COPPE/UFRJ

PARTIÇÕES CONVEXAS GEODÉSICAS E CONTORNOS EM GRAFOS

Danilo Artigas da Rocha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter
Mitre Costa Dourado

Rio de Janeiro
Maio de 2010

PARTIÇÕES CONVEXAS GEODÉSICAS E CONTORNOS EM GRAFOS

Danilo Artigas da Rocha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.

Prof. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Marcelo Henriques de Carvalho, D.Sc.

Prof. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MAIO DE 2010

Rocha, Danilo Artigas da

Partições convexas geodésicas e contornos em grafos/Danilo Artigas da Rocha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 48 p.: il.; $29,7$cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 45 – 48.

1. Convexidade em grafos. 2. Partições em grafos. 3. Contorno de grafos. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

A Generino, meu avô

Agradecimentos

À Letícia, minha esposa, agradeço pelas vezes que me incentivou a estudar e pelas vezes que me fez ver que era necessário parar. Você quase conseguiu me convencer que o ser humano realmente precisa dormir. Acima de tudo, obrigado pelo amor, carinho e paciência. Nesses quase dois anos de casamento você viveu todos os minutos da angustiante vida de um doutorando e participou ativamente dela. Devo a você os créditos pelos desenhos que permitiram a prova do último teorema da tese. Eu te amo muito!

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, apoio esse que começou quando eu ainda era um bebê e possibilitou que hoje eu chegasse até aqui.

À Família, pela atenção nos poucos momentos em que tive tempo para vocês.

Ao Jayme e Mitre, pela dedicação, paciência e por tudo que me ensinaram ao longo destes anos.

À Simone, pela cooperação em grande parte do trabalho.

À Celina, por ter permitido que todo este processo tivesse início, com uma excelente orientação de iniciação científica e mestrado.

À Celina, Márcia, Marcelo e Simone, por aceitarem participar desta banca. A colaboração de vocês será de grande importância para a melhoria do trabalho.

À você, amigo e leitor, que sempre ficou em segundo plano ao longo desses anos, que sofreu com a minha falta de tempo, tempo este que faltou até para escrever os agradecimentos, era exatamente em você que eu pensava enquanto escrevia este parágrafo. Obrigado por tudo.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PARTIÇÕES CONVEXAS GEODÉSICAS E CONTORNOS EM GRAFOS

Danilo Artigas da Rocha

Maio/2010

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter
Mitre Costa Dourado

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Seja G um grafo simples e finito. Seja $S \subseteq V(G)$, seu intervalo fechado $I[S]$ é o conjunto de todos os vértices em algum caminho mínimo entre pares de vértices de S. O conjunto S é convexo se $I[S] = S$. Dizemos que S é geodésico se $I[S] = V(G)$. O contorno $Ct(G)$ de G é o conjunto formado por vértices v tais que nenhum vizinho de v possui excentricidade maior que v. Nesta tese, definimos o conceito de partição convexa em grafos. Se existe uma partição de $V(G)$ em p conjuntos convexos então G é dito p-convexo. Provamos que é NP-completo decidir se um grafo G é p-convexo para um inteiro fixo $p \geq 2$. Demonstramos que todo grafo cordal conexo é p-convexo, para $1 \leq p \leq n$. Estabelecemos condições sobre n e k para decidir se uma potência de ciclo C_n^k é p-convexa. Também desenvolvemos um algoritmo linear para decidir se um cografo é p-convexo. Finalmente, nós consideramos o problema de determinar se o contorno de um grafo conexo G é geodésico. Provamos que se o diâmetro de G é menor ou igual a 4, então $Ct(G)$ é geodésico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

GEODESIC CONVEX PARTITIONS AND CONTOUR OF GRAPHS

Danilo Artigas da Rocha

May/2010

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter
Mitre Costa Dourado

Department: Systems Engineering and Computer Science

Let G be a finite simple graph. Let $S \subseteq V(G)$, its closed interval $I[S]$ is the set of all vertices lying on a shortest path between any pair of vertices of S. The set S is convex if $I[S] = S$. We say that S is geodetic if $I[S] = V(G)$. The contour $Ct(G)$ of G is the set formed by vertices v such that no neighbor of v has an eccentricity greater than v. In this thesis, we define the concept of convex partition of graphs. If there exists a partition of $V(G)$ into p convex sets we say that G is p-convex. We prove that is NP-complete to decide whether a graph G is p-convex for a fixed integer $p \geq 2$. We show that every connected chordal graph is p-convex, for $1 \leq p \leq n$. We establish conditions on n and k to decide if a power of cycle C_n^k is p-convex. We also develop a linear-time algorithm to decide if a cograph is p-convex. Finally, we consider the problem of determining whether the contour of a connected graph G is geodetic. We prove that if the diameter of G is less than or equal to 4, then $Ct(G)$ is geodetic.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

1.1 Convexidade em grafos

Nos últimos anos, muitos artigos foram publicados estendendo, em certo sentido, conceitos e métodos de matemática contínua para teoria dos grafos. O conceito de convexidade é um desses tópicos de interesse. A analogia entre os conceitos de conjunto convexo em matemática discreta e contínua pode ser feita se considerarmos o conjunto de vértices de um grafo conexo e a distância entre vértices como um espaço métrico. Dessa forma, um subconjunto de vértices S é denominado *convexo* se S é igual ao conjunto de vértices em todos os caminhos mínimos entre pares de vértices de S. Outras definições de convexidade já foram estudadas considerando-se outros tipos de caminhos, como caminhos induzidos (DOURADO *et al.*, 2009b; FARBER e JAMISON, 1986, 1987) ou caminhos triangulares (CHANGAT e MATHEW, 1999).

Alguns artigos generalizaram o conceito euclidiano de conjuntos convexos para teoria dos grafos (CHEPOI, 1994; CHEPOI e SOLTAN, 1983; EDELMAN e JAMISON, 1985; ERDŐS *et al.*, 1972; FARBER e JAMISON, 1986; HARARY e NIEMINEN, 1981). Convexidade em grafos também já foi estudada sobre diferentes aspectos como conjuntos geodésicos; e números geodésico, envoltório e de convexidade (CÁCERES *et al.*, 2006; DOURADO *et al.*, 2006, 2009a,b, 2010).

Um dos nossos temas de interesse é o problema de partição. Uma p-partição de $V(G)$ é uma partição de $V(G)$ em p conjuntos disjuntos. Uma p-partição é dita *convexa* se todos os p conjuntos são convexos. Se um grafo G possui uma p-partição convexa, então G é dito *p-convexo*. Observamos que não existe na literatura o conceito de partição em conjuntos convexos, esta é uma definição original desta tese. A partir desta definição formulamos o seguinte problema de decisão:

PARTIÇÃO CONVEXA

Instância: Grafo G e inteiro p.

Pergunta: G é p-convexo?

Tratamos a complexidade deste problema para algumas classes de grafos e para algumas variações do caso geral. Um caso particular que também temos interesse é o caso onde p é fixo. Denominanos este problema de p-PARTIÇÃO CONVEXA.

p-PARTIÇÃO CONVEXA

Instância: Grafo G.

Pergunta: G é p-convexo?

Resolvemos o problema da p-partição convexa para grafos gerais em ARTIGAS *et al.* (2007d), neste artigo provamos que o problema é NP-completo para qualquer $p \geq 2$ fixo. Ainda em ARTIGAS *et al.* (2007d) (conforme ARTIGAS *et al.* (2007b)) provamos que é possível decidir em tempo polinomial o problema PARTIÇÃO CONVEXA para cografos. Em ARTIGAS *et al.* (2007b) provamos que os grafos cordais são p-convexos para todo p tal que $1 \leq p \leq n$.

O estudo de p-convexidade em cografos nos fez considerar casos particulares de partições convexas. Em particular, se uma p-partição convexa possui no máximo um conjunto que não é clique definimos esta partição como *p-partição convexa quase-clique*. Estudamos esta estrutura, bem como uma generalização do conceito de convexidade para grafos desconexos em ARTIGAS *et al.* (2007d).

Em ARTIGAS *et al.* (2008) determinamos condições sobre n e k para decidir se uma potência de ciclo C_n^k é p-convexa.

Os resultados mencionados acima, as provas completas, e algumas melhorias nos resultados foram submetidos a revista *Discrete Mathematics* (ARTIGAS *et al.*, 2009). Além disso, mencionamos os resumos ARTIGAS *et al.* (2007a,c) que constituem os resultados iniciais desta tese.

Outra definição importante para o nosso trabalho é a de conjunto geodésico num grafo G. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *geodésico* se o conjunto de vértices em todos os caminhos mínimos, entre pares de vértices de S, é igual a $V(G)$.

Durante a tese também estudamos o conceito de contorno de um grafo. O *contorno* $Ct(G)$ de um grafo G conexo é o conjunto de vértices $v \in V(G)$ tais que $ecc(v) \geq ecc(w)$, para todo w adjacente a v, onde $ecc(v)$ é a excentricidade do vértice v. Esta definição foi introduzida em CÁCERES *et al.* (2005), neste artigo os autores consideraram generalizações da propriedade de Minkowski-Krein-Milman que diz: "Todo conjunto convexo é o fecho convexo dos seus vértices extremos". Sem abordar estas definições (pelo menos por enquanto), a ideia contida nesta propriedade é a de conseguir determinar um conjunto convexo S utilizando apenas um subconjunto de vértices de S e um operador sobre o grafo.

Um dos motivos de interesse em $Ct(G)$ é que este conjunto é um candidato natural a conjunto geodésico de qualquer grafo G, i.e., o conjunto de vértices em todos os caminhos mínimos entre pares de vértices de $Ct(G)$ é igual a $V(G)$. No mesmo artigo CÁCERES *et al.* (2005) foi provado que esta intuição não é verdadeira e existem classes de grafos para as quais existem grafos que não possuem contorno geodésico. O problema de decidir se uma classe de grafos possui o contorno geodésico foi considerado em CÁCERES *et al.* (2008, 2005) onde provou-se que grafos de permutação não necessariamente possuem o contorno geodésico; tanto os grafos distância-hereditária, como os cordais, possuem contorno geodésico; e os autores mencionam que o problema encontra-se em aberto para as classes paridade, bipartido e cocordal.

Nossa primeira colaboração sobre este tema (ARTIGAS *et al.*, 2010) foi uma simples observação que todos os grafos circulantes G possuem $Ct(G) = V(G)$. Depois, correlacionamos este problema ao diâmetro do grafo. Provamos que se G é um grafo com diâmetro menor ou igual a 4, então $Ct(G)$ é geodésico. Este resultado é o melhor possível no sentido que existe um grafo G com diâmetro 5 tal que $Ct(G)$ não é geodésico. Observamos que o nosso resultado implica que grafos livres de P_6 possuem contorno geodésico. Como consequência resolvemos o problema para cocordais.

1.2 Organização da tese

Esse texto é a exposição unificada de nossos trabalhos realizados ARTIGAS *et al.* (2007a,b,c,d, 2008, 2009, 2010). São referências básicas no estudo de Convexidade CHARTRAND *et al.* (2002b); EDELMAN e JAMISON (1985); FARBER (1987); FARBER e JAMISON (1986); HARARY e NIEMINEN (1981) e Teoria dos Grafos BONDY e MURTY (2008); BRANDSTÄDT *et al.* (1999)

No capítulo 2 introduzimos as notações e definições principais a serem utilizadas neste trabalho. Definimos conjunto convexo, conjunto envoltório, envoltória convexa e partições convexas. Apresentamos também os problemas básicos e nossos resultados obtidos para eles ARTIGAS *et al.* (2007d, 2009).

No capítulo 3 consideramos o problema PARTIÇÃO CONVEXA para grafos desconexos e também analisamos casos particulares de partições convexas. Estes problemas foram tratados em ARTIGAS *et al.* (2007d, 2009).

No capítulo 4 estudamos grafos cordais, potências de ciclos e cografos. Provamos que um grafo cordal é p-convexo para todo $1 \leq p \leq n$; determinamos condições sobre n e k para decidir se uma potência de ciclos C_n^k é p-convexa; e apresentamos uma caracterização para cografos p-convexos, bem como um algoritmo tempo linear para decidir se um cografo é p-convexo. Estes problemas foram tratados em ARTIGAS *et al.* (2007b,d, 2008, 2009).

No capítulo 5 consideramos o problema de decidir se o contorno de um grafo é geodésico. Apresentamos alguns resultados e motivações existentes na literatura, bem como os nossos resultados sobre o assunto ARTIGAS *et al.* (2010).

Por fim, no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e alguns problemas que temos interesse em trabalhar no futuro.

Capítulo 2

Definições e resultados iniciais

Neste capítulo apresentaremos notações, definições e conceitos básicos deste trabalho.

2.1 Preliminares

Um *grafo* G é uma dupla ordenada $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito, cujos elementos são denominados *vértices*, e $E(G)$ é um conjunto de subconjuntos de $V(G)$ com cardinalidade dois, os elementos de $E(G)$ são denominados *arestas*. Uma aresta entre os vértices v, w de V será representada por $\{v, w\}$. Para simplificar a notação adotaremos $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$.

O *complemento* de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é um grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{\{v, w\}|\ v, w \in V(G) \text{ e } \{v, w\} \notin E(G)\}$.

Um *subgrafo* G' de G é um grafo onde $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$. Seja S um conjunto tal que $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o *subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices S*, onde $V(G[S]) = S$ e $E(G[S]) = \{\{v, w\} \in E(G)|\ v, w \in S\}$.

Se $\{v, w\} \in E(G)$, então dizemos que existe uma aresta entre v, w e ainda mais v, w são vértices *adjacentes*. Um *caminho* $\mathcal{P}$, com comprimento k, entre v_0 e v_k em G é uma sequência finita de vértices distintos $v_0, v_1, \ldots, v_k$, onde v_{i-1}, v_i são adjacentes, para $1 \leq i \leq k$, representamos o comprimento de $\mathcal{P}$ por $|\mathcal{P}|$. Observe que $|\mathcal{P}|$ é exatamente o número de arestas em $\mathcal{P}$.

