_4	13

2.18	O menor contra-exemplo conhecido para a conjectura de Tutte: um grafo bipartido cúbico não-hamiltoniano com 54 vértices. As bipartições estão identificadas pela cor dos vértices.	14
2.19	Exemplos de grafos Kneser.	16
2.20	Uma 3-coloração dos vértices do grafo $K(5,2)$ (grafo de Petersen) onde $k = 2$ e $r = 1$	16
2.21	Grafos ímpares para $k = 1, 2, 3$	17
2.22	Quatro dos cinco grafos vértice-transitivos não hamiltonianos.	18
2.23	Caminhos hamiltonianos em O_1 e em O_2	19
2.24	Grafos Kneser bipartidos $B(3,1) = B_1$ e $B(5,2) = B_2$	19
2.25	Q_5 em números binários de n bits.	20
2.26	Um ciclo hamiltoniano em Q_5 . Representação sem o uso de números binários.	21
2.27	Construção de um ciclo hamiltoniano em B_1 a partir de um ciclo hamiltoniano em O_1 . Restrita a O_k ter número ímpar de vértices.	22
2.28	Construção de B_1 a partir de O_1	22
3.1	O grafo Kneser bipartido B_2 e o grafo reduzido \widetilde{B}_2	28
3.2	O grafo ímpar O_2 e o grafo reduzido $\widetilde{O}_2 = \widetilde{B}_2$	29
3.3	O grafo ímpar O_3 e o grafo reduzido \widetilde{O}_3	30
3.4	Ciclos induzidos por $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ no grafo ímpar O_2	32
3.5	Emparelhamento perfeito em O_2 resultado da aresta entre $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ em \widetilde{O}_2	33
3.6	Um caminho no grafo \widetilde{O}_3 resulta em $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 . Arestas não usadas estão cinzas.	34
3.7	Em (a) os $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 resultantes do caminho P destacado em (b). Os caminhos em O_3 estão conectados por arestas do ciclo induzido por $\sigma(r_1)$ (linhas pontilhadas). Arestas não usadas estão cinzas.	35
3.8	Construção do caminho hamiltoniano em O_k com Q_1 destacado.	37
3.9	Exemplo do Teorema 17: caso em que k é par. À direita: Caminho viável em \widetilde{O}_2 . À esquerda: caminho hamiltoniano em O_2	37

3.10	Em (a) o caminho hamiltoniano em O_3 resultado do caminho viável em (b). Em (c) os vértices em $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ e os caminhos usados na construção do caminho hamiltoniano em O_3 em (a).	38
3.11	Em (a) um ciclo hamiltoniano em O_4 . Em (b) ilustração da idéia para construir um ciclo hamiltoniano em O_4	40
3.12	Resultado do ciclo hamiltoniano em \widetilde{O}_4 apresentado na Figura 3.11 (a): um subgrafo gerador de O_4 composto de três ciclos disjuntos. . .	41
4.1	Prisma sobre os grafos O_1 , K_4 e O_2	43
4.2	Construção de um ciclo hamiltoniano no prisma sobre O_1 através de um caminho hamiltoniano em O_1 : cada cópia de O_1 em (b) tem destacado o caminho hamiltoniano em (a) que são unidos por duas arestas de K_2 no prisma.	43
4.3	O prisma sobre $K_{2,4}$ é hamiltoniano porém $K_{2,4}$ não tem caminho hamiltoniano pois a diferença entre o tamanho das duas bipartições é maior que 1.	45
4.4	Construção de um 2-passeio em K_4 através de um ciclo hamiltoniano no prisma sobre K_4 . Em (b), para facilitar o entendimento, chamamos de G_1 e G_2 as duas cópias do K_4 usadas para formar o prisma (e assim também os vértices estão nomeados com o mesmo índice do grafo). Um 2-passeio em K_4 é obtido removendo-se os índices dos vértices em C : (u, y, v, x, y, v, u)	45
4.5	Um exemplo de que um 2-passeio não implica um prisma hamiltoniano. Em (b) nomeamos os vértices com o mesmo índice da cópia de G	47
4.6	Um ciclo $C = (12, 123, 23, 234, 34, 345, 45, 145, 15, 125)$ em B_2 (arestas pretas) cuja projeção $\Pi(C) = (12, 45, 23, 15, 34, 12, 45, 23, 15, 34)$ em O_2 é um 2-passeio.	47
4.7	Os três emparelhamentos modulares em B_2	49

- 4.8 Um 2-fator em O_2 : a projeção de m_1 em (a) e a projeção de m_3 em (b) resultam no mesmo 2-fator em O_2 (Figura 4.9 (b)). Por exemplo, a projeção das arestas $\{34, 234\}$ e $\{15, 145\}$ de m_1 resulta em $\{34, 15\}$ e $\{15, 23\}$. Porém, a projeção das arestas $\{15, 125\}$ e $\{23, 234\}$ de m_3 resulta nas mesmas arestas $\{15, 34\}$ e $\{23, 15\}$ em O_2 49
- 4.9 Um emparelhamento perfeito em O_2 : em (a) a projeção de m_3 é um emparelhamento perfeito em O_2 . Por exemplo, $\Pi(\{12, 124\}) = \Pi(\{35, 345\})$ que é igual a $\{12, 35\}$ em O_2 . Assim, duas arestas em m_2 são projetadas para a mesma aresta em O_2 . Em (b) o 2-fator (arestas pretas) da projeção de m_1 (Figura 4.8) e o emparelhamento perfeito (arestas cinzas) em (a). 50
- 4.10 Em (a) $\Pi(m_1) = \Pi(m_4)$ e $\Pi(m_2) = \Pi(m_3)$. Em (b) $\Pi(m_1) = \Pi(m_5)$ e $\Pi(m_2) = \Pi(m_4)$ 50
- 4.11 Um ciclo C de $m_2 \cup m_3$ em B_4 onde $n = 2k + 1 = 9$ 53
- 4.12 Ordem cíclica dos quatro vértices A, B, C e D em um ciclo W . O caminho P está destacado por arestas pretas. 55
- 4.13 Ilustração do Lema 28: os vértices A e \bar{B} da aresta e ocorrem no ciclo C na ordem A, \bar{B} por causa da orientação cíclica que escolhemos. Da forma como apresentamos na figura, todo vértice no extremo inferior das arestas (vértices \bullet) é um k -subconjunto e todo vértice no extremo superior das arestas (vértices \circ) é um $(k + 1)$ -subconjunto. Assim, quando \bar{e} ocorre em C, B que é um k -subconjunto tem que vir antes de \bar{A} que é um $(k + 1)$ -subconjunto. 56
- 4.14 Ilustração do caso 1.1 do Teorema 18: um ciclo $W_1 \in m_2 \cup m_3$ de B_4 sem a aresta $g = \{1467, 14679\} \in m_3$. Observe que, porque $\bar{g} = \{23589, 2358\} \notin W_1$, $W_1 - g$ é um caminho em B_4 e, portanto, $\Pi(W_1 - g)$ é um passeio em O_4 60
- 4.15 Ilustração do caso 1.2 do Teorema 18: um ciclo $W_1 \in m_2 \cup m_3$ de B_4 sem a aresta $g = \{1267, 12467\} \in m_3$. Como $\bar{g} = \{34589, 3589\}$ também está em W_1 , R e S seriam desconectados. Porém, $\sigma(D) = 2378 \in W_1 \cap S$ ao mesmo tempo que $\sigma(\bar{D}) = 14569 \in W_1 \cap R$. Porque $\Pi(\sigma(D)) = \Pi(\sigma(\bar{D})) = 2378$, R e S não estão desconectados. 62

4.16	Ilustração do caso 2.1 do Teorema 18: $W_x \neq W_y$, x não pode estar em $\Pi(W_y)$ e y não pode estar em $\Pi(W_x)$, então remover x e y não desconecta o grafo.	62
4.17	Ilustração do caso 2.2 do Teorema 18: em (a) $W \in m_p \cup m_{p+1}$; $e, f \in m_p$ tal que $\Pi(e) = x$ e $\Pi(f) = y$. Em (b) a aresta $\Pi(UV)$ garante um caminho de R a S através do ciclo $\Pi(W')$	64
4.18	Ilustração do caso 2.2 do Teorema 18: $\bar{h} \notin W$ pois então $\bar{h} \in P_2$ e assim $\Pi(h) = \Pi(\bar{h}) \in R \cap S$. Então $\bar{h} \in W^*$ e $\Pi(W^*) \in S$. Porém, para $1 \leq t \leq 2k$, $sh^t(\bar{G}) \in P_2$ enquanto $sh^t(G) \in W^*$, ou seja, $\Pi(sh^t(\bar{G})) = \Pi(sh^t(G)) \in R \cap S$	64
4.19	Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: em (a) todos os <i>shifts</i> de U estão em W_1 e em W . Em (b) porque $W \neq W_1, W_2$ e $x, y \notin \Pi(W)$, temos $\Pi(W)$ conectando R e S	66
4.20	Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: todos os <i>shifts</i> de B estão em $W_1 \setminus P_1$, pois P_1 é curto já que não tem <i>shift</i> de U . Então, P_2 também é curto, caso contrário, P_2 conteria algum $sh^t(\bar{B})$ para $1 \leq t \leq 2k$ e, conseqüentemente, $\Pi(sh^t(\bar{B})) = \Pi(sh^t(B)) \in R \cap S$. O vértice \bar{J} não está em W_2 , pois como $J \in P_2$ e P_2 é curto, então $\bar{J} \in W_2 \setminus P_2$. Mas então $\Pi(J) = \Pi(\bar{J}) \in R \cap S$, uma contradição.	66
4.21	Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: $\bar{J} \in W^*$ de $m_p \cup m_{p+1}$. Então $\Pi(W^*) \subset S$. Todos os <i>shifts</i> de J estão em W^* . Porém, porque P_2 é curto, $sh^t(J)$ para $1 \leq t \leq 2k$ está em $W_2 \setminus P_2$. Então, para $1 \leq t \leq 2k$, $\Pi(sh^t(J)) \in R$ e $\Pi(sh^t(\bar{J})) \in S$, uma contradição porque $\Pi(sh^t(J)) = \Pi(sh^t(\bar{J}))$	68
4.22	Ilustração do caso 3.3.1 do Teorema 18: $A, D \in R$ e $B, E \in S$. Em $W \in m_p \cup m_{p+1}$, o caminho P_B vai de B a \bar{B} passando pela aresta $D\bar{E}$ e o caminho P_A vai de A a \bar{A} passando pela aresta $\bar{D}E$. Como $B \in S$ e $A \in R$, $\Pi(P_B) \in S$ e $\Pi(P_A) \in R$. Mas então $\Pi(D, \bar{E}) = \Pi(\bar{D}, E) \in R \cap S$, uma contradição.	68
4.23	A 2-fatorização em O_3 resultante da projeção dos emparelhamentos modulares em B_3	69

4.24	Relação entre algumas classes de grafos segundo a interpretação de próximo de ser hamiltoniano proposta em [1, 2].	70
------	--	----

Lista de Tabelas

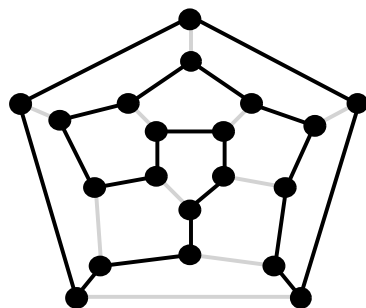
2.1	Resultado de Aproximação para Ciclos em B_k	24
2.2	Número de Vértices e Arestas dos Grafos O_k e B_k . Ambos são $(k+1)$ -regular.	24
3.1	Número de Vértices dos Grafos O_k , B_k e $\widetilde{O}_k = \widetilde{B}_k$	31
4.1	Os três emparelhamentos modulares para o conjunto $A = 12$ em B_2	46

Capítulo 1

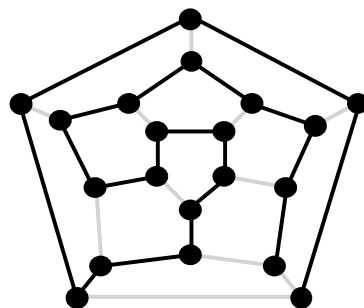
Introdução

Grafos freqüentemente têm sido utilizados para representação da informação. Em diversos casos, eles são a melhor e, às vezes, a única forma de transmitir informação de maneira compreensível. Podemos citar, por exemplo, os mapas utilizados para indicar percursos e distâncias entre cidades. Neste caso, as cidades são representadas pelos vértices e as estradas representadas pelas arestas do grafo.

Usualmente, a representação da informação através de grafos torna mais fácil a manipulação da informação, bem como a modelagem de problemas. Um dos mais notáveis problemas modelados através de grafos foi proposto em 1859 por William Rowan Hamilton [3] como apenas um jogo matemático, a princípio sem aplicação prática. Tratava-se da busca por um ciclo gerador em um dodecaedro regular ou, em outras palavras, um ciclo que passa por todos os pontos do dodecaedro, exatamente uma vez, e volta ao ponto de origem. Veja, por exemplo, um destes ciclos destacado no dodecaedro da Figura 1.1 (a).



(a) Um ciclo hamiltoniano



(b) Um caminho hamiltoniano

Figura 1.1: Um ciclo e um caminho hamiltonianos no dodecaedro.

O jogo proposto por Hamilton ficou conhecido como o Problema do Ciclo Ha-

miltoniano (“*Hamiltonian Cycle Problem*” - HCP, em inglês) e, mais de 100 anos depois, encontra várias aplicações práticas como, por exemplo, no projeto de circuitos impressos. Imagine que temos que construir uma placa de circuito impresso que possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes. Suponha que tenhamos um braço eletrônico para perfurar a placa. Precisamos agora de um algoritmo para descrever a ordem de perfuração da placa. Como temos apenas um braço eletrônico, a ordem de perfuração da placa pode ser modelada como um HCP, onde os furos são representados pelos vértices.

O HCP também é utilizado na definição formal do Problema do Caixeiro Viajante (“*Traveling Salesman Problem*” - TSP, em inglês). Dado um grafo completo e ponderado G , o TSP consiste em determinar um ciclo hamiltoniano C em G tal que a soma dos pesos de todas as arestas em C seja menor ou igual a um valor k . Por exemplo, observe que o grafo G da Figura 1.2 (a) é um grafo ponderado e completo em quatro vértices. O ciclo C_1 da Figura 1.2 (b) tem peso 24 enquanto o ciclo C_2 da Figura 1.2 (c) tem peso 23. Portanto, C_2 é melhor que C_1 como solução para o TSP. De fato, o ciclo C_2 é um ciclo de menor peso dentre os ciclos hamiltonianos de G .

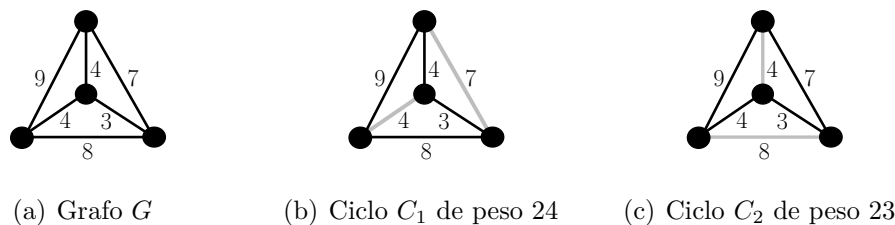


Figura 1.2: Exemplo para o Problema do Caixeiro Viajante.

Uma versão do problema proposto por Hamilton é o Problema do Caminho Hamiltoniano (“*Hamiltonian Path Problem*” - HPP, em inglês) que busca um caminho que passa por todos os pontos exatamente uma vez, porém, não volta ao ponto de origem. Veja um exemplo no dodecaedro da Figura 1.1 (b). Observe que, se temos um ciclo hamiltoniano C em um grafo G , obtemos um caminho hamiltoniano em G simplesmente removendo uma aresta de C . Porém, como veremos na Seção 2.2, o problema de decisão associado ao HCP é NP-Completo mesmo quando um caminho hamiltoniano é dado como parte da instância.

Neste trabalho, estudamos o Problema do Ciclo Hamiltoniano restrito a uma

classe de grafos conhecida como grafos Kneser [4, 5]. De fato, uma classe de grafos contida nos grafos Kneser e conhecida por grafos ímpares [6] é nosso objeto principal de estudo.

No próximo capítulo, apresentamos conceitos básicos utilizados no decorrer do trabalho, bem como resultados existentes na literatura para o problema. No Capítulo 3, mostramos uma relação entre o HPP nos grafos ímpares e o HCP nos grafos Kneser bipartidos. No Capítulo 4, mostramos quanto os grafos ímpares estão “próximos” de serem hamiltonianos, segundo uma interpretação bem definida de “próximo” de ser hamiltoniano. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos conclusões e problemas em aberto.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentamos conceitos básicos utilizados no decorrer do trabalho. O leitor habituado às definições básicas de grafos pode saltar para a seção 2.2.

2.1 Definições em Grafos

Um *grafo* G é uma tripla ordenada $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio de pontos denominados *vértices*, $E(G)$ é um conjunto finito de *arestas* e $\psi_G : E(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$ é uma função de incidência que associa a cada aresta e de G um par de vértices u e v , notação $\psi_G(e) = \{u, v\}$ (ou $\psi_G(e) = \{v, u\}$ onde a ordem não é importante). Os vértices u e v são chamados de *extremos* de e . Neste caso, dizemos que o vértice u é *vizinho* de v e vice-versa, a aresta e é *incidente* a u e v e o par de vértices u e v são *adjacentes*. Dizemos ainda que duas arestas incidentes a um vértice em comum são *adjacentes*. Para simplicidade na notação, escrevemos uv para o par não-ordenado $\{u, v\}$.

Um grafo contém arestas *paralelas* ou *múltiplas* se possui arestas diferentes compartilhando os mesmos extremos. Se a função de incidência admite arestas com vértices u e v iguais ($u = v$), então o grafo contém *laços*. Um grafo é *simples* se não contém laços nem arestas múltiplas.

Neste trabalho utilizamos apenas grafos simples, o que denotaremos simplesmente por grafos. Sendo assim, como a função de incidência está bem definida pelos extremos de cada aresta, omitiremos a função de incidência da definição de grafos. Portanto, um grafo é uma dupla $G = (V(G), E(G))$ tal que uma aresta $e = uv$ onde

anteriormente $\psi_G(e) = uv$.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são finitos. Dizemos que um grafo com apenas um vértice é um grafo *trivial*, caso contrário o grafo é *não-trivial*.

A *vizinhança* de um vértice u em um grafo G , denotada por $N_G(u)$, consiste no conjunto de vértices adjacentes a u , conforme ilustrado na Figura 2.1.

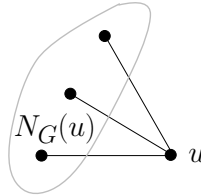


Figura 2.1: Vizinhança de um vértice.

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e $u \in V(G)$, definimos como o *grau* de u , denotado por $d(u)$, o tamanho do conjunto $d(u) = |N_G(u)|$. Um grafo G é chamado de *k-regular* se todos os seus vértices tem o mesmo grau k .

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é dito ser *cúbico* quando G é 3-regular. Veja na Figura 2.2 um exemplo de grafo cúbico.

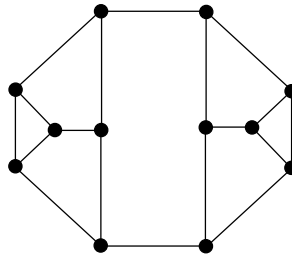


Figura 2.2: Um grafo cúbico.

A propriedade abaixo é provada como Corolário 1.2 em [7] e implica que qualquer grafo cúbico tem número par de vértices.

Propriedade 1. *Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Um grafo é dito *completo*, denotado por K_n , se todos os seus pares de vértices são adjacentes. A Figura 2.3 ilustra o grafo completo em dois, três e em quatro vértices (K_2 , K_3 e K_4 , respectivamente).

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é dito *bipartido* se existe uma bipartição de $V(G)$ em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta e em $E(G)$ tem exatamente um

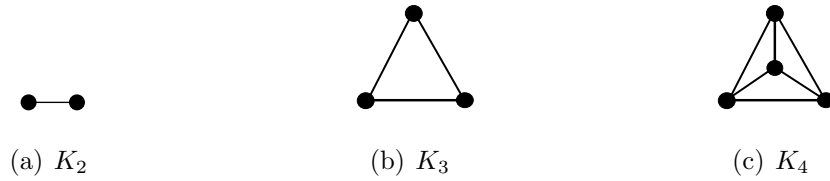


Figura 2.3: Grafos completos K_2 , K_3 e K_4 .

extremo em V_1 e um extremo em V_2 . O grafo G será chamado de *bipartido completo*, denotado por $K_{n,m}$, se $|V(G)| = n + m$, $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ e, para todo vértice $v \in V_1$, $N(v) = V_2$. Veja na Figura 2.4 os grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$.

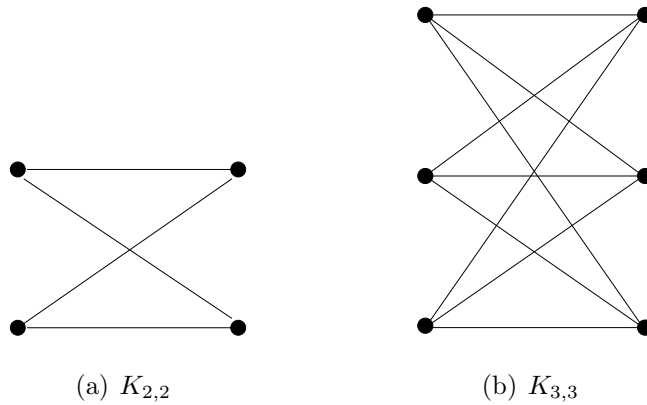


Figura 2.4: Grafos bipartidos completos $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$.

Seja n um inteiro não-negativo, o grafo n -cubo possui 2^n vértices, os quais estão associados biunivocamente às 2^n n -uplas binárias, onde um vértice é adjacente a outro se e somente se a n -upla correspondente a um destes vértices diferir em um único termo da n -upla do outro. Denotamos o grafo n -cubo por Q_n . Veja, por exemplo, os grafos Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 na Figura 2.5.

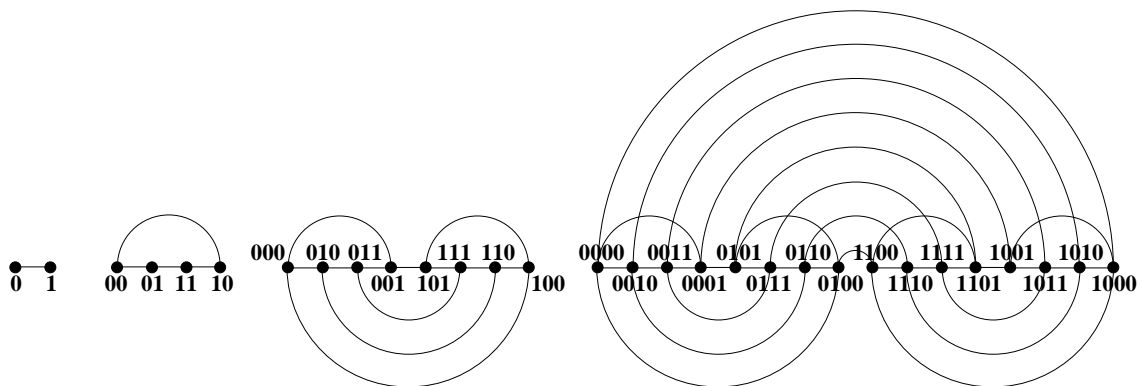


Figura 2.5: Grafos Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 .

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* $D = (V(D), A(D))$ consiste de um conjunto

$V(D)$ de vértices e um conjunto $A(D)$ de arcos, onde a função de incidência $\phi_D : A \rightarrow V(D) \times V(D)$ associa a cada arco de D um par ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de D (veja alguns digrafos na Figura 2.6). Dado um grafo completo direcionado D tal que existe apenas um arco entre quaisquer dois vértices (dois arcos são possíveis com os mesmos extremos, por exemplo (u, v) e (v, u)), dizemos que D é um *torneio*. A Figura 2.6 ilustra digrafos que são também torneios.

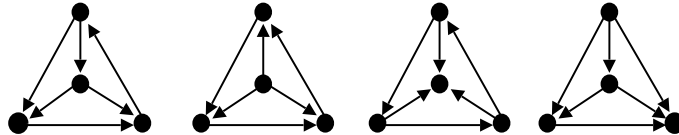


Figura 2.6: Torneios em K_4 .

Chamamos de *passeio* uma seqüência de vértices e arestas $P = (u = u_1, u_1u_2, u_2 \dots, u_{k-1}, u_{k-1}u_k, u_k = v)$ em um grafo G . Se $u = v$, dizemos que P é um *passeio fechado*. Um *caminho* é um passeio que não repete vértices. Dizemos que dois caminhos C_1 e C_2 entre u e v são *disjuntos* se $(C_1 \cap C_2) \setminus \{u, v\} = \emptyset$. Sejam u e v vértices distintos e sejam também C_1 e C_2 caminhos disjuntos entre u e v , então chamamos de *ciclo* a união $C_1 \cup C_2$. O *comprimento* de um caminho ou ciclo é o número de suas arestas. Um caminho ou ciclo de comprimento k é chamado um *k-caminho* ou *k-ciclo*, respectivamente. Veja um exemplo de passeio fechado, caminho e ciclo na Figura 2.7.

Corolário 2. *Todo ciclo em um grafo simples tem pelo menos três vértices.*

Demonstração. Segue trivialmente do fato de que nossos grafos são simples e das definições de arestas múltiplas e ciclo. □

Um grafo G é dito *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G , caso contrário, dizemos que G é *desconexo*.

Dizemos que a *distância* entre um par de vértices x e y em um grafo G , denotado por $d_G(x, y)$, é o comprimento do caminho mais curto entre x e y em G . Se não existe qualquer caminho conectando x e y em G , então $d_G(x, y) = \infty$. Por exemplo, no grafo da Figura 2.7 $d_G(v, y) = 2$ porque o menor caminho possível entre v e y tem comprimento 2.

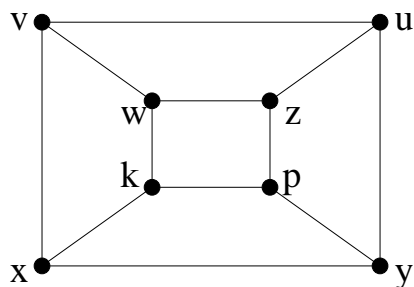


Figura 2.7: Um grafo G : (a) (v, u, z, p, y, u, v) é um passeio fechado; (b) (v, u, y) e (v, w, k, p, y) são dois possíveis caminhos entre v e y ; (c) (v, u, y, x, v) é um ciclo.

Se um caminho contém todos os vértices do grafo dizemos que este caminho é *hamiltoniano*. Um ciclo é *hamiltoniano* se contém todos os vértices de G . Por exemplo, no grafo da Figura 2.7, (v, u, y, x, k, w, z, p) é um caminho hamiltoniano e $(v, u, z, w, k, p, y, x, v)$ é um ciclo hamiltoniano.

Chamamos de *trilha* um passeio que não repete arestas. Uma trilha que passa por toda aresta do grafo é chamada *trilha euleriana*. Uma *trilha euleriana fechada* é um passeio fechado que passa por cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo G é *euleriano* se G contém uma trilha euleriana fechada. Uma condição suficiente e necessária para um grafo ser euleriano é apresentada no Teorema 3 que aparece como o Teorema 3.5 em [7].

Teorema 3. *Dado um grafo conexo $G = (V(G), E(G))$, então G é euleriano se e somente se não tem vértices de grau ímpar.*

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, um *corte de vértices* de G é um subconjunto V' de $V(G)$ tal que $G - V'$ é desconexo. Um *k -corte de vértices* é um corte de vértices com k elementos. A *conectividade* $\kappa(G)$ de G é o menor k para o qual G tem um k -corte de vértices. Então dizemos que G é *k -conexo em vértices* ou simplesmente *k -conexo* se $\kappa(G) \geq k$. Um grafo 2-conexo também é chamado de *biconexo*. Um vértice $v \in V(G)$ é chamado de *articulação* ou *vértice de corte* se V' é um corte de vértices de G , $v \in V'$ e $|V'| = 1$. No grafo G da Figura 2.8 (a), $\kappa(G) = 1$ pois o vértice v é uma articulação.

