COPPE/UFRJ

SOBRE O NÚMERO DE SALTOS EM ORDENS PARCIAIS

Adriana Pimenta de Figueiredo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter
Sulamita Klein

Rio de Janeiro
Setembro de 2010

SOBRE O NÚMERO DE SALTOS EM ORDENS PARCIAIS

Adriana Pimenta de Figueiredo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Sulamita Klein, D.Sc

Prof. Cláudia Linhares Sales, Ph.D.

Prof. Mário Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

Prof. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2010

Figueiredo, Adriana Pimenta de

Sobre o número de saltos em ordens parciais/Adriana Pimenta de Figueiredo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XI, 64 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Sulamita Klein

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 62 – 64.

1. Conjuntos parcialmente ordenados. 2. Extensões lineares. 3. Extensões arbóreas. 4. Número de saltos arbóreos. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

À minha filha, Maria Clara

Agradecimentos

Aos meus pais, agradeço por me apontarem um caminho e por me incentivarem a trilhá-lo e a minha filha por iluminá-lo. Aos meus irmãos, por estarem do meu lado em todos os momentos. Obrigada pelo apoio incondicional, amor, carinho e paciência.

Ao meu orientador Prof. Jayme, pela dedicação, compreensão e por tudo que me ensinou ao longo desses anos.

À minha co-orientadora Prof. Sulamita, pelo incentivo e cooperação.

Aos meus amigos, que compartilharam bons e maus momentos ao meu lado, em especial ao Danilo, que participou ativamente do processo e nunca me deixou desanimar e fez toda a diferença para seguir em frente e sua esposa Letícia, amiga em todas as horas.

À Prof. Nair, Prof. Cláudia e Prof. Mario, por aceitarem participar desta banca. A colaboração de vocês será de grande importância para a melhoria do trabalho.

À todos os professores da Linha de Algoritmos e Grafos, que direta ou indiretamente contribuiram para minha formação.

A todos da secretaria de Pós-graduação que sempre foram solícitos comigo.

E a todos que não pude mensionar, agradeço de todo coração.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE O NÚMERO DE SALTOS EM ORDENS PARCIAIS

Adriana Pimenta de Figueiredo

Setembro/2010

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter
Sulamita Klein

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema do número de saltos de uma extensão linear é muito relevante na teoria de ordens e escalonamento de tarefas. Nesta tese trataremos de uma generalização do mesmo.

Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem parcial finita. Definimos o conceito de extensões arbóreas mínimas e minimais de uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ e o número de saltos arbóreos de uma ordem P. Tratamos o problema de encontrar a extensão arbórea $\mathcal{A}$ de uma ordem P obtida adicionando um número mínimo de novas relações ao diagrama de Hasse de P. Além disso enunciamos o problema de encontrar extensões arbóreas que possuam um número total de saltos arbóreos mínimo. Demonstramos que determinar o número mínimo de saltos arbóreos da ordem P é um problema $NP-$completo e conjecturamos que o problema de encontrar o número mínimo de saltos arbóreos totais que estende uma ordem P a uma ordem arbórea também seja $NP-$completo. Resolvemos o problema do número de saltos arbóreos para algumas classes de ordens: ordens livre de N, série paralelo, bipartidas e obtemos um resultado para os reticulados. Mostramos que os elementos maximais de uma ordem P livre de N são preservados nas suas extensões arbóreas mínimas, e também verificamos a existência de uma extensão arbórea minimal, de uma ordem P qualquer, que preserva os elementos maximais .

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON THE JUMP NUMBER IN PARTIAL ORDERS

Adriana Pimenta de Figueiredo

September/2010

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter
Sulamita Klein

Department: Systems Engineering and Computer Science

The jump number problem of a linear extension is very important in order theory and scheduling. In this thesis, we give a generalization for this problem.

Let $\mathcal{P} = (X, P)$ be a partial order. We define minimum and minimals arboreal extensions of an order $\mathcal{P} = (X, P)$ and the arboreal jump number of a order P. We study the problem of finding the arboreal extension $\mathcal{A}$ of an order P that has a minimum number of new relations added to the Hasse diagram of P. Moreover, we state the problem of finding the arboreal extensions that has the minimum number of arboreal jumps. We show that the determination of a minimum number of new relations added to the Hasse diagram of an order P, aiming to transform it into an arboreal extension, is an $NP-$complete problem and we conjecture that the problem of finding the minimum total number of jumps that extends an order P to an arboreal order is also $NP-$complete.

We solve the problem of the arboreal jump number for some order classes: N-free orders, parallel series orders, bipartite orders and we obtain a result for the lattices. We show that the maximal elements of an $N-$free order P are preserved in its minimum arboreal extensions, and we also show the existence of a minimal arboreal extension of any order P that preserves the maximal elements.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Em linguagem orientada a objetos por uma aplicação especial produzimos uma