A *distância* entre dois vértices v, w de G, $d_G(v, w)$, é o comprimento do menor caminho entre v e w. A *excentricidade* $ecc_G(v)$ de um vértice $v \in V(G)$ é a distância máxima entre v e algum vértice de G. O *diâmetro* $diam(G)$ de um grafo G é a excentricidade máxima dos vértices de $V(G)$. Quando estiver claro qual é o grafo G, adotaremos $d(v, w)$ e $ecc(v)$.

Dois vértices v, w são *conexos* se existe um caminho entre v e w em G. Um grafo G é *conexo* se todo par de vértices v, w de G é conexo, do contrário ele é dito *desconexo*. Se G é desconexo podemos particionar V em conjuntos $V_1, \ldots, V_\omega$ onde os vértices $v, w \in V_i$, se e somente se, v, w são conexos. Cada subgrafo $G[V_1], \ldots, G[V_\omega]$ é denominado *componente conexa* de G.

Um grafo C_n é um ciclo, com comprimento n, se é uma sequência não nula e finita $v_0, v_1 \ldots v_n$ de vértices, tal que $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(C_n)$, $1 \leq i \leq n$, $v_0 = v_n$ e $n \geq 3$.

Seja $S \subseteq V(G)$. O conjunto S é denominado de *clique* se $G[S]$ possui aresta entre todo par de vértices de S. Se $G[S]$ não possui nenhuma aresta, então S é denominado *conjunto independente de vértices*.

Definimos $N_G(v) = \{w \in G \mid d(v, w) = 1\}$ e $N_G[v] = \{w \in G | \ d(v, w) \leq 1\}$. Os conjuntos $N_G(v)$ e $N_G[v]$ são respectivamente chamados de *vizinhança aberta* e *vizinhança fechada* de v em G. Generalizando este conceito para conjuntos, $N_G(S) = \{w \in V(G) \setminus S \mid d(v, w) = 1, \text{para algum } v \in S\}$ e $N_G[S] = \{w \in V(G) | \ d(v, w) \leq 1, \text{para algum } v \in S\}$.

Dizemos que $v \in V(G)$ é um vértice *simplicial* de G se $N_G(v)$ é uma clique. Dizemos que $v \in V(G)$ é um vértice *universal* de G se $N_G[v] = V(G)$.

Um grafo G é p-*colorível* se existe uma atribuição de p cores, para os vértices de $V(G)$, tal que vértices adjacentes possuem cores distintas. O *número cromático* de G, $\chi(G)$, é o menor inteiro p para o qual G é p-colorível.

Os demais conceitos básicos em Teoria dos Grafos podem ser encontrados em BONDY e MURTY (2008).

2.2 Algumas definições

As definições a seguir são específicas sobre convexidade.

Definição 2.1. *Seja G um grafo. Uma* geodésica *entre dois vértices u, v é um caminho entre u e v com comprimento $d(u, v)$.*

Observe que uma geodésica de um grafo é exatamente um caminho mínimo

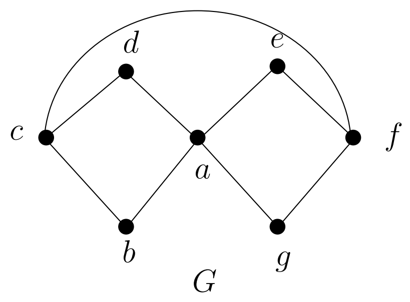


Figura 2.1: Grafo G.

deste grafo. Esta nomenclatura, além de simplificar nossa notação também auxilia a analogia com a geometria.

Definição 2.2. *O* intervalo fechado *entre dois vértices u, v é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v. O intervalo fechado também pode ser denominado* fecho geodésico*. Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S] = \bigcup\limits_{u,v \in S} I[u, v]$.*

Como exemplo, utilizaremos a Figura 2.1. Temos $I[a, c] = \{a, b, c, d\}$. Seja $S = \{a, b, c\}$, então $I[S] = \{a, b, c, d\}$.

Definição 2.3. *Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado conjunto* geodésico *de G se $I[S] = V(G)$. O* número geodésico*, $gn(G)$, de um grafo G é a cardinalidade do menor conjunto geodésico de G.*

Na Figura 2.1, sejam $S_1 = \{a, c, f\}$, $S_2 = \{c, e, g\}$ e $S_3 = \{b, d, e, g\}$. Os conjuntos S_1 e S_3 são geodésicos. O conjunto S_2 não é geodésico pois $I[S_2] = \{a, c, e, f, g\}$. Testando todos os casos concluímos que $gn(G) = 3$.

Determinar o número geodésico de um grafo é um interessante problema de otimização. É conhecido que a versão de decisão deste problema é NP-completo. Diversos trabalhos foram desenvolvidos sobre este tema, alguns exemplos são CÁCERES *et al.* (2006); DOURADO *et al.* (2010).

Definição 2.4. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Então S é dito* convexo *em G se $I[S] = S$.*

No grafo da Figura 2.1, o conjunto $S_1 = \{a, b, c, d\}$ é convexo e o conjunto $S_2 = \{a, b, c\}$ não, pois $I[S_2] = \{a, b, c, d\}$.

Definição 2.5. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $I_h[S]$ o menor conjunto convexo de G que contém S. Denominamos $I_h[S]$ por* fecho convexo *de S em G. Se $I_h[S] = V(G)$, então S é chamado* conjunto envoltório *de G. O* número envoltório *de G é a cardinalidade do menor conjunto envoltório de G.*

Recorrendo mais uma vez ao grafo G da Figura 2.1, sejam $S_1 = \{a, b, c, d\}$ e $S_2 = \{a, b, c\}$. Ambos os conjuntos possuem o mesmo fecho convexo, $I_h[S_1] = I_h[S_2] = S_1$. Observamos que $S \subseteq V(G)$ é convexo se, e somente se, $I_h[S] = S$.

Na Figura 2.1, $S_1 = \{a, c, f\}$ e $S_2 = \{b, d, e, g\}$ são conjuntos envoltórios de G. Testando todos os possíveis casos concluímos que $hn(G) = 3$. Por definição, dado um grafo G e $S \subseteq V(G)$, temos $I[S] \subseteq I_h[S]$, e isto implica que todo conjunto geodésico de G é envoltório, e consequentemente $hn(G) \leq gn(G)$.

Outro problema de otimização de interesse é o de determinar o número envoltório de um grafo. Este problema é NP-completo para o caso geral e foi considerado em DOURADO *et al.* (2009a); EVERETT e SEIDMAN (1985).

As definições anteriores constituem o grupo de definições básicas para o estudo de convexidade em grafos. Algumas referências mais abrangentes sobre estes conceitos são BUCKLEY e HARARY (1990); CHARTRAND *et al.* (2002b).

Encontramos na literatura classificações para outras convexidades. Essencialmente, o que diferencia uma convexidade de outra é a definição de intervalo fechado. Outra possível definição de intervalo fechado entre u e v seria: $I[u, v]$ é o conjunto dos vértices em algum caminho induzido de u a v. Quando $I[u, v]$ é definido desta maneira esta convexidade recebe o nome de convexidade *monofônica* (DOURADO *et al.*, 2009b; FARBER e JAMISON, 1986, 1987; PELAYO, 2008). Outra definição de intervalo fechado também foi considerada em CHANGAT e MATHEW (1999). Neste trabalho sempre usaremos a definição de intervalo fechado como conjunto dos vértices sobre geodésicas, esta convexidade recebe o nome de convexidade *geodésica*. Conforme a literatura adotaremos apenas o nome convexidade para tratar de convexidade geodésica.

Não trabalhamos com convexidade monofônica ao longo do doutorado, mas temos interesse em estudar esta convexidade num futuro. Para o futuro também podemos trabalhar com o conceito de fecho convexo. Sobre este assunto foram feitos os trabalhos CHARTRAND *et al.* (2002a); DOURADO *et al.* (2009a); EVERETT e

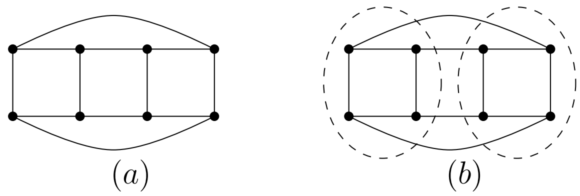


Figura 2.2: Grafo 2-convexo

SEIDMAN (1985).

O foco de nossos estudos é o problema de partição.

Definição 2.6. *Seja $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$, $1 \leq p \leq n$, uma partição de $V(G)$. Denominamos uma partição de $V(G)$ em p conjuntos de p-partição. Se $\mathcal{V}$ contém apenas cliques dizemos que $\mathcal{V}$ é uma* partição clique *de G. Definimos $\Theta(G)$ como o menor inteiro $p \geq 1$ para o qual G possui uma p-partição clique. Se $\mathcal{V}$ contém no máximo um conjunto não clique, denominamos $\mathcal{V}$ de* partição quase-clique *de G. Se $\mathcal{V}$ contém apenas conjuntos convexos, então $\mathcal{V}$ é uma* partição convexa *de G. Se $\mathcal{V}$ contém somente conjuntos convexos e é quase-clique então dizemos que $\mathcal{V}$ é uma* partição convexa quase-clique *de G.*

Esta tese é um trabalho pioneiro sobre partições em conjuntos convexos. Tal conceito foi criado e desenvolvido em alguns dos artigos constituem resultados parciais do presente texto (ARTIGAS *et al.*, 2007a,b,c,d, 2008, 2009).

Definição 2.7. *Um grafo é* p-convexo *se $V(G)$ admite uma p-partição convexa. Em particular, se um grafo é 2-convexo denominamos* biconvexo*. O* número de partição convexa *de um grafo G, $\Theta_c(G)$, é o menor inteiro $p \geq 2$ para o qual G é p-convexo. Um grafo é* fortemente p-convexo *se é p-convexo e toda p-partição convexa de G é quase-clique.*

Os conceitos de partição convexa quase-clique e grafo fortemente p-convexo surgiram naturalmente com o estudo de partições convexas em cografos. No Capítulo 3, desenvolveremos melhor estas definições, mas elas não são nosso principal objeto de estudo.

A Figura 2.2(a) mostra um grafo G 2-convexo, na Figura 2.2(b) exibimos uma 2-partição convexa de G.

Observação 2.8. *Se S é uma clique de um grafo G, então S é um conjunto convexo de G. Consequentemente, toda partição clique de $V(G)$ é uma partição convexa de $V(G)$.*

Observamos que nem todo conjunto convexo é uma clique. Na Figura 2.1, o conjunto $\{a, b, c, d\}$ é convexo e não é clique.

Observação 2.9. *Se $\overline{G}$ é um grafo p-partido, para $p \geq 2$, então G é p-convexo. Além disso, existe uma partição convexa de $V(G)$ em p cliques.*

2.3 Resultados iniciais

O primeiro resultado apresentado neste texto é o algoritmo para decidir se um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo. Este algoritmo foi desenvolvido em FARBER e JAMISON (1986).

Algoritmo 1 Algoritmo para decidir se o conjunto S é convexo.

(i) Determinarmos a distância entre qualquer par de vértices de G, utilizando o algoritmo de Floyd (FLOYD, 1962).

(ii) Verificamos para todos os vértices $u, v \in S$ e $w \notin S$ se $d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)$.

(iii) Se tal w existe, então S não é convexo. Senão, S é convexo.

O item (i) do Algoritmo 1 pode ser executado em tempo $O(n^3)$. O item (ii) é executado em tempo constante para cada uma das $O(n^3)$ triplas de $V(G)$. Logo, o Algoritmo 1 tem complexidade $O(n^3)$.

A Definição 2.7 sugere um problema de otimização. A versão de decisão deste problema constitui um importante problema no estudo de partições em conjuntos convexos:

PARTIÇÃO CONVEXA

Instância: Grafo G e inteiro p tal que $1 \leq p \leq n$.

Pergunta: G é p-convexo?

Respondemos a uma formulação mais restrita que esta em ARTIGAS *et al.* (2007d, 2009). Provamos que este problema é NP-completo ainda que $p \geq 2$ seja fixo. A esta nova formulação do problema damos o nome de p-PARTIÇÃO CONVEXA:

p-PARTIÇÃO CONVEXA

Instância: Grafo G.

Pergunta: G é p-convexo?

Para demonstrar que p-PARTIÇÃO CONVEXA é NP-completo, fizemos uma redução do problema que denominaremos p-PARTIÇÃO EM CLIQUES. Este problema consiste no problema de particionar o conjunto de vértices de um grafo num número fixo de cliques.

p-PARTIÇÃO CLIQUE

Instância: Grafo G.

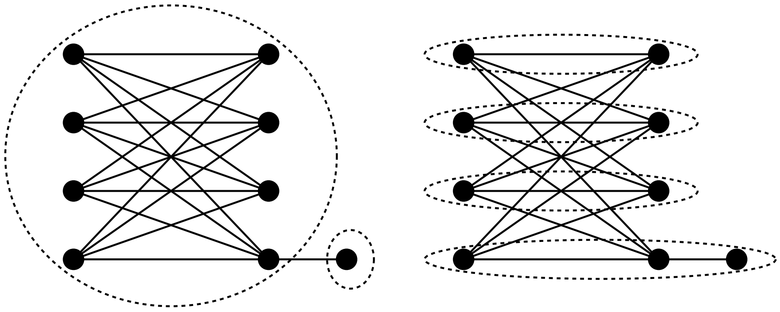
Pergunta: G possui uma p-partição clique?

Em 1972, Karp (KARP, 1972) provou que este problema é NP-completo para $p \geq 3$.

Ao contrário do problema p-PARTIÇÃO CLIQUE, se um grafo G é p-convexo não implica que G é $(p+1)$-convexo. Por exemplo, as Figuras 2.3(a) e 2.3(b) mostram uma 2-partição convexa e uma 4-partição convexa de um grafo. Entretanto, este grafo não possui uma 3-partição convexa.