Similarmente, um *corte de arestas* é um subconjunto E' de $E(G)$ tal que $G - E'$ é desconexo ou trivial. Um *k -corte de arestas* é um corte de arestas com k elementos. Assim, definimos a *conectividade em arestas* $\kappa'(G)$ de G como o menor k para o qual

G é desconexo ou trivial. Então dizemos que G é k -conexo em arestas se $\kappa'(G) \geq k$. Uma aresta $uv \in E(G)$ é chamada de *ponte* se E' é um corte de arestas de G , $uv \in E'$ e $|E'| = 1$. No grafo da Figura 2.8 (a), $\kappa'(G) = 2$ pois para desconectar G precisamos remover pelo menos duas arestas como, por exemplo, $\{e, f\}$ (Figura 2.8 (b)).

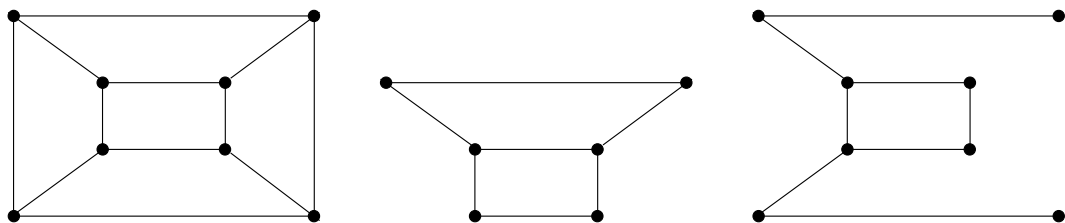


Figura 2.8: Grafo 1-conexo em vértices e 2-conexo em arestas.

O Teorema 4 apresenta um resultado clássico em Teoria dos Grafos que relaciona o corte de vértices ao corte de arestas em um grafo G .

Teorema 4. *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo, então $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.*

Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é chamado de *subgrafo* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ (veja a Figura 2.9). Dizemos que H é *subgrafo próprio* de G se H é subgrafo de G onde $V(H) \neq V(G)$ ou $E(H) \neq E(G)$, notação $H \subsetneq G$. Dizemos que $H \subsetneq G$ é um *subgrafo induzido* de G se H é subgrafo de G e, para todo par de vértices u e v em H , $uv \in E(H)$ se e somente se $uv \in E(G)$ (Figura 2.9 (b)). Dizemos que H é um *subgrafo gerador* de G se $V(G) = V(H)$ e $E(H) \subset E(G)$ (Figura 2.9 (c)).



(a) Grafo G (b) Subgrafo induzido de G , (c) Subgrafo gerador de G , sub-subgrafo não gerador de G . grafo não induzido de G .

Figura 2.9: Subgrafos.

Dizemos que H é uma *componente* de G , se H é um subgrafo induzido de G . Com essa noção, apresentamos no Teorema 5 um resultado interessante que utiliza o Teorema 4 para relacionar o corte de vértices ao corte de arestas em grafos cúbicos.

Teorema 5. *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo cúbico, então $\kappa(G) = \kappa'(G)$.*

Demonstração. Seja S um corte de vértices mínimo ($|S| = \kappa(G)$). Como $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ de acordo com o Teorema 4, necessitamos somente fornecer um corte de arestas de tamanho $|S|$. Seja H_1, H_2 duas componentes de $G - S$. Desde que S é um corte de vértices mínimo, cada $v \in S$ tem um vizinho em H_1 e um vizinho em H_2 . Como G é 3-regular, v não pode ter dois vizinhos em H_1 e dois em H_2 . Para cada $v \in S$, remova a aresta de v para um membro de $\{H_1, H_2\}$ onde v tem somente um vizinho.

Estas $\kappa(G)$ arestas quebram todos os caminhos de H_1 para H_2 , exceto no caso apresentado na Figura 2.10 onde um caminho pode entrar em S via v_1 e sair de S via v_2 . Neste caso, removemos a aresta para H_1 para ambos v_1 e v_2 para quebrar todos os caminhos de H_1 para H_2 através de $\{v_1, v_2\}$. \square

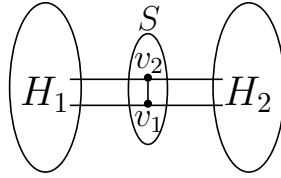


Figura 2.10: Ilustração do Teorema 5.

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, um subconjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ é chamado um *emparelhamento* de G se qualquer par de arestas de M não é adjacente em G . Se todo vértice de G tem uma aresta de M incidente a ele, M é chamado um *emparelhamento perfeito* (veja a Figura 2.11). Um *k-fator* de G é um subgrafo gerador k -regular de G . Nós dizemos que G é *k-fatorável* se existem k -fatores disjuntos em arestas H_1, H_2, \dots, H_l tal que $G = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_l$. Observe que um emparelhamento perfeito é um 1-fator. Assim, por exemplo, na Figura 2.11, os emparelhamentos perfeitos H_1, H_2 e H_3 são 1-fatores disjuntos em arestas do grafo completo bipartido $K_{3,3}$. Porque $K_{3,3} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, o grafo $K_{3,3}$ é 1-fatorável.

Dizemos que um grafo conexo G é uma *árvore* se G não contém ciclos. Em uma árvore $T = (V(T), E(T))$ existe um único caminho entre qualquer par de vértices $v, w \in V(T)$. Dizemos que uma árvore T é uma *árvore geradora* de um grafo G se T é um subgrafo gerador de G (veja a Figura 2.12).

Dois grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ são *idênticos* ou *iguais*, denotado por $G = H$, se $V(G) = V(H)$ e $E(G) = E(H)$. Se dois grafos são idênticos,

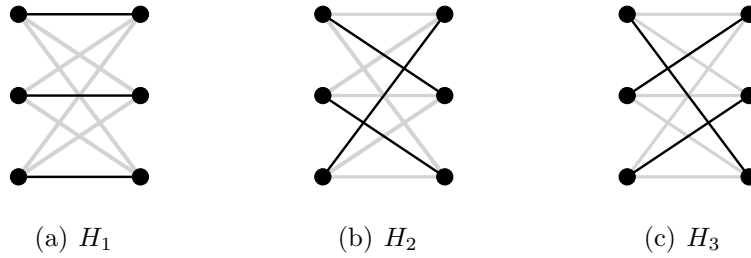


Figura 2.11: Uma 1-fatorização do $K_{3,3}$: decomposição do $K_{3,3}$ em três emparelhamentos perfeitos disjuntos em arestas.

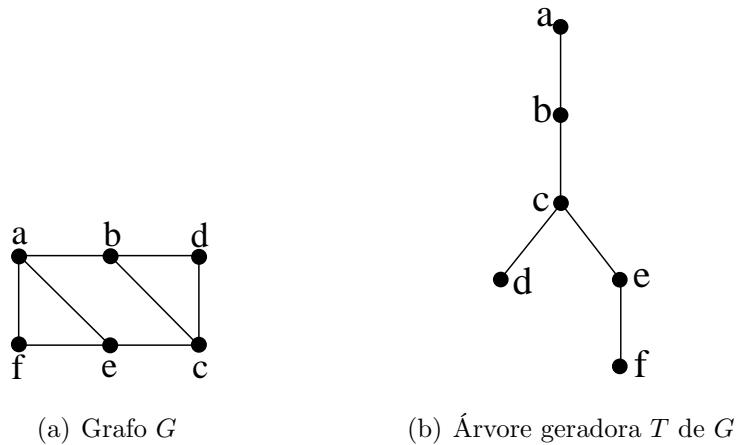


Figura 2.12: Árvore geradora de um grafo.

então eles podem ser representados pelo mesmo desenho de grafo.

Dois grafos G e H são chamados de *isomorfos* se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que u e v são adjacentes em G se e somente se os vértices $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ são adjacentes em H e, neste caso, dizemos que φ é um isomorfismo entre G e H . Na Figura 2.13, o mapeamento $\varphi(1) = b; \varphi(2) = d; \varphi(3) = f; \varphi(4) = c; \varphi(5) = e$ e $\varphi(6) = a$ é um isomorfismo entre G e H .

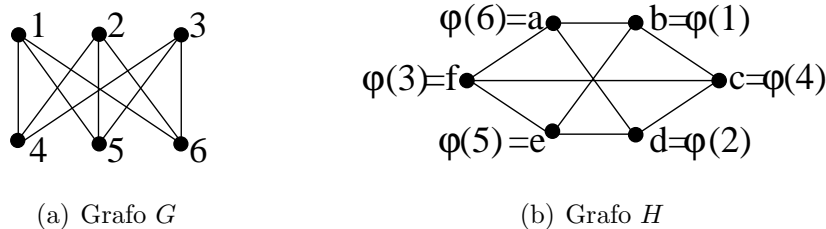


Figura 2.13: Grafos isomorfos.

Um *automorfismo* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um isomorfismo de G entre G e G , o qual pode ser considerado uma permutação α de $V(G)$ que preserva a adjacência: $uv \in E(G)$ se e somente se $\alpha(u)\alpha(v) \in E(G)$. Por exemplo, considere o

grafo da Figura 2.14 (a). A permutação $\alpha(1) = 2$, $\alpha(2) = 3$ e $\alpha(3) = 1$ resulta no grafo da Figura 2.14 (b) que é o próprio grafo K_3 em (a). Observe que as adjacências são preservadas.



Figura 2.14: Um automorfismo no grafo K_3 .

Dizemos que um grafo $G = (V(G), E(G))$ é *vértice-transitivo* se para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe um automorfismo α que mapeia u para v . Dizemos que um grafo $G = (V(G), E(G))$ é *aresta-transitivo* se para todo par de arestas $uv, xy \in E(G)$ existe um automorfismo α tal que $\alpha(u)\alpha(v) = xy$. Qualquer grafo que é vértice e aresta-transitivo é dito ser um *grafo simétrico*.

Um *bom desenho* (“*good drawing*”, do inglês) de um grafo G é um desenho de G no plano tal que vértices diferentes são desenhados em pontos diferentes do plano, nenhuma aresta cruza a si mesma, arestas adjacentes não se cruzam, se, porventura, duas arestas se cruzarem, se cruzam no máximo uma única vez e no seu interior, nunca nos extremos, arestas não interceptam vértices, exceto quando incidentes nestes vértices e um cruzamento somente pode ser compartilhado por duas arestas. Um grafo é dito *planar* se admite um bom desenho sem cruzamentos de arestas.

Dado um grafo G planar e um desenho D de G no plano sem cruzamentos de arestas, as arestas de D dividem o plano em regiões. Dizemos que cada uma dessas regiões é uma *face* de D (veja a Figura 2.15).

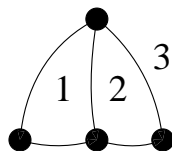


Figura 2.15: Um desenho planar de um grafo G com 3 faces.

A k -ésima potência de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é o grafo G^k no qual o conjunto de vértices é $V(G)$ e onde quaisquer dois vértices distintos são adjacentes em G^k se e somente se a distância entre eles em G é de no máximo k . O grafo G^2

é referido como o *quadrado* de G e o grafo G^3 como o *cubo* de G . Veja um exemplo de um quadrado de um grafo na Figura 2.16.

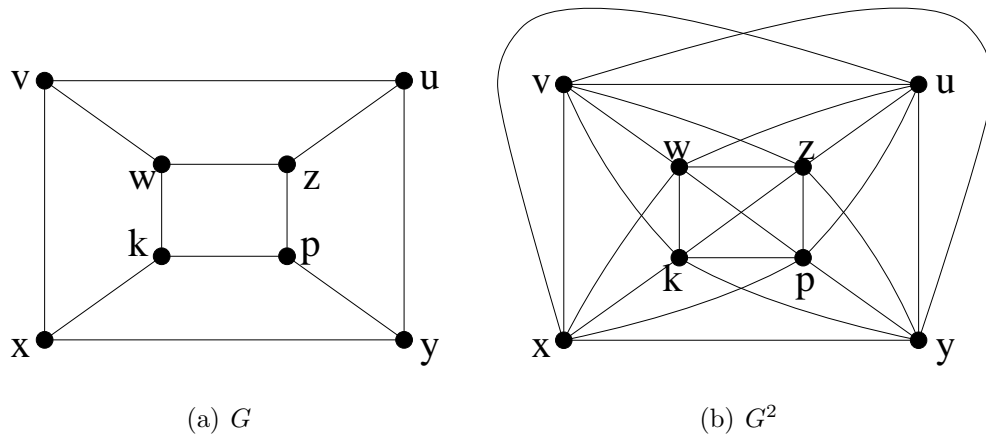


Figura 2.16: O quadrado de um grafo G . Observe que somente as arestas vp , uk , xz e yw não estão em G^2 porque a distância em G entre os vértices de cada uma dessas arestas é maior que 2.

Seja G um grafo cúbico conexo e seja v um vértice de G adjacente aos vértices u , w e z . Definimos uma *expansão* de v a divisão de v em três vértices dois a dois adjacentes vu , vw e vz . Obtemos um novo grafo H aplicando uma expansão a todo vértice de G tal que dois vértices de H são adjacentes se eles tem o mesmo rótulo. Veja um exemplo na Figura 2.17.

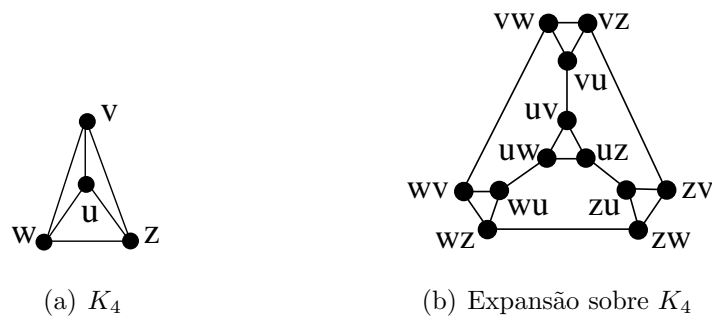


Figura 2.17: A operação de expansão sobre K_4 .

O produto cartesiano de dois grafos simples G e H é o grafo $G \square H$ cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto de todos os pares $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ tal que $u_1u_2 \in E(G)$ e $v_1 = v_2$ ou $v_1v_2 \in E(H)$ e $u_1 = u_2$. Assim, para cada aresta u_1u_2 de G e cada aresta v_1v_2 de H , existem quatro arestas em $G \square H$ que são $(u_1, v_1)(u_2, v_1)$, $(u_1, v_2)(u_2, v_2)$, $(u_1, v_1)(u_1, v_2)$ e $(u_2, v_1)(u_2, v_2)$.

Na próxima seção, discutimos alguns resultados existentes para o Problema do Ciclo Hamiltoniano em grafos gerais e depois restrito à classe de grafos Kneser.

2.2 O Problema do Ciclo Hamiltoniano

Dado um grafo G qualquer, decidir se G tem um ciclo hamiltoniano é um problema NP-Completo [8]. Foi provado ainda que o problema permanece NP-Completo mesmo quando:

1. G é planar, cúbico, 3-conexo e não tem faces com menos de 5 arestas [9];
2. G é bipartido [10];
3. G é o quadrado de um grafo [11];
4. um caminho hamiltoniano de G é dado como parte da instância [12].

Em 1971, Tutte [13] conjecturou que todos os grafos bipartidos cúbicos eram hamiltonianos. Porém, Horton apresentou um contra-exemplo em 96 vértices que foi publicado por Bondy e Murty [14] em 1976 (página 240). Posteriormente, Ellingham e Horton [15] apresentaram um contra-exemplo em 54 vértices que, até agora, é o menor contra-exemplo conhecido para a conjectura de Tutte (veja a Figura 2.18).

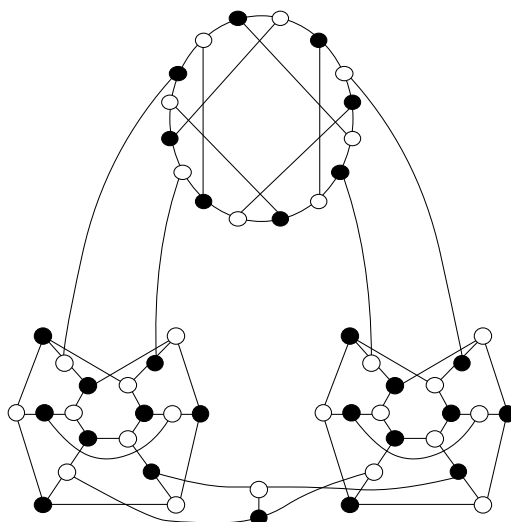


Figura 2.18: O menor contra-exemplo conhecido para a conjectura de Tutte: um grafo bipartido cúbico não-hamiltoniano com 54 vértices. As bipartições estão identificadas pela cor dos vértices.

O Problema do Ciclo Hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial se G não tem qualquer vértice cujo grau excede a 2 [16]. É também conhecido que o cubo de um grafo conexo não-trivial sempre tem um ciclo hamiltoniano [17].

O Problema do Ciclo Hamiltoniano em Digrafos também é NP-Completo [8], mesmo se G é planar e não tem qualquer vértice envolvido em mais de três arcos [18]. Pode, porém, ser resolvido em tempo polinomial se: (1) nenhum grau de entrada excede 1; (2) nenhum grau de saída excede 1; (3) G é um torneio [19].

Por outro lado, o Problema do Caminho Hamiltoniano também é NP-Completo, pois pode ser reduzido facilmente do Problema do Ciclo Hamiltoniano [20], mesmo se G é planar, cúbico, 3-conexo e não tem qualquer face com menos de 5 arestas [20]. Permanece NP-Completo se G é bipartido [20]. Pode, porém, ser resolvido em tempo polinomial sob as mesmas restrições do Problema do Ciclo Hamiltoniano.

O Problema do Caminho Hamiltoniano em digrafos também é NP-Completo [20]. Os comentários sobre o Problema do Ciclo Hamiltoniano em Digrafos aplicam-se também a esse caso. As variantes nas quais o vértice inicial, ou o vértice final ou mesmo ambos são especificados na instância são também NP-Completos [20]. Pode, porém, ser resolvido em tempo polinomial para digrafos acíclicos [21].

A seguir, apresentamos a classe de grafos Kneser à qual restringimos o estudo do Problema do Ciclo e Caminho Hamiltonianos.

2.2.1 Grafos Kneser

Seja $[n]$ o conjunto $\{1, \dots, n\}$ e, para $1 \leq k \leq n$, seja $\binom{[n]}{k}$ a família de todos os subconjuntos de $[n]$ de tamanho k aos quais nos referimos como k -subconjuntos. O *grafo Kneser* (“*Kneser graph*”, em inglês) $K(n, k)$ tem $\binom{[n]}{k}$ como seu conjunto de vértices e dois k -subconjuntos são adjacentes se eles são disjuntos. Veja alguns exemplos de grafos Kneser na Figura 2.19. Quando não houver ambigüidade, para simplificar a notação, omitiremos as chaves e as vírgulas na notação de conjuntos nos exemplos ao longo do texto.

Os grafos Kneser têm sido estudados por muitos autores, especialmente por causa do seu alto grau de simetria. Eles têm origem em uma conjectura combinatorial formulada por Kneser [4] que estabelece que se os k -subconjuntos de um $(2k + r)$ -conjunto são divididos em $r + 1$ classes, então existem dois subconjuntos disjuntos

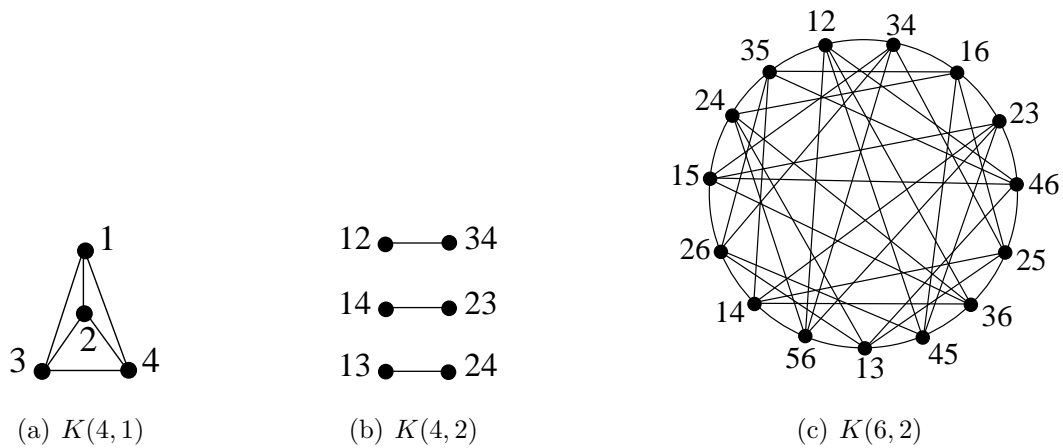


Figura 2.19: Exemplos de grafos Kneser.

na mesma classe.

Lovász [5] deu uma prova para a conjectura de Kneser baseada em teoria dos grafos. Ele demonstrou que o grafo Kneser cujos vértices representam os k -subconjuntos e onde cada aresta conecta dois subconjuntos disjuntos, não é $(r + 1)$ -colorível em vértices. Assim, por exemplo, para $k = 2$ e $r = 1$, obtemos o grafo $K(5, 2)$ que não é 2-colorível, mas é 3-colorível em vértices, como mostramos na Figura 2.20.

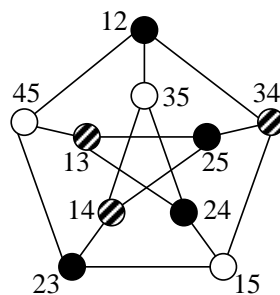


Figura 2.20: Uma 3-coloração dos vértices do grafo $K(5,2)$ (grafo de Petersen) onde $k = 2$ e $r = 1$.

Observe que $K(n, k)$ tem $\binom{n}{k}$ vértices e é regular de grau $\binom{n-k}{k}$. Chen mostrou que os grafos Kneser são hamiltonianos para $n \geq 3k$ [22] e, mais tarde, para $n \geq 2.62k + 1$ [23]. Shields e Savage [24] mostraram que os grafos Kneser são hamiltonianos para $n \leq 27$, com exceção do grafo de Petersen ($K(5, 2)$).

Neste trabalho, porém, uma classe de grafos contida nos grafos Kneser e conhecida por grafos ímpares é, em especial, nosso objeto principal de estudo. Descrevemos essa classe a seguir.

2.2.2 Grafos Ímpares

Para $n = 2k + 1$, o grafo Kneser $K(2k + 1, k)$ é chamado o *grafo ímpar* (“*odd graph*”, em inglês) [6] e é denotado por O_k . O grafo O_1 é um triângulo e o grafo O_2 é o grafo de Petersen (veja a Figura 2.21). Sendo $(k + 1)$ -regular, o grafo ímpar é o grafo Kneser $K(n, \cdot)$ de menor grau para qualquer n fixo e ímpar. O grafo O_k tem $\binom{2k+1}{k}$ vértices e $k\binom{2k+1}{k}/2$ arestas. Portanto, uma computação exata de caminhos hamiltonianos em O_k não é viável para grandes valores de k já que o número de vértices de O_k é $\Omega(k^{2k})$ e $k = \Omega(n)$. Biggs [6] menciona a seguinte conjectura:

Conjectura 6 (Biggs, 1979 [6]). *O grafo ímpar O_k é hamiltoniano para todo $k > 2$.*

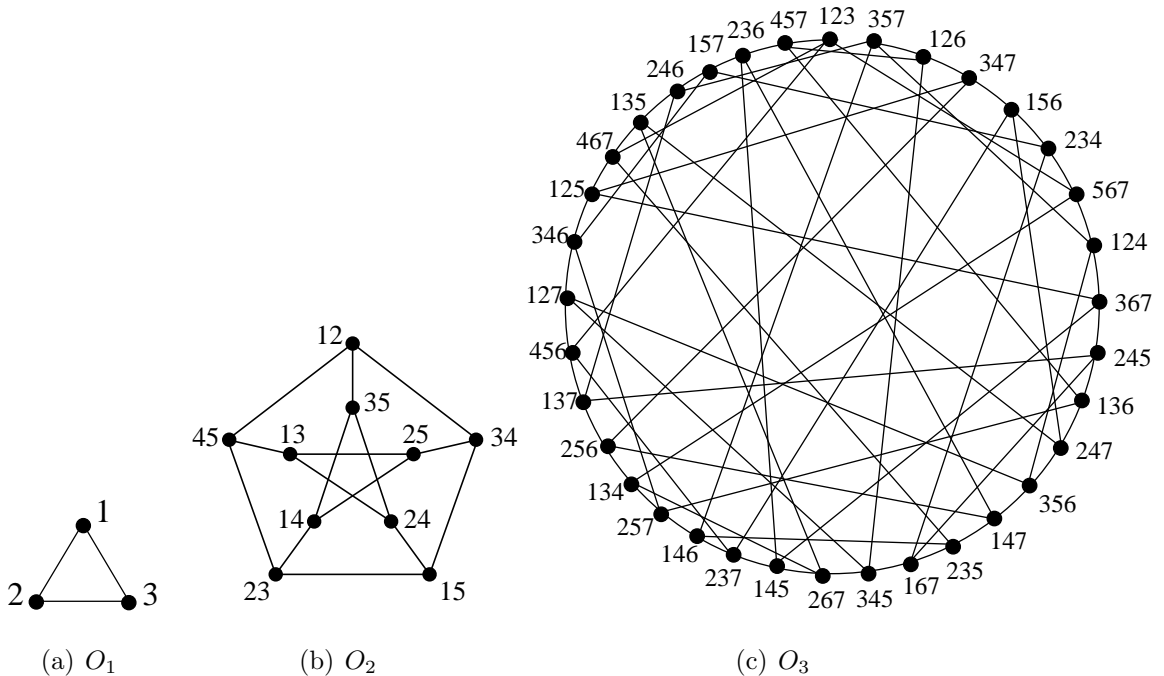


Figura 2.21: Grafos ímpares para $k = 1, 2, 3$.

Encontrar ciclos ou caminhos hamiltonianos nos grafos ímpares também gera interesse devido a uma conhecida conjectura de Lovász [25]:

Conjectura 7 (Lovász, 1970 [25]). *Todo grafo não-direcionado, conexo e vértice-transitivo tem um caminho hamiltoniano.*

Uma versão da Conjectura 7 estabelece que:

Conjectura 8 (Lovász, 1970 [25]). *Todo grafo não-direcionado, conexo e vértice-transitivo contém um ciclo hamiltoniano com exceção de cinco grafos: o grafo completo K_2 (Figura 2.3 (a)), o grafo de Petersen (Figura 2.22 (a)), o grafo Coxeter*

(Figura 2.22 (c)) e os dois grafos derivados do grafo de Petersen e do grafo Coxeter por aplicar a operação de expansão a todo vértice (Figuras 2.22 (b) e (d)).

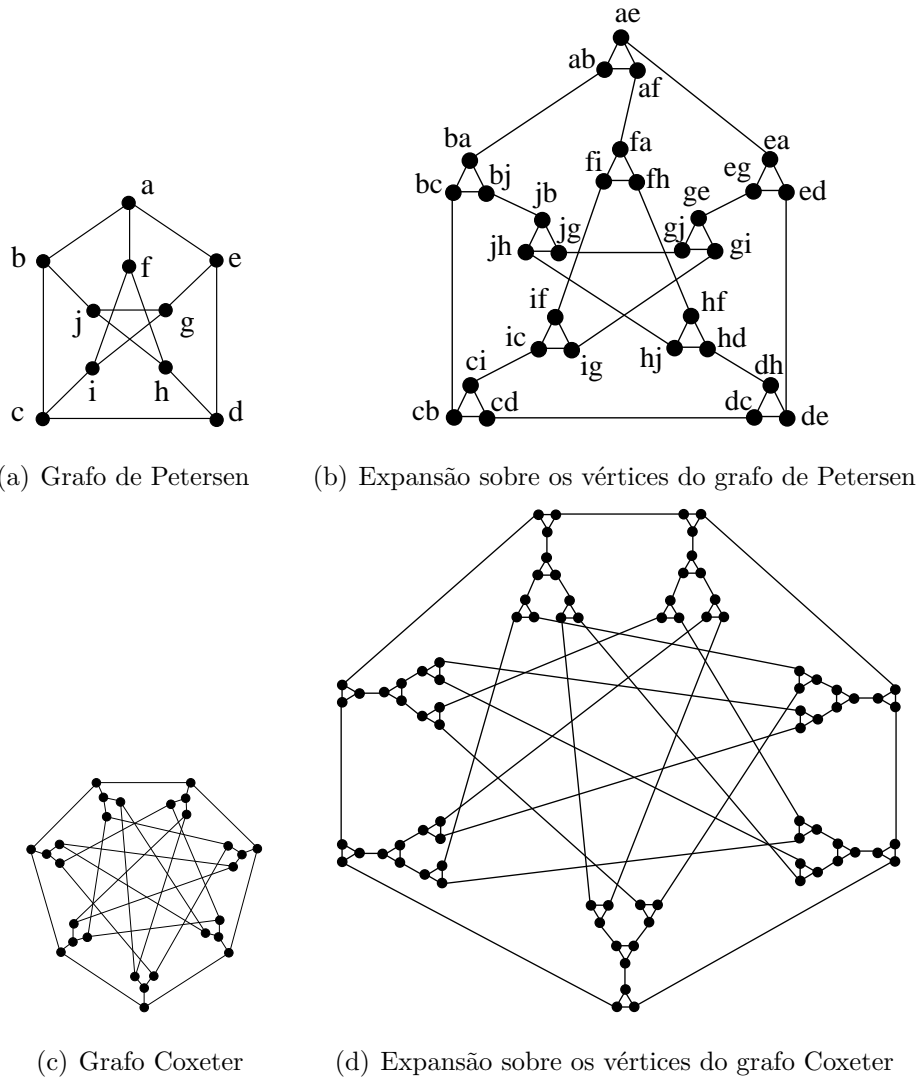


Figura 2.22: Quatro dos cinco grafos vértice-transitivos não hamiltonianos.