Na Figura 2.4, exibimos esquematicamente um grafo G, onde $V(G) = R \cup K \cup S$ e $|K| = |S|$. O conjunto R é um conjunto de vértices com uma relação qualquer de adjacências entre seus vértices; o conjunto K é uma clique; e S é um conjunto independente de vértices. Todos os pares de vértices u, w, onde $u \in R$ e $w \in K$, são adjacentes; Todos os pares de vértices u, w, onde $u \in R$ e $w \in S$, são não adjacentes; e por fim, existe uma bijeção f entre os vértices de K e S tal que $N_{G[S+v]}(v) = \{f(v)\}$.

É fácil ver que num grafo H qualquer nenhum vértice x de grau 1 se encontra numa geodésica entre outros dois vértices do grafo. Logo, $(V(H) - x, \{x\})$ é uma



(a) (b)

Figura 2.3: (a) 2-partição convexa e (b) 4-partição convexa de um grafo que não possui uma 3-partição convexa.

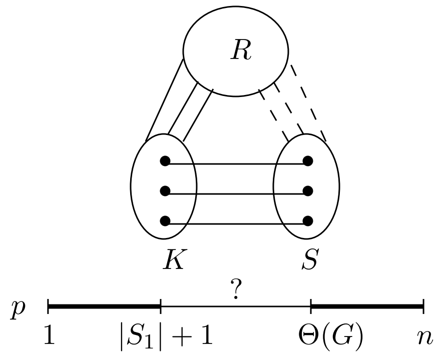


Figura 2.4: Representação de um grafo p-convexo para $p \leq |S| + 1$ ou $p \geq \Theta(G)$. Se $|S| + 1 < p < \Theta(G)$, não sabemos determinar se o grafo é p-convexo.

partição convexa de H. Portanto, repetindo este argumento concluímos que o grafo G da Figura 2.4 possui uma p-partição convexa $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$, para $p \leq |S| + 1$. Suponha que $\Theta(G) > |S| + 1$. Pela Observação 2.8, sabemos que G é p-convexo, para $p \geq \Theta(G)$. Então, G é p-convexo para $p \leq |S| + 1$ ou $p \geq \Theta(G)$. Para $|S| + 1 < p < \Theta(G)$, não temos uma resposta trivial para este problema. Este intervalo de valores é ilustrado na Figura 2.4. Com este exemplo ilustramos a importância de investigar o problema p-PARTIÇÃO CONVEXA.

2.4 NP-completude de p-PARTIÇÃO CONVEXA

Na presente seção, provamos que o problema p-PARTIÇÃO CONVEXA é NP-completo, para $p \geq 2$.

Teorema 2.10. *p-PARTIÇÃO CONVEXA é NP-completo, para $p \geq 3$.*

Demonstração. O problema pertence a NP pois, de acordo com o Algoritmo 1, é possível verificar em tempo polinomial quando um subconjunto S de $V(G)$ é convexo. Portanto, dada uma partição, verificamos em tempo polinomial se cada um de seus conjuntos é convexo.

A prova que o problema é NP-difícil é uma redução do problema p-PARTIÇÃO EM CLIQUES. Sem perda de generalidade, seja G um grafo, com $|V(G)| \geq 2$, tal que $V(G)$ não é uma clique. Seja G' um grafo obtido de G com a adição de dois vértices u e v tais que $N(u) = N(v) = V(G)$.

Inicialmente, provaremos que qualquer conjunto convexo próprio de $V(G')$ é uma clique. Suponha que C é um conjunto convexo próprio de $V(G')$, tal que C não é uma clique. Neste caso, $u, v \in C$. Como $I[u, v] = V(G')$, temos que $C = V(G')$, uma contradição.

Se $V(G)$ possui uma partição $\mathcal{V}$ em p cliques, então podemos construir uma p-partição convexa $\mathcal{V}'$ de $V(G')$ adicionando u, v a conjuntos distintos de $\mathcal{V}$.

Reciprocamente, uma p-partição convexa $\mathcal{V}'$ de $V(G')$, induz uma partição de $V(G)$ em ℓ cliques, onde $p - 2 \leq \ell \leq p$. Se $\ell \neq p$, dividimos uma clique de $\mathcal{V}'$ em duas cliques para obter uma partição de $V(G)$ em $\ell + 1$ cliques. Se $\ell + 1 \neq p$, então repetimos este argumento até obter uma p-partição clique de $V(G)$. □

O resultado acima é válido para todos os valores de $p \geq 3$. A prova do caso $p = 2$ não pode ser obtida com uma extensão da redução do Teorema 2.10. Isto ocorre pois o problema de decidir se $V(G)$ possui uma partição em duas cliques é polinomial. Investigamos o problema 2-PARTIÇÃO CONVEXA e concluímos que ele também é NP-completo. No entanto, a demonstração deste caso é bem mais trabalhosa que a do caso $p \geq 3$. Este resultado foi obtido reduzindo o problema NP-completo 1-IN-3 3SAT (GAREY e JOHNSON, 1979) para 2-PARTIÇÃO CONVEXA.

1-IN-3 3SAT

Instância: Conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de variáveis, coleção $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ de cláusulas sobre X tais que cada cláusula $c \in C$ tem $|c| = 3$ e nenhum literal negativo.

Pergunta: Existe uma atribuição de verdade para X tal que cada cláusula em $\mathcal{C}$ tem exatamente um literal verdadeiro?

Dizemos que $\mathcal{C}$ é *satisfatível* se existe uma atribuição de verdade para X tal que $\mathcal{C}$ é satisfatível e cada cláusula em $\mathcal{C}$ tem exatamente um literal verdadeiro.

Teorema 2.11. 2-PARTIÇÃO CONVEXA *é NP-completo.*

Demonstração. Novamente, o problema pertence a NP, porque podemos verificar em tempo polinomial se um conjunto é convexo utilizando o Algoritmo 1. Para reduzir 1-IN-3 3SAT para 2-PARTIÇÃO CONVEXA construímos uma instância particular G de 2-PARTIÇÃO CONVEXA a partir de uma instância genérica $(X, \mathcal{C})$ de 1-IN-3 3SAT, tal que $\mathcal{C}$ é satisfatível se, e somente se, G é biconvexo. Primeiro, descrevemos a construção da instância particular G de 2-PARTIÇÃO CONVEXA; em seguida, provamos no Lema 2.12 que uma 2-partição convexa de $V(G)$ define uma atribuição de verdade que satisfaz $(X, \mathcal{C})$; finalmente, provamos no Lema 2.13 que uma atribuição de verdade que satisfaz $(X, \mathcal{C})$ define um grafo G biconvexo. Esses passos são explicados em detalhes a seguir. □

Construção de uma instância particular de 2-PARTIÇÃO CONVEXA.

O conjunto de vértices $V(G)$ contém: para toda variável $x_i \in X$, um vértice x_i in G; para toda cláusula c_j em $\mathcal{C}$ onze vértices: $f_j, l_j^1, l_j^2, l_j^3, \ell_j^1, \ell_j^2$, ℓ_j^3, q_j^1, q_j^2, q_j^3, t_j; e dois vértices auxiliares: f e t.

Denotamos por $F = \{f_j | 1 \leq j \leq m\}$, $L = \{l_j^i | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 3\}$, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Q = \{q_j^i | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 3\}$, $\mathcal{L} = \{\ell_j^i | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 3\}$ e $T = \{t_j | 1 \leq j \leq m\}$.

O conjunto de arestas $E(G)$ é tal que: $\mathcal{X} \cup Q$ é uma clique; f é um vértice universal para $F \cup \mathcal{X} \cup Q$, e t é universal para $\mathcal{X} \cup Q \cup T$; além disso, para toda cláusula $c_j = \{x_b, x_c, x_d\}$, adicionamos as arestas $\{l_j^1, x_b\}$, $\{l_j^2, x_c\}$, $\{l_j^3, x_d\}$, $\{f_j, l_j^1\}, \{f_j, l_j^2\}, \{f_j, l_j^3\}$, $\{t_j, \ell_j^1\}$, $\{t_j, \ell_j^2\}, \{t_j, \ell_j^3\}$, $\{q_j^1, \ell_j^1\}$, $\{q_j^2, \ell_j^2\}$, $\{q_j^3, \ell_j^3\}$ e $\{l_j^1, \ell_j^2\}$, $\{l_j^1, \ell_j^3\}$, $\{l_j^2, \ell_j^1\}$, $\{l_j^2, \ell_j^3\}$, $\{l_j^3, \ell_j^1\}$, $\{l_j^3, \ell_j^2\}$. A construção de G está concluída.

Os Lemas 2.12 e 2.13 provam a equivalência necessária para obtenção do Teorema 2.11. Na Figura 2.5 exibimos um exemplo de uma instância particular $(X, \mathcal{C}) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{(x_1, x_2, x_3), (x_3, x_4, x_5)\})$.

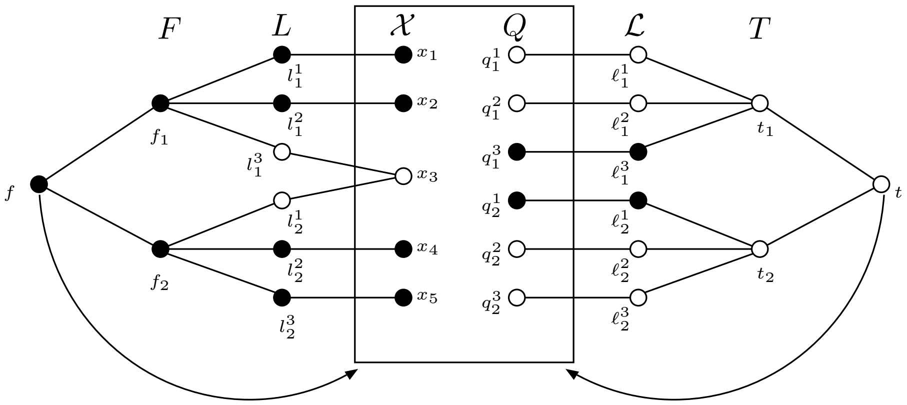


Figura 2.5: Grafo G para a instância $(X, \mathcal{C}) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{(x_1, x_2, x_3), (x_3, x_4, x_5)\})$. Omitimos todas as arestas entre L e $\mathcal{L}$. O retângulo representa uma clique, os vértices brancos pertencem a V_t e os vértices negros pertencem a V_f. Os vértices brancos de $\mathcal{X}$ representam as variáveis de X atribuídas como verdadeiras.

Lema 2.12. *Se G é biconvexo, então $\mathcal{C}$ é satisfatível.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = (V_f, V_t)$ bipartição convexa de $V(G)$. Inicialmente, provaremos que f e t não pertencem ao mesmo conjunto de $\mathcal{V}$. Suponha que $f, t \in V_f$, então $\mathcal{X} \cup Q \subseteq V_f$. Sejam v, w dois vértices de $F \cup L \cup \mathcal{L} \cup T$ gerados por cláusulas distintas de $\mathcal{C}$. Os vértices v e w não pertencem a V_t pois $I[v, w] \cap V_f \neq \emptyset$. Portanto, V_t é formado por no máximo oito vértices, os vértices de $S = \{f_j, l_j^1, l_j^2, l_j^3, \ell_j^1, \ell_j^2, \ell_j^3, t_j\}$ gerados por uma única cláusula c_j de $\mathcal{C}$. Observe que S não é um conjunto convexo, porque existe uma geodésica entre l_j^1 e ℓ_j^1 que utiliza vértices de $\mathcal{X} \cup Q$. Logo, $V_t \subset S$. É fácil ver que, se um vértice de $S' = \{f_j, l_j^1, l_j^2, l_j^3\}$ pertence a V_f, então todos os vértices de S' pertencem a V_f. Consequentemente, concluímos que ou $V_t = S'$ ou $V_t = S \backslash S'$. Sem perda de generalidade, suponha que $V_t = S'$. Como $\ell_j^3 \in I[l_j^1, l_j^2]$, V_t não é um conjunto convexo. Portanto, $\mathcal{V}$ não é uma bipartição convexa e concluímos que f e t pertencem a conjuntos distintos de $\mathcal{V}$. Assumiremos que $f \in V_f$ e $t \in V_t$.

Como $f \in I[f_j, t]$, então $f_j \in V_f$ para todo $1 \leq j \leq m$. Analogamente, $t_j \in V_t$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Agora, provaremos que $\mathcal{V}$ define uma atribuição de verdade satisfatível para $(X, \mathcal{C})$. Primeiro, afirmamos que se o vértice x_i pertence a V_f, então $N_{G[L \cup x_i]}(x_i) \subseteq V_f$. Seja $v \in N_{G[L \cup x_i]}(x_i)$, esta propriedade é válida porque existe uma geodésica entre v e t contendo x_i. Analogamente, se o vértice x_i pertence a V_t, então

$N_{G[L\cup x_i]}(x_i) \subseteq V_t$. Consequentemente, podemos associar o conjunto $\mathcal{X}$ com X, e L com $\mathcal{C}$ e $\mathcal{V}$ representará uma atribuição de verdade para o conjunto de variáveis, onde a variável x_i é verdadeira se, e somente se, o vértice $x_i \in V_t$. Veja Figura 2.5, onde os vértices brancos pertencem a V_t e os vértices negros pertencem a V_f. Ainda falta provar que para cada conjunto $L_j = \{l_j^1, l_j^2, l_j^3\}$, $1 \leq j \leq m$, exatamente um dos vértices pertence a V_t. Se pelo menos dois vértices v, w de L_j pertencem a V_t, então $f_j \in I[v, w]$, o que é uma contradição. Se $L_j \subseteq V_f$, então $\{\ell_j^1, \ell_j^2, \ell_j^3\} \subseteq V_f$, e consequentemente $t_j \in V_f$, uma nova contradição. Isto conclui a prova. $\square$

A recíproca do Lema 2.12 é exibida a seguir no Lema 2.13.

Lema 2.13. *Se $\mathcal{C}$ é satisfatível, então G é biconvexo.*

Demonstração. Suponha que existe uma atribuição de verdade que satisfaz $(X, \mathcal{C})$. Construímos uma bipartição (V_f, V_t) de $V(G)$ como se segue. Inicialmente, adicionamos a V_t os vértices $t, t_1, \ldots, t_m$, os vértices x_i e $l_j^i \in N_{G[L\cup x_i]}(x_i)$ tais que a variável x_i é verdadeira; e os vértices q_j^i, ℓ_j^i tais que l_j^i não foi adicionada a V_t, para todo $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq 3$. Definimos $V_f = V(G) \backslash V_t$. Completamos a prova mostrando que os conjuntos V_f e V_t são convexos.