Como os grafos ímpares O_k formam uma família de grafos vértice-transitivos, conexos e $(k + 1)$ -regular, o estudo de caminhos e/ou ciclos hamiltonianos em grafos ímpares pode fornecer mais uma evidência para apoiar a Conjectura 7 ou oferecer um contra-exemplo para ela.

Os grafos O_1 e O_2 têm caminhos hamiltonianos (veja a Figura 2.23). Balaban [26] mostrou que O_3 e O_4 têm caminhos hamiltonianos. Meredith e Lloyd [27] mostraram que O_5 e O_6 têm caminhos hamiltonianos. Mather [28] mostrou que O_7 tem um caminho hamiltoniano. Shields e Savage [24] usaram uma heurística cuidadosamente projetada para encontrar caminhos hamiltonianos em O_k para $k \leq 13$. De fato, as

referências anteriores mostram que, para $3 \leq k \leq 13$, O_k tem não somente um caminho hamiltoniano, mas também um ciclo hamiltoniano. É bem conhecido que o grafo de Petersen O_2 tem um caminho hamiltoniano, mas nenhum ciclo hamiltoniano.

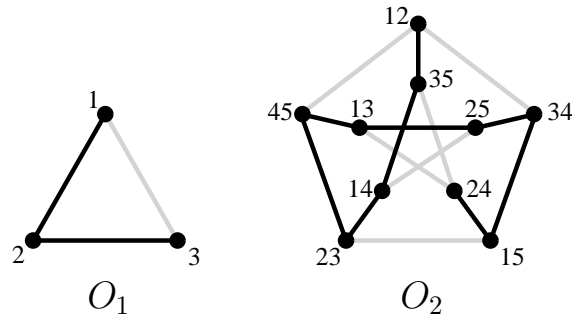


Figura 2.23: Caminhos hamiltonianos em O_1 e em O_2 .

A seguir, introduzimos a definição de uma classe de grafos conhecida por grafos Kneser bipartidos. A definição dessa classe de grafos será necessária para estabelecermos alguns resultados no Capítulo 3.

2.2.3 Grafos Kneser Bipartidos

O grafo Kneser bipartido (“Kneser bipartite graph”, em inglês), denotado por $B(n, k)$, tem $\binom{[n]}{k} \cup \binom{[n]}{n-k}$ como seu conjunto de vértices e suas arestas representam a inclusão entre dois subconjuntos, isto é, $A \subsetneq B$ onde A é um k -subconjunto e B é um $(k + 1)$ -subconjunto. Veja, por exemplo, os grafos $B(3, 1)$ e $B(5, 2)$ nas Figuras 2.24 (a) e (b).

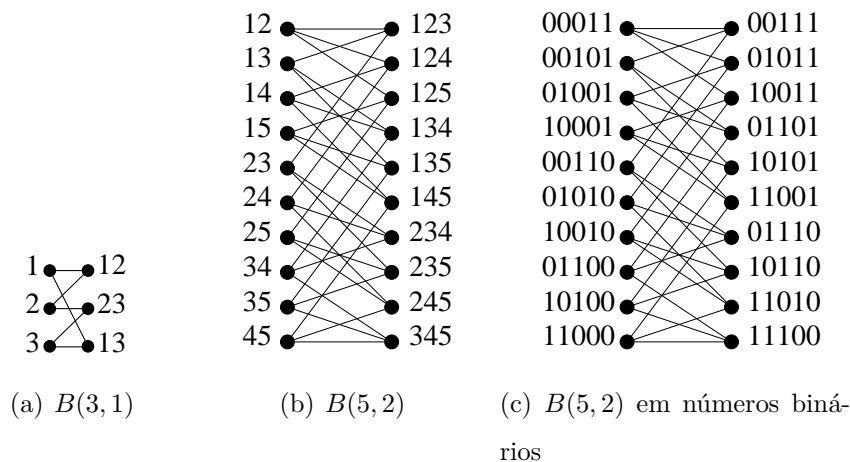


Figura 2.24: Grafos Kneser bipartidos $B(3, 1) = B_1$ e $B(5, 2) = B_2$.

Existe uma correspondência entre os k -subconjuntos e os $(n - k)$ -subconjuntos de $[n]$ e o conjunto de números binários de n bits com exatamente k 1's e $n - k$ 0's. A correspondência $b_n b_{n-1} \dots b_1 \rightarrow \{i | b_i = 1\}$ é uma bijeção dos números binários de n bits para os subconjuntos de $[n]$. Assim, o grafo $B(5, 2)$ da Figura 2.24 (b) corresponde exatamente ao grafo da Figura 2.24 (c) em uma representação por números binários de n bits.

Por meio dessa representação por números binários de n bits, podemos ver o conjunto de vértices de $B(n, k)$ como dois níveis do n -cubo (veja a Figura 2.25 para um exemplo no grafo Q_5). Em particular, se considerarmos os dois níveis no meio do n -cubo (para n ímpar), então o grafo Kneser bipartido correspondente $B(2k + 1, k)$ é chamado o *grafo dos níveis médios* (“*middle layers graph*”, em inglês) que denotamos por B_k . Dessa forma, os grafos $B(3, 1)$ e $B(5, 2)$ da Figura 2.24 são os grafos dos níveis médios B_1 e B_2 , respectivamente.

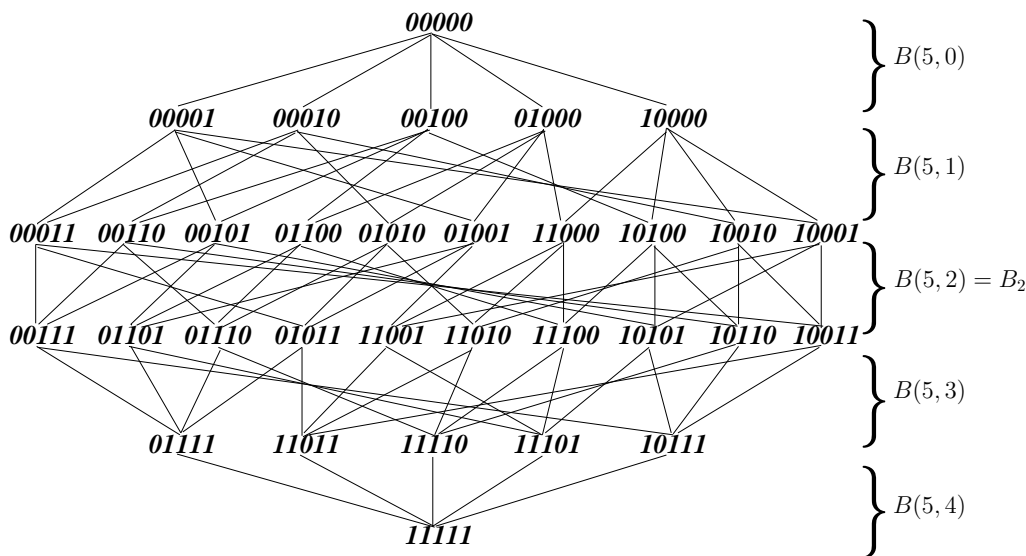


Figura 2.25: Q_5 em números binários de n bits.

Assim como os grafos ímpares, os grafos B_k também são grafos conexos e vértice-transitivos. O famoso *problema dos níveis médios* (“*middle levels problem*”, em inglês) pergunta se B_k tem um ciclo ou caminho hamiltoniano. Dejter et al. [29] apresentaram ciclos hamiltonianos em B_k , para $k = 9$; adicionalmente, Dejter et al. [30] apresentaram ciclos hamiltonianos em B_k , para $1 \leq k \leq 8$. Shields e Savage [31] mostraram que B_k tem ciclos hamiltonianos para $1 \leq k \leq 15$. Recentemente, Shields et al. [32] mostraram que B_k tem ciclos hamiltonianos para $k = 16, 17$.

É bem conhecido que os n -cubos são hamiltonianos para $n > 1$ (veja um ciclo hamiltoniano em Q_5 na Figura 2.26). Considere $L_1 = (0, 1)$ o caminho hamiltoniano em Q_1 (Figura 2.5). Então os ciclos hamiltonianos dos n -cubos podem ser construídos recursivamente da seguinte forma: $L_n = (0L_{n-1}, 1\overleftarrow{L_{n-1}})$, para $n > 1$ onde $0L_{n-1}$ (resp., $1\overleftarrow{L_{n-1}}$) denota a lista formada a partir de L_{n-1} por adicionar 0 (resp., 1) à frente de cada elemento e $\overleftarrow{L_{n-1}}$ denota o reverso da lista L_{n-1} . Por exemplo, $L_2 = (00, 01, 11, 10)$ e $L_3 = (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100)$. Observe que o primeiro elemento em L_n também difere em exatamente um dígito do último elemento em L_n . Logo, L_n é um ciclo hamiltoniano. Isso pode ser implementado eficientemente tal que os elementos sucessivos podem ser gerados, no pior caso, em tempo constante [33]. Apesar disso, quando o problema é restrito aos dois níveis médios do n -cubo, ele permanece em aberto.

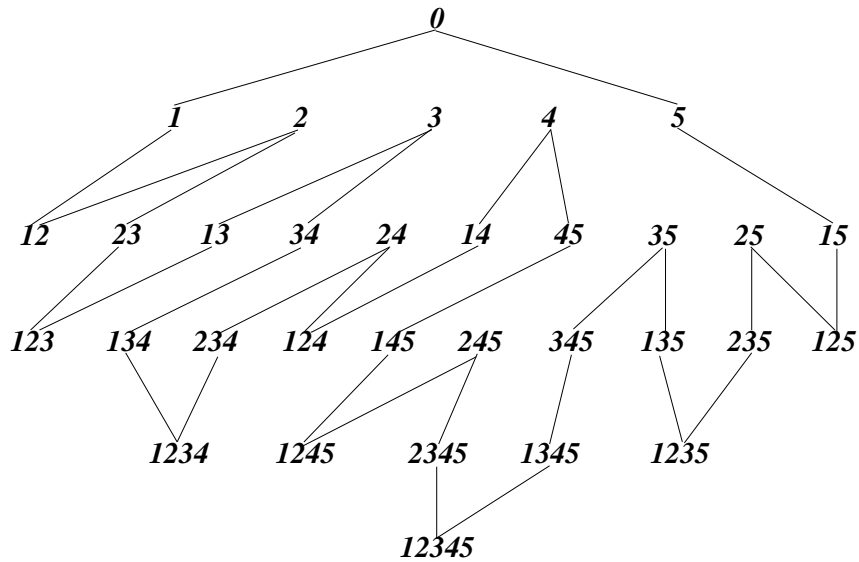


Figura 2.26: Um ciclo hamiltoniano em Q_5 . Representação sem o uso de números binários.

Agora, estamos prontos para estabelecer a conjectura que tem sido atribuída a Dejter, Erdos, Trotter e vários outros, mas que mais provavelmente se originou com Havel [34].

Conjectura 9 (Havel, 1983 [34]). *O grafo B_k é hamiltoniano para todo $k \geq 1$.*

Embora as Conjecturas 6 e 9 tenham atraído muita atenção, elas ainda estão, possivelmente, longe de ser resolvidas. Não é difícil ver que as duas conjecturas

estão fortemente relacionadas. Por exemplo, se o grafo Kneser $K(n, k)$ tem um número ímpar t de vértices e $A_1, A_2, A_3, \dots, A_t, A_1$ é seu ciclo hamiltoniano então $\overline{A_1}, A_2, \overline{A_3}, \dots, A_{t-1}, \overline{A_t}, A_1, \overline{A_2}, A_3, \dots, \overline{A_{t-1}}, A_t, \overline{A_1}$ é um ciclo hamiltoniano no grafo Kneser bipartido $B(n, k)$ onde $\overline{A_i}$ é o complemento de A_i em relação a $[n]$ (veja um exemplo na Figura 2.27). Geralmente, se um resultado é provado para uma das duas conjecturas, então um resultado equivalente é provado também para a outra conjectura. Aparentemente, a Conjectura 9 poderia ser ligeiramente mais fácil de provar porque, diferentemente de O_k , o grafo B_k é bipartido.

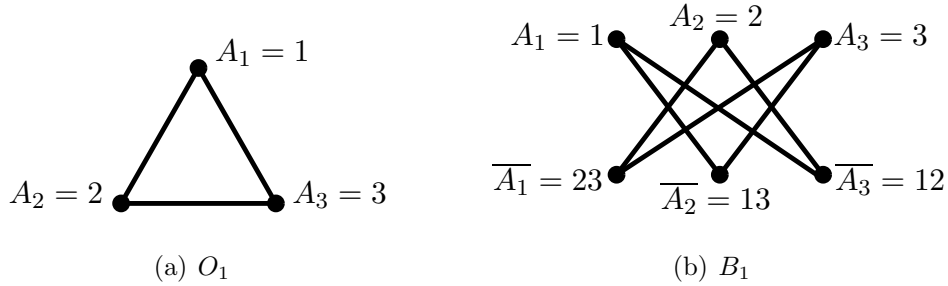


Figura 2.27: Construção de um ciclo hamiltoniano em B_1 a partir de um ciclo hamiltoniano em O_1 . Restrita a O_k ter número ímpar de vértices.

De fato, o grafo Kneser bipartido é também conhecido como o grafo ímpar duplo (“*doubled odd graph*”, em inglês) porque B_k pode ser construído a partir de O_k . Seja H um grafo construído a partir de O_k da seguinte forma: seja $V(O_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. O conjunto de vértices de H consiste de duas cópias de $V(O_k)$ denotado por $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ e $T = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ e $y_i z_j$ é uma aresta em H se e somente se $x_i x_j$ é uma aresta em O_k . Modificamos os rótulos dos vértices de T em H pelo seu complemento em $2k + 1$: $\overline{T} = \{\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_m}\}$ e obtemos o grafo Kneser bipartido B_k como ilustrado na Figura 2.28.

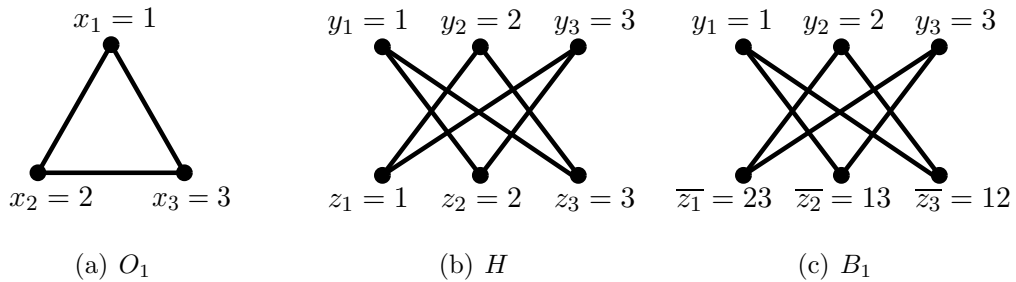


Figura 2.28: Construção de B_1 a partir de O_1 .

A Conjectura 9 tem sido verificada, através de experimentos computacionais,

para todo $k \leq 17$ [31, 32], enquanto a Conjectura 6 para $k \leq 13$ [24]. Kierstead e Trotter [35] e Duffus et al. [36] encontraram duas 1-fatorizações diferentes de B_k na esperança de que a união de dois 1-fatores apropriados fornecesse um ciclo hamiltoniano de B_k . Infelizmente, esse não foi o caso para as duas 1-fatorizações fornecidas. Porém, usando essas 1-fatorizações Johnson e Kierstead [37] encontraram uma 2-fatorização explícita de O_k .

Savage e Winkler [38] provaram o seguinte resultado de aproximação para os grafos B_k :

Teorema 10 (Savage e Winkler, 1995 [38]). *O grafo B_k tem um ciclo de comprimento de pelo menos:*

$$\left(1 - \frac{\binom{2(j+1)}{j+1}}{2^{2(j+1)}}\right) |V(B_k)|$$

se para todo $i \leq j$, B_i tem um ciclo hamiltoniano.

Sabemos que B_k tem um ciclo hamiltoniano para $1 \leq k \leq 17$ [31, 32]. Então, pelo Teorema 10, o grafo B_k para $k \geq 18$ tem um ciclo de comprimento de pelo menos:

$$\left(1 - \frac{\binom{2(17+1)}{17+1}}{2^{2(17+1)}}\right) |V(B_k)| = 0,867|V(B_k)|.$$

Logo, o grafo B_k para $k \geq 18$ tem um ciclo com pelo menos 86.7% dos seus vértices. Esse valor aumenta conforme B_k é provado ser hamiltoniano. Assim, se o grafo B_k é provado ser hamiltoniano para $j \leq 40$, por exemplo, então, para qualquer $k \geq 41$, B_k tem um ciclo contendo pelo menos 91.21% de seus vértices (veja a Tabela 2.1). Entretanto, observe na Tabela 2.2 que o grafo O_k tem $\binom{2k+1}{k}$ vértices enquanto o grafo B_k tem $2\binom{2k+1}{k}$ vértices. Portanto, uma computação exata de caminhos ou ciclos hamiltonianos em O_k e em B_k não é viável para grandes valores de k , o que não impede, porém, a existência de um método que reproduza estes caminhos/ciclos em tempo exponencial.

Horák et al. [39] mostraram que B_k tem uma trilha geradora fechada que passa no máximo duas vezes por cada vértice. Outros autores tentaram mostrar que B_k e O_k estão “próximos” de serem hamiltonianos, onde a palavra “próximo” tem sido interpretada de diversas maneiras diferentes. Primeiro, um ciclo longo em B_k e O_k foi procurado. Até o momento, o melhor resultado deste tipo é devido a Johnson [40] que mostrou que B_k contém um ciclo de comprimento $(1 - o(1))|B_k|$ e O_k contém um

Se B_j é hamiltoniano para	Então B_k tem um ciclo de pelo menos
$j \leq 11$	0,8380 $ V(B_k) $, para $k > 11$
$j \leq 15$	0,8600 $ V(B_k) $, para $k > 15$
$j \leq 17$	0,8679 $ V(B_k) $, para $k > 17$
$j \leq 18$	0,8714 $ V(B_k) $, para $k > 18$
$j \leq 19$	0,8746 $ V(B_k) $, para $k > 19$
$j \leq 20$	0,8776 $ V(B_k) $, para $k > 20$
$j \leq 30$	0,8990 $ V(B_k) $, para $k > 30$
$j \leq 40$	0,9121 $ V(B_k) $, para $k > 40$

Tabela 2.1: Resultado de Aproximação para Ciclos em B_k

k	n	$ V(B_k) $	$ E(B_k) $	$ V(O_k) $	$ E(O_k) $
1	3	6	6	3	3
2	5	20	30	10	15
3	7	70	140	35	70
4	9	252	630	126	315
5	11	924	2.772	462	1.386
6	13	3.432	12.012	1.716	6.006
7	15	12.870	51.480	6.435	25.740
8	17	48.620	218.790	24.310	109.395
9	19	184.756	923.780	92.378	461.890
10	21	705.432	3.879.876	352.716	1.939.938
11	23	2.704.156	16.224.936	1.352.078	8.112.468
12	25	10.400.600	67.603.900	5.200.300	33.801.950
13	27	40.116.600	280.816.200	20.058.300	140.408.100
14	29	155.117.520	1.163.381.400	77.558.760	581.690.700
15	31	601.080.390	4.808.643.120	300.540.195	2.404.321.560
16	33	2.333.606.220	19.835.652.870	1.166.803.110	9.917.826.435
17	35	9.075.135.300	81.676.217.700	4.537.567.650	40.838.108.850
18	37	35.345.263.800	335.780.006.100	17.672.631.900	167.890.003.050
19	39	137.846.528.820	1.378.465.288.200	68.923.264.410	689.232.644.100
20	41	538.257.874.440	5.651.707.681.620	269.128.937.220	2.825.853.840.810
21	43	2.104.098.963.720	23.145.088.600.920	1.052.049.481.860	11.572.544.300.460
22	45	8.233.430.727.600	94.684.453.367.400	4.116.715.363.800	47.342.226.683.700
23	47	32.247.603.683.100	386.971.244.197.200	16.123.801.841.550	193.485.622.098.600

Tabela 2.2: Número de Vértices e Arestas dos Grafos O_k e B_k . Ambos são $(k + 1)$ -regular.

ciclo de comprimento $(1 - o(1)) |O_k|$ onde o termo de erro $o(1)$ é da forma $\frac{c}{\sqrt{k}}$ para alguma constante c . Chen [23] mostrou que os grafos ímpares e os grafos Kneser bipartidos são hamiltonianos para $n \geq 2.62k + 1$. A densidade de um grafo G é a razão $\frac{|E(G)|}{\binom{V(G)}{2}}$. Observe que, para n fixo, quanto menor é o parâmetro k , mais densos são os grafos Kneser $K(n, k)$ e Kneser bipartido $B(n, k)$. Assim, o grafo ímpar O_k e o grafo B_k são os mais esparsos de todos esses grafos.

No próximo capítulo, mostramos alguns resultados para o problema de caminho hamiltoniano nos grafos ímpares. Os resultados foram obtidos pelo uso de resultados existentes para os grafos B_k [31, 32]. O resultado imediato de nossa abordagem é que O_k tem um caminho hamiltoniano para $14 \leq k \leq 17$ (os resultados anteriores constavam que O_k tem um caminho hamiltoniano para $k \leq 13$).

Capítulo 3

Caminhos Hamiltonianos em Grafos Ímpares¹

Neste capítulo, mostramos que O_k tem um caminho hamiltoniano para $14 \leq k \leq 17$. Fazemos isso sem executar diretamente quaisquer heurísticas. Pelo contrário, utilizamos resultados existentes para o “*middle levels problem*” [31, 32], relacionando assim dois problemas fundamentais: encontrar um caminho hamiltoniano no grafo ímpar O_k e encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo Kneser bipartido B_k .

Embora o problema para os grafos B_k permaneça não resolvido, sabemos que B_k tem ciclos hamiltonianos para alguns valores de k . Shields e Savage [31] mostraram que B_k tem ciclos hamiltonianos para $1 \leq k \leq 15$ e Shields et al. [32] mostraram que B_k também tem ciclos hamiltonianos para $k = 16$ e 17 . Esses resultados foram baseados em determinar computacionalmente um ciclo hamiltoniano particular P em um grafo especial chamado *reduzido* (definido na Seção 3.1) e em como converter P em um ciclo hamiltoniano em B_k . Neste capítulo, mostramos como converter P em um caminho hamiltoniano em O_k , conseqüentemente mostrando que O_k tem um caminho hamiltoniano para $1 \leq k \leq 17$. Como vimos na Seção 2.2.2, os resultados anteriores constam que O_k tem um caminho hamiltoniano para $k \leq 13$.

Na Seção 3.1, damos duas definições equivalentes para o grafo reduzido, uma baseada no grafo B_k e outra baseada no grafo ímpar O_k . Na Seção 3.2, mostramos como obter um caminho hamiltoniano em O_k através de um caminho hamiltoniano particular no grafo reduzido.

¹Resultados publicados em [41].

3.1 O Grafo Reduzido

Nesta seção, definimos o grafo reduzido como o resultado de uma operação quociente \sim aplicada ao grafo B_k . Então, provamos que a mesma operação aplicada ao grafo ímpar O_k resulta no mesmo grafo reduzido. Começamos com algumas definições.

Denote \mathbb{Z}_n o conjunto $\{1, \dots, n\}$ com aritmética módulo n . Por todo o restante deste trabalho consideramos os vértices de O_k e B_k como subconjuntos de \mathbb{Z}_n e $n = 2k + 1$. Definimos dois k -subconjuntos especiais de \mathbb{Z}_n que são $r_1 = \{1, \dots, k\}$ e $r_2 = \{2, 4, 6, \dots, n - 1\}$.

Dado um conjunto $v = \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \subseteq \mathbb{Z}_n$ e $\delta \in \mathbb{Z}_n$, denote $v + \delta = \{v_1 + \delta, v_2 + \delta, \dots, v_t + \delta\}$ e denote $\bar{v} = \mathbb{Z}_n \setminus v$ o complemento de v em relação a \mathbb{Z}_n . Dizemos que $u, v \subset \mathbb{Z}_n$ satisfazem $u \sim v$ se (i) $u = v + \delta$ ou (ii) $\bar{u} = v + \delta$ para algum $\delta \in \mathbb{Z}_n$. Assim, por exemplo, para $k = 2$ e $n = 5$, $15 \sim 12$ pois satisfazem a condição (i) desde que $12 = 15 + \delta$ onde $\delta = 1$. Da mesma forma, $15 \sim 123$ pois satisfazem a condição (ii) desde que $\bar{15} = 234$, então $\bar{15} = 123 + \delta$ onde $\delta = 1$. Observe que \sim é uma relação de equivalência. Nos referimos à classe de equivalência de v definida por \sim como $\sigma(v)$.

Dado um grafo G , definimos o *grafo quociente* \tilde{G} como o grafo obtido de G por identificar os vértices que são equivalentes de acordo com \sim . Mais precisamente, os vértices de \tilde{G} são as classes de equivalência $\sigma(v)$ para $v \in V(G)$ e se $uv \in E(G)$, então $\sigma(u)\sigma(v) \in E(\tilde{G})$. Para um exemplo aplicado à classe de grafos Kneser bipartidos, veja os grafos B_2 e \tilde{B}_2 na Figura 3.1. Observe que se $uv \in E(G)$ satisfaz $u \sim v$, então o vértice $\sigma(u) \in V(\tilde{G})$ tem um laço, pois $\sigma(u) = \sigma(v)$. Assim, na Figura 3.1 o vértice $\sigma(r_1)$ em \tilde{B}_2 tem um laço porque, por exemplo, 12 é adjacente a 123 em B_2 e $\sigma(12) = \sigma(123)$ desde que $\bar{12} = 345$, então $\bar{12} = 123 + \delta$ onde $\delta = 2$ satisfazendo a condição (ii).

O grafo quociente \tilde{B}_k é chamado o *grafo reduzido*. O seguinte lema é provado como o Lema 1 em [31].

Lema 11 (Shields e Savage, 1999 [31]). *Cada classe de equivalência $\sigma(v)$ de \tilde{B}_k consiste de exatamente $n = 2k + 1$ k -subconjuntos e $n(k + 1)$ -subconjuntos.*

Demonstração. Vamos provar que existem exatamente n distintos k -subconjuntos em cada classe de equivalência $\sigma(v)$, desde que o complemento em \mathbb{Z}_n dos n distintos

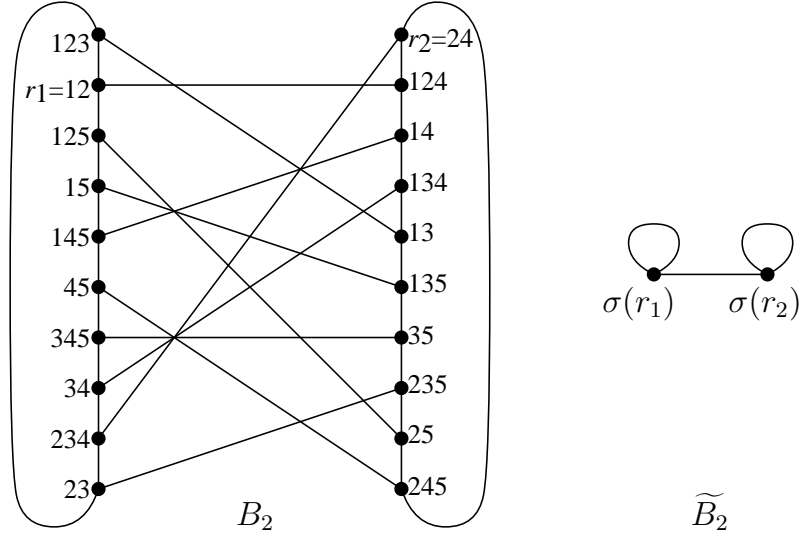


Figura 3.1: O grafo Kneser bipartido B_2 e o grafo reduzido \widetilde{B}_2 .

k -subconjuntos resulta em n distintos $(k + 1)$ -subconjuntos.

Para essa prova vamos utilizar a representação dos k -subconjuntos como números binários de n bits com exatamente k 1's e $(k + 1)$ 0's (como na Figura 2.24). Dada um número binário de n bits $X = x_1x_2 \dots x_n$, definimos o *shift* de X , denotado por $sh(X)$, por $sh(X) = x_2x_3 \dots x_nx_1$. Por exemplo, se $X = 00011$ (veja a Figura 2.24 (c)) então $sh(X) = 00110$, $sh^2(X) = 01100$, $sh^3(X) = 11000$ e assim por diante. Observe que $sh^n(X) = X$ para qualquer número binário X com n bits. Por conveniência, podemos pensar em $sh^i(X)$ como uma rotação de i posições para a esquerda. Considere que $sh^0(X) = X$ e $sh^{t+1}(X) = sh(sh^t(X))$ para $0 \leq t \leq n$.

Por meio da representação dos k -subconjuntos por números binários de n bits, podemos ver que existem, no máximo, n distintos k -subconjuntos em cada classe de equivalência $\sigma(v)$ em \widetilde{B}_k . Pois se existem menos subconjuntos em alguma classe $\sigma(v)$, então para $u \in \sigma(v)$ existe algum $i < n$ para o qual $u = sh^i(u)$. Seja g o maior divisor comum de i e n . Então u consiste de n/g cópias de alguma substring u' de comprimento g . Logo, n/g é um fator de ambos k e $k + 1$ e, portanto, $g = n$ o que contradiz a hipótese de $i < n$. \square

A seguir, provamos o Lema 12 que relaciona \widetilde{O}_k e \widetilde{B}_k .

Lema 12. *Os grafos quociente \widetilde{O}_k e \widetilde{B}_k são isomorfos.*

Demonstração. Os vértices de O_k são k -subconjuntos de \mathbb{Z}_n , com $n = 2k + 1$, e os vértices de B_k são os k -subconjuntos e $(k + 1)$ -subconjuntos de \mathbb{Z}_n . Desde que o

complemento de um k -subconjunto é um $(k+1)$ -subconjunto, temos $V(\widetilde{O}_k) = V(\widetilde{B}_k)$.

Existe uma aresta $uv \in O_k$ quando $u \cap v = \emptyset$ e existe uma aresta $u\bar{v} \in B_k$ quando $u \subset \bar{v}$. Desde que $|u| \neq |\bar{v}|$, ambas afirmações são equivalentes e temos $E(\widetilde{O}_k) = E(\widetilde{B}_k)$. \square

Observe, por exemplo, que o grafo quociente \widetilde{O}_2 da Figura 3.2 (b) é não somente isomorfo, mas igual ao grafo quociente \widetilde{B}_2 da Figura 3.1 (b).

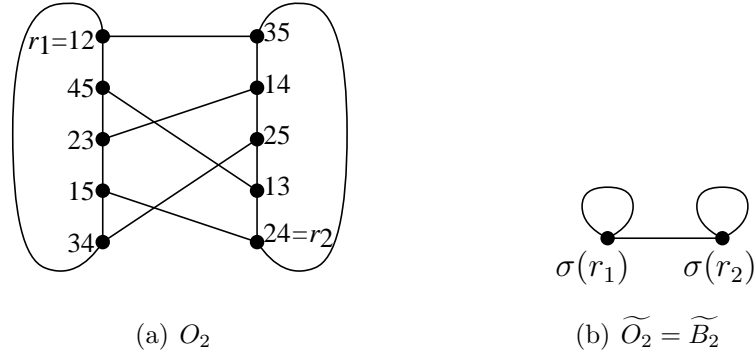
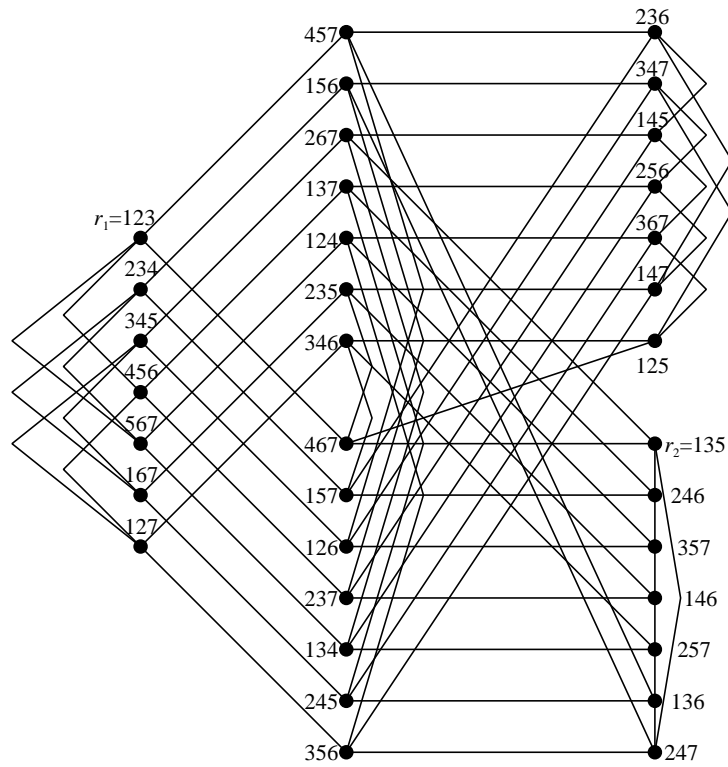


Figura 3.2: O grafo ímpar O_2 e o grafo reduzido $\widetilde{O}_2 = \widetilde{B}_2$.

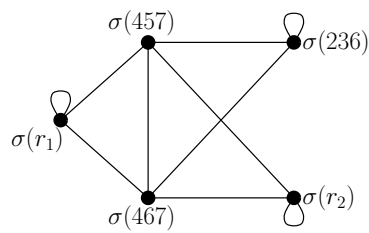
Como uma consequência da operação quociente aplicada aos grafos ímpares e aos grafos Kneser bipartidos, observe na Tabela 3.1 que o grafo reduzido $\widetilde{B}_k = \widetilde{O}_k$ tem $2n$ vezes menos vértices que B_k e n vezes menos vértices que O_k . Assim, por exemplo, B_{17} tem 9.075.135.300 vértices, enquanto \widetilde{B}_{17} tem 129.644.790 vértices, que é 70 vezes menor, embora ainda muito grande.

Shields e Savage [31] mostraram que a existência de um caminho hamiltoniano no grafo reduzido \widetilde{B}_k , começando no vértice $\sigma(r_1)$ e terminando no vértice $\sigma(r_2)$, implica que B_k é hamiltoniano. Nos referimos a um caminho hamiltoniano começando em $\sigma(r_1)$ e terminando em $\sigma(r_2)$ como um *caminho viável*. Usando heurísticas, Shields e Savage [31] determinaram caminhos viáveis em \widetilde{B}_k para $1 \leq k \leq 15$. Recentemente, Shields et al. [32] estenderam este resultado para $k \leq 17$.

Na próxima seção, mostramos como um caminho viável no grafo reduzido leva a um caminho hamiltoniano no grafo ímpar. Utilizaremos os grafos O_2 e \widetilde{O}_2 (Figura 3.2) e também os grafos O_3 e \widetilde{O}_3 (Figura 3.3) para exemplificar nosso método.



(a) O_3



(b) \widetilde{O}_3

Figura 3.3: O grafo ímpar O_3 e o grafo reduzido \widetilde{O}_3 .

k	$n = 2k + 1$	$ V(B_k) $	$ V(O_k) $	$ V(\widetilde{O}_k) $
1	3	6	3	1
2	5	20	10	2
3	7	70	35	5
4	9	252	126	14
5	11	924	462	42
6	13	3432	1716	132
7	15	12.870	6435	429
8	17	48.620	24.310	1.430
9	19	184.756	92.378	4.862
10	21	705.432	352.716	16.796
11	23	2704.156	1.352.078	58.786
12	25	10.400.600	5.200.300	208.012
13	27	40.116.600	20.058.300	742.900
14	29	155.117.520	77.558.760	2.674.440
15	31	601.080.390	300.540.195	9.694.845
16	33	2.333.606.220	1.166.803.110	35.357.670
17	35	9.075.135.300	4.537.567.650	129.644.790
18	37	35.345.263.800	17.672.631.900	477.638.700
19	39	137.846.528.820	68.923.264.410	1.767.263.190
20	41	538.257.874.440	269.128.937.220	6.564.120.420
21	43	2.104.098.963.720	1.052.049.481.860	24.466.267.020
22	45	8.233.430.727.600	4.116.715.363.800	91.482.563.640
23	47	32.247.603.683.100	16.123.801.841.550	343.059.613.650

Tabela 3.1: Número de Vértices dos Grafos O_k , B_k e $\widetilde{O}_k = \widetilde{B}_k$

3.2 Caminhos Hamiltonianos no Grafo Ímpar

Antes de mostrarmos como obter um caminho hamiltoniano em O_k através de um caminho viável em \widetilde{O}_k , vamos primeiro examinar a estrutura dos subgrafos de O_k induzida por $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$.

Lema 13. *O subgrafo de O_k induzido por $\sigma(r_1)$ é o ciclo $r_1, r_1 + k, r_1 + 2k, \dots, r_1 + (n - 1)k$.*

Demonstração. O ciclo tem n vértices porque k e $n = 2k + 1$ são primos entre si. O fato de que os únicos vértices em $\sigma(r_1)$ que são disjuntos de r_1 serem $r_1 + k$ e $r_1 + (n - 1)k = r_1 - k$ segue da definição que $r_1 = \{1, \dots, k\}$. Veja um exemplo

na Figura 3.4 onde $(12, 45, 23, 15, 34)$ é o ciclo induzido por $\sigma(r_1) = \sigma(12)$ no grafo ímpar O_2 . \square

Lema 14. *O subgrafo de O_k induzido por $\sigma(r_2)$ é o ciclo $r_2, r_2 + 1, r_2 + 2, \dots, r_2 + (n - 1)$.*

Demonstração. Observe que $r_2 + j$ é adjacente a $r_2 + i + j$ se e somente se r_2 é adjacente a $r_2 + j$. Portanto, é suficiente provar que r_2 é somente adjacente a $r_2 + 1$ e a $r_2 + (n - 1)$. Lembre-se que $r_2 = \{2, 4, 6, \dots, n - 1\}$ e que O_k tem arestas entre conjuntos disjuntos. O grafo O_k tem uma aresta entre r_2 e $r_2 + 1$, porque r_2 contém somente números pares e $r_2 + 1$ contém somente números ímpares. Não há aresta entre r_2 e $r_2 + i$ para um número par $i \leq n - 3$ porque $n - 1 \in r_2 \cap (r_2 + i)$. Não há aresta entre r_2 e $r_2 + i$ para um número ímpar i com $3 \leq i \leq n - 2$ porque $2 \in r_2 \cap (r_2 + i)$. Para a conveniência do leitor, um exemplo é apresentado na Figura 3.4, onde $(24, 35, 14, 25, 13)$ é o ciclo induzido por $\sigma(r_2) = \sigma(24)$ no grafo ímpar O_2 . \square

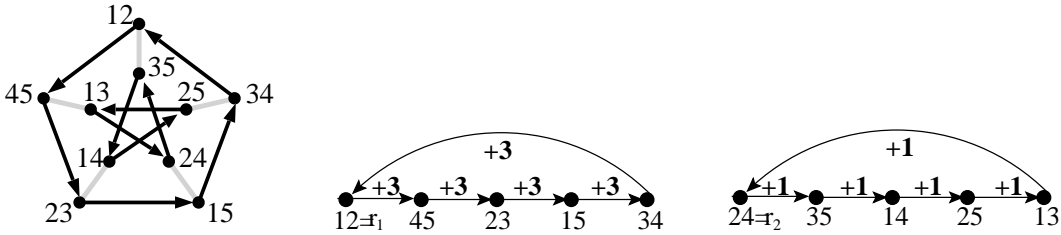


Figura 3.4: Ciclos induzidos por $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ no grafo ímpar O_2 .

A seguir, estudamos a relação entre adjacências em \widetilde{O}_k e adjacências em O_k .

Lema 15. *Se existe uma aresta $\sigma(u)\sigma(v)$ em \widetilde{O}_k , então existe um emparelhamento perfeito entre os vértices de $\sigma(u)$ e os vértices de $\sigma(v)$ em O_k .*

Demonstração. Se $\sigma(u)\sigma(v) \in E(\widetilde{O}_k)$, então existem dois vértices $u' \in \sigma(u)$ e $v' \in \sigma(v)$ que são adjacentes em O_k . Podemos formar um emparelhamento perfeito emparelhando $u' + i$ com $v' + i$ para $1 \leq i \leq n$. Por exemplo, veja na Figura 3.5 o emparelhamento perfeito em O_2 formado da aresta entre $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ em \widetilde{O}_2 (Figura 3.2 (b)). \square

O seguinte lema é uma consequência imediata do Lema 15 e mostra como construir caminhos disjuntos em O_k usando um caminho em \widetilde{O}_k .

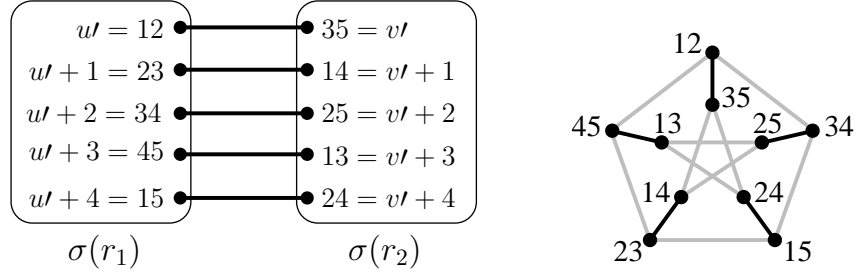


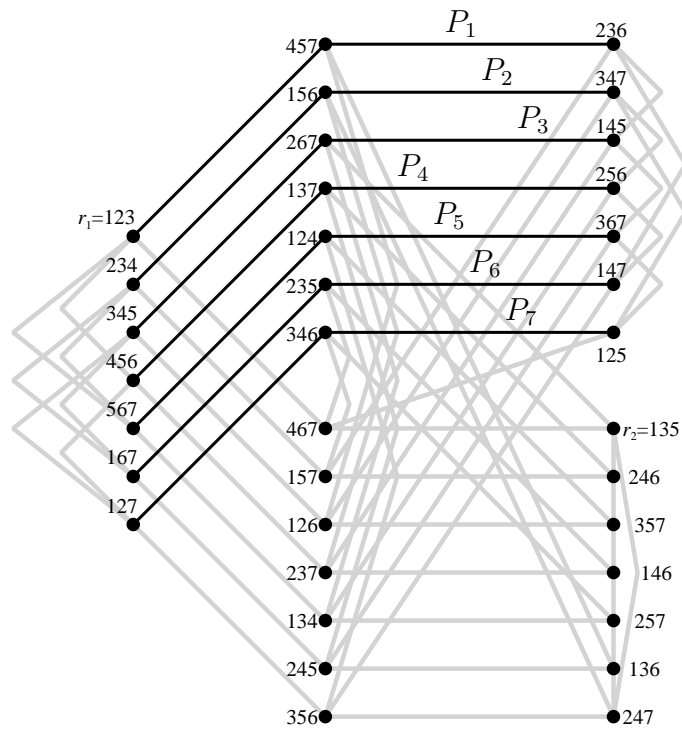
Figura 3.5: Emparelhamento perfeito em O_2 resultado da aresta entre $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ em \widetilde{O}_2 .

Lema 16. *Se existe um caminho $P = (p_1, \dots, p_m)$ em \widetilde{O}_k , então O_k tem n caminhos disjuntos $P_i = (q_1 + (i - 1), \dots, q_m + (i - 1))$, para $1 \leq i \leq n$, tal que $q_j \in p_j$, para $1 \leq j \leq m$.*

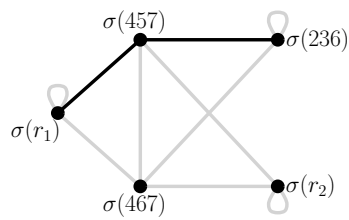
Por exemplo, considere o caminho $P = (\sigma(r_1), \sigma(457), \sigma(236))$ em \widetilde{O}_3 destacado na Figura 3.6 (b). A partir de P , definimos $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 (Figura 3.6 (a)):

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (123, 457, 236); \\
 P_2 &= (234, 156, 347); \\
 P_3 &= (345, 267, 145); \\
 P_4 &= (456, 137, 256); \\
 P_5 &= (567, 124, 367); \\
 P_6 &= (167, 235, 147); \\
 P_7 &= (127, 346, 125).
 \end{aligned}$$

Para construir um caminho hamiltoniano em O_k , concatenamos adequadamente todos os n caminhos disjuntos obtidos a partir de um caminho viável em \widetilde{O}_k da maneira descrita pelo Lema 16. Então, criteriosamente, escolhemos algumas arestas dos ciclos induzidos por $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ (Lemas 13 e 14) para conectar os n caminhos em um único caminho hamiltoniano. Por exemplo, considere as arestas do ciclo induzido por $\sigma(r_1)$ na Figura 3.7. Podemos utilizar a aresta $\{123, 567\}$ para conectar os caminhos disjuntos P_1 e P_5 em O_3 obtendo o caminho $(367, 124, 567, 123, 457, 236)$. Da mesma forma, a aresta $\{234, 167\}$ conecta os caminhos P_2 e P_6 e a aresta $\{345, 127\}$ conecta P_3 e P_7 . Observe, porém, que as arestas do ciclo induzido por $\sigma(r_1)$ não podem conectar todos os caminhos P_1, \dots, P_7 de modo que o resultado seja sempre

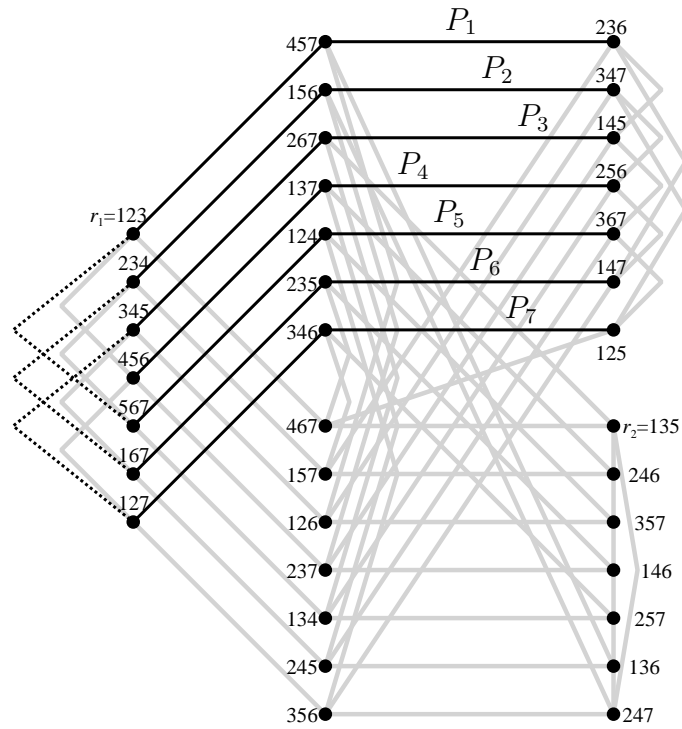


(a) Os $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 resultantes de P em \widetilde{O}_3 .

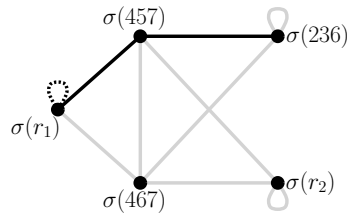


(b) Caminho $P = (\sigma(r_1), \sigma(457), \sigma(236))$ em \widetilde{O}_3 .

Figura 3.6: Um caminho no grafo \widetilde{O}_3 resulta em $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 . Arestas não usadas estão cinzas.



(a) Os $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 resultantes de P em \widetilde{O}_3 .



(b) Caminho $P = (\sigma(r_1), \sigma(457), \sigma(236))$ em \widetilde{O}_3 .

Figura 3.7: Em (a) os $n = 7$ caminhos disjuntos em O_3 resultantes do caminho P destacado em (b). Os caminhos em O_3 estão conectados por arestas do ciclo induzido por $\sigma(r_1)$ (linhas pontilhadas). Arestas não usadas estão cinzas.

um caminho e, por isso, o caminho P_4 não é ligado a nenhum outro. E esta é a razão porque, nesta construção, necessitamos de que o último vértice do caminho viável seja $\sigma(r_2)$.

Teorema 17. *Se existe um caminho viável $P = (p_1, \dots, p_m)$ em \widetilde{O}_k , então existe um caminho hamiltoniano em O_k .*

Demonstração. Dado um caminho Q , denotamos por \overleftarrow{Q} o caminho Q atravessado do último para o primeiro vértice. Dados dois caminhos Q_1 e Q_2 sem vértices em comum e o último vértice de Q_1 sendo adjacente ao primeiro vértice de Q_2 , denotamos por $Q_1 \circ Q_2$ o caminho obtido por percorrer os vértices de Q_1 seguidos pelos vértices de Q_2 .

Pela definição de caminho viável, $P = (p_1, \dots, p_m)$ é hamiltoniano em \widetilde{O}_k , $m = |V(O_k)|/n$, $p_1 = \sigma(r_1)$ e $p_m = \sigma(r_2)$. Pelo Lema 16, para $1 \leq i \leq n$, existem n caminhos disjuntos P_i da seguinte forma: $P_i = (q_1 + (i-1), \dots, q_m + (i-1))$ com $q_1 + (i-1) \in \sigma(r_1)$, $q_m + (i-1) \in \sigma(r_2)$ e $q_j + (i-1) \in p_j$.

Pelo Lema 13 e desde que $n = 2k + 1$, $q_1 + i$ é adjacente a $q_1 + i + k$. Portanto, $\overleftarrow{P_{i+1}} \circ P_{i+k+1}$ é um caminho válido. Pelo Lema 14, $q_m + i$ é adjacente a $q_m + i + 1$. Portanto, $P_i \circ \overleftarrow{P_{i+1}}$ é um caminho válido. Conseqüentemente, o seguinte é um caminho válido: $Q_i = P_i \circ \overleftarrow{P_{i+1}} \circ P_{i+k+1} \circ \overleftarrow{P_{i+k+2}}$, onde

$$\begin{aligned} P_i &= (q_1 + (i-1), \dots, q_m + (i-1)) \\ \overleftarrow{P_{i+1}} &= (q_m + i, \dots, q_1 + i) \\ P_{i+1+k} &= (q_1 + i + k, \dots, q_m + i + k) \\ \overleftarrow{P_{i+k+2}} &= (q_m + i + k + 1, \dots, q_1 + i + k + 1). \end{aligned}$$

A idéia para concluir a prova é construir um caminho hamiltoniano $Q_1 \circ Q_3 \circ Q_5 \circ \dots$. Esta construção é ilustrada na Figura 3.8. A seguir, discutimos dois casos separados, k par e k ímpar, que têm condições diferentes para definir o fim do caminho.

Se k é par, então mostramos que $R_{par} = Q_1 \circ Q_3 \circ \dots \circ Q_{k-1}$ é um caminho válido. Pelo Lema 13, o último vértice de Q_i , $q_1 + i + 1 + k$, é adjacente a $q_1 + i + 1$, o primeiro vértice de Q_{i+2} , desde que $P_{i+2} = (q_1 + i + 1, \dots, q_m + i + 1)$. Também, R_{par} contém P_i ou $\overleftarrow{P_i}$, para $i \in \{1, \dots, 2k + 1\} \setminus \{k + 1\}$. Para incluir o caminho que está

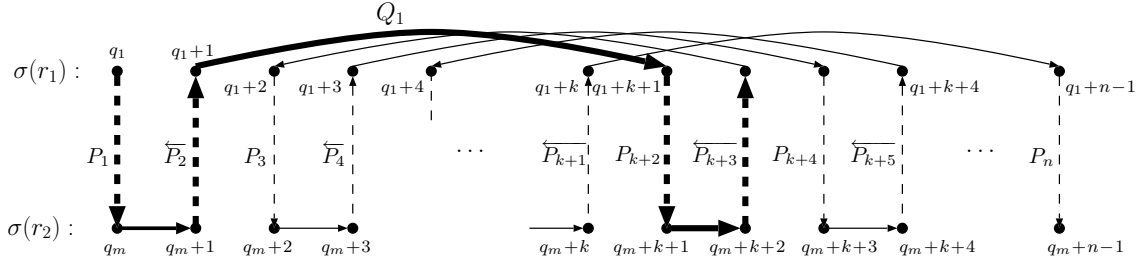


Figura 3.8: Construção do caminho hamiltoniano em O_k com Q_1 destacado.

faltando P_{k+1} , definimos o caminho hamiltoniano em O_k como $H_{par} = R_{par} \circ P_{k+1}$. Veja a Figura 3.9 para um exemplo deste caso.

Se k é ímpar, então o mesmo argumento mostra que $R_{impar} = Q_1 \circ Q_3 \circ \dots \circ Q_{k-2}$ é um caminho válido. No caso ímpar, R_{impar} contém P_i ou \overleftarrow{P}_i , para $i \in \{1, \dots, 2k+1\} \setminus \{k, k+1, 2k+1\}$. Para incluir os caminhos que estão faltando, definimos o caminho hamiltoniano em O_k como $H_{impar} = R_{impar} \circ P_k \circ \overleftarrow{P}_{k+1} \circ P_{2k+1}$. Observe que a Figura 3.8 ilustra a construção de H_{impar} . A construção completa de um caminho hamiltoniano em O_3 é ilustrada na Figura 3.10 onde:

$$R_{impar} = Q_1 = P_1 \circ \overleftarrow{P}_2 \circ P_5 \circ \overleftarrow{P}_6$$

$$H_{impar} = R_{impar} \circ \underbrace{P_3}_{P_k} \circ \underbrace{\overleftarrow{P}_4}_{\overleftarrow{P}_{k+1}} \circ \underbrace{P_7}_{P_{2k+1}}.$$

□

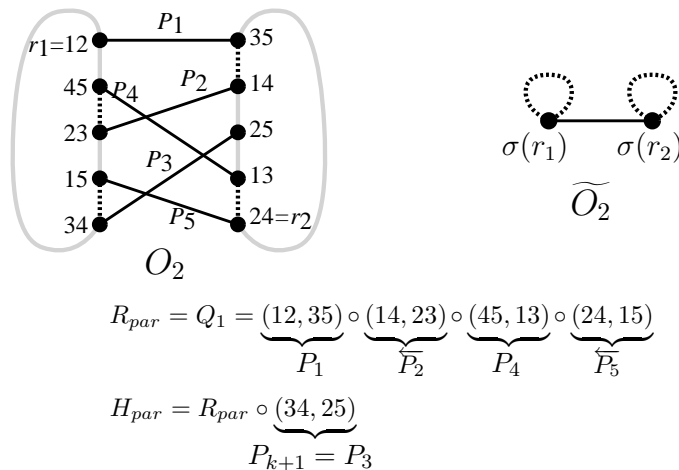
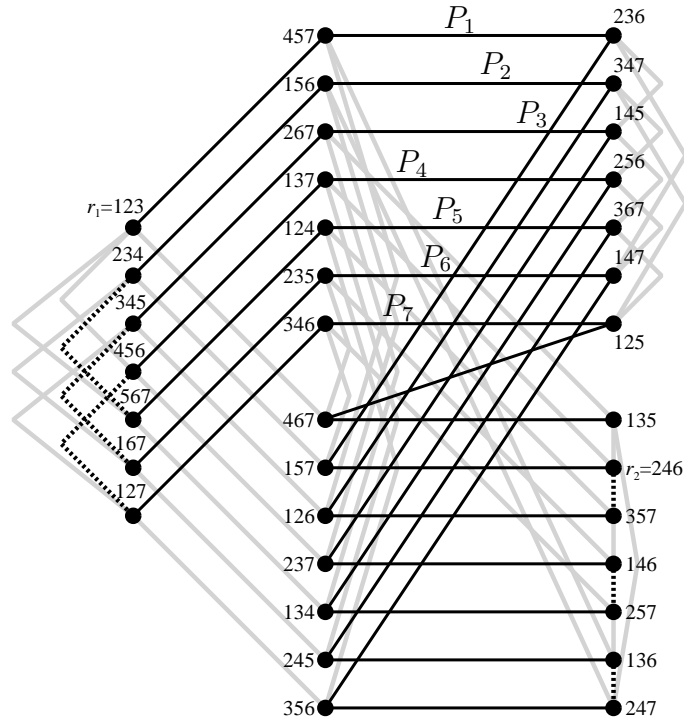
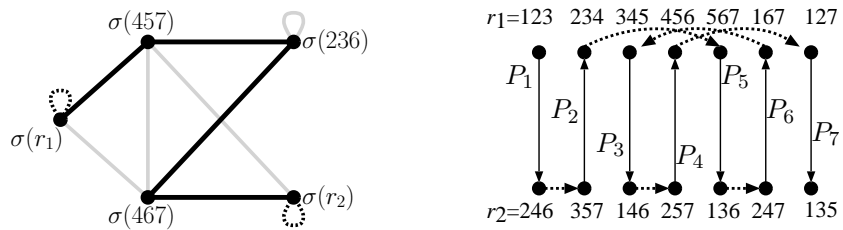


Figura 3.9: Exemplo do Teorema 17: caso em que k é par. À direita: Caminho viável em \widetilde{O}_2 . À esquerda: caminho hamiltoniano em O_2 .