Fato 1. O vértice $l_j^i \in V_f$ se, e somente se, $N_{G[\mathcal{X}\cup l_j^i]}(l_j^i) \in V_f$, para todo $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq 3$.

Fato 2. O vértice $l_j^i \in V_f$ se, e somente se, $\ell_j^i \in V_t$, para todo $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq 3$.

Fato 3. O vértice $l_j^i \in V_f$ se, e somente se, $q_j^i \in V_t$, para todo $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq 3$.

Fato 4. Para todo $l_j^i \in L$, se $l_j^i \in V_f$, então $N_G(l_j^i) \subseteq V_f$. Portanto, se para algum $w \in V_f$ $I[l_j^i, w] \nsubseteq V_f$, então existe um vértice $v \in N_G(l_j^i)$ tal que $I[v, w] \nsubseteq V_f$.

Provaremos que V_f é convexo demonstrando que não existe um vértice em V_t pertencente a uma geodésica entre dois vértices não adjacentes $v, w \in V_f$. Considere os casos seguintes:

Seja $v = f$. Caso $w \in L$: pelo Fato 4 não é necessário analisar este caso. Caso $w \in \mathcal{L}$: $d(v, w) = 2$ utilizando um vértice z de Q e pelo Fato 3, $z \in V_f$. Seja $v \in F$. Caso $w \in F$: trivial. Caso $w \in L$: fato 4. Caso $w \in \mathcal{X} \cup Q$: trivial. Caso $w \in \mathcal{L}$: seja $\mathcal{P}$ uma geodésica entre v e w. Se $|\mathcal{P}| = 2$, então $V(\mathcal{P}) \subseteq V_f$ pelo Fato 2; se

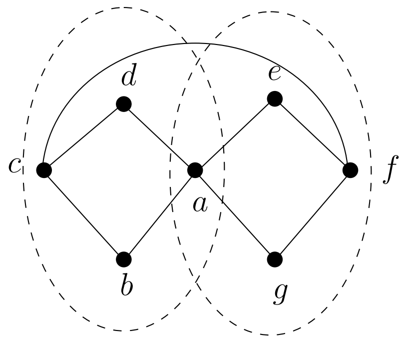


Figura 2.6: Grafo e sua 2-cobertura convexa

$|\mathcal{P}| = 3$, então $V(\mathcal{P}) \subseteq V_f$ pelo Fato 3. Seja $v \in L$. Pelo Fato 4 não é necessário analisar este caso. Seja $v \in \mathcal{X} \cup Q \cup \mathcal{L}$, trivial.

A prova que V_t é convexo é análoga. Logo, se $\mathcal{C}$ é satisfatível, então $V(G)$ tem uma bipartição convexa. □

Dado que o problema p-PARTIÇÃO CONVEXA é NP-completo, analisamos a sua complexidade para algumas classes de grafos. Nossos resultados para classes específicas serão apresentados no capítulo 3.

2.5 Coberturas convexas

Um conceito similar ao da partição convexa é a *cobertura convexa.* A diferença é que os conjuntos de uma cobertura convexa não precisam ser disjuntos.

Definição 2.14. *Seja G um grafo. Uma p-*cobertura convexa *de G, $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$, é uma p-upla onde $V = \bigcup_{1 \leq i \leq p} V_i$; $V_i \subseteq V(G)$ é convexo e $V_i \not\subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq p}^{j \neq i} V_j$, para todo $1 \leq i \leq p$.*

Observe que toda p-partição convexa de G é uma p-cobertura convexa. No entanto, a recíproca não é válida. Apresentamos, na figura 2.6, um exemplo de grafo que possui uma 2-cobertura convexa e não possui uma 2-partição convexa.

O grafo da figura 2.6 possui a 2-cobertura convexa apresentada na figura. Concluímos que ele não é 2-convexo analisando todos os possíveis casos de bipartição convexa.

Definição 2.15. *Seja G um grafo. Definimos como $\varphi_c(G)$, o menor inteiro $p \geq 2$ para o qual G tem uma p-cobertura convexa.*

Um dos nossos possíveis focos para o futuro é trabalhar com coberturas convexas. Uma de nossas intenções é entender melhor a relação entre $\Theta_c(G)$ e $\varphi_c(G)$. Até o presente momento, sabemos que $\varphi_c(G) \leq \Theta_c(G)$ e que nem todo grafo G possui $\varphi_c(G) = 2$, por exemplo, $\varphi_c(K_{3,3}) = 3$. E também, que $\varphi_c(G) = \Theta_c(G)$, se G é um grafo bipartido completo. Assim como a partição em convexos, consideramos o problema de decidir se um grafo G possui uma cobertura em p conjuntos convexos. Este problema também é NP-completo para $p \geq 3$ fixo.

p-COBERTURA CONVEXA

Instância: Grafo G.

Pergunta: G possui uma p-cobertura convexa?

Teorema 2.16. p-COBERTURA CONVEXA *é NP-completo, para $p \geq 3$.*

Demonstração. O problema pertence a NP pois, de acordo com o Algoritmo 1, é possível verificar em tempo polinomial quando um subconjunto S de $V(G)$ é convexo. Portanto, dada uma cobertura, verificamos em tempo polinomial se cada um de seus conjuntos é convexo.

A prova que o problema é NP-difícil é uma redução do problema p-PARTIÇÃO EM CLIQUES. Sem perda de generalidade, seja G um grafo, com $|V(G)| \geq 2$, tal que $V(G)$ não é uma clique. Seja G' um grafo obtido de G com a adição de dois vértices u e v tais que $N(u) = N(v) = V(G)$.

Assim como no Teorema 2.10, qualquer conjunto convexo próprio de $V(G')$ é uma clique.

Se $V(G)$ possui uma partição $\mathcal{V}$ em p cliques, então podemos construir uma p-partição clique $\mathcal{V}'$ de $V(G')$ adicionando u, v a conjuntos distintos de $\mathcal{V}$. Como toda clique é um conjunto convexo, $\mathcal{V}'$ é uma p-cobertura convexa de $V(G')$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{V}' = (V_1', \ldots, V_p')$ uma p-cobertura convexa de $V(G')$, e consequentemente uma cobertura em p cliques de $V(G')$. Tomamos $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$, onde $V_i = V_i' \setminus \bigcup_{i+1 \leq j \leq p} V_j$, para $1 \leq i \leq p$. Da definição de cobertura convexa todo $V_i \neq \emptyset$ e, portanto, $\mathcal{V}$ é uma p-partição clique de $V(G')$. Análogo ao Teorema 2.10 $\mathcal{V}$ induz uma partição de $V(G)$ em ℓ cliques, onde $p - 2 \leq \ell \leq p$. Conforme o Teorema 2.10, $V(G)$ possui uma p-partição clique. $\square$

2.6 Problemas em aberto

Sobre os problemas e conceitos apresentados neste capítulo temos interesse em entender melhor a relação entre partição e cobertura convexa e gostaríamos de investigar a complexidade do problema 2-COBERTURA CONVEXA.

Além do mencionado acima, pretendemos estudar o problema da cobertura para algumas classes de grafos. Indiretamente, ao estudar partições, provamos que o problema da cobertura também é polinomial para algumas classes. No entanto, nossa dúvida maior é se existe alguma classe para a qual o problema da partição convexa seja NP-completo e o da cobertura polinomial.

Capítulo 3

Partições convexas e grafos desconexos

No Capítulo 2 apresentamos as definições de convexidade de acordo com nossos trabalhos realizados. No entanto, nas últimas décadas intensificou-se o estudo de convexidade abstrata, começando pela criação de um conjunto de axiomas que generalizasse o conceito euclidiano de convexidade. Um extenso estudo sobre o assunto pode ser encontrado em VAN DE VEL (1993).

A seguir apresentamos o conjunto de axiomas que, conforme CÁCERES *et al.* (2005) representam a generalização da convexidade euclidiana para Teoria dos Grafos. Definições equivalentes são apresentadas em CÁCERES *et al.* (2006); PELAYO (2008).

3.1 Definição e resultados gerais

Definição 3.1. *Um* espaço de convexidade em grafos *é um par ordenado* $(G, \mathfrak{C})$*, formado por um grafo conexo* G *e,* $\mathfrak{C}$*, uma família de subconjuntos de* $V(G)$ *(chamados conjuntos convexos) que atende as seguintes propriedades:*

(i) $V(G)$, $\emptyset \in \mathfrak{C}$*;*

(ii) $\mathfrak{C}$ *é fechada para interseções;*

(iii) Todo conjunto convexo induz um subgrafo conexo de G*.*

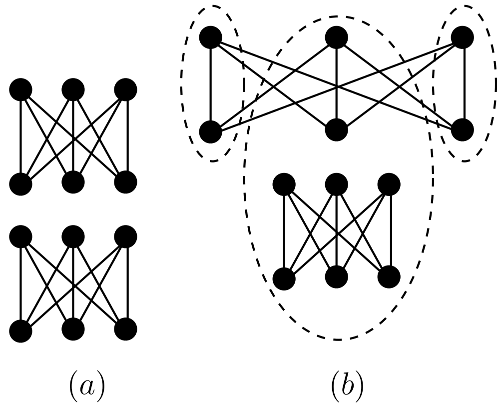


Figura 3.1: 3-partição convexa

No presente capítulo, exibiremos resultados gerais sobre partições convexas de grafos. Neste trabalho utilizamos uma generalização da definição 3.1, esta generalização consiste em não utilizar o item 3 da definição. Os resultados a seguir estão presentes em ARTIGAS *et al.* (2009) e também apareceram em ARTIGAS *et al.* (2007d).

Definição 3.2. *Definimos por* $\Theta_c^{'}(G)$ *o menor número* $p \geq 2$ *para o qual* G *tem uma* p*-partição convexa quase-clique. Denotamos por* $\Theta_c^{''}(G)$ *o menor* $p \geq 2$ *para o qual* G *é fortemente* p*-convexo.*

Claramente, para qualquer grafo G tem-se $\Theta_c(G) \leq \Theta_c^{'}(G) \leq \Theta_c^{''}(G)$. Um exemplo onde a igualdade vale é o grafo bipartido completo, isto é, seja $p \leq q$, $\Theta_c(K_{p,q}) = \Theta_c^{'}(K_{p,q}) = \Theta_c^{''}(K_{p,q}) = q$. Porém se G é desconexo, então $\Theta_c(G) = 2$. No entanto isto não é válido para $\Theta_c^{'}(G)$. Por exemplo, $\Theta_c^{'}(G) = 3$ para o grafo desconexo G formado por dois $K_{3,3}$ (conforme Figura 3.1).

A seguir, apresentamos um resultado estrutural que relaciona p-partição convexa com p-partição convexa quase-clique.

Lema 3.3. *Seja* G *um grafo com algum vértice universal e* $p \geq 2$ *um número inteiro. Se* G *é* p*-convexo, então* G *tem uma* p*-partição convexa quase-clique.*

Demonstração. Seja G um grafo p-convexo com vértice universal v. Seja $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, uma p-partição convexa de $V(G)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $v \in V_1$. Suponha que V_i, para algum $1 < i \leq p$, não é uma clique. Neste caso, existem dois vértices não adjacentes $u, w \in V_i$ tal que $v \in I[u, w]$, o que é uma contradição pois V_i é convexo. $\square$

3.2 Grafos desconexos

Nesta seção, descreveremos métodos para reduzir o problema de decidir se um grafo desconexo admite uma p-partição convexa em um problema similar em grafos conexos. Examinaremos também um método semelhante para tratar o problema da partição convexa quase-clique.

3.2.1 Partições convexas

Note que se um grafo desconexo G contém ω componentes conexos então G é trivialmente p-convexo, para $p \leq \omega$.

Teorema 3.4. *Seja G um grafo com componentes conexas $G_1, \ldots, G_\omega$. Então G é p-convexo se e somente se existem valores p_i, $1 \leq i \leq \omega$, tal que:*

(i) G_i é p_i-convexo;

(ii) $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i \geq p$, e cada $p_i \leq p$.

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ uma p-partição convexa de $V(G)$. Definimos $\mathcal{V}_i = (V_1 \cap G_i, \ldots, V_p \cap G_i)$ considerando apenas os casos onde $V_j \cap G_i \neq \emptyset$, $1 \leq j \leq p$ e $1 \leq i \leq \omega$. Observe que $\mathcal{V}_i$ é uma p_i-partição convexa de $V(G_i)$, onde $p_i \leq p$. Além disso, como cada conjunto V_j possui vértices de uma ou mais partições $\mathcal{V}_i$, temos $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i \geq p$.

Reciprocamente, seja G_i p_i-convexo, $1 \leq i \leq \omega$, e $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i \geq p$. Os conjuntos convexos que formam as p_i-partições convexas dos grafos G_i constituem uma ℓ-partição convexa de G, onde $\ell = \sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i \geq p$. Se $\ell > p$, construímos uma $(\ell - 1)$-partição convexa de G unindo um conjunto convexo de uma componente conexa G_i com um conjunto convexo de uma componente conexa G_j, tais que $i \neq j$. Observamos que a união de conjuntos convexos em componentes conexas distintas é convexa, e a união de conjuntos convexos numa mesma componente conexa não é necessariamente convexo. Logo, repetimos este processo para obter partições com menos de

$\ell - 1$ conjuntos convexos. Pelo princípio da casa dos pombos, $max\{p_i |\ 1 \leq i \leq \omega\}$ é um limite superior para o número mínimo de conjuntos em uma partição convexa obtida desta maneira. Como cada $p_i \leq p$, com este procedimento obtemos uma p-partição convexa de G. □

O Teorema 3.4 reduz o problema de decidir se um grafo desconexo G, com componentes conexas $G_1, \ldots, G_\omega$, é p-convexo, ao problema de decidir se seus componentes conexos G_i são p_i-convexos, para $1 \leq p \leq n$. Este teorema sugere o Algoritmo 2.

Algoritmo 2 Algoritmo para p-partição convexa de grafo desconexo.