(a) Caminho hamiltoniano em O_3 . Arestas não usadas estão cinzas.



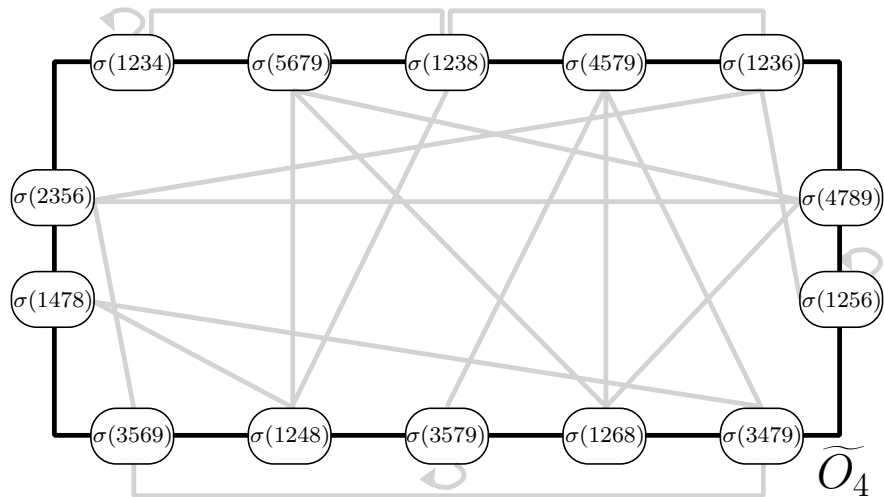
(b) Caminho hamiltoniano viável em \widetilde{O}_3 . Arestas não usadas estão cinzas. (c) Vértices em $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ e caminhos P_1, P_2, \dots, P_7 usados na construção do caminho hamiltoniano em O_3 . Arestas dos laços em $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ estão pontilhadas.

Figura 3.10: Em (a) o caminho hamiltoniano em O_3 resultado do caminho viável em (b). Em (c) os vértices em $\sigma(r_1)$ e $\sigma(r_2)$ e os caminhos usados na construção do caminho hamiltoniano em O_3 em (a).

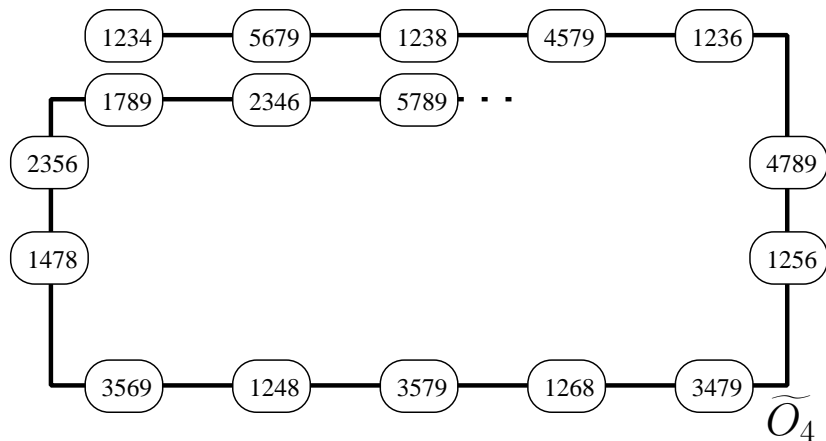
É natural perguntar se um ciclo hamiltoniano em O_k pode ser construído a partir de um ciclo hamiltoniano em \widetilde{O}_k . Através de uma heurística, encontramos inúmeros ciclos hamiltonianos em \widetilde{O}_4 que, em sua maioria, resultam em ciclos hamiltonianos em O_4 . Em alguns casos, porém, isso não acontece. Veja, por exemplo, o ciclo hamiltoniano em \widetilde{O}_4 na Figura 3.11 (a). A idéia para construir um ciclo hamiltoniano em O_4 é similar à idéia utilizada no Teorema 17 e é ilustrada na Figura 3.11 (b).

Primeiro, escolhamos arbitrariamente um vértice A de \widetilde{O}_4 e um vértice u de O_4 tal que $u \in A$. Pelo Lema 15, se $AB \in \widetilde{O}_4$ então existe $v \in B$ tal que $uv \in O_4$. Então, gradativamente construímos um ciclo em O_4 por escolher um vértice que seja adjacente ao vértice anterior selecionado. Observe, por exemplo, na Figura 3.11 que, desde que primeiro escolhamos o vértice 1234, precisamos selecionar o vértice 5679 contido no vértice seguinte no ciclo em \widetilde{O}_4 . A seguir, 1238 é selecionado e assim por diante. Esperançosamente, o ciclo termina depois de visitar todos os vértices do grafo resultando em um ciclo hamiltoniano. Neste caso, porém, o resultado é um subgrafo gerador de O_4 composto por três ciclos disjuntos (veja a Figura 3.12).

No próximo capítulo, apresentamos uma interpretação para “próximo” de ser hamiltoniano e, conforme essa interpretação, mostramos o quanto os grafos ímpares estão próximos de serem hamiltonianos.



(a) Um ciclo hamiltoniano em \widetilde{O}_4 . Arestas não usadas estão cinzas.



(b) Idéia para construção de um ciclo hamiltoniano em O_4 : desde que o vértice 1234 foi primeiro escolhido, o vértice 5679 contido no vértice seguinte no ciclo em \widetilde{O}_4 deve ser selecionado para compor o ciclo em O_4 . A seguir, 1238 é selecionado e assim por diante.

Figura 3.11: Em (a) um ciclo hamiltoniano em O_4 . Em (b) ilustração da idéia para construir um ciclo hamiltoniano em O_4 .

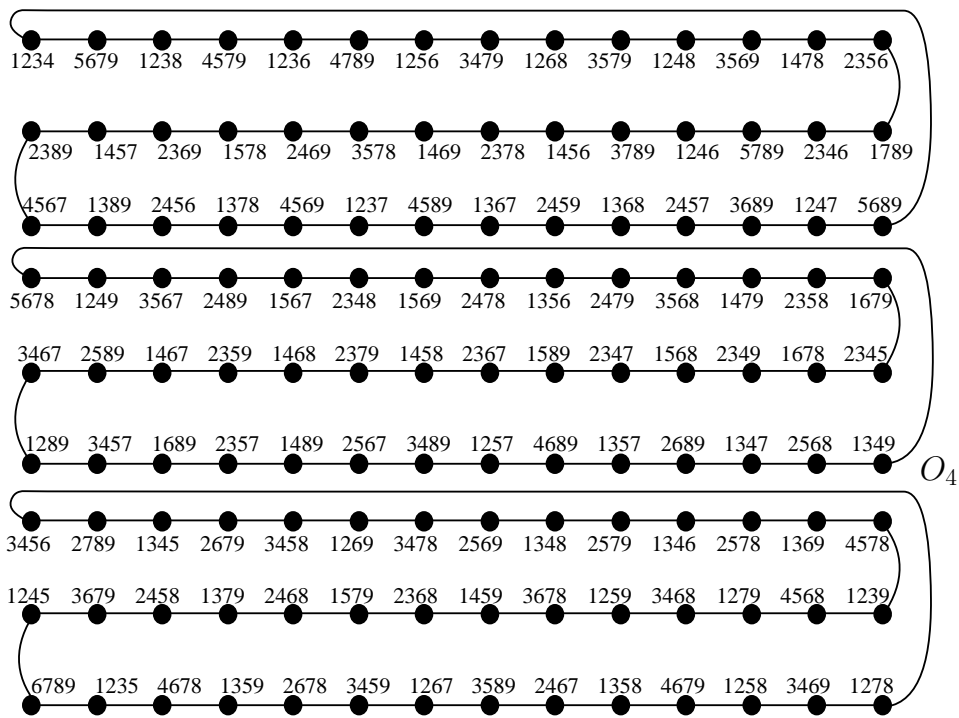


Figura 3.12: Resultado do ciclo hamiltoniano em \tilde{O}_4 apresentado na Figura 3.11 (a): um subgrafo gerador de O_4 composto de três ciclos disjuntos.

Capítulo 4

Prisma Hamiltoniano sobre os Grafos Ímpares¹

No Capítulo 2, vimos uma possível interpretação para a expressão “próximo” de ser hamiltoniano. Outra interpretação é fornecida em [1] onde uma hierarquia de grafos é introduzida. Um passeio gerador fechado onde cada vértice é atravessado no máximo q vezes é chamado um q -passeio, e uma árvore geradora de grau máximo q é uma q -árvore. Assim, nesta terminologia, um ciclo hamiltoniano é um 1-passeio e um caminho hamiltoniano é uma 2-árvore. Foi provado em [1] que qualquer grafo com uma q -árvore tem um q -passeio e que um q -passeio garante a existência de uma $(q + 1)$ -árvore. Combinando os dois resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{1-passeio (ciclo hamiltoniano)} &\implies \text{2-árvore (caminho hamiltoniano)} \implies \text{2-passeio} \\ &\implies \text{3-árvore} \implies \text{3-passeio} \implies \dots \end{aligned}$$

O prisma sobre um grafo G é o produto cartesiano $G \square K_2$ de G com o grafo completo em dois vértices. Conseqüentemente, o prisma sobre G consiste de duas cópias de G com um 1-fator unindo os vértices correspondentes. Por exemplo, veja na Figura 4.1 o prisma sobre os grafos O_1 , K_4 e O_2 .

Foi mostrado em [2] que a propriedade de ter um prisma hamiltoniano está “sandwichado” entre a existência de uma 2-árvore e a existência de um 2-passeio. Assim,

$$\text{2-árvore} \implies \text{prisma hamiltoniano} \implies \text{2-passeio} \tag{4.1}$$

¹Resultados submetidos [42].

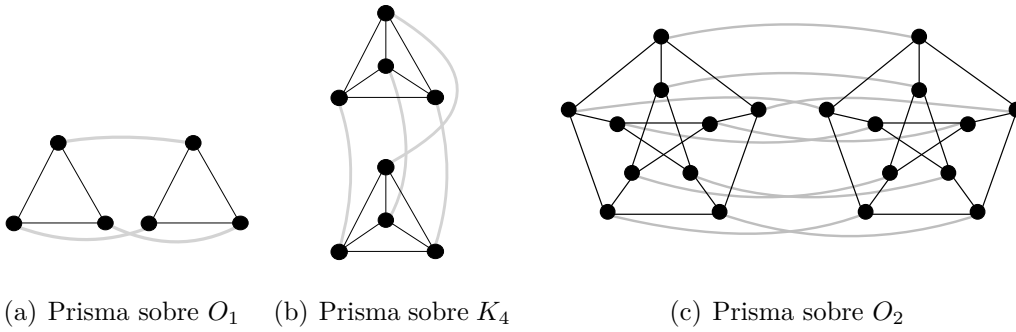


Figura 4.1: Prisma sobre os grafos O_1 , K_4 e O_2 .

Neste sentido, grafos que têm um prisma hamiltoniano estão próximos de serem hamiltonianos, mesmo mais próximos que grafos que tem um 2-passeio.

Agora, vamos nos deter um pouco mais na expressão 4.1. Se um grafo G tem um caminho hamiltoniano (2-árvore), então construímos um ciclo hamiltoniano no prisma sobre G unindo o caminho hamiltoniano em cada cópia do grafo através de duas arestas de K_2 (veja a Figura 4.2). Por outro lado, um ciclo hamiltoniano no prisma sobre G não implica um caminho hamiltoniano em G . Observe na Figura 4.3 que o prisma sobre o grafo bipartido completo $K_{2,4}$ é hamiltoniano, muito embora não exista um caminho hamiltoniano (2-árvore) em $K_{2,4}$ pois a diferença entre o tamanho das duas bipartições é maior que 1.



(a) Caminho hamiltoniano em O_1 . (b) Ciclo hamiltoniano no prisma sobre O_1 .

Figura 4.2: Construção de um ciclo hamiltoniano no prisma sobre O_1 através de um caminho hamiltoniano em O_1 : cada cópia de O_1 em (b) tem destacado o caminho hamiltoniano em (a) que são unidos por duas arestas de K_2 no prisma.

Ainda na expressão 4.1, a partir de um ciclo hamiltoniano no prisma sobre um grafo G vamos construir um 2-passeio em G : use a mesma ordem dos vértices que aparecem em um ciclo hamiltoniano no prisma sobre G , conforme ilustramos na Figura 4.4. Observe que o 2-passeio corresponde às arestas das duas cópias de G que estão no ciclo hamiltoniano. Por outro lado, o grafo G da Figura 4.5 (a) tem um 2-passeio, porém o prisma sobre G não é hamiltoniano. Observe na Figura 4.5 (b) que os vértices a_1, d_1, f_1, a_2, d_2 e f_2 têm grau 2. Portanto, para que o grafo

seja hamiltoniano, todas as arestas incidentes a esses vértices têm de estar no ciclo (arestas destacadas). No entanto, não é possível formar um ciclo hamiltoniano contendo todas essas arestas.

Em [39] foi provado que para todo $k \geq 1$, o prisma sobre o grafo B_k é hamiltoniano. Nosso principal resultado neste capítulo estabelece o mesmo resultado para os grafos ímpares quando k é par:

Teorema 18. *O prisma sobre o grafo ímpar O_k , $k \geq 2$, k par, é hamiltoniano.*

Observação 19. *Como vimos na Seção 2.2 e no Capítulo 3, O_k tem um ciclo ou caminho hamiltoniano para $k \leq 17$ o que, de fato, implica que o prisma sobre O_k é hamiltoniano. Assim, é suficiente provar o Teorema 18 para $k > 17$.*

A técnica usada na prova do Teorema 18 não pode ser usada para provar que o grafo O_k tem um prisma hamiltoniano quando k é ímpar. Neste caso, podemos apenas mostrar que O_k tem não somente um 2-passeio, mas também uma 2-trilha, ou seja, um 2-passeio que não repete arestas.

4.1 Preliminares

Nesta seção, introduzimos alguma notação, noções, e estabelecemos resultados de [36, 39] e [37] que serão frequentemente usados para provar o resultado principal deste capítulo. A idéia principal da prova é mostrar que O_k contém um subgrafo gerador cúbico 3-conexo desde que foi mostrado em [43] (mais tarde também em [44]) que todo grafo cúbico 3-conexo tem um prisma hamiltoniano. Construimos tal subgrafo usando uma adequada projeção Π de um subgrafo de B_k . Portanto, começamos com a definição desta projeção Π .

Seja A um vértice de B_k . Então $\Pi(A) = A$ se A é um k -subconjunto e $\Pi(A) = \bar{A}$ se A é um $(k+1)$ -subconjunto. A projeção de uma aresta $e = AB$ em B_k é induzida pela projeção de seus extremos, ou seja, $\Pi(e) = \Pi(A)\Pi(B)$. A projeção $\Pi(G)$ de um subgrafo G de B_k é obtida por aplicar Π a todos os vértices e arestas de G . Por exemplo, suponha que A é um vértice em B_2 (veja a Figura 4.6). Se $A = 12$, então $\Pi(A) = 12$. Porém, se $A = 123$, então $\Pi(A) = 45$ pois $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em B_2 . Assim, para cada vértice A e aresta e em B_k , $\Pi(A)$ e $\Pi(e)$, é um vértice e uma

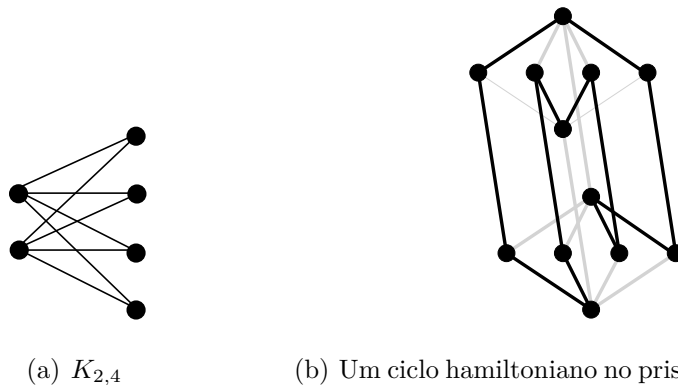


Figura 4.3: O prisma sobre $K_{2,4}$ é hamiltoniano porém $K_{2,4}$ não tem caminho hamiltoniano pois a diferença entre o tamanho das duas bipartições é maior que 1.

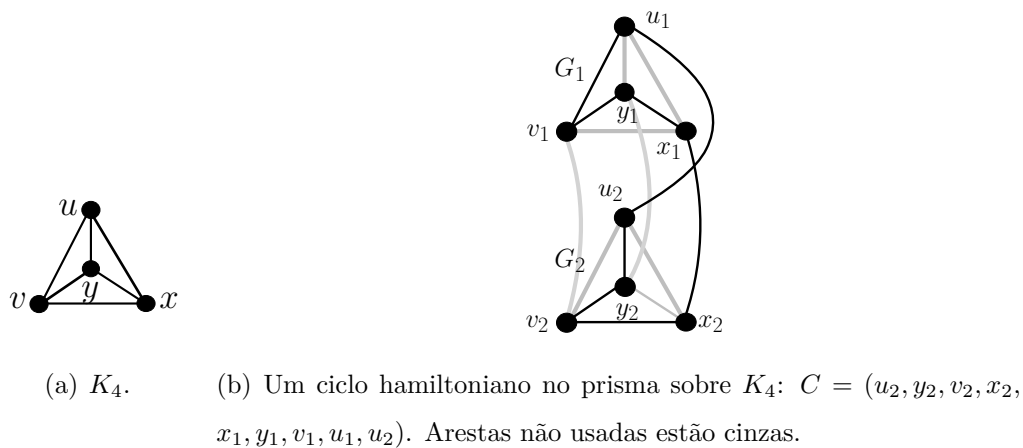


Figura 4.4: Construção de um 2-passeio em K_4 através de um ciclo hamiltoniano no prisma sobre K_4 . Em (b), para facilitar o entendimento, chamamos de G_1 e G_2 as duas cópias do K_4 usadas para formar o prisma (e assim também os vértices estão nomeados com o mesmo índice do grafo). Um 2-passeio em K_4 é obtido removendo-se os índices dos vértices em C : (u, y, v, x, y, v, u) .

aresta em O_k , respectivamente. O objetivo é obter um subgrafo em O_k a partir de um subgrafo de B_k . Como O_k não tem $(k + 1)$ -subconjuntos, a projeção Π leva os $(k + 1)$ -subconjuntos de B_k a k -subconjuntos através de seus complementos em \mathbb{Z}_n .

Seja C um ciclo em B_k . Então $\Pi(C)$ é um ciclo em O_k se e somente se não existe vértice A em C tal que \bar{A} também está em C . Caso contrário, porque $\Pi(A) = \Pi(\bar{A})$ temos um 2-passeio em $\Pi(C)$. Observe, por exemplo, o ciclo destacado na Figura 4.6. Quando aplicamos a projeção Π sobre C , obtemos um 2-passeio, pois a primeira metade de C , isto é $(12, 123, 23, 234, 34)$, contém o complemento de todos os vértices na segunda metade de C que é $(345, 45, 145, 15, 125)$.

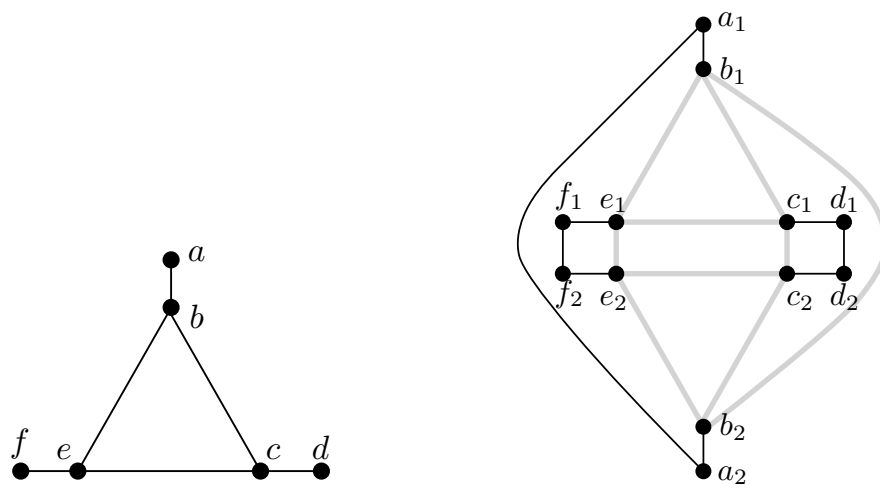
Construímos o subgrafo gerador cúbico desejado em O_k aplicando Π sobre emparelhamentos modulares de B_k . O conceito de *emparelhamento modular* foi introduzido em [36]. Para todo k -subconjunto A de \mathbb{Z}_n e $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, o emparelhamento modular m_i tem arestas $A, A \cup \{\bar{a}_j\}$, onde $j \equiv (i + \sum_{a \in A} a) \pmod{k + 1}$ e \bar{a}_j é o j -ésimo maior elemento em \bar{A} . Para um exemplo, veja os emparelhamentos modulares em B_2 na Figura 4.7. Observe que B_2 tem 3 emparelhamentos modulares desde que $k = 2$ e $(k + 1) = 3$. Para a conveniência do leitor, ilustramos o cálculo das arestas em m_1, m_2 e m_3 para o conjunto $A = 12$ na Tabela 4.1. Em m_1 , j é 1 e, portanto, devemos selecionar o primeiro maior elemento em $\bar{A} = 345$, obtendo assim a aresta $\{12, 125\}$. Em m_2 , j é 2 e, por isso, o segundo maior elemento de \bar{A} é escolhido, resultando na aresta $\{12, 124\}$.

i	$\sum_{a \in A} a$	$i + \sum_{a \in A} a$	j	\bar{a}_j	Aresta em m_i
1	3	4	1	5	$\{12, 125\}$
2	3	5	2	4	$\{12, 124\}$
3	3	6	3	3	$\{12, 123\}$

Tabela 4.1: Os três emparelhamentos modulares para o conjunto $A = 12$ em B_2 .

Em [36] foi mostrado que os emparelhamentos modulares m'_i s, $i = 1, \dots, k + 1$ são emparelhamentos perfeitos e formam uma 1-fatorização de B_k . Ao trabalhar com os elementos de \mathbb{Z}_n , os compreenderemos ordenados ciclicamente, com 1 sendo o sucessor de $2k + 1$. Toda computação feita módulo $k + 1$ tomará resíduo do conjunto $\{1, 2, \dots, k + 1\}$.

Através das 1-fatorizações de B_k resultantes dos emparelhamentos modulares,



(a) 2-passeio em G : $(a, b, c, d, c, e, f, e, b, a)$. (b) O prisma sobre G não é hamiltoniano. Desde que os vértices a_1, f_1, f_2, d_1 e d_2 tem grau 2, as arestas pretas obrigatoriamente estão em um ciclo hamiltoniano no grafo. Porém, não é possível encontrar um ciclo que contenha todas estas arestas.

Figura 4.5: Um exemplo de que um 2-passeio não implica um prisma hamiltoniano. Em (b) nomeamos os vértices com o mesmo índice da cópia de G .

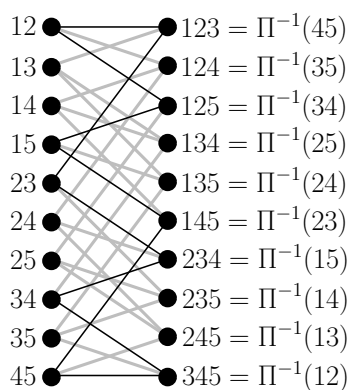


Figura 4.6: Um ciclo $C = (12, 123, 23, 234, 34, 345, 45, 145, 15, 125)$ em B_2 (arestas pretas) cuja projeção $\Pi(C) = (12, 45, 23, 15, 34, 12, 45, 23, 15, 34)$ em O_2 é um 2-passeio.

Johnson e Kierstead [37] encontraram uma 2-fatorização explícita de O_k . O Teorema 20 de Johnson e Kierstead [37] fornece um ingrediente chave para nossa prova.

Teorema 20 (Johnson e Kierstead, 2004 [37]). *Seja $f_i = \Pi(m_i)$, onde m_i é o i -ésimo emparelhamento modular. Então f_i é um 2-fator de O_k e $f_j = f_{k+2-j}$, para $j \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}$, exceto quando k é par e $j = \frac{k+2}{2}$. Se k é par e $j = \frac{k+2}{2}$, então f_i é um emparelhamento perfeito de O_k . Além disso, para k ímpar e $j \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}$, f_j 's formam uma 2-fatorização de O_k . Para k par, f_j 's formam uma decomposição de O_k em $\frac{k}{2}$ distintos 2-fatores e um emparelhamento perfeito.*

Em outras palavras, o Teorema 20 diz que a projeção dos $(k+1)$ emparelhamentos modulares do grafo B_k resulta em uma 2-fatorização de O_k , se k é ímpar. Se k é par, a projeção resulta em $\frac{k}{2}$ distintos 2-fatores e um emparelhamento perfeito. Vamos ilustrar a idéia com exemplos. Suponha que $k = 2$, então B_2 tem $(k+1) = 3$ emparelhamentos modulares. Assim, segundo o Teorema 20, a projeção de m_1 é igual a projeção de m_3 , ou seja, $\Pi(m_1) = \Pi(m_3)$. Além disso, $\Pi(m_1)$ é um 2-fator e $\Pi(m_2)$ é um emparelhamento perfeito em O_2 , conforme ilustramos nas Figura 4.8 e 4.9.

Agora, suponha que $k = 3$, então B_3 tem $(k+1) = 4$ emparelhamentos modulares. Segundo o Teorema 20, $\Pi(m_1) = \Pi(m_4)$ e $\Pi(m_2) = \Pi(m_3)$ (como ilustrado na Figura 4.10 (a)). Como $\Pi(m_1)$ e $\Pi(m_2)$ são 2-fatores distintos de O_3 , eles formam uma 2-fatorização de O_3 .

Observe que, conforme o Teorema 20, a projeção de m_1 é igual a projeção de m_{k+1} , a projeção de m_2 é igual a projeção de m_k , a projeção de m_3 é igual a projeção de m_{k-1} e assim por diante. Ilustramos essa idéia em um esquema na Figura 4.10 para $k = 3, 4$.

Embora a próxima afirmação esteja implícita no Teorema 20, a formulamos como o Corolário 21, pois será freqüentemente usada. Sejam A e B dois k -subconjuntos tal que $e = \overline{AB}$ é uma aresta em B_k . Dizemos que a aresta \overline{AB} é a *aresta complementar* de e , denotada por \bar{e} .

Corolário 21. *Seja e uma aresta em B_k tal que $e \in m_i$, então $\bar{e} \in m_{k+2-i}$. Em particular, e e sua aresta complementar \bar{e} pertencem ao mesmo emparelhamento modular se e somente se k é par e $i = \frac{k+2}{2}$.*

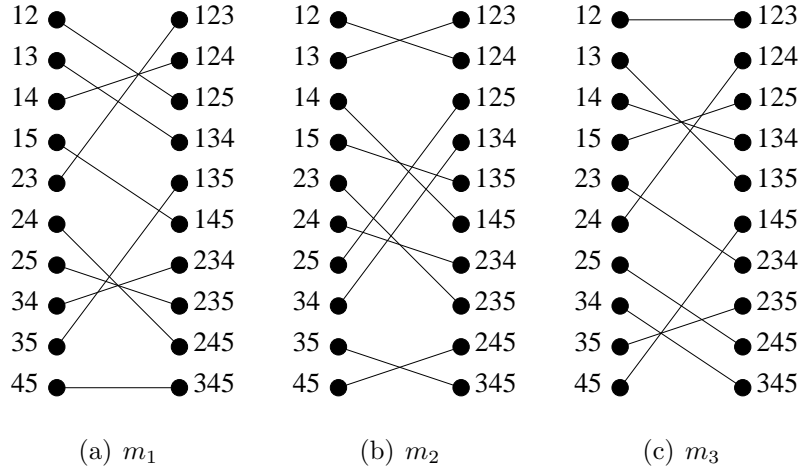


Figura 4.7: Os três emparelhamentos modulares em B_2 .

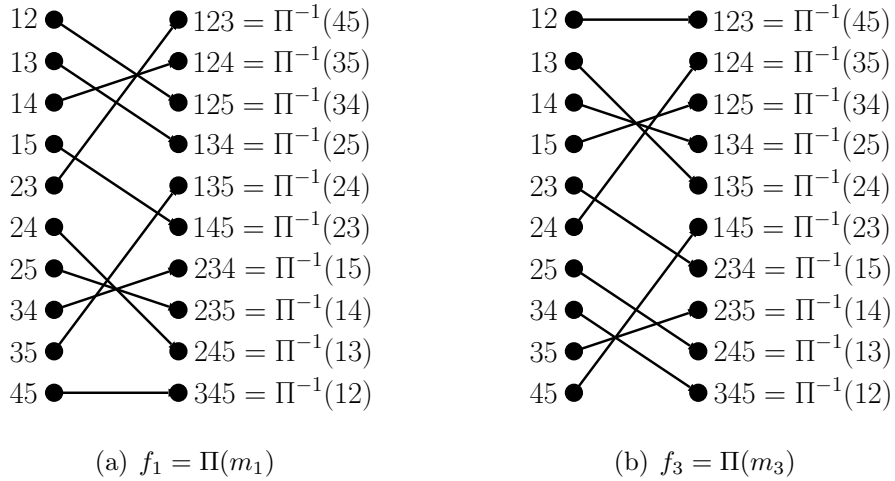


Figura 4.8: Um 2-fator em O_2 : a projeção de m_1 em (a) e a projeção de m_3 em (b) resultam no mesmo 2-fator em O_2 (Figura 4.9 (b)). Por exemplo, a projeção das arestas $\{34, 234\}$ e $\{15, 145\}$ de m_1 resulta em $\{34, 15\}$ e $\{15, 23\}$. Porém, a projeção das arestas $\{15, 125\}$ e $\{23, 234\}$ de m_3 resulta nas mesmas arestas $\{15, 34\}$ e $\{23, 15\}$ em O_2 .

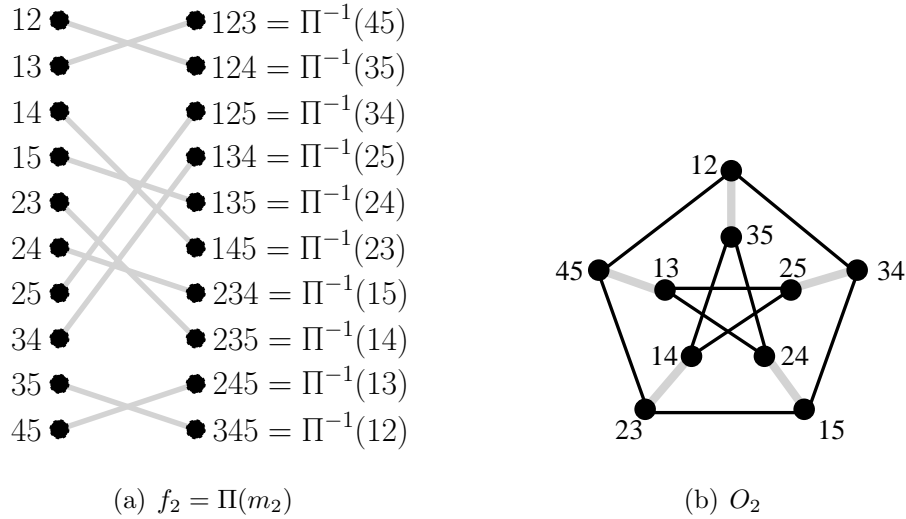


Figura 4.9: Um emparelhamento perfeito em O_2 : em (a) a projeção de m_3 é um emparelhamento perfeito em O_2 . Por exemplo, $\Pi(\{12, 124\}) = \Pi(\{35, 345\})$ que é igual a $\{12, 35\}$ em O_2 . Assim, duas arestas em m_2 são projetadas para a mesma aresta em O_2 . Em (b) o 2-fator (arestas pretas) da projeção de m_1 (Figura 4.8) e o emparelhamento perfeito (arestas cinzas) em (a).

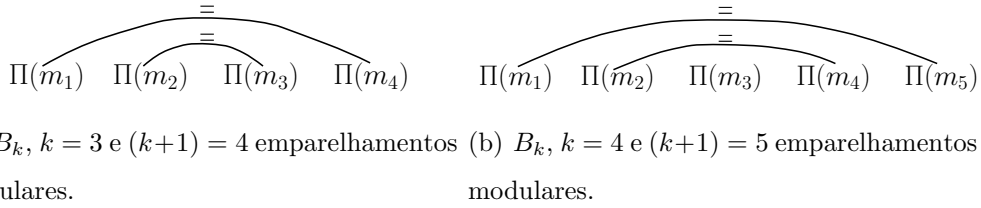


Figura 4.10: Em (a) $\Pi(m_1) = \Pi(m_4)$ e $\Pi(m_2) = \Pi(m_3)$. Em (b) $\Pi(m_1) = \Pi(m_5)$ e $\Pi(m_2) = \Pi(m_4)$.

Observe, por exemplo, o grafo B_2 na Figura 4.7 (a) e (c). Toda aresta em m_1 tem sua aresta complementar em m_3 e vice-versa. Assim, por exemplo, a aresta $\{12, 125\} \in m_1$ e $\{\overline{12}, \overline{125}\} = \{345, 34\} \in m_3$. Por outro lado, observe na Figura 4.7 (b) que toda aresta em m_2 tem seu complemento também em m_2 . Por exemplo, $\{35, 345\} \in m_2$ e também $\{\overline{35}, \overline{345}\} = \{124, 12\} \in m_2$. No contexto do Teorema 20, isso implica que toda aresta em $\Pi(m_2)$ aparece exatamente duas vezes (Figura 4.9 (a)). E, embora cada aresta apareça exatamente uma vez em $\Pi(m_1)$, ela também aparece em $\Pi(m_3)$ (Figura 4.8).

Para o próximo lema usaremos uma definição já apresentada no Capítulo 3, mas que foi aplicada em uma representação por números binários de n bits. Por isso vamos redefini-la. Seja $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ um k -subconjunto ou $(k+1)$ -subconjunto de

\mathbb{Z}_n , então o *shift* de A , denotado por $sh(A)$, é o conjunto $sh(A) = \{a_1+1, a_2+1, \dots\}$. Assim, o *shift* de A é obtido de A por uma translação de todos os elementos de A de 1 para a direita. Por exemplo, observe que $234 = sh(123)$, pois $\{1+1, 2+1, 3+1\} = sh(123)$. Assim também $sh^2(123) = 345$, $sh^3(123) = 145$ e assim por diante. Considere que $sh^0(A) = A$ e $sh^{t+1}(A) = sh(sh^t(A))$ para $t \geq 0$. Observe que $sh^{2k+1}(A) = A$. Como foi mostrado em [36, 39], $sh^i(A) \neq sh^j(A)$ para todo $0 \leq i \neq j \leq 2k$.

Duffus et al. [36] provaram:

Lema 22 (Duffus et al., 1994 [36]). *Para qualquer $i \in \{1, \dots, k+1\}$, se uma aresta $AB \in m_i$, então também a aresta $sh(A)sh(B) \in m_i$.*

Segundo o Lema 22, se a aresta $e = \{23, 123\} \in m_1$ de B_2 , então todos os quatro *shifts* de e também estão em m_1 . E, de fato, $sh(e) = \{34, 234\}$, $sh^2(e) = \{45, 345\}$, $sh^3(e) = \{15, 145\}$ e $sh^4(e) = \{12, 125\}$ estão em m_1 , como podemos conferir na Figura 4.8 (a).

Os próximos teorema e lema contêm resultados de [39] necessários para a prova de nosso principal resultado.

Teorema 23 (Horák et al., 2005 [39]). *Para $i \in \{1, \dots, k+1\}$, a união M_i de emparelhamentos m_i, m_{i+1} , e m_{i+2} é um subgrafo gerador conexo de B_k .*

Observe que a projeção de M_i é um subgrafo gerador de O_k . No Corolário 24, mostramos que esse subgrafo gerador também é conexo.

Corolário 24. *Seja $F_i = f_i \cup f_{i+1} \cup f_{i+2} = \Pi(M_i)$, então F_i é conexo.*

Demonstração. Seja A e B dois k -subconjuntos em F_i . Seja A', B' subconjuntos em M_i tal que $A = \Pi(A')$ e $B = \Pi(B')$. Porque M_i é conexo, existe um caminho P entre A' e B' em M_i . Portanto, $\Pi(P)$ é um passeio entre A e B em F_i . \square

Um *segmento* em um conjunto $A \in \mathbb{Z}_n$, denotado por $[a, b]$, é uma seqüência contígua de elementos de A , onde a e b são o menor e o maior número no segmento, respectivamente. Desde que compreendemos os elementos de \mathbb{Z}_n ordenados ciclicamente, os elementos 1 e $2k+1$ são considerados adjacentes e, por isso, um segmento pode “voltar” ao começo. Por exemplo, para $A = 125 \in V(B_2)$ (Figura 4.7), os segmentos de A são $[2]$ e $[5, 1]$.

Como os m_i 's são emparelhamentos perfeitos, a união de quaisquer emparelhamentos modulares forma um 2-fator. Observe que um 2-fator em um grafo G constitui um subgrafo gerador de G composto de um ou mais ciclos. O Lema 25 de Horák et al. [39] apresenta algumas propriedades interessantes sobre os ciclos em um 2-fator formado por dois emparelhamentos modulares consecutivos m_i e m_{i+1} .

Lema 25 (Horák et al., 2005 [39]). *Seja C um ciclo no 2-fator $m_i \cup m_{i+1}$, onde $i \in \{1, \dots, k+1\}$ e seja A um conjunto em C . Então:*

- (i) *Para todo $1 \leq t \leq 2k$, $sh^t(A)$ também está em C .*
- (ii) *Os conjuntos $A, sh(A), \dots, sh^{2k}(A)$ estão uniformemente distribuídos em C , ou seja, $d_C(A, sh(A)) = d_C(sh^t(A), sh^{t+1}(A))$, onde $t \in \{1, \dots, 2k\}$ e d_C denota a distância dos vértices em C .*
- (iii) *Se um conjunto B está no ciclo C e $AB \in E(B_k)$, então $d_C(A, B) = 1$ ou $d_C(A, B) > d_C(A, sh(A))$.*
- (iv) *Se A tem t segmentos, então o comprimento de C é $2(2k+1)(t+\delta)$, onde $\delta \in \{0, 1\}$.*

O ciclo $C \in m_2 \cup m_3$ em B_4 , na Figura 4.11, pode ilustrar as propriedades do Lema 25. Primeiro, observe que todos os *shifts* do vértice $A = 1257$ (e de todos os demais vértices) estão em C conforme a propriedade (i) do Lema 25. Também a distância em C entre os vértices $sh^t(A)$ e $sh^{t+1}(A)$ é sempre 6 para $t \in \{1, \dots, 2k+1\}$, onde $(2k+1) = 9$. O mesmo acontece para os demais vértices B, D, E, F e G . Isso ilustra a propriedade (ii). Finalmente, note que $e = \{2578, 24578\}$ é uma aresta de B_4 mas que não está em C . Assim, $d_C(2578, 24578) > d_C(2578, 3689)$ conforme a propriedade (iii).

Como no Teorema 20, agora formularemos um corolário contendo várias afirmações que seguem imediatamente do Lema 25.

Corolário 26. *Para quaisquer dois conjuntos A, B em um ciclo C em $m_i \cup m_{i+1}$:*

- (i) $d_C(A, sh(A)) = d_C(B, sh(B))$.
- (ii) *Ambos os caminhos entre A e $sh(A)$ em C contêm pelo menos um *shift* de B para cada vértice B em C .*

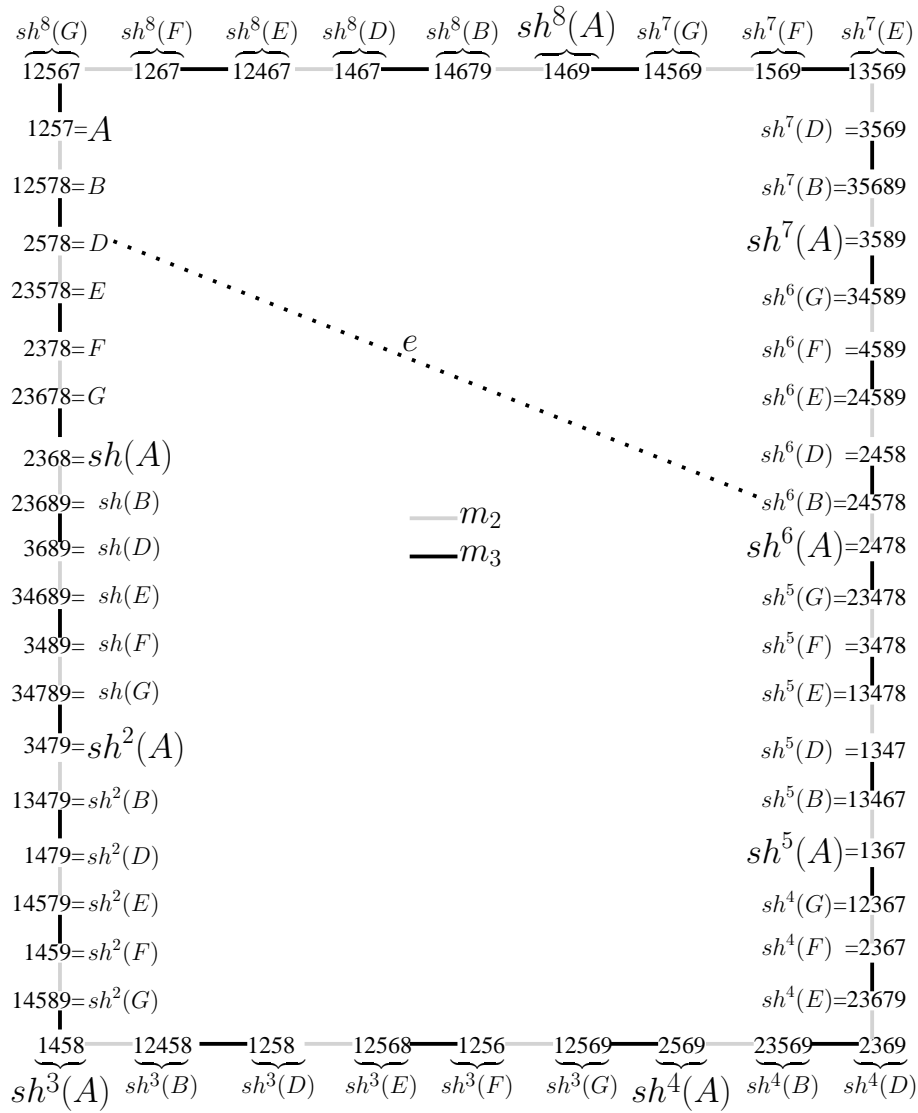


Figura 4.11: Um ciclo C de $m_2 \cup m_3$ em B_4 onde $n = 2k + 1 = 9$.

(iii) $d_C(A, B) = d_C(sh^t(A), sh^t(B))$.

(iv) Para $k \geq 6$, o comprimento de C é $< \frac{1}{4} |B_k|$.

Demonstração. (i) Pelo Lema 25 parte (ii), os *shifts* de cada conjunto A estão uniformemente distribuídos em C . A propriedade segue do fato de que cada conjunto tem $2k + 1$ *shifts* distintos em C .

(ii) Segue diretamente da parte (i).

(iii) Para cada conjunto A em C o comprimento dos dois caminhos entre A e $sh(A)$ em C é $d_C(A, sh(A))$ e $2k \cdot d_C(A, sh(A))$, respectivamente. Ou seja, A e $sh(A)$ dividem C em um caminho curto e um caminho longo. Escolhemos uma das duas orientações cíclicas das arestas de C para a esquerda ou para a direita. Segue da prova do Lema 25 (i) que, para todo vértice A em C , o caminho curto entre A e $sh(A)$ é orientado de A para $sh(A)$, ou o caminho longo entre A e $sh(A)$ é orientado de A para $sh(A)$. Combinar este fato com o Lema 25 (ii) completa a prova.

(iv) Um k -subconjunto ou um $(k + 1)$ -subconjunto A em C tem no máximo k segmentos. Portanto, pelo Lema 25 (iv), o comprimento de C é no máximo $2(2k + 1)(k + 1)$. Portanto, $2(2k + 1)(k + 1) < \frac{1}{2} \binom{2k+1}{k} = \frac{1}{4} |B_k|$, para $k \geq 6$. □

4.2 Prova do Resultado Principal

A partir de agora, assumimos que k é um número par. Começamos a seção com três lemas que serão repetidamente usados na prova. O primeiro contém observações de [36] e, portanto, sua prova é omitida.

Lema 27. Para cada $0 \leq t \leq 2k$:

(i) $\overline{sh^t(A)} = sh^t(\overline{A})$;

(ii) $sh^t(\Pi(A)) = \Pi(sh^t(A))$. □

Seja W um ciclo e sejam A, B, C e D vértices em W . Dizemos que a *ordem cíclica* dos quatro vértices em W é $ABCD$ se existe um caminho P entre A e D

em W tal que B está em P entre A e C e C está neste caminho entre B e D assim como ilustrado na Figura 4.12.

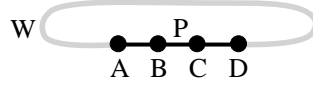


Figura 4.12: Ordem cíclica dos quatro vértices A, B, C e D em um ciclo W . O caminho P está destacado por arestas pretas.

Os emparelhamentos modulares $m_{\frac{k}{2}}, m_{\frac{k}{2}+1}$ e $m_{\frac{k}{2}+2}$ de B_k são frequentemente usados na prova do teorema principal. Portanto, por simplicidade, considere $p = \frac{k}{2}$. Observe que, desta forma, $\Pi(m_p) = \Pi(m_{p+2})$ é um 2-fator de O_k e $\Pi(m_{p+1})$ é um emparelhamento perfeito de O_k .

Lema 28. *Seja $e = A\bar{B}$ uma aresta de um ciclo C em $m_p \cup m_{p+1}$. Se $\bar{e} = \bar{A}B$ também está em C , então a ordem cíclica dos vértices A, B, \bar{A} e \bar{B} em C é $A\bar{B}B\bar{A}$.*

Demonstração. Introduzimos uma orientação cíclica das arestas em C tal que se uma aresta $e = A\bar{B}$ está em m_{p+1} então e está orientada da seguinte maneira: $\vec{e} = (A, \bar{B})$ onde supomos, sem perda de generalidade, que A é um k -subconjunto e \bar{B} é um $(k+1)$ -subconjunto. Desta forma, o vértice inicial de cada aresta de m_{p+1} é um k -subconjunto. Pelo Corolário 21, tanto $e = A\bar{B}$ quanto $\bar{e} = \bar{A}B$ têm ambos que estar em m_{p+1} . Portanto, a ordem cíclica dos vértices A, \bar{A}, B e \bar{B} tem que ser A, \bar{B}, B, \bar{A} porque B é um k -subconjunto e tem que vir antes de \bar{A} que é um $(k+1)$ -subconjunto. Observe o esquema na Figura 4.13. \square

O próximo lema mostra que, se ambos A e \bar{A} estão no mesmo ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$, então eles não estão “próximos” um do outro.

Lema 29. *Seja C um ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$ e seja A um conjunto tal que ambos A e seu complemento \bar{A} estão em C . Então $d_C(A, \bar{A}) > d_C(A, sh(A))$. Em particular, denotamos por P e T os dois caminhos disjuntos em arestas entre A e \bar{A} cuja união é C . Então, para cada conjunto B em C , existe pelo menos um shift de B em P e pelo menos um shift de B em T . Além disso, se $sh(A)$ está em P então $sh(\bar{A})$ pertence a T .*

Demonstração. Usamos notação de [39]. Para um k -subconjunto A , denotamos por $A(+i)$ o elemento adicionado a A para obter o $(k+1)$ -subconjunto adjacente a A no

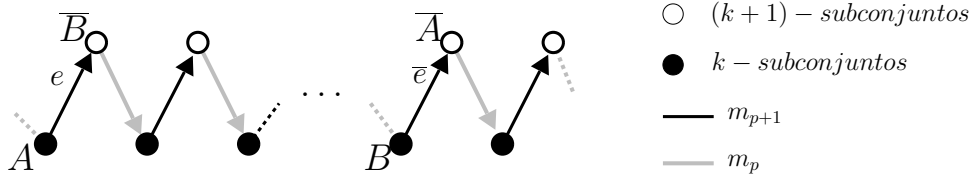


Figura 4.13: Ilustração do Lema 28: os vértices A e \bar{B} da aresta e ocorrem no ciclo C na ordem A, \bar{B} por causa da orientação cíclica que escolhemos. Da forma como apresentamos na figura, todo vértice no extremo inferior das arestas (vértices \bullet) é um k -subconjunto e todo vértice no extremo superior das arestas (vértices \circ) é um $(k+1)$ -subconjunto. Assim, quando \bar{e} ocorre em C , B que é um k -subconjunto tem que vir antes de \bar{A} que é um $(k+1)$ -subconjunto.

emparelhamento modular m_i . Seja $D = A \cup A(+p)$, ou seja, a aresta $e = AD$ está em m_{p+1} . Então, pelo Corolário 21, a aresta complementar $\bar{e} = \bar{AD}$ está em m_{p+1} . Além disso, desde que A e \bar{A} estão em C , \bar{e} também está em C . Pelo Lema 28, a ordem cíclica dos vértices A, \bar{A}, D e \bar{D} é $AD\bar{D}\bar{A}$.

Seja A um k -subconjunto e sejam $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$ seus segmentos. Nomeamos os segmentos à direita de $A(+p)$ e o segmento $[a_j, b_j]$ é o primeiro segmento à direita do segmento $[a_{j-1}, b_{j-1}]$. Por exemplo, considere o k -subconjunto $X = 1236$ do grafo B_4 que tem segmentos $[1, 3]$ e $[6, 6]$. No emparelhamento modular m_3 , obtemos $X \cup X(+3) = 12346$, então nomeamos os segmentos à direita de $X(+3) = 4$ obtendo $4, [6, 6], [1, 3]$.

Seja P o caminho entre A e \bar{A} em C que não contém D e \bar{D} . Em [39] os autores mostram que, dado qualquer ciclo C em $m_p \cup m_{p+1}$, o caminho dado abaixo começando em A e seguido por $A \cup A(+p)$ (isto é, a primeira aresta do caminho está em m_p) é uma parte de C . Observe que P tem a propriedade porque D não está em P . Para simplificar a notação, se para algum $1 \leq i \leq m$, é $a_i = b_i$, então fazemos $[a_i + 1, b_i] = \emptyset$. O começo do caminho P é como segue:

$$\begin{aligned}
A &= \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\}, \\
A \cup A(+p) &= \{A(+p), [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\}, \\
\{A(+p), [a_1 + 1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\}, \\
\{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2, b_2], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\}, \\
\{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\}, \\
\{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2 + 1], \dots, [a_{m-1}, b_{m-1}], [a_m, b_m]\},
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2 + 1], \dots, [a_{m-1} + 1, b_{m-1} + 1], [a_m, b_m]\} &= E, \\ \{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2 + 1], \dots, [a_{m-1} + 1, b_{m-1} + 1], [a_m + 1, b_m]\} &= B. \end{aligned}$$

Trivialmente, \bar{A} não está em P entre A e E , desde que todos os conjuntos lá contém o elemento b_m . Além disso, se $A(+p) = b_m + 1$, então $B = sh(A)$, e a distância $d(A, \bar{A})$ em P é $> d_C(A, sh(A))$.

Caso contrário, se $A(+p) \neq b_m + 1$ então os dois vértices em P que imediatamente seguem B são

$$\begin{aligned} \{A(+p), [a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2 + 1], \dots, [a_{m-1} + 1, b_{m-1} + 1], [a_m + 1, b_m + 1]\} &= F, \\ \{[a_1 + 1, b_1 + 1], [a_2 + 1, b_2 + 1], \dots, [a_{m-1} + 1, b_{m-1} + 1], [a_m + 1, b_m + 1]\} &= sh(A). \end{aligned}$$

Portanto, se $F \neq \bar{A}$, terminamos com essa parte da prova. Entretanto, se cada segmento de A fosse um único elemento, isto é, quando $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $a_1 - 1 = A(+p) = b_m + 2$, então $F = \bar{A}$. Assim, neste caso a distância $d(A, \bar{A})$ em P seria $d_C(A, sh(A)) - 1$.

Agora mostramos que isso não pode acontecer. Provamos que se cada segmento de A é composto de um único elemento, então $A(+p) \neq b_m + 2$. Para simplificar o cálculo, assumamos primeiro que $A = A' = \{1, 3, 5, \dots, 2k-1\}$. Assim todos segmentos de A' são compostos de um único elemento. Neste caso teríamos $d(A', \bar{A}')$ em P igual a $d_C(A', sh(A')) - 1$ se e somente se $A'(+p) = 2k+1$. Pela definição de emparelhamento modular m_p , $A'(+p)$ é o j -ésimo maior elemento de \bar{A}' , assim teríamos que ter $j = 1$, o que significa que $A(+p)$ é o maior elemento de \bar{A} . Entretanto, $j \equiv p + \sum_{a \in A'} a \pmod{k+1} = \frac{k}{2} + 1 + 3 + \dots + (2k-1) \pmod{k+1} = \frac{k}{2} + k^2 \pmod{k+1} = \frac{k}{2} + 1 \pmod{k+1} \neq 1$ para todo $k > 0$, assim $A'(+p) \neq 2k+1$. Portanto, $d(A', \bar{A}')$ em P é $> d_C(A, sh(A))$. Em geral, se todos os segmentos de A são compostos de um único elemento, então A tem que ser um *shift* de A' , digamos $A = sh^t(A')$. Então, obtemos que em P é $d(A, \bar{A}) = d(sh^t(A), sh^t(\bar{A})) = d(sh^t(A), \overline{sh^t(A)}) = d(A', \bar{A}') > d_C(A', sh(A')) = d_C(A, sh(A))$. A primeira igualdade segue do Corolário 26, parte (iii), a segunda do Lema 27, parte (i), enquanto a última igualdade é dada pelo Corolário 26, parte (i). Concluimos que $d(A, \bar{A})$ em P é $> d_C(A, sh(A))$.

Seja T o caminho entre A e \bar{A} em C que contém D e, portanto, contém também

\bar{D} , porque a ordem cíclica dos vértices A, \bar{A}, D e \bar{D} em C é $ADD\bar{A}$. Considere o subcaminho P' entre D e \bar{D} de T . Desde que a primeira aresta de P' está em m_p , podemos aplicar a P' o resultado acima. O que significa que a distância $d(D, \bar{D})$ em P' é $> d_C(D, sh(D)) = d_C(A, sh(A))$. Conseqüentemente, a distância $d(A, \bar{A})$ em T é $d(D, \bar{D}) + 2 > d(A, sh(A)) + 2$. Como $d(A, \bar{A}) > d_C(A, sh(A))$ em ambos caminhos P e T , concluímos que $d_C(A, \bar{A}) > d_C(A, sh(A))$. O resto do enunciado do teorema segue do Corolário 26 partes (ii) e (iii). \square

Antes de provarmos o resultado principal, introduzimos mais uma noção.