(i) Para cada i, $1 \leq i \leq \omega$, determine o maior $p_i \leq p$ tal que G_i é p_i-convexo;

(ii) Se $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i \geq p$, então G é p-convexo; caso contrário G não é p-convexo.

Observamos que utilizando o Algoritmo 2, podemos determinar em tempo polinomial se um grafo desconexo é p-convexo, para classes de grafos em que é possível determinar em tempo polinomial se um grafo conexo é p-convexo. A complexidade de um algoritmo de força bruta baseado no Algoritmo 2 é $O(p\omega X)$, onde $O(X)$ é a complexidade de testar se um grafo conexo, G_i, é p_i-convexo.

3.2.2 Partições convexas quase-clique

O teorema seguinte é similar ao Teorema 3.4 pois determina condições para um grafo G possuir uma p-partição convexa quase-clique. Sua demonstração é uma aplicação do raciocínio empregado no teorema anterior.

Teorema 3.5. *Seja G um grafo com componentes conexos $G_1, \ldots, G_\omega$ e um inteiro $p \geq 1$. Então G admite uma p-partição convexa quase-clique se e somente se existe uma p_i-partição de G_i, $1 \leq i \leq \omega$, tal que ω', $\omega' \leq \omega$, são partições convexas quase-clique e as $\omega - \omega'$ partições restantes são partições clique satisfazendo $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i = p + \omega' - 1$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_p\}$ uma p-partição convexa quase-clique de G. Sem perda de generalidade, adotaremos que V_1 é o único conjunto convexo não clique de $\mathcal{V}$. Como os conjuntos V_i, para $2 \leq i \leq p$, são cliques, cada V_i está contido em uma única componente conexa de G. O conjunto V_1 é o único que pode conter vértices de componentes conexas distintas. Denominemos de ω' o número total das componentes conexas que possuem vértices em V_1. Claramente, o conjunto de vértices de uma componente em V_1 é convexo naquela componente. Portanto $\mathcal{V}_i = \{V_1 \cap G_i, \ldots, V_p \cap G_i\}$ determina uma partição convexa quase-clique em G_i, para todas componentes conexas G_i. Além disso, $\sum_{1 \leq i \leq \omega} p_i = p + \omega' - 1$.

A recíproca também é válida, pois a p-partição convexa quase-clique de G, pode ser formada unindo os ω' conjuntos convexos, que podem ser não cliques, formando um único conjunto convexo; os demais conjuntos da partição convexa quase-clique de G são as cliques das partições de cada G_i, para $1 \leq i \leq \omega$. $\square$

Note que o Teorema 3.5 também sugere um algoritmo. Nossa intenção ao desenvolver algoritmos, para estes problemas que sabemos ser NP-completos, não é de obter uma melhor eficiência, mas sim, desenvolver formas de tratar o problema em grafos desconexos através de algoritmos para suas componentes conexas. Conseguimos criar uma solução (Algoritmo 2) para testar se um grafo desconexo é p-convexo. Gostaríamos de melhorar nossa solução para p-partição convexa quase-clique e determinar uma caracterização para grafos fortemente p-convexos.

Capítulo 4

Classes de grafos

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos sobre partições convexas de classes de grafos específicas. Trabalhamos com três classes distintas: grafos cordais, cografos e potências de ciclos. Os resultados para as duas primeiras classes foram apresentados em ARTIGAS *et al.* (2007b,d) e o trabalho com potências de ciclos aparece em ARTIGAS *et al.* (2008). Todos os detalhes desses resultados foram submetidos em ARTIGAS *et al.* (2009).

4.1 Grafos cordais

Definição 4.1. *Uma* corda *num ciclo C_n é uma aresta entre vértices não adjacentes em C_n. Um grafo é* cordal *se todo ciclo de comprimento maior ou igual 4 possui uma corda.*

Definição 4.2. *Seja G um grafo. Uma ordem $L = (v_1, \ldots, v_n)$ dos vértices de $V(G)$ é uma* ordem de eliminação perfeita *de G se o vértice v_i é simplicial em $G_i = G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$, para $1 \leq i \leq n$.*

É um resultado bem conhecido em teoria dos grafos que um grafo G é cordal se, e somente se, possui uma ordem de eliminação perfeita. A partir desta propriedade é possível obter resultados sobre o estudo de partições convexas destes grafos.

Observação 4.3. *Se G é um grafo cordal conexo, então G é biconvexo.*

Demonstração. Como G é cordal, G possui um vértice simplicial v. Logo $v \notin I[u, w]$ para qualquer par de vértices u, w em $G - v$. Portanto $G - v$ é convexo.

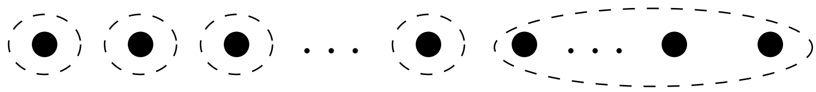


Figura 4.1: p-partição convexa de um grafo cordal

Consequentemente, $(V(G)\backslash\{v\},\{v\})$ é uma bipartição convexa de $V(G)$. □

Teorema 4.4. *Se G é um grafo cordal conexo, então G é p-convexo para todo $1 \leq p \leq n$.*

Demonstração. Como G é cordal, admite uma ordem de eliminação perfeita L. Provaremos que dado um p, se dividirmos V em p conjuntos, onde $p-1$ são conjuntos unitários contendo os primeiros $p-1$ vértices da ordem, e o outro conjunto S é formado pelos demais vértices de G(ver figura 4.1), esta partição é uma p-partição convexa de G. Claramente os conjuntos unitários são convexos, precisamos apenas provar que S é convexo.

Suponha que S não é um conjunto convexo. Logo, existe uma geodésica $\mathcal{P}$ entre dois vértices u e v de S que utiliza vértices que não pertencem a S, $\mathcal{P} = w_0, w_1, ..., w_{d-1}, w_d$, onde $w_0 = u$ e $w_d = v$. Seja w_q o menor vértice de L que pertence a $\mathcal{P}$. Como G é cordal, sabemos que w_q é um vértice simplicial no grafo induzido por w_q e todos os vértices maiores que w_q na ordem L, portanto w_{q-1} e w_{q+1} são adjacentes em G. Claramente existe um caminho $\mathcal{P}' = u, ..., w_{q-1}, w_{q+1}, ..., v$ de cardinalidade menor que $\mathcal{P}$. Por contradição, $\mathcal{P}$ não é uma geodésica entre u e v, então S é convexo. □

Corolário 4.5. *Se G é um grafo cordal, então G tem uma p-partição convexa quase-clique para todo $1 \leq p \leq n$.*

Demonstração. Segue diretamente da demonstração do Teorema 4.4. □

Além disso como toda partição é uma cobertura, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.6. *Se G é um grafo cordal, então G tem uma p-cobertura convexa para todo $1 \leq p \leq n$.*

Claramente, para um grafo G cordal, $\Theta_c(G) = \Theta_c^{'}(G) = \varphi(G) = 2$.

4.2 Cografos

Examinaremos agora, partições convexas de cografos.

Definição 4.7. *Um grafo G é um* cografo *se G não contém um P_4 como subgrafo induzido.*

Uma propriedade bem conhecida dos cografos é que G é um cografo conexo não trivial se, e somente se, $\overline{G}$ é um cografo desconexo.

Teorema 4.8. *Seja $p \geq 2$, as afirmações seguintes são equivalentes para um cografo conexo G:*

(i) G é p-convexo;

(ii) G é fortemente p-convexo;

(iii) $\overline{G}$ é p-colorível ou $\overline{G}$ contém exatamente uma componente conexa não trivial $\overline{H}$, tal que $H = G[V(\overline{H})]$ tem uma p-partição convexa quase-clique.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja G um grafo p-convexo e $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ uma p-partição convexa de $V(G)$. Suponha que $\mathcal{V}$ contém dois conjuntos que não são cliques, sejam V_1 e V_2 estes conjuntos. Isto implica que dois vértices não adjacentes $v, v' \in V_1$ pertencem a mesma componente conexa de $\overline{G}$. O mesmo é válido para dois vertices não adjacentes $u, u' \in V_2$. Suponha que estes quatro vértices estão em componentes conexas distintas de $\overline{G}$ então $v \in I[u, u'] \subseteq V_2$, o que é um absurdo. Portanto, estes quatro vértices pertencem a mesma componente conexa de $\overline{G}$. Logo, um vértice que não se encontre nesta componente conexa pertence tanto a V_1 quanto a V_2, outro absurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja G um grafo fortemente p-convexo. Se $\overline{G}$ possui apenas componentes conexas não triviais, então $V(G)$ é uma clique e $\overline{G}$ é p-colorível.

Suponha que $\overline{G}$ tem exatamente uma componente conexa trivial $\overline{H}$. Claramente, se $|V(H)| \leq p$, então $\overline{G}$ é p-colorível. De agora em diante consideraremos $|V(H)| > p$. Seja $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ uma p-partição convexa quase-clique de $V(G)$. Se $\mathcal{V}$ contém apenas cliques, então $\overline{G}$ é p-colorível. Se $\mathcal{V}$ contém exatamente um conjunto não clique, então sejam v, v' dois vértices não adjacentes de V_1. Toda componente conexa não trivial de $\overline{G}$ está contida em $I[v, v'] \subseteq V_1$. Portanto os conjuntos $V_2, \ldots, V_p$ são

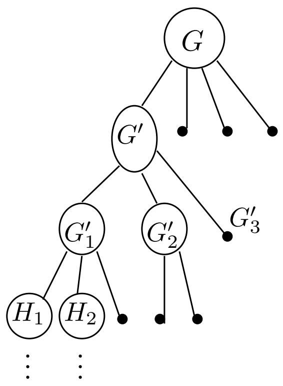


Figura 4.2: Esquema da coárvore de um cografo G. Os vértices brancos são componentes conexas não triviais e os vértices negros são componentes conexas triviais.

formados por vértices de H. Consequentemente, $\mathcal{V}' = (V_1 \cap H, \ldots, V_p \cap H)$ é uma partição convexa quase-clique de H.

Agora, considere que $\overline{G}$ possui ao menos duas componentes conexas não triviais e suponha por contradição que $\overline{G}$ não é p-colorível. Seja $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$ uma partição convexa quase-clique de G. Então existe um conjunto de $\mathcal{V}$, digamos V_1, com vértices não adjacentes u, u', do contrário $\overline{G}$ seria p-colorível. Portanto, u e u' pertencem a mesma componente conexa de $\overline{G}$, digamos H_1. Isto implica que todo vértice em outra componente conexa de $\overline{G}$ deve pertencer a V_1. Mas, como $\overline{G}$ tem ao menos duas componentes conexas não triviais, existe uma componente conexa H_2 com dois vértices não adjacentes $v, v' \in V_1$. Como $H_1 \subseteq I[v, v']$, concluímos que $V_1 = V(G)$, uma contradição.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se $\overline{G}$ é p-colorível então G é p-convexo. Se $\overline{G}$ não é p-colorível e possui exatamente uma componente conexa não trivial $\overline{H}$, tal que $V(H)$ contém uma p-partição convexa quase-clique $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_p)$. Então obtemos uma p-partição convexa de $V(G)$ adicionando os vértices de $V(G) \backslash V(H)$ ao conjunto de $\mathcal{V}$ que não é uma clique. $\square$

O teorema anterior fornece condições para desenvolvermos um algoritmo linear para decidir se um cografo conexo G é p-convexo. Este algoritmo utiliza a coárvore de G (CORNEIL *et al.*, 1985). A *coárvore* T_G de G é uma árvore enraizada em G; os nós de T_G são cografos conexos com conjunto de vértices contido em $V(G)$; os filhos de cada nó H de T_G são os componentes conexos de $\overline{H}$; as folhas de T_G são subgrafos triviais de G.

Na Figura 4.2, exibimos esquematicamente os primeiros níveis da coárvore de G. Os vértices negros representam componentes conexas triviais e os vértices brancos componentes conexas não triviais. Pelo Teorema 4.8, para decidir se G é p-convexo precisamos verificar o número de componentes conexas não triviais de $\overline{G}$. Como $\overline{G}$ possui uma única componente conexa não trivial G', é necessário verificar se $G[V(G')]$ é p-convexo. Como $G[V(G')]$ é desconexo não podemos utilizar um algoritmo baseado no Teorema 4.8. Pelo Teorema 3.4, é importante determinar o maior p'_i, menor ou igual a p, tal que G'_i é p'_i-convexo para toda componente conexa G'_i do grafo $G[V(G')]$. Note que as componentes conexas de $G[V(G')]$ são exatamente as componentes conexas de $\overline{G'}$ (filhos de G' em T_G). Portanto, utilizamos o Teorema 4.8 para determinar p'_i, para todo grafo G'_i. Inicialmente, observamos que G'_3 é trivial, como $|V(G'_3)| \leq p$, então $p'_3 = |V(G'_3)| = 1$; suponha que $|V(G'_1)| > p$ e $|V(G'_2)| > p$, aplicamos o Teorema 4.8 para G'_1 e G'_2. Como $\overline{G'_1}$ possui duas componentes conexas não triviais, é necessário examinar se $\overline{G'_1}$ é p-colorível. Como G'_2 não possui nenhum componente conexo não trivial, então G'_2 é p-convexo. Apesar da coárvore T_G ter outros vértices, não é necessário analisar todos os vértices de T_G para responder se G é p-convexo.

Desenvolvemos o Algoritmo 3 baseado nos Teoremas 3.4 e 4.8. Seja G um cografo conexo. O algoritmo decide o valor do maior $p_G \leq p$, tal que G é p_G-convexo, analisando os filhos de G na coárvore T_G. Se não for possível determinar p_G, repetimos este processo recursivamente para os filhos de G em T_G (possivelmente, nem todos eles). Nós modificamos o Algoritmo 2 para cografos desconexos. Também utilizamos o algoritmo linear (CORNEIL *et al.*, 1985) para determinar a coárvore de um cografo.

Antes de apresentar o algoritmo, precisamos de algumas definições. Seja H um cografo conexo, $\omega(\overline{H})$ é o número de componentes conexas de $\overline{H}$, enquanto $\omega'(\overline{H})$ é o número de componentes conexas não triviais de $\overline{H}$. Se $\overline{H}$ possui somente uma componente conexa não trivial denominaremos esta componente de $\overline{H'}$; as componentes conexas de um cografo $\overline{H}$ são chamadas $\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_{\omega(\overline{H})}$; $f(H,p) \leq p$ é o maior inteiro tal que H é $f(H,p)$-convexo.

O Algoritmo 3 determina $f(H,p)$ para um cografo H em T_G. Portanto, para

Algoritmo 3 Algoritmo para computar $f(H, p)$.

Entrada: Cografo conexo H.

função $f(H, p)$

Se $|V(H)| \leq p$, **então retorne** $|V(H)|$;

caso contrário

Se H está num nível ímpar de T_G:

- **Se** $\omega'(\overline{H}) = 0$, **então retorne** p;
- **Se** $\omega'(\overline{H}) = 1$, **então retorne** $f(\overline{H'}, p)$;
- **Se** $\omega'(\overline{H}) \geq 2$, **então** determine $\chi(\overline{H})$. **Se** $\chi(\overline{H}) \leq p$, **então retorne** p, **caso contrário** G não é p-convexo;

caso contrário retorne $min\{p, \sum_{1 \leq i \leq \omega(\overline{H})} f(\overline{H_i}, p)\}$.

determinar se um cografo conexo G é p-convexo determinamos a coárvore T_G e verificamos se $f(G, p) = p$.

Teorema 4.9. *Se G é um cografo, então decidimos em tempo $O(n + m)$ se G é p-convexo.*

Demonstração. A complexidade de determinar a coárvore T_G é $O(n + m)$, além disso T_G possui $O(n)$ vértices (CORNEIL *et al.*, 1985). A cada vértice H visitado o algoritmo pode: (i) determinar em tempo $O(1)$ o valor de $f(H, p)$; (ii) visitar os filhos de H; (iii) decidir se $\chi(\overline{H}) \leq p$. Nos passos ($i$) e ($iii$), o Algoritmo 3 não faz chamadas recursivas aos filhos de H. Em (iii), se determinamos $\chi(\overline{H_1})$ e $\chi(\overline{H_2})$, para dois vértices diferentes de T_G, então $V(H_1)$ e $V(H_2)$ são disjuntos. Sabemos, por CORNEIL *et al.* (1981, 1985), que $\chi(\overline{H})$ pode ser calculado em tempo $O(|V(H)| + |E(H)|)$, para qualquer vértice H de T_G. Portanto a complexidade do Algoritmo 3 é $O(n+m)$. Pelo Teorema 3.4, para um cografo desconexo G, precisamos verificar se $\sum_{1 \leq i \leq \omega(G)} f(G_i, p) \geq p$, onde G_i são as componentes conexas de G, para $1 \leq i \leq \omega(G)$. Portanto, é fácil ver que o Algoritmo 3 pode ser estendido para cografos desconexos. □

Observe que os resultados apresentados para cografos não se estendem diretamente para o problema de cobertura. Obviamente, se um grafo é p-convexo sabemos que ele possui uma p-cobertura convexa. No entanto, nada podemos afirmar sobre os cografos que não são p-convexos.

4.3 Potências de ciclos

Estudaremos agora partições convexas de potências de ciclos.

Definição 4.10. *Uma* potência de ciclo C_n^k, $1 \leq k \leq n$, *é um grafo tal que* $V(C_n^k) = V(C_n)$ *e* $E(C_n^k) = \{\{v_i, v_j\}|\ v_i, v_j \in V(C_n^k) \ \ e \ \ d_{C_n}(v_i, v_j) \leq k\}$.

Definição 4.11. *O* alcance *de uma aresta* $\{v_i, v_j\}$ *em* C_n^k *é a distância de* v_i *a* v_j *em* C_n. *Seja* $\{u, v\} \in E(G)$, *dizemos que* $\{u, v\}$ *é uma aresta de* alcance máximo *em* C_n^k *se* $d_{C_n}(u, v) = k$. *Denotamos os vértices de* C_n^k *por* $v_0, \ldots, v_n$, *onde* v_{i-1} *e* v_i *são consecutivos em* C_n *e* $v_n = v_0$, *para* $1 \leq i \leq n$.

O resultado seguinte estabelece condições para determinar se C_n^k é p-convexo, para $p \geq 2$.

Teorema 4.12. C_n^k *é p-convexo se, e somente se,* $p \geq 3$ *ou* $n \leq 2k + 2$ *ou* $n \equiv 0, 1, 2 \ (mod\ 2k)$.

Demonstração. Segue direto do Lema 4.16 e Corolários 4.14, 4.18 e 4.20. □

O Lema 4.13 estabelece limites para p tais que C_n^k tem uma partição em p cliques.

Lema 4.13. C_n^k *é p-convexo para* $\lceil \frac{n}{k+1} \rceil \leq p \leq n$.

Demonstração. Seja $\{v_0, v_k\}$ uma aresta de alcance máximo em C_n^k. O conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ é uma clique em C_n^k. Analogamente, toda aresta de alcance máximo em C_n^k define uma clique de tamanho $k + 1$. Portanto C_n^k tem uma partição em $\lceil \frac{n}{k+1} \rceil$ cliques. □

Corolário 4.14. *Se* $n \leq 2k + 2$, *então* C_n^k *é p-convexo, para todo* $1 \leq p \leq n$. □

Seja v, w um par de vértices de C_n^k e V_1, V_2 os conjuntos de vértices de dois caminhos distintos de v a w em C_n. Na observação seguinte provaremos que as geodésicas entre v e w em C_n^k ou utilizam os vértices de V_1, ou utilizam os vértices de V_2.

Observação 4.15. *Seja* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|S|}\}$ *um subconjunto de* $V(C_n^k)$. *Então para toda geodésica entre* v_1 *e* $v_{|S|}$, $\mathcal{P}(v_1, v_{|S|}) = u_1, u_2, \ldots, u_{|\mathcal{P}|}$, *onde* $u_1 = v_1$ *e* $u_{|\mathcal{P}|} = v_{|S|}$ *ou* $U = \{u_2, \ldots, u_{|\mathcal{P}|-1}\} \subseteq S$ *ou* $U \subseteq (V(C_n^k)\backslash S)$.

Demonstração. Suponha que existe uma geodésica $\mathcal{P}(v_1, v_{|S|}) = u_1, u_2, \ldots, u_{|\mathcal{P}|}$ tal que $U \cap S \neq \emptyset$ e $U \cap V(C_n^k)\backslash S \neq \emptyset$. Então existe um vértice u_i, $2 \leq i \leq |\mathcal{P}| - 1$, tal que ou $\{u_2, \ldots, u_i\} \subseteq S$ e $u_{i+1} \in V(C_n^k)\backslash S$, ou $\{u_2, \ldots, u_i\} \subseteq V(C_n^k)\backslash S$ e $u_{i+1} \in S$.

Considere $\{u_2, \ldots, u_i\} \subseteq S$ e $u_{i+1} \in V(C_n^k)\backslash S$. Como $u_i \in S$, $u_{i+1} \in V(C_n^k)\backslash S$ e $d_{C_n}(u_i, u_{i+1}) \leq k$, ou $\{v_1, u_i\} \in E(C_n^k)$ ou $\{u_i, v_{|S|}\} \in E(C_n^k)$. Então $\mathcal{P}$ não é uma geodésica. O caso $\{u_2, \ldots, u_i\} \subseteq V(C_n^k)\backslash S$ e $u_{i+1} \in S$ é análogo. $\square$

Agora, vamos provar que todas as potências de ciclos são p-convexas para $3 \leq p < \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$. A ideia é dividir $V(G)$ em p conjuntos de vértices consecutivos de C_n tal que cada conjunto é formado por no máximo $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ vértices, e então provaremos que estes conjuntos são convexos.

Lema 4.16. C_n^k *é* p*-convexo para* $p \geq 3$.

Demonstração. Inicialmente, considere $p = 3$ e $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ uma partição de $V(C_n^k)$, tal que, $|V_1| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, $|V_2| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, $|V_3| = n - 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$, e cada V_i contém vértices consecutivos de C_n. Assumimos que $k \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$, caso contrário $\mathcal{V}$ é uma partição clique. Seja $V_1 = \{v_1, \ldots, v_{|V_1|}\}$ e $v_r, v_s \in V_1$ dois vértices tais que $1 < r < s \leq |V_1|$. Queremos provar que se existe uma geodésica entre um par de vértices de V_1 utilizando vértices que não pertencem a V_1, então também existe uma entre v_1 e $v_{|V_1|}$. Definimos $U = \{v_r, v_{r+1}, \ldots, v_s\}$, $U' = \{v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\}$ e $V_1' = \{v_{|V_1|}, v_{|V_1|+1}, \ldots, v_1\}$. Suponha que existe uma geodésica $\mathcal{P}(v_r, v_s)$ entre v_r e v_s tal que $V(\mathcal{P}) \subseteq U'$. Como $|V_1'| < |U'|$, $|U| < |V_1|$ e pela Observação 4.15, concluímos que existe uma geodésica $P'(v_1, v_{|V_1|})$ tal que $V(P') \subseteq V_1'$. Então, é suficiente provar que não existe uma geodésica entre v_1 e $v_{|V_1|}$ contendo vértices que não pertençam a V_1.

Suponha que existem geodésicas entre u e v, $\mathcal{P}(u, v) \subseteq C_n^k[V_1]$ e $\mathcal{P}'(u, v) \subseteq C_n^k[(V\backslash V_1) \cup \{v_1, v_{|V_1|}\}]$, e C_n^k. Então $|\mathcal{P}| = \lceil \frac{\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1}{k} \rceil$ e $|\mathcal{P}'| = \lceil \frac{n - \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1}{k} \rceil$.

Como $k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ e $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil \geq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, temos $|\mathcal{P}| < |\mathcal{P}'|$. Portanto $\mathcal{P}'(u, v)$ não é uma geodésica, um absurdo. Claramente, um argumento similar é válido para $p > 3$. $\square$

Para o caso $p = 2$, existem valores de n e k tais que C_n^k não é biconvexo.

Lema 4.17. *Se $n \equiv 0, 1, 2$ (mod $2k$), então um subconjunto $S \subseteq V(C_n^k)$ formado por $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices consecutivos de C_n^k é convexo.*

Demonstração. Provaremos que não existe uma geodésica entre um par de vértices S usando vértices não pertencentes a S.

Sem perda de generalidade, considere $S = \{v_1, \ldots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$. Analogamente à prova do Lema 4.16, restringiremos nossas atenções aos vértices v_1 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Como $n = 2kq + r$, onde q e r são inteiros positivos e $0 \leq r \leq 2$, então $|S| \leq qk + 1$. Portanto, $|\mathcal{P}_{C_n^k[S]}(v_1, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})| = \left\lceil \frac{|S|-1}{2} \right\rceil = q$, para alguma geodésica $\mathcal{P}$ entre v_1 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ em $C_n^k[S]$.

Analogamente, seja $S' = (V(C_n^k) \backslash S) \cup \{v_1, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$. Claramente, $|S'| \geq qk + 2$, consequentemente $|\mathcal{P}_{C_n^k[S']}(v_1, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})| = q + 1$, para alguma geodésica $\mathcal{P}$ entre v_1 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ em $C_n^k[S']$. Portanto, pela Observação 4.15, S é convexo. □

Corolário 4.18. *C_n^k é biconvexo para $n \equiv 0, 1, 2$ (mod $2k$).* □

Lema 4.19. *Seja $S \subset V(C_n^k)$ um conjunto convexo não clique de C_n^k, $n > 2k + 2$ e $n \not\equiv 0, 1, 2 \pmod{2k}$. Então $|S| < \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Demonstração. Suponha que existe um conjunto convexo não clique $S \subset V(C_n^k)$ tal que $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Provaremos que $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ implica que S contém um par de vértices u, w tal que $I_h[u, w] = V(C_n^k)$.

Primeiro afirmamos que S possui um par de vértices u e w tal que $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \leq d_{C_n}(u, w) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Denotaremos $a + b$ (mod n) por $a + b$. Denotamos por $B(v_i)$ o vértice v_{i+D}, tal que ou $D = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ ou $D = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, e $B(S) = \{B(v) \in V(C_n) | v \in S\}$. Claramente, $|B(S)| = |S|$. Analisaremos dois casos: n ímpar e n par. Se n é ímpar, considere $D = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Suponha que a afirmação é falsa, então $S \cap B(S) = \emptyset$. Como n é ímpar, $|S| + |B(S)| > n$, o que é uma contradição. Se n é par, considere $D = \frac{n}{2}$. Definimos $S' = \{v_1, \ldots, v_q\}$ como um subconjunto maximal de vértices consecutivos de S em C_n, $1 \leq q \leq |S|$. Como S' é maximal, $v_0, v_{q+1} \notin S$, isto implica que $v_D, v_{q+1+D} \notin B(S)$. Mas v_D e v_{q+1+D} tem distância $\frac{n}{2} - 1$ de v_1 e v_q, respectivamente. Suponha que a afirmação é falsa. Análogo ao caso ímpar, $|S| + |B(S) \cup \{v_D, v_{q+1+D}\}| > n$, uma contradição.

Sejam $u, w \in S$ e $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \leq d_{C_n}(u, w) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Provaremos agora que $I_h[u, w] = V(C_n^k)$. Sejam $d_{C_n}(u, w) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$, e sem perda de generalidade, $u = v_0$ e $w = v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$. Denotamos por $R = \{v_0, v_1, \ldots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\}$ e $R' = \{v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, \ldots, v_0\}$.

Análogo à prova do Lema 4.17, como $n = 2kq + r$, $3 \leq r < 2k$, $d_{C_n^k[R]}(v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}) = d_{C_n^k[R']}(v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}) = q + 1$. Observamos que, como $n > 2k + 2$, $d_{C_n^k}(v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}) \geq 2$. Mais ainda, uma geodésica entre v_0 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}$ em $C_n^k[R]$ não é formada apenas por arestas de alcance máximo, isto significa que existem ao menos duas geodésicas entre v_0 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}$ em $C_n^k[R]$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.

Seja $\mathcal{P}(v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$ uma geodésica construída utilizando arestas de alcance máximo até quando fosse possível, então $V(\mathcal{P}) = \{v_0, v_k, v_{2k}, \ldots, v_{qk}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}\}$. Claramente, se $V(\mathcal{P}') = \{v_0, v_{k-1}, v_{2k-1}, \ldots, v_{qk-1}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}\}$, então $\mathcal{P}'(v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$ também é uma geodésica.

Como v_{ik-1} e $v_{(i+1)k}$ pertencem a $I[v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}]$, para $1 \leq i \leq q-1$, temos que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq q-1} I[v_{ik-1}, v_{(i+1)k}] = \bigcup_{1 \leq i \leq q-1} \{v_{ik-1},\ v_{ik}, \ldots, v_{(i+1)k}\} \subseteq I_h[v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}]$. Também existem geodésicas entre v_0 e $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}$ usando vértices de R'. Portanto, $X' = \{v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1+k}, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1+2k}, \ldots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1+(q-1)k}\} \subseteq I[v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}]$. Consequentemente, $\{v_{qk}, v_{qk+1}, \ldots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1+k}\} \subseteq I_h[X \cup \{v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1},\ v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1+k}\}] \subseteq I_h[v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}]$. Analogamente, concluímos que $I_h[v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}] = I_h[X \cup X' \cup \{v_0, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}\}] = V(C_n^k)$, o que é uma contradição. O caso onde a distância entre u e w é $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ é análogo a este. □

Corolário 4.20. *C_n^k não é biconvexo, para $n > 2k + 2$ e $n \not\equiv 0, 1, 2$ (mod $2k$).*

Demonstração. Segue do Corolário 4.14 e Lema 4.19. □

Observe que o Lema 4.19 delimita a cardinalidade do maior conjunto convexo não clique de C_n^k. Portanto, obtemos o seguinte corolário relativo a coberturas.

Corolário 4.21. *C_n^k não possui uma 2-cobertura convexa, para $n > 2k + 2$ e $n \not\equiv 0, 1, 2$ (mod $2k$).*

O Teorema 4.12 e o Corolário 4.21 estabelecem o resultado principal sobre coberturas de potências de ciclos.

Teorema 4.22. *C_n^k possui p-cobertura convexa se, e somente se, $p \geq 3$ ou $n \leq 2k+2$ ou $n \equiv 0, 1, 2$ (mod $2k$).*

4.4 Problemas em aberto

Existe um bom número de classes de grafos para as quais temos interesse em desenvolver um trabalho na mesma direção do apresentado neste capítulo. Algumas das classes mais visadas por nós são: grafos bipartidos, grafos (k, l), P_4-esparsos e grafos circulantes.

Capítulo 5

Contorno em grafos

Neste capítulo tratamos o conjunto de contorno de um grafo, tal conjunto foi definido em CÁCERES *et al.* (2005). No mesmo artigo os autores propuseram o problema de decidir se o contorno de uma classe de grafos é um conjunto geodésico. Nossa colaboração para o tema foi relacionar o problema com o diâmetro do grafo e dessa forma resolvemos o problema em aberto de determinar se o contorno de um grafo cocordal é geodésico (ARTIGAS *et al.*, 2010).

Todos os grafos considerados neste capítulo são simples, finitos e conexos.

5.1 Definições e resultados conhecidos

Antes de definir o que é contorno de um grafo e os resultados existentes é necessário apresentar outra classe de grafos.

Definição 5.1. *Um grafo G é dito de* distância hereditária *se $d_H(v,w) = d_G(v,w)$, para todo subgrafo induzido H de G e para todo $v, w \in V(G)$.*

Definição 5.2. *Um vértice v de um grafo G é denominado vértice de* contorno *de G se $ecc(v) \geq ecc(w)$, para todo vértice $w \in N(v)$. O* contorno *$Ct(G)$ de um grafo G é um conjunto formado por todos os vértices de contorno de G.*

$$Ct(G) = \{v \in V(G) | ecc_G(v) \geq ecc_G(w), \forall w \in N_G(v)\}$$

O conjunto de contorno de um grafo foi definido em CÁCERES *et al.* (2005). Nesse trabalho os autores consideraram algumas generalizações da propriedade de

Minkowski-Krein-Milman, tal propriedade diz: “Todo conjunto convexo é o fecho convexo dos seus vértices extremos”. Um vértice v de um conjunto convexo S é denominado *vértice extremo* de S se $S \backslash \{v\}$ é convexo. Se um grafo G satisfaz a propriedade de Minkowski-Krein-Milman G é denominado de *geometria convexa*. Em FARBER e JAMISON (1986), provou-se que um grafo G é uma geometria convexa se, e somente se, o grafo G é Ptolemaico (cordal e distância hereditária).

A ideia contida na propriedade de Minkowski-Krein-Milman é a de conseguir determinar um conjunto convexo S utilizando apenas um subconjunto de vértices de S e um operador sobre o grafo. Uma extensão considerada pelos autores em CÁCERES *et al.* (2005) foi a de utilizar um conjunto S de vértices de um grafo G, e através do intervalo fechado de S obter todos os vértices de G. Ou seja, havia o interesse em determinar conjuntos geodésicos de G.

Um vértice de contorno representa um máximo local com relação a excentricidade. Seja v um vértice de G que não é de contorno. Então existe um vértice v' adjacente a v tal que $ecc(v') > ecc(v)$. Logo, é natural pensar que existe um vértice $w \in V(G)$ tal que uma geodésica entre v' e w que passa por v. Portanto, o contorno é um candidato natural a conjunto geodésico de um grafo qualquer.

Ainda em CÁCERES *et al.* (2005) foi provado que existem grafos tais que o conjunto de contorno não é geodésico. Mais ainda, iniciou-se uma investigação para determinar quais classes de grafos possuem o contorno geodésico. Este problema foi tratado em CÁCERES *et al.* (2008, 2005). Em CÁCERES *et al.* (2006) os autores estudaram propriedades estruturais do conjunto de contorno e estabeleceram algumas condições suficientes para decidir se o contorno de um grafo é geodésico. A seguir, exibimos os principais resultados existentes sobre o assunto. Antes porém, precisamos definir um outro conjunto particular do conjunto de vértices de um grafo.

Definição 5.3. *Um vértice v de um grafo G é denominado* vértice de excentricidade *de um vértice $u \in V(G)$ se $ecc(u) = d(u, v)$. Os vértices de excentricidade também são conhecidos como* anti-podais. *O* conjunto de excentricidade $Ecc(G)$ *de um grafo G é o conjunto formado por todos os vértices de excentricidade dos vértices de G.*

$$Ecc(G) = \{v \in V(G) | \exists u \in V(G) \ tal \ que \ ecc_G(u) = d_G(u, v)\}$$

As observações seguintes, embora simples, são muito úteis.

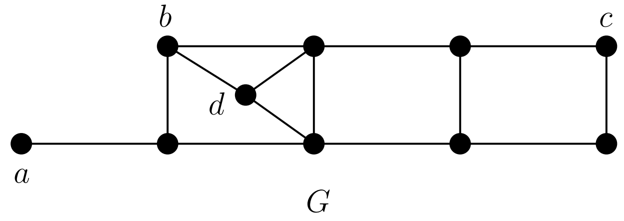


Figura 5.1: Grafo de permutação G tal que $I[Ct(G)] \neq V(G)$

Observação 5.4. *Seja G um grafo e $v \in V(G)$. Se $e(v)$ é um vértice de excentricidade de v, então $ecc(e(v)) \geq ecc(v)$.*

Observação 5.5. *Seja G um grafo e $v, w \in V(G)$. Se v e w são adjacentes, então $|ecc(v) - ecc(w)| \leq 1$.*

A seguir os principais resultados já publicados sobre o assunto.

Teorema 5.6 (CÁCERES *et al.* (2008))**.** *Nem todo grafo de permutação possui o contorno geodésico.*

Demonstração. Para provar este resultado exibimos o grafo de permutação G da Figura 5.1. Este grafo é tal que $Ct(G) = \{a, b, c\}$ e $I[Ct(G)] = V(G) \backslash \{d\}$. □

Teorema 5.7 (CÁCERES *et al.* (2005))**.** *Se G é um grafo distância hereditária, então $Ct(G)$ é geodésico.* □

Teorema 5.8 (CÁCERES *et al.* (2008))**.** *Se G é um grafo cordal, então $Ct(G)$ é geodésico.* □

Utilizando os resultados anteriores, em CÁCERES *et al.* (2008) os autores exibem o diagrama da Figura 5.2, de subclasses de grafos perfeitos, mencionando quais delas possuem o contorno geodésico, quais não necessariamente possuem o contorno geodésico e para quais classes o problema encontra-se em aberto. Em particular, três classes de grafos são mencionadas como problemas em aberto: bipartidos, cocordais e paridade.

Nosso trabalho com contornos de grafos tem como ponto de partida este diagrama. Primeiro, não achamos que o diagrama da Figura 5.2 é suficientemente abrangente para subclasses de grafos perfeitos; segundo, temos interesse em investigar outras classes que não sejam subclasses de perfeitos; por fim, temos interesse em resolver os problemas deixados em aberto.

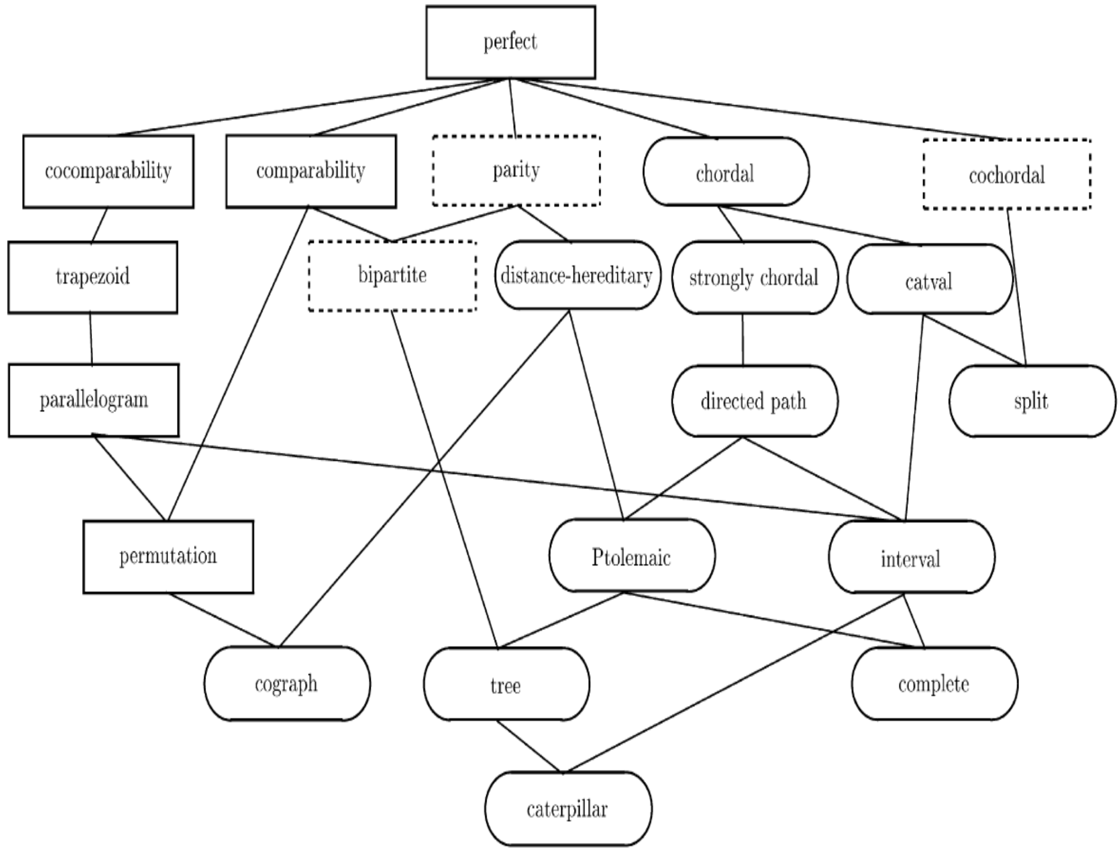


Figura 5.2: O contorno é geodésico? Sim para os arredondados, não necessariamente para os retângulos sólidos e está em aberto para os retângulos tracejados.

5.2 Resultados obtidos

Naturalmente, a primeira abordagem foi considerar as classes de grafos que já tínhamos estudado no problema da partição. De fato, o problema para duas delas (grafos cordais e cografos) já foi resolvido. Quanto a potências de ciclos, o problema de decidir se o contorno é geodésico é bem simples. É fácil ver que, devido à simetria de C_n^k, $ecc(v) = ecc(w)$, para todo $v, w \in V(C_n^k)$. Logo, $Ct(C_n^k) = V(C_n^k)$ e portanto $Ct(C_n^k)$ é geodésico. Mais ainda, este resultado pode ser estendido a uma importante superclasse de potências de ciclos, os grafos circulantes.

Definição 5.9. *Sejam n, m e $a_1, \ldots, a_m$ inteiros positivos. Um grafo G tal que $V(G) = \{0, \ldots, n-1\}$ e $E(G) = \{\{i, i + a_j(\mod n)\} | 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ é chamado de grafo* circulante, *e é denotado por $C_n(a_1, \ldots, a_m)$.*

Aplicando o mesmo raciocínio utilizado para potências de ciclos obtemos:

Observação 5.10. *Seja $G = C_n(a_1, \ldots, a_m)$. Então $Ct(G) = V(G)$, e consequentemente, $I[Ct(G)] = V(G)$.*

Um ponto importante da Observação 5.10 é o fato de existir uma subclasse de bipartidos contida nos circulantes. Precisamente, $C_n(a_1, \ldots, a_m)$ é bipartido se, e somente se, n é par e $a_1, \ldots, a_m$ é ímpar (HEUBERGER, 2003). Assim como no problema da partição convexa, trabalhar com grafos bipartidos é um problema aparentemente difícil.