Definição 30. *Seja C um ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$ e seja P um caminho em C . Então P será chamado curto se para cada vértice A em P o caminho P não contém qualquer shift $sh^t(A)$ de A para $1 \leq t \leq 2k$.*

Em outras palavras, um caminho P é curto se para qualquer conjunto A o caminho P contém no máximo um *shift* de A (A é considerado ser o 0-ésimo *shift* de A). Pelo Corolário 26, parte (ii), o comprimento de P é $< d_C(A, sh(A))$ para qualquer conjunto A em C .

Prova do Teorema 18. Provaremos que o prisma sobre o grafo ímpar O_k , $k \geq 2$, k par, é hamiltoniano. Relembramos que $p = \frac{k}{2}$ e $f_i = \Pi(m_i)$. Seja $M_p = m_p \cup m_{p+1} \cup m_{p+2}$ a união dos três emparelhamentos modulares no “meio” do intervalo $1, \dots, k + 1$. Seja $F_p = \Pi(M_p) = f_p \cup f_{p+1} \cup f_{p+2}$. Pelo Teorema 20, $f_p = f_{p+2}$ é um 2-fator em O_k e f_{p+1} é um emparelhamento perfeito de O_k . Isto implica que $F_p = \Pi(M_p) = \Pi(m_p \cup m_{p+1}) = f_p \cup f_{p+1}$ é um grafo cúbico. Conforme [43] (veja também [44]), qualquer grafo cúbico 3-conexo tem um prisma hamiltoniano. Portanto, para provar o teorema, é suficiente mostrar que F_p é 3-conexo em arestas de acordo com o Teorema 5. Pelo Corolário 24, F_p é conexo. Como uma consequência imediata, obtemos a seguinte importante propriedade.

Propriedade 31. *Seja C um ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$. Então existe uma aresta e em m_p tal que $\Pi(e) = DE$, D está em $\Pi(C)$ mas E não está em $\Pi(C)$.*

Demonstração. Como $F_p = f_p \cup f_{p+1}$, isto é, F_p é uma união de um 2-fator com um emparelhamento perfeito, cada vértice D em F_p é incidente a duas arestas de f_p e uma aresta de f_{p+1} . Seja $D = \Pi(A)$. Cada vértice A em C é incidente em

C com uma aresta de m_p , digamos $m_p(A) = AB_A$, e uma aresta de m_{p+1} , digamos $m_{p+1}(A)$. Assim, D está em $\Pi(C)$ incidente a $\Pi(m_p(A))$ e $\Pi(m_{p+1}(A))$. Considere a aresta $e_A = \overline{A}E_A$ em m_p . Pelo Corolário 21 $B_A \neq \overline{E}_A$. Conseqüentemente, $\Pi(e_A) = \Pi(\overline{A})\Pi(E_A) = \Pi(A)\Pi(E_A) \neq \Pi(m_p(A))$ é uma aresta de f_p que é a terceira aresta incidente a D em F_p . Se existe um vértice A em C tal que $\Pi(E_A)$ não está em $\Pi(C)$, fechamos a prova. Caso contrário, se para cada A em C , $\Pi(E_A)$ está em $\Pi(C)$, então o subgrafo G de F_p induzido por $\Pi(V(C))$, onde $V(C)$ é o conjunto de vértices de C , é um subgrafo cúbico de F_p . Desde que F_p é conexo implicaria que $m_p \cup m_{p+1}$ consiste somente de C , isto é, que C é um ciclo hamiltoniano de B_k . Entretanto, veja o Corolário 26, parte (iv), o comprimento de C é $< \frac{1}{4}|B_k|$, portanto $|\Pi(V(C))| < \frac{1}{2}|O_k|$. Portanto, existe em m_p uma aresta com as propriedades requeridas. \square

Também necessitaremos da seguinte extensão da Propriedade 31. Como a prova contém as mesmas idéias, será omitida.

Propriedade 32. *Seja W e W' dois ciclos em $m_p \cup m_{p+1}$. Então, existe uma aresta $AB \in m_p$ tal que $\Pi(AB) = DE$, D está em $\Pi(W \cup W')$, mas E não está em $\Pi(W \cup W')$.*

Agora, estamos prontos para mostrar que F_p é 3-conexo em arestas. Suponha, por contradição, que $\{x, y\}$ é um corte de arestas em F_p . Denote por R uma componente de $F_p - \{x, y\}$. Além disso, tome $S = V(F_p) - R$. Para a prova a seguir, definimos $x = AB, y = DE$, e assumimos que $A, D \in R$ e $B, E \in S$. Consideraremos três casos principais:

(1) $x \in f_p$ e $y \in f_{p+1}$: Desde que x está em um ciclo C em f_p e $y \notin C$, remover y desconecta $F_p - \{x\}$ se e somente se y é uma ponte de F_p . Existe uma aresta $g = D\overline{E}$ e seu complemento $\overline{g} = \overline{D}E$ em m_{p+1} tal que $\Pi(g) = \Pi(\overline{g}) = y$. Esteja g em um ciclo W_1 de $m_p \cup m_{p+1}$ e \overline{g} em um ciclo W_2 de $m_p \cup m_{p+1}$.

(1.1) $W_1 \neq W_2$. Assuma, sem perda de generalidade, que $x \notin W_1$. Então, $W_1 - g$ é um caminho entre D e \overline{E} em $m_p \cup m_{p+1}$ e, portanto, $\Pi(W_1 - g)$ é um passeio entre D e E de R para S em F_p , uma contradição (veja a Figura 4.14).

(1.2) $W_1 = W_2 = W$. Então, pelo Lema 28, a ordem cíclica dos vértices D, \overline{D}, E e \overline{E} em C é $D\overline{E}E\overline{D}$. Além disso, pelo Lema 29, um dos vértices $sh(D)$ e $sh(\overline{D})$ está no caminho entre D e \overline{D} em C que não contém E e o outro está no caminho entre D

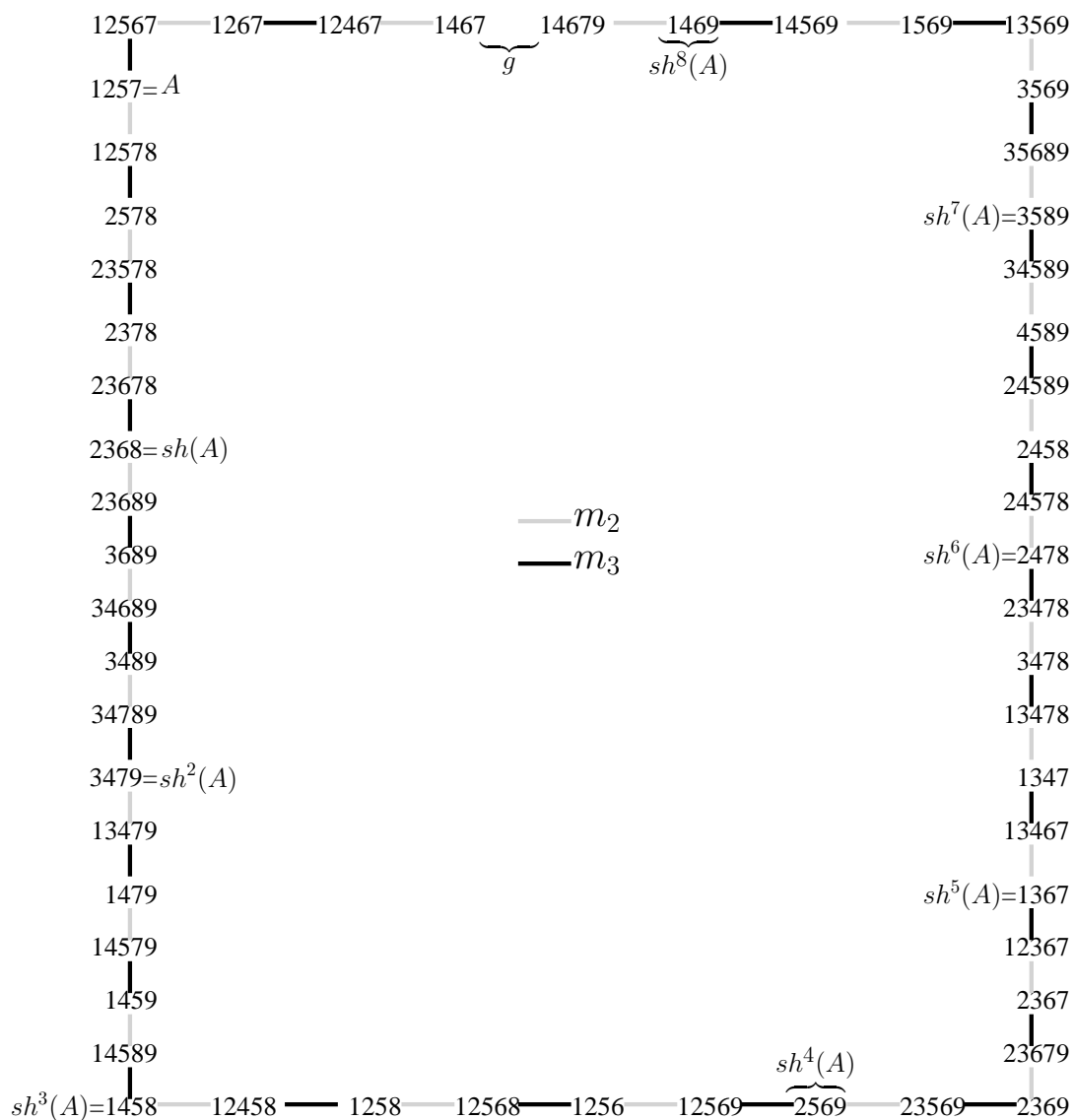


Figura 4.14: Ilustração do caso 1.1 do Teorema 18: um ciclo $W_1 \in m_2 \cup m_3$ de B_4 sem a aresta $g = \{1467, 14679\} \in m_3$. Observe que, porque $\bar{g} = \{23589, 2358\} \notin W_1$, $W_1 - g$ é um caminho em B_4 e, portanto, $\Pi(W_1 - g)$ é um passeio em O_4 .

e \bar{D} em C contendo ambos E e \bar{E} . Assim, um dos conjuntos $\Pi(sh(D))$ e $\Pi(sh(\bar{D}))$ está em R e o outro está em S . Desde que $\overline{sh(D)} = sh(\bar{D})$ (veja Lema 27, parte (i)) $\Pi(sh(D)) = \Pi(sh(\bar{D})) = \Pi(\overline{sh(D)}) \in R \cap S$, uma contradição (veja a Figura 4.15).

(2) $x, y \in \mathbf{f}_p$: Seja $x \in \Pi(W_x)$, $y \in \Pi(W_y)$, onde W_x e W_y são ciclos em $m_p \cup m_{p+1}$. Consideramos dois subcasos:

(2.1) $W_x \neq W_y$. De modo geral, ambos $\Pi(W_x)$ e $\Pi(W_y)$ são passeios fechados. Uma aresta e de m_{p+1} poderia, hipoteticamente, ser uma ponte de $\Pi(W_x)$, pois pode acontecer que ambos e e seu complemento \bar{e} estejam em W_x . Entretanto, pelo Corolário 21, x não pode ser uma ponte de $\Pi(W_x)$. Conseqüentemente, $\Pi(W_x)$ contém um ciclo C_x , desde que x é uma aresta deste ciclo. Como $y \notin \Pi(W_x)$, y não está em C_x . Pela mesma razão, existe um ciclo C_y em $\Pi(W_y)$ tal que y é uma aresta de C_y e x não está em C_y . Observe que $\Pi(W_x)$ e $\Pi(W_y)$ não tem que ser disjuntos, mesmo C_x e C_y não tem que ser disjuntos. Entretanto, como explicado acima, y não é uma aresta de C_x e x não é uma aresta de C_y . Desde que F_p é conexo e x é uma aresta do ciclo C_x , $F_p - \{x\}$ também é conexo. Porque y é uma aresta do ciclo C_y e $x \notin C_y$, C_y está em $F_p - \{x\}$, que implica que $F_p - \{x, y\}$ é novamente conexo, uma contradição (veja a Figura 4.16).

(2.2) $W_x = W_y = W$.

Relembramos que, conforme o Corolário 21, existe somente uma aresta e em m_p tal que $\Pi(e) = x$ e somente uma aresta f tal que $\Pi(f) = y$. Portanto, $W - \{\Pi^{-1}(x), \Pi^{-1}(y)\} = W - \{e, f\}$ consiste de dois caminhos, digamos P_1 e P_2 (veja a Figura 4.17 (a)). Observe que $\Pi(P_1)$ e $\Pi(P_2)$ pertencem a diferentes componentes de $F_p - \{x, y\}$, digamos $\Pi(P_1) \subset S$ e $\Pi(P_2) \subset R$. Pela Propriedade 31, existe uma aresta $UV \in m_p$ tal que $\Pi(U) = F$ está em $\Pi(W)$ mas $\Pi(V)$ não está. Seja W' o ciclo de $m_p \cup m_{p+1}$ tal que $UV \in W'$. Assuma primeiro que existe um *shift* de U em P_1 e outro *shift* de U está em P_2 . Portanto, um *shift* de F pertence a $\Pi(W') \cap \Pi(P_1)$ e outro *shift* de F está em $\Pi(W') \cap \Pi(P_2)$. Assim, $\Pi(W') \cap R \neq \emptyset$ e $\Pi(W') \cap S \neq \emptyset$. Como $e \notin W'$, $f \notin W'$, $\Pi(W')$ é um passeio fechado. Assim, existe um caminho de R para S , uma contradição (veja a Figura 4.17 (b)).

Agora, considere o caso quando um dos caminhos P_1 e P_2 , digamos P_1 , não contém qualquer *shift* de U , isto é, P_1 é curto (conforme a Definição 30). Seja $h = \bar{G}H$ uma aresta em P_1 , $h \in m_{p+1}$. Assim também o complemento $\bar{h} = G\bar{H} \in$

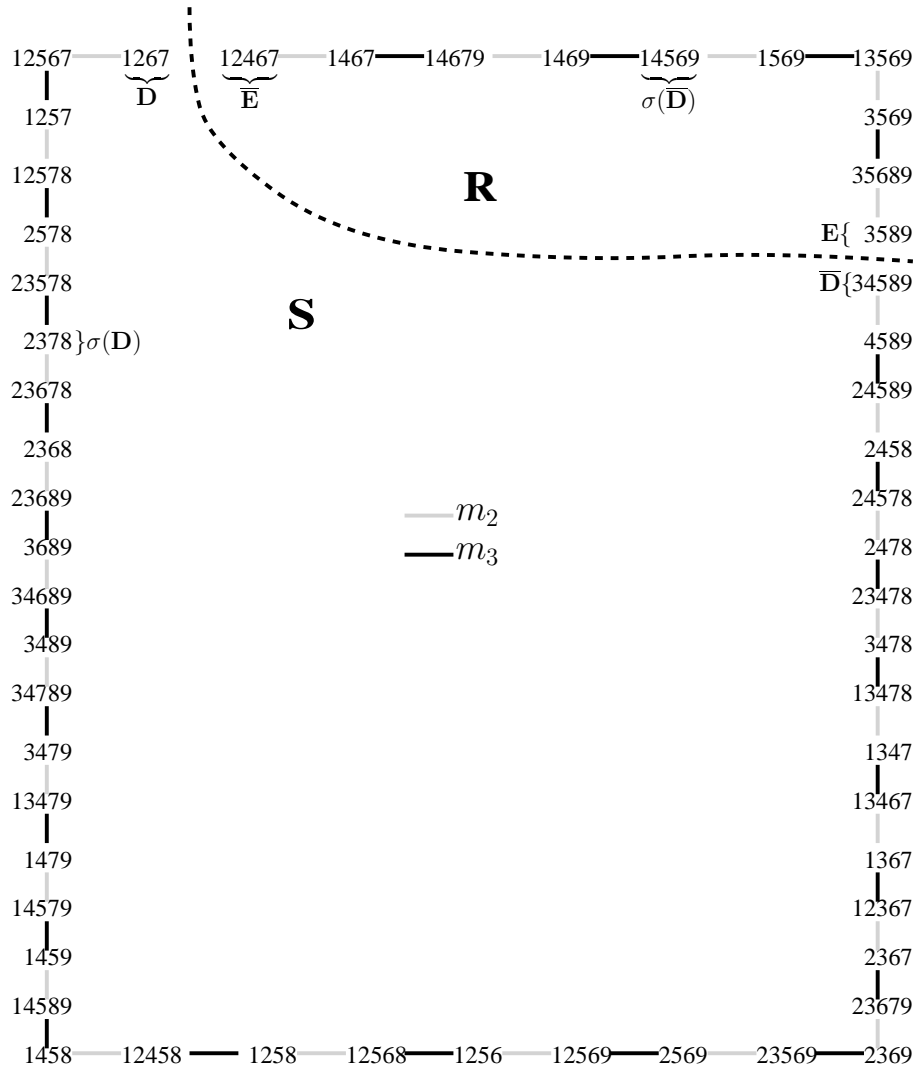


Figura 4.15: Ilustração do caso 1.2 do Teorema 18: um ciclo $W_1 \in m_2 \cup m_3$ de B_4 sem a aresta $g = \{1267, 12467\} \in m_3$. Como $\bar{g} = \{34589, 3589\}$ também está em W_1 , R e S seriam desconectados. Porém, $\sigma(D) = 2378 \in W_1 \cap S$ ao mesmo tempo que $\sigma(\bar{D}) = 14569 \in W_1 \cap R$. Porque $\Pi(\sigma(D)) = \Pi(\sigma(\bar{D})) = 2378$, R e S não estão desconectados.



Figura 4.16: Ilustração do caso 2.1 do Teorema 18: $W_x \neq W_y$, x não pode estar em $\Pi(W_y)$ e y não pode estar em $\Pi(W_x)$, então remover x e y não desconecta o grafo.

m_{p+1} . Desde que P_1 é curto, se \bar{h} estivesse em W então, pelo Lema 29, \bar{h} estaria em P_2 , desde que $d_W(G, sh(G)) < d_W(G, \bar{G})$. Observe que $\Pi(h) = \Pi(\bar{h})$, portanto $\Pi(G) = \Pi(\bar{G}) \in R \cap S$, uma contradição.

Conseqüentemente, \bar{h} não está em W . Seja W^* um ciclo de $m_p \cup m_{p+1}$ tal que $\bar{h} = G\bar{H} \in W^*$. Porque $\Pi(h) = \Pi(\bar{h})$, h está em P_1 e $\Pi(P_1) \subset S$, o fato que $F_p - \{x, y\}$ é desconexo implica também $\Pi(W^*) \subset S$. Pelo Lema 25 todos *shifts* de G estão em W^* , portanto, pelo Lema 27, parte (ii), todos *shifts* de $\Pi(G)$ estão em S . Por outro lado, \bar{G} está em P_1 (que é uma parte de W) e, pelo mesmo lema, todos seus *shifts* de \bar{G} também estão em W . Desde que, para todo vértice C de W , P_1 contém no máximo um *shift* de C , implica $sh^t(\bar{G})$, $1 \leq t \leq 2k$, estão em P_2 e portanto $\Pi(sh^t(\bar{G}))$, $1 \leq t \leq 2k$, estão em R . Entretanto, $\Pi(sh^t(G)) = \Pi(\overline{sh^t(G)}) = \Pi(sh^t(\bar{G})) \in R \cap S$, uma contradição (veja a Figura 4.18).

(3) $x, y \in f_{p+1}$: Seja $x = AB = \Pi(A\bar{B}) = \Pi(\bar{A}B)$ e $y = DE = \Pi(D\bar{E}) = \Pi(\bar{D}E)$. Consideramos três subcasos:

(3.1) Existe um ciclo W em $m_p \cup m_{p+1}$ que contém exatamente uma das quatro arestas $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $D\bar{E}$ e $\bar{D}E$, digamos $A\bar{B}$. Então $W - A\bar{B}$ é um caminho e $\Pi(W - A\bar{B})$ é um passeio $A - B$ em F_p de R para S , uma contradição.

(3.2) Existem dois ciclos W_1, W_2 in $m_p \cup m_{p+1}$ tal que ambos W_1 e W_2 contêm exatamente duas das quatro arestas.

(3.2.1) $\{A\bar{B}, \bar{A}B\} \in W_1$ e $\{D\bar{E}, \bar{D}E\} \in W_2$.

A prova deste caso é idêntica à prova do caso (1.2).

(3.2.2) $\{\bar{A}B, \bar{D}E\} \in W_1$ e $\{A\bar{B}, D\bar{E}\} \in W_2$.

Pela Propriedade 32, existe uma aresta $e = UV \in m_p$ tal que $\Pi(U) = G \in \Pi(W_1 \cup W_2)$, digamos $G \in \Pi(W_1) \cap R$, mas $\Pi(V) \notin \Pi(W_1 \cup W_2)$. Desde que $G \in \Pi(W_1)$, isto implica que todos os *shifts* de G também estão em $\Pi(W_1)$, conforme o Lema 25 parte (i) e o Lema 27 parte (ii).

Seja W o ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$ contendo e . Então $W \neq W_i, i = 1, 2$. Além disso, $\{\bar{A}B, A\bar{B}, \bar{D}E, D\bar{E}\} \notin W$ implica que nenhuma aresta $f \in W$ é $\Pi(f) = x$ ou $\Pi(f) = y$. Portanto, $x, y \notin \Pi(W)$, o que significa que $\Pi(W)$ é um passeio fechado em $F_p - \{x, y\}$. Desde que $U \in W$, pelo Lema 27 parte (ii), todos os *shifts* de G estão também em $\Pi(W)$. Assim, se existe algum $sh^t(G) \in \Pi(W_1) \cap S$ para $1 \leq t \leq 2k$, então $\Pi(W)$ contém um passeio de G a $sh^t(G)$ de R para S , uma contradição (veja

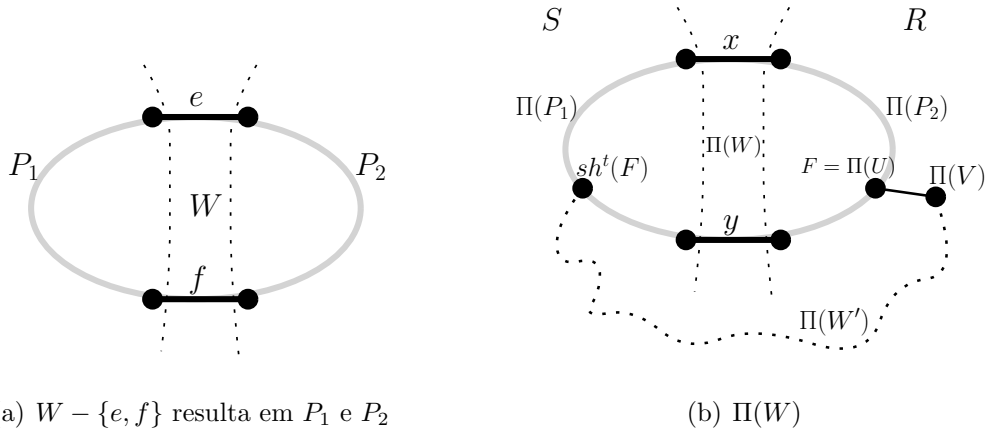


Figura 4.17: Ilustração do caso 2.2 do Teorema 18: em (a) $W \in m_p \cup m_{p+1}$; $e, f \in m_p$ tal que $\Pi(e) = x$ e $\Pi(f) = y$. Em (b) a aresta $\Pi(UV)$ garante um caminho de R a S através do ciclo $\Pi(W')$.

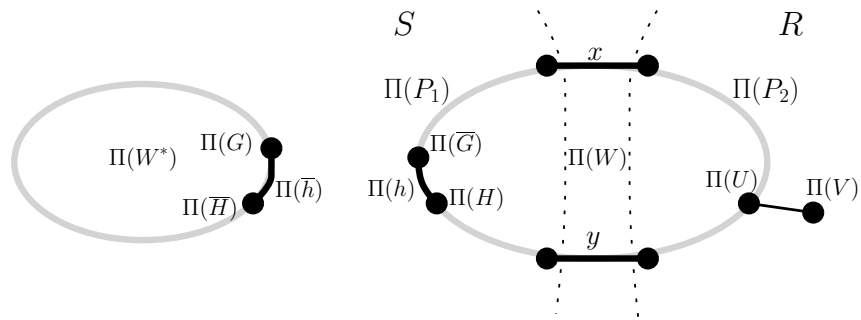


Figura 4.18: Ilustração do caso 2.2 do Teorema 18: $\bar{h} \notin W$ pois então $\bar{h} \in P_2$ e assim $\Pi(h) = \Pi(\bar{h}) \in R \cap S$. Então $\bar{h} \in W^*$ e $\Pi(W^*) \in S$. Porém, para $1 \leq t \leq 2k$, $sh^t(\bar{G}) \in P_2$ enquanto $sh^t(G) \in W^*$, ou seja, $\Pi(sh^t(\bar{G})) = \Pi(sh^t(G)) \in R \cap S$.

a Figura 4.19).

Assim, somos deixados com o caso em que não existe qualquer *shift* de G em $\Pi(W_1) \cap S$. Como antes, assumamos $A, D \in R$ e $B, E \in S$. Seja P_1 o caminho entre B e E em W_1 tal que $\Pi(P_1) \subset S$ e seja P_2 o caminho entre \bar{B} e \bar{E} em W_2 tal que $\Pi(P_2) \subset S$. Desde que nenhum *shift* de G está em $\Pi(W_1) \cap S$, nenhum *shift* de U está em P_1 e, conseqüentemente, P_1 é curto. Agora, mostramos que P_2 tem também que ser curto. Porque P_1 é curto, ele não contém qualquer *shift* de B , exceto o próprio B . Assim todos os *shifts* de B , exceto $sh^0(B) = B$ estão em $W_1 \setminus P_1$, e portanto $\Pi(sh^t(B)) \in R$ para todo $1 \leq t \leq 2k$. Se P_2 não fosse curto, então conteria pelo menos um *shift* de \bar{B} diferente de \bar{B} . Entretanto, isto implicaria que $R \cap S \neq \emptyset$, uma contradição (veja a Figura 4.20). Além disso, sejam BI e $\bar{B}J \in m_p$ as primeiras arestas em P_1 e P_2 , respectivamente. Se \bar{J} estivesse em W_2 então, porque P_2 é curto, pelo Lema 29, \bar{J} estaria em $W_2 \setminus P_2$. Isto implica que $\Pi(\bar{J})$ está em R , uma contradição porque $\Pi(J) = \Pi(\bar{J})$.

Suponha agora que \bar{J} está em W_1 . Desde que $\bar{B}J \in m_p$, então $B\bar{J}$ está em m_{p+2} , isto é, $B\bar{J}$ está em B_k . Além disso, pelo Corolário 21, BI e $\bar{B}J$ não são arestas complementares, assim $I \neq \bar{J}$, e, portanto, $\Pi(I) \neq \Pi(\bar{J})$. Conseqüentemente, se \bar{J} estivesse em P_1 então, pelo Lema 25 parte (iii), $d_{W_1}(B, \bar{J}) > d_{W_1}(B, sh(B))$ o que contradiz o fato de que P_1 é curto. Portanto, $\Pi(\bar{J})$ teria que estar em $\Pi(W_1) \cap R$, uma contradição.

Finalmente, consideramos o caso em que \bar{J} está em um ciclo W^* de $m_p \cup m_{p+1}$, $W^* \neq W_i$, $i = 1, 2$. Porque $\Pi(J) = \Pi(\bar{J})$ e $\Pi(W^*)$ é um passeio fechado, temos que ter $\Pi(W^*) \subset S$. De acordo com o Lema 25, todos os *shifts* de \bar{J} estão em W^* . Desde que P_2 contém no máximo um *shift* de cada vértice, cada $sh^t(J)$ para $1 \leq t \leq 2k$ está em $W_2 \setminus P_2$. Conseqüentemente, $\Pi(sh^t(J)) \in R$, uma contradição porque $\Pi(sh^t(\bar{J})) = \Pi(\overline{sh^t(J)}) \in \Pi(W^*) \subset S$ (veja a Figura 4.21).