Antes de prosseguir precisamos definir duas classes de grafos que aparecerão na sequência do texto.

Definição 5.11. *Sejam G e H dois grafos. O grafo G é* livre de *H se G não possui H como subgrafo induzido.*

Definição 5.12. *Um grafo G é dito* cocordal *se $\overline{G}$ é cordal.*

A seguir expomos um lema de CÁCERES *et al.* (2008) que será uma importante ferramenta para os nossos resultados.

Lema 5.13. *(CÁCERES* et al.*, 2008) Seja G um grafo. Suponha que $P = u_0, u_1, \ldots, u_q$ é um caminho em G tal que $ecc(u_i + 1) = ecc(u_i) + 1$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Então, para cada vértice x de excentricidade de u_q, existe uma geodésica entre x e u_q que contém P.*

Demonstração. Seja x um vértice de excentricidade de u_q, portanto $d(x, u_q) = ecc(u_q) = k$. Então, pela hipótese, $ecc(u_0) = k - q$. Provaremos que x é um vértice de excentricidade de u_0. Suponha que $d(x, u_0) < k - q$ e considere uma geodésica entre x e u_0. Portanto, $d(x, u_q) \leq d(x, u_0) + d(u_0, u_q) < k - q + q = k$, o que é uma contradição com $d(x, u_q) = k$. Logo, $d(x, u_0) = k - q$ e o caminho $x, \ldots, u_0, u_1, \ldots, u_q$ é uma geodésica entre x e u_q que contém P. $\square$

Nossa principal contribuição com o tema foi correlacionar o diâmetro do grafo com o problema de decidir se o contorno é geodésico.

Teorema 5.14. *Seja G é um grafo. Se $diam(G) \leq 4$, então $Ct(G)$ é geodésico.*

Demonstração. Seja G um grafo tal que $diam(G) = 4$. Inicialmente, observamos que, como G possui um vértice de excentricidade 4, G não possui um vértice w tal que $ecc(w) = 1$. Agora, suponha que existe um vértice $v_0 \in V(G)$ tal que $v_0 \notin I[Ct(G)]$. Como $diam(G) = 4$, todos os vértices de excentricidade 4 pertencem a $Ct(G)$. Portanto, ou $ecc(v_0) = 3$ ou $ecc(v_0) = 2$.

Se $ecc(v_0) = 3$ e $v_0 \notin Ct(G)$, então existe um vértice $v_1 \in N(v_0)$, tal que $ecc(v_1) = 4$ e portanto $v_1 \in Ct(G)$. Além disso, seja $e(v_1)$ um vértice de excentricidade de v_1. Então $ecc(e(v_1)) = 4$ e consequentemente $e(v_1) \in Ct(G)$. Pelo Lema 5.13, existe uma geodésica P entre v_1 e $e(v_1)$ tal que $v_0 \in V(P)$. Como $v_1, e(v_1) \in Ct(G)$, então $v_0 \in I[Ct(G)]$.

Se $ecc(v_0) = 2$, então para todo $v_2 \in V(G)$, tal que $ecc(v_2) = 4$, existe $v_1 \in V(G)$ tal que $ecc(v_1) = 3$ e $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\} \in E(G)$. Seja $e(v_2)$ um vértice de excentricidade de v_2. Análogo ao caso anterior, $e(v_2) \in Ct(G)$ e, pelo Lema 5.13 existe uma geodésica entre v_2 e $e(v_2)$ que contém v_0. Logo, $v_0 \in I[Ct(G)]$. Concluímos portanto que não existe o vértice $v_0 \notin I[Ct(G)]$.

As provas dos casos onde $diam(G) < 4$ são análogas ao caso $diam(G) = 4$. □

Observamos que este resultado é o melhor possível no sentido que grafos com diâmetro 5 não necessariamente possuem contorno geodésico. Um exemplo disso é o grafo da Figura 5.1. A consequência direta deste teorema é um corolário que abrange algumas classes de grafos. Muitas delas são bem conhecidas.

Corolário 5.15. *Se G é um grafo conexo livre de P_6, então $Ct(G)$ é geodésico*

Observamos que o Teorema 5.14 apresenta uma prova mais simples que as originais para importantes classes de grafos como *split* e cografos.

Da definição de grafos cordais, sabemos que estes grafos não podem ter um C_4 induzido. Consequentemente, os grafos cocordais não podem ter um $2K_2$ induzido, e portanto são livres de P_5. Logo, o Teorema 5.14 nos permite responder a um dos problemas deixados em aberto em CÁCERES *et al.* (2008), ver Figura 5.2.

Corolário 5.16. *Se G é um grafo cocordal, então $Ct(G)$ é geodésico.* □

5.3 Problemas em aberto

Ainda sobre o contorno de um grafo G, gostaríamos de resolver por completo o diagrama da Figura 5.2. A princípio, como os bipartidos são aparentemente difíceis para este problema, pretendemos começar com uma subclasse, os bipartidos convexos.

Não apenas o problema de decidir para quais classes $I[Ct(G)] = V(G)$ se encontra em aberto. Ainda é desconhecido, embora investigado em CÁCERES *et al.* (2006, 2005), se existe algum grafo G para o qual $I^2[Ct(G)] \neq V(G)$, i.e., existe G para o qual $I[I[Ct(G)]] \neq V(G)$? Também pretendemos trabalhar este problema no futuro.

Por fim, pretendemos estudar classes que não sejam subclasses de perfeitos. Em particular, investigaremos os grafos *bridged* e os livre de triângulos.

Capítulo 6

Conclusão

Neste capítulo apresentamos nossas considerações finais bem como nossos planos para trabalhos futuros.

6.1 Considerações finais

Esse texto é uma exposição unificada dos nossos trabalhos ARTIGAS *et al.* (2007a,b,c,d, 2008, 2009, 2010).

Nesta tese nós criamos e desenvolvemos o conceito de partição convexa. Provamos que ele é NP-completo para o caso geral, portanto consideramos algumas classes de grafos e concluímos que: um grafo cordal é p-convexo, para todo $1 \leq p \leq n$; é possível decidir em função de n, k e p se uma potência de ciclo C_n^k é p-convexa; e desenvolvemos um algoritmo linear para decidir se um cografo é p-convexo. Além disso, generalizamos o problema considerando grafos desconexos. Para tais grafos, desenvolvemos um mecanismo de reduzir o problema da partição em p conjuntos convexos de grafos desconexos ao problema de partições convexas das componentes conexas.

Também investigamos o probema de determinar para quais grafos o conjunto de contorno é geodésico. Este problema foi proposto em CÁCERES *et al.* (2008), onde os autores mencionam que o problema está aberto para os grafos cocordais. Nós provamos que o contorno de todo grafo livre de P_6 é geodésico. Como corolário, provamos que os grafos cocordais possuem o contorno geodésico.

Sobre estes problemas pretendemos estabelecer novas propriedades sobre ambos, bem como desenvolver algumas aplicações. Alguns trabalhos recentes relacionados aos assuntos são CÁCERES *et al.* (2006, 2005); DOURADO *et al.* (2006, 2009a).

6.2 Trabalhos futuros

Temos interesse em estudar o problema da p-PARTIÇÃO CONVEXA para um maior número de classes de grafos. Em particular, dentre as classes de grafos mencionadas no capítulo 4, dedicaremos grande atenção aos grafos bipartidos. Os problemas em aberto, mencionados no final de cada um dos capítulos, também serão considerados no futuro.

Também para o problema de decidir se o contorno é geodésico, investigaremos os grafos bipartidos. Mais ainda, pretendemos caracterizar os grafos que possuem o contorno geodésico. Além disso, tentaremos determinar se existe um grafo G tal que $I^2[Ct(G)] \neq V(G)$, caso tal grafo exista, pretendemos caracterizar os grafos tais que $I^2[Ct(G)] \neq V(G)$.

É nossa intenção estender o resultado a outras convexidades. Em particular, temos interesse em investigar a convexidade monofônica.

Referências Bibliográficas

ARTIGAS, D., DOURADO, M. C., SZWARCFITER, J. L., 2007a, "The convex partition number of a graph". a. *XXXVIII Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, EUA.

ARTIGAS, D., DOURADO, M. C., SZWARCFITER, J. L., 2007b, "Sobre partições convexas de grafos". b. *XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, CNMAC, Florianópolis, Brasil.

ARTIGAS, D., DOURADO, M. C., SZWARCFITER, J. L., 2007c, "Convex partition of graphs". c. *I Canadian Discrete and Algorithmic Mathematics Conference*, CanaDAM, Banff, Canadá.

ARTIGAS, D., DOURADO, M. C., SZWARCFITER, J. L., 2007d, "Convex partitions of graphs", *Electronic Notes on Discrete Mathematics*, v. 29, pp. 147–151. *EuroComb'07 - European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Sevilha, Espanha.

ARTIGAS, D., DANTAS, S., DOURADO, M. C., et al., 2008, "Convex partitions of power of cycles". *XIV Congresso Latino Ibero Americano de Investigación de Operaciones*, CLAIO, Cartagena de Indias, Colômbia.

ARTIGAS, D., DANTAS, S., DOURADO, M. C., et al., 2009, "Partitioning graphs into convex sets", *Discrete Mathematics*. Submetido.

ARTIGAS, D., DANTAS, S., DOURADO, M. C., et al., 2010, "Relations between the diameter and the contour of a graph". *VIII French Combinatorial Conference*, França, Submetido.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., 2008, *Graph Theory*. Springer.

BRANDSTÄDT, A., LE, V. B., SPINRAD, J. P., 1999, *Graph classes: A survey.* SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics.

BUCKLEY, F., HARARY, F., 1990, *Distance in Graphs.* Addison-Wesley.

CÁCERES, J., HERNANDO, M. C., MORA, M., et al., 2006, "On geodetic sets formed by boundary vertices", *Discrete Mathematics*, v. 306, n. 2, pp. 188–198.

CÁCERES, J., HERNANDO, C., MORA, M., et al., 2008, "Geodeticity of the contour of chordal graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 156, pp. 1132 – 1142.

CÁCERES, J., MÁRQUEZ, A., OELLERMANN, O. R., et al., 2005, "Rebuilding convex sets in graphs", *Discrete Mathematics*, v. 297, pp. 26–37.

CHANGAT, M., MATHEW, J., 1999, "On triangle path convexity in graphs", *Discrete Mathematics*, v. 206, pp. 91 – 95.

CHARTRAND, G., HARARY, F., ZHANG, P., 2002a, "On the geodetic number of a graph", *Networks*, v. 39, n. 1, pp. 1–6.

CHARTRAND, G., PALMER, E. M., ZHANG, P., 2002b, "The geodetic number of a graph: a survey", *Congressus Numerantium*, v. 156, pp. 37–58.

CHEPOI, V., 1994, "Separation of two convex sets in convexity structures", *Journal of Geometry*, v. 50, pp. 30–51.

CHEPOI, V. D., SOLTAN, V. P., 1983, "Conditions for invariance of set diameters under d-convexification in a graph", *Cybernetics and Systems Analysis*, v. 19, n. 6, pp. 750–756.

CORNEIL, D. G., LERCHS, H., STEWART BURLINGHAM, L., 1981, "Complement reducible graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, n. 3, pp. 163–174.

CORNEIL, D. G., PERL, Y., STEWART, L. K., 1985, “A linear recognition algorithm for cographs”, *SIAM Journal on Computing*, v. 14, n. 4, pp. 926–934.

DOURADO, M. C., PROTTI, F., SZWARCFITER, J. L., 2006, “On the Computation of some Parameters Related to Convexity of Graphs”. pp. 102–112. Proc. of Int. Conf. on Disc. Math., Bangalore, India. Lecture Notes of the Ramanujan Mathematical Society.

DOURADO, M. C., GIMBEL, J. G., KRATOCHVÍL, J., et al., 2009a, “On the computation of the hull number of a graph”, *Discrete Mathematics*, v. 309, pp. 5668–5674.

DOURADO, M. C., PROTTI, F., SZWARCFITER, J. L., 2009b, “Complexity results related to monophonic convexity”, *Discrete Applied Mathematics*. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2009.11.016>. Aceito.

DOURADO, M. C., PROTTI, F., RAUTENBACH, D., et al., 2010, “Some remarks on the geodetic number of a graph”, *Discrete Mathematics*, v. 310, pp. 832–837.

EDELMAN, P. H., JAMISON, R. E., 1985, “The theory of convex geometries”, *Geometriae Dedicata*, v. 19, pp. 247–270.

ERDŐS, P., FRIED, E., HAJNAL, A., et al., 1972, “Some remarks on simple tournments”, *Algebra Universalis*, v. 2, pp. 238–245.

EVERETT, M. G., SEIDMAN, S. B., 1985, “The hull number of a graph”, *Discrete Mathematics*, v. 57, pp. 217 – 223.

FARBER, M., 1987, “Bridged graphs and geodesic convexity”, *Discrete Mathematics*, v. 66, pp. 249–257.

FARBER, M., JAMISON, R. E., 1986, “Convexity in graphs and hypergraphs”, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, v. 7, pp. 433–444.

FARBER, M., JAMISON, R. E., 1987, "On local convexity in graphs", *Discrete Mathematics*, v. 66, pp. 231–247.

FLOYD, R. W., 1962, "Algorithm 97: Shortest Path", *Communications of the Association for Computing Machinery*, v. 5, pp. 345.

GAREY, M. R., JOHNSON, D. D., 1979, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, San Francisco, CA.

HARARY, F., NIEMINEN, J., 1981, "Convexity in graphs", *Journal of Differential Geometry*, v. 16, pp. 185–190.

HEUBERGER, C., 2003, "On planarity and colorability of circulant graph", *Discrete Mathematics*, v. 268, pp. 153–169.

KARP, R., 1972, "Reducibility among combinatorial problems". In: Miller, R. E., Thatcher, J. W. (Eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum, New York, pp. 85–103.

PELAYO, I. M., 2008, "Generalizing the Krein-Milman property in graph convexity spaces: a short survey", *RMS Lecture Notes Series in Mathematics*, v. 5, pp. 131–142.

VAN DE VEL, M. J. L., 1993, *Theory of Convex Structures.* North-Holland, Amsterdam.