(3.3) Existe um ciclo W em $m_p \cup m_{p+1}$ que contém todas as quatro arestas. Considere os dois caminhos P_1 e P_2 de $W - \{\overline{AB}, \overline{BA}\}$. Então $D\bar{E}$ e $\bar{D}E$ pertencem ao mesmo caminho P_i , $i = 1, 2$ ou um deles pertence a P_1 e o outro pertence a P_2 . Sabemos, conforme o Lema 28, que a ordem cíclica dos vértices A, \bar{B}, \bar{A} e B em W é $\overline{A\bar{B}\bar{A}B}$ e a ordem cíclica dos vértices D, \bar{E}, \bar{D} e E em W é $\overline{D\bar{E}\bar{D}E}$. Relembramos que $A, D \in R$ e $B, E \in S$. Portanto, necessitamos considerar somente dois subcasos:

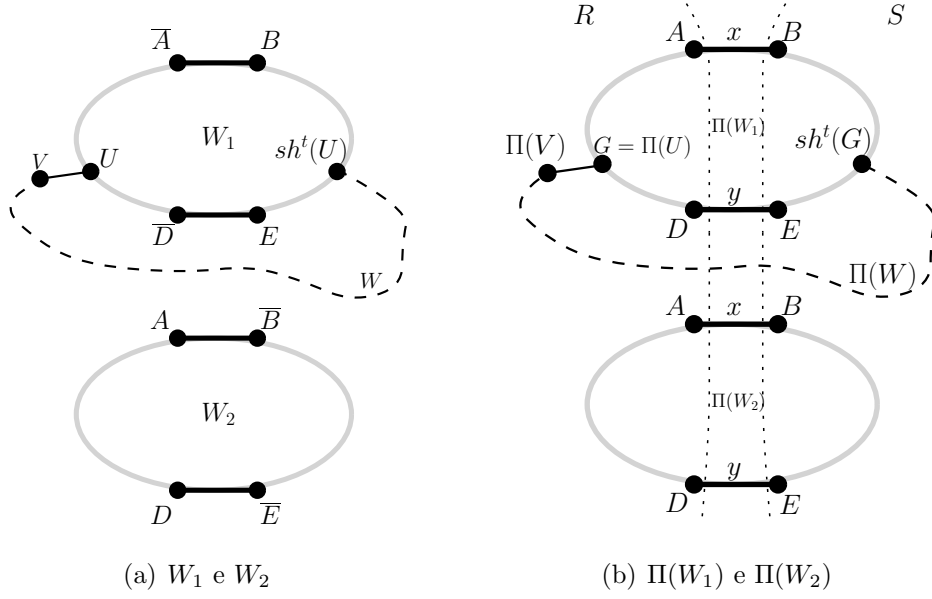


Figura 4.19: Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: em (a) todos os *shifts* de U estão em W_1 e em W . Em (b) porque $W \neq W_1, W_2$ e $x, y \notin \Pi(W)$, temos $\Pi(W)$ conectando R e S .

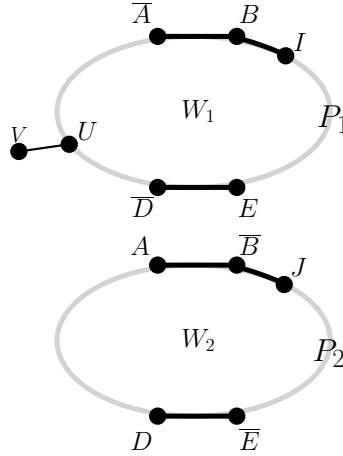


Figura 4.20: Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: todos os *shifts* de B estão em $W_1 \setminus P_1$, pois P_1 é curto já que não tem *shift* de U . Então, P_2 também é curto, caso contrário, P_2 conteria algum $sh^t(\bar{B})$ para $1 \leq t \leq 2k$ e, conseqüentemente, $\Pi(sh^t(\bar{B})) = \Pi(sh^t(B)) \in R \cap S$. O vértice \bar{J} não está em W_2 , pois como $J \in P_2$ e P_2 é curto, então $\bar{J} \in W_2 \setminus P_2$. Mas então $\Pi(J) = \Pi(\bar{J}) \in R \cap S$, uma contradição.

(3.3.1) A ordem cíclica dos vértices em W é $A\bar{B}D\bar{E}B\bar{A}E\bar{D}$.

Existe em W um caminho P_B entre B e \bar{B} que não contém A e \bar{A} e um caminho P_A entre A e \bar{A} que não contém B e \bar{B} . Observe que $\Pi(P_B) \in S$ e $\Pi(P_A) \in R$. Então $\Pi(D\bar{E})$ está em S e $\Pi(\bar{D}E)$ está em R , uma contradição porque $\Pi(D\bar{E}) = \Pi(\bar{D}E)$

(veja a Figura 4.22).

(3.3.2) A ordem cíclica dos vértices em W é $A\overline{B}B\overline{A}D\overline{E}E\overline{D}$.

A prova, neste caso, é similar à prova do caso (3.2.2). Seja S_1 o caminho entre B e \overline{B} em W e seja S_2 o caminho entre E e \overline{E} em W , ambos não contendo A . Pelo Lema 29, nem S_1 nem S_2 são curtos. Além disso, $\Pi(S_i) \subset S$ para $i = 1, 2$. Pela Propriedade 31, existe uma aresta $e \in m_p$ tal que $\Pi(e) = GH$, $G \in \Pi(W)$ mas $H \notin \Pi(W)$. Seja $G = \Pi(U)$ e seja W' o ciclo em $m_p \cup m_{p+1}$ contendo U . Não existe nenhuma aresta $f \in W'$ com $\Pi(f) = x$ ou $\Pi(f) = y$. Portanto, $\Pi(W')$ é um passeio fechado em $F_p - \{x, y\}$. Pelo Lema 25, W' contém todos os *shifts* de U e, portanto, $\Pi(W')$ contém todos os *shifts* de G . Porque nem S_1 nem S_2 são curtos, existe um *shift* de $G = \Pi(U)$ em S . Se houvesse um *shift* de G em R a prova estaria pronta porque $\Pi(W')$ conteria um passeio de R para S .

Assim, assumamos agora que não há nenhum *shift* de G em R . Seja P_1 o caminho entre A e \overline{D} e seja P_2 o caminho entre \overline{A} e D que não contém B . Então $\Pi(P_i) \subset R$, $i = 1, 2$. Desde que não há qualquer *shift* de G em R , não há nenhum *shift* de U em P_i , $i = 1, 2$ e, conseqüentemente, ambos P_1 e P_2 são curtos. Sejam AI e $\overline{A}J \in m_p$ as primeiras arestas em P_1 e P_2 , respectivamente. Porque P_2 é curto, pelo Lema 29, \overline{J} não está em P_2 . Assumamos que \overline{J} está em P_1 . Entretanto, isto contradiz o Lema 25 (iii), porque $A\overline{J}$ é uma aresta em B_k e, pelo Corolário 21, $\Pi(I) \neq \Pi(\overline{J})$. Portanto, \overline{J} não está em W , caso contrário teríamos $\Pi(J) = \Pi(\overline{J}) \in R \cap S$, uma contradição.

Finalmente, esteja \overline{J} em um ciclo $W_1 \neq W$ em $m_p \cup m_{p+1}$. Porque $\Pi(J) = \Pi(\overline{J})$, $\Pi(W_1) \subset R$. Sabemos que W_1 contém todos os *shifts* de \overline{J} , isto é, todos os *shifts* de $\Pi(\overline{J})$ estão em R . Entretanto, desde que cada um dos caminhos P_1 e P_2 contém no máximo um *shift* de J , existem pelo menos $(2k - 1)$ *shifts* de $\Pi(J)$ em S , uma contradição. A prova está completa. \square

Consideramos agora o caso quando k é ímpar. Como já discutimos no começo do capítulo, a técnica utilizada no Teorema 18 não pode ser aplicada a este caso. A razão é que utilizamos emparelhamentos modulares para definir um subgrafo cúbico gerador em O_k e, quando k é ímpar, os emparelhamentos modulares resultam em uma 2-fatorização de O_k (veja um exemplo na Figura 4.23). Desta forma, podemos definir subgrafos geradores q -regulares em O_k onde q é sempre par. Adicionalmente, observe na Tabela 2.2 que, para alguns valores de k ímpar, O_k tem número de vértices

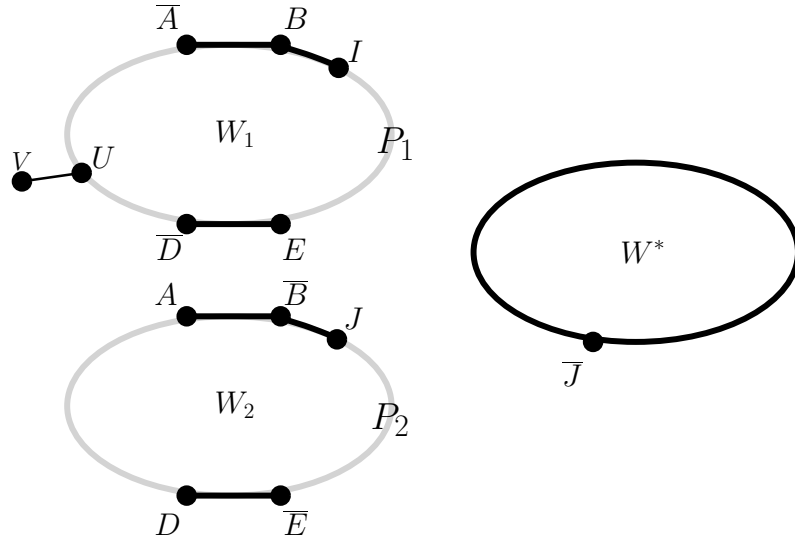


Figura 4.21: Ilustração do caso 3.2.2 do Teorema 18: $\bar{J} \in W^*$ de $m_p \cup m_{p+1}$. Então $\Pi(W^*) \subset S$. Todos os *shifts* de J estão em W^* . Porém, porque P_2 é curto, $sh^t(J)$ para $1 \leq t \leq 2k$ está em $W_2 \setminus P_2$. Então, para $1 \leq t \leq 2k$, $\Pi(sh^t(J)) \in R$ e $\Pi(sh^t(\bar{J})) \in S$, uma contradição porque $\Pi(sh^t(J)) = \Pi(sh^t(\bar{J}))$.

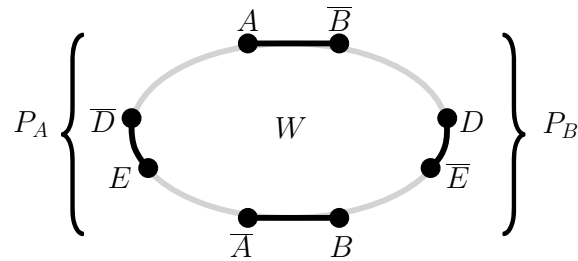
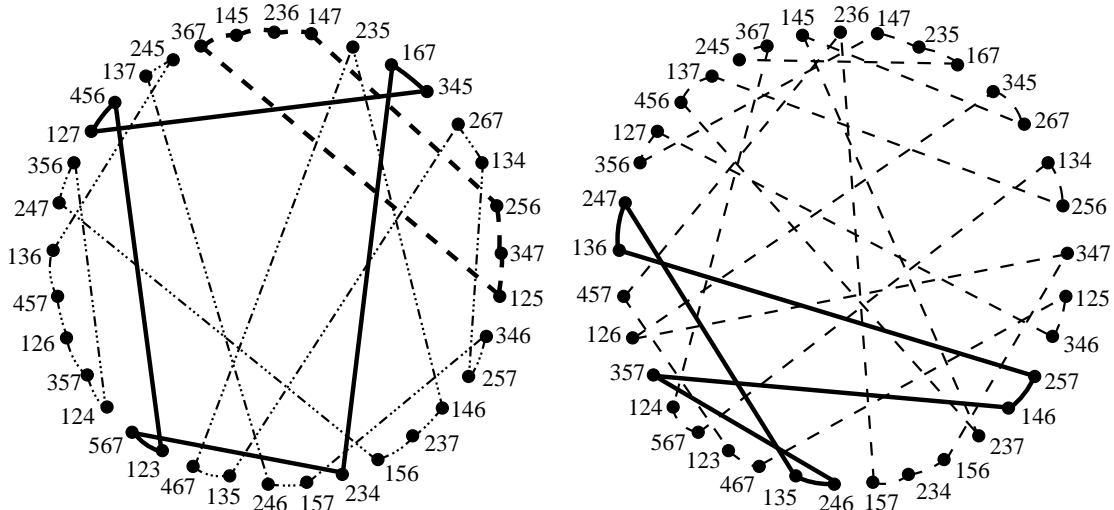


Figura 4.22: Ilustração do caso 3.3.1 do Teorema 18: $A, D \in R$ e $B, E \in S$. Em $W \in m_p \cup m_{p+1}$, o caminho P_B vai de B a \bar{B} passando pela aresta $D\bar{E}$ e o caminho P_A vai de A a \bar{A} passando pela aresta $\bar{D}E$. Como $B \in S$ e $A \in R$, $\Pi(P_B) \in S$ e $\Pi(P_A) \in R$. Mas então $\Pi(D, \bar{E}) = \Pi(\bar{D}, E) \in R \cap S$, uma contradição.



(a) 3 ciclos formados em $\Pi(m_1) = \Pi(m_4)$. (b) 2 ciclos formados em $\Pi(m_2) = \Pi(m_3)$.

Figura 4.23: A 2-fatorização em O_3 resultante da projeção dos emparelhamentos modulares em B_3 .

ímpar. Nestes casos, de acordo com a Propriedade 1, não é possível encontrar um subgrafo gerador cúbico em O_k . Portanto, para k ímpar, mostramos somente que:

Teorema 33. *Para $k \geq 3$ e k ímpar, O_k tem uma 2-trilha.*

Demonstração. Seja $j = \frac{k-1}{2}$ e $M_j = m_j \cup m_{j+1} \cup m_{j+2}$. Desde que $\Pi(m_j)$ e $\Pi(m_{j+1})$ são 2-fatores distintos em O_k mas $\Pi(m_{j+1}) = \Pi(m_{j+2})$, $\Pi(M_j)$ é um subgrafo gerador 4-regular de O_k , pois a projeção dos emparelhamentos modulares em B_k , quando k é ímpar, é uma 2-fatorização de O_k . Pelo Corolário 24, $F_j = \Pi(M_j)$ é conexo. De acordo com o Teorema 3, todo grafo 4-regular conexo é euleriano. Logo, $\Pi(M_j)$ tem uma trilha geradora que passa no máximo duas vezes por cada vértice de O_k . \square

O diagrama na Figura 4.24 ilustra a relação entre algumas classes de grafos. A classe de grafos que tem um 2-passeio contém a classe de grafos que tem um prisma hamiltoniano porque, como já vimos, um prisma hamiltoniano implica em um 2-passeio porém o contrário não é verdade. Também a classe de grafos que tem uma 2-trilha está estritamente contida na classe de grafos que tem um 2-passeio. Uma interseção entre a classe de grafos que tem um prisma hamiltoniano com a classe de grafos que tem uma 2-trilha indica que alguns grafos tem um prisma hamiltoniano e também uma 2-trilha. Observe que, segundo a interpretação de próximo de ser hamiltoniana de [1, 2], um grafo que tem um prisma hamiltoniano está tão próximo

de ser hamiltoniano quanto um grafo que tem uma 2-trilha.

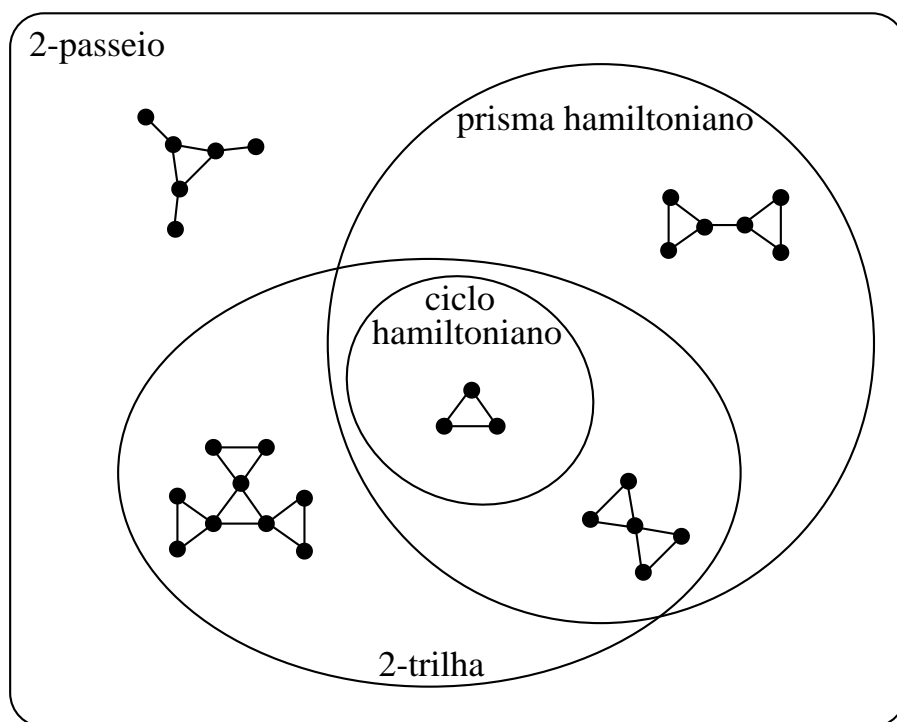


Figura 4.24: Relação entre algumas classes de grafos segundo a interpretação de próximo de ser hamiltoniano proposta em [1, 2].

Capítulo 5

Conclusões

No Capítulo 3, mostramos uma relação entre os grafos B_k e os grafos ímpares O_k . Determinamos um caminho hamiltoniano no grafo ímpar O_k pelo uso de um caminho viável no grafo reduzido \widetilde{O}_k que é isomorfo a \widetilde{B}_k . Desta maneira, determinamos caminhos hamiltonianos em O_k para k menor ou igual a 17. Resultados anteriores mostram que O_k tem um caminho ou ciclo hamiltoniano para $k \leq 13$. É natural perguntar se um ciclo hamiltoniano em O_k pode ser construído de maneira similar, isto é, se podemos construir um ciclo hamiltoniano em O_k a partir de um ciclo hamiltoniano em \widetilde{O}_k usando uma estratégia parecida à utilizada para caminhos hamiltonianos. Mostramos que nem sempre isso é possível.

Todos os caminhos viáveis conhecidos para o grafo reduzido foram determinados por computador usando heurísticas. Encontrar um caminho viável no grafo reduzido \widetilde{B}_{17} [32] levou mais de 20 dias de processamento em um AMD Athlon 3500+. Estudos na estrutura do grafo reduzido podem ajudar a encontrar caminhos viáveis mais rapidamente e, possivelmente, dizer se todos os grafos reduzidos têm um caminho viável. É importante observar que mesmo que o grafo reduzido não tenha um caminho viável, o grafo ímpar correspondente ainda pode ter um caminho hamiltoniano.

Savage e Winkler [38] mostraram que B_k tem um ciclo contendo pelo menos 86.7% dos vértices do grafo, para $k \geq 17$. Até agora, no entanto, nenhum resultado nesse sentido tem sido determinado para os grafos ímpares.

Horák et al. [39] mostraram que o grafo B_k tem um prisma hamiltoniano. No Capítulo 4, mostramos um resultado similar para os grafos ímpares para k par, isto

é, quando k é par, o grafo O_k tem um prisma hamiltoniano. Porém, permanece em aberto mostrar que os grafos ímpares têm um prisma hamiltoniano quando k é ímpar. Uma abordagem possível pode ser mostrar que qualquer grafo regular 4-conexo G tem um prisma hamiltoniano. E então determinar um subgrafo gerador q -regular de O_k , para $q = 4$ e k ímpar, que seja 4-conexo. Outras possíveis abordagens seriam:

1. Determinar um subgrafo gerador biconexo de O_k tal que o grau de vértices do grafo é no máximo 3. De acordo com [43], todo grafo biconexo com grau máximo 3 tem um prisma hamiltoniano.
2. Um *cacto* é um grafo conexo C tal que quaisquer dois ciclos são disjuntos em vértices, todo vértice com grau no mínimo 3 encontra-se em um ciclo e C tem pelo menos dois vértices. O cacto é par se todos seus ciclos têm tamanho par. Segundo [44], o prisma sobre qualquer cacto par com grau máximo 3 é hamiltoniano. Assim, poderíamos procurar por um cacto par gerador em O_k .

Ainda, outros problemas em aberto no contexto de prismas hamiltonianos incluem:

1. Seja G um grafo planar 3-conexo, G tem um prisma hamiltoniano?
2. Seja G um grafo 4-regular 4-conexo, G tem um prisma hamiltoniano?
3. Seja G um grafo cúbico 3-conexo, sabemos que G tem um prisma hamiltoniano [43, 44]. Mas G tem uma decomposição hamiltoniana?

Uma vez que não é conhecido se grafos vértice-transitivos definidos por um parâmetro simples, tais como os grafos ímpares e os grafos B_k , têm caminhos ou ciclos hamiltonianos, a conjectura de Lovász [25] permanece desafiadoramente aberta.

Referências Bibliográficas

- [1] JACKSON, B., WORMALD, N. C., “ k -Walks of graphs”, *Austral. J. Combin.*, v. 2, pp. 135–146, 1990.
- [2] KAISER, T., RYJÁČEK, Z., KRÁL, D., et al., “Hamilton cycles in prisms”, *Journal of Graph Theory*, v. 56, pp. 249–269, 2007.
- [3] HAMILTON, W. R., “Letter to John T. Graves on the Icosian, 17 Oct., 1856”. In: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, v. 3 (Algebra), pp. 612–625, Cambridge University Press: New York, 1931.
- [4] KNESER, M., “Aufgabe 360”, *Jahresbericht der DMV*, v. 58, n. 2, pp. 27, 1955.
- [5] LOVÁSZ, L., “Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy”, *J. Combin. Theory Ser. A*, v. 25, pp. 319–324, 1978.
- [6] BIGGS, N., “Some odd graph theory”, *Ann. New York Acad. Sci.*, v. 319, pp. 71–81, 1979.
- [7] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory*. v. 244. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2008.
- [8] KARP, R. M., “Reducibility among combinatorial problems”. In: *Complexity of Computer Computations*, pp. 85–103, Plenum Press: New York, 1972.
- [9] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., TARJAN, R. E., “The planar hamiltonian circuit problem is NP-complete”, *SIAM J. Comput.*, v. 5, pp. 704–714, 1976.
- [10] KRISHNAMOORTHY, M. S., “An NP-hard problem in bipartite graphs”, *SI-GACT News*, v. 7, n. 1, pp. 26, 1975.

- [11] CHVÁTAL, V., “private communication”, unpublished manuscript.
- [12] PAPADIMITRIOU, C. H., STEIGLITZ, K., “Some complexity results for the traveling salesman problem”. In: *Proc. 8th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 1–9, Association for Computing Machinery: New York, 1976.
- [13] TUTTE, W. T., “On the 2-factors of bicubic graphs”, *Disc. Math.*, v. 1, n. 2, pp. 203–208, 1971.
- [14] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory with Applications*. MacMillan: London, 1976.
- [15] ELLINGHAM, M. N., HORTON, J. D., “Non-hamiltonian 3-connected cubic bipartite graphs”, *J. Combin. Th. Ser. B*, v. 34, pp. 350–353, 1983.
- [16] LIU, C. L., *Introduction to combinatorial mathematics*. McGraw-Hill: New York, 1968.
- [17] KARAGANIS, J. J., “On the cube of a graph”, *Canad. Math. Bull.*, v. 11, pp. 295–296, 1968.
- [18] PLESNIK, J., “The NP-Completeness of the hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two”, unpublished manuscript.
- [19] MORROW, C., GOODMAN, S., “An efficient algorithm for finding a longest cycle in a tournament”. In: *Proc. 7th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, pp. 453–462, Utilitas Mathematica Publishing: Winnipeg, 1976.
- [20] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company: New York, 1979.
- [21] LAWLER, E. L., *Combinatorial optimization: networks and matroids*. Saunders College Publishing: New York, 1976.
- [22] CHEN, Y.-C., “Kneser graphs are hamiltonian for $n \geq 3k$ ”, *Journal Combinatorial Theory Series B*, v. 80, pp. 69–79, 2000.

- [23] CHEN, Y.-C., “Triangle-free hamiltonian Kneser graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 89, n. 1, pp. 1–16, 2003.
- [24] SHIELDS, I., SAVAGE, C. D., “A note on Hamilton cycles in Kneser graphs”, *Bulletin of the Institute for Combinatorics and Its Applications*, v. 40, pp. 13–22, 2004.
- [25] LOVÁSZ, L., “Problem 11”. In: *Combinatorial Structures and their Applications*, Gordon and Breach, 1970.
- [26] BALABAN, A. T., “Chemical graphs, Part XIII; Combinatorial patterns”, *Rev. Roumain Math. Pures Appl.*, v. 17, pp. 3–16, 1972.
- [27] MEREDITH, G. H. J., LLOYD, E. K., “The hamiltonian graphs O_4 to O_7 ”. In: *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, pp. 229–236, Inst. Math. Appl., Southend, 1972.
- [28] MATHER, M., “The Rugby footballers of Croam”, *Journal Combinatorial Theory Series B*, v. 20, n. 1, pp. 62–63, 1976.
- [29] DEJTER, I. J., CORDOVA, J., QUINTANA, J. A., “Two hamilton cycles in bipartite reflective Kneser graphs”, *Disc. Math.*, v. 72, n. 1, pp. 63–70, 1988.
- [30] DEJTER, I. J., CEDEÑO, W., JÁUREGUI, V., “Frucht diagrams, boolean graphs and hamilton cycles”, *Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.)*, v. 5, n. 1, pp. 21–37, 1992/93.
- [31] SHIELDS, I., SAVAGE, C. D., “A Hamilton path heuristic with applications to the middle two levels problem”. In: *Proceedings of the Thirtieth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1999)*, v. 140, pp. 161–178, 1999.
- [32] SHIELDS, I., SHIELDS, B. J., SAVAGE, C. D., “An update on the middle levels problem”, *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 17, pp. 5271–5277, 2009.
- [33] BITNER, J. R., EHRLICH, G., REINGOLD, E. M., “Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications”, *Comm. ACM*, v. 19, n. 9, pp. 517–521, 1976.

- [34] HAVEL, I., “Semipaths in directed cubes”. In: *Graphs and other Combinatorial Topics*, pp. 101–108, Teubner-Texte Math.: Teubner, Leipzig, 1983.
- [35] KIERSTEAD, H. A., TROTTER, W. T., “Explicit matchings in the middle two levels of the boolean algebra”, *Order*, v. 5, pp. 163–171, 1988.
- [36] DUFFUS, D. A., KIERSTEAD, H. A., SNEVILY, H. S., “An explicit 1-factorization in the middle of the boolean lattice”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 65, pp. 334–342, 1994.
- [37] JOHNSON, J. R., KIERSTEAD, H. A., “Explicit 2-factorisations of the odd graph”, *Order*, v. 21, pp. 19–27, 2004.
- [38] SAVAGE, C. D., WINKLER, P., “Monotone Gray codes and the middle levels problem”, *Journal Combinatorial Theory Series A*, v. 70, n. 2, pp. 230–248, 1995.
- [39] HORÁK, P., KAISER, T., ROSENFELD, M., et al., “The Prism over the middle-levels graph is hamiltonian”, *Order*, v. 22, n. 1, pp. 73–81, 2005.
- [40] JOHNSON, J. R., “Long cycles in the middle two layers of the discrete cube”, *J. Combin. Theory Ser. A*, v. 105, n. 2, pp. 255–271, 2004.
- [41] BUENO, L. R., FARIA, L., FIGUEIREDO, C. M. H., et al., “Hamiltonian paths in odd graphs”, *Appl. Anal. Discrete Math.*, v. 3, n. 2, pp. 386–394, 2009.
- [42] BUENO, L. R., HORÁK, P., “On Hamiltonian cycles in the prism over the odd graphs”, *J. Graph Theory (submitted)*, 2009.
- [43] PAULRAJA, P., “A characterization of hamiltonian prisms”, *Journal of Graph Theory*, v. 17, pp. 161–171, 1993.
- [44] ČADA, R., KAISER, T., ROSENFELD, M., et al., “Hamiltonian decompositions of prisms over cubic graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 286, pp. 45–56, 2004.
- [45] BIGGS, N., *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 2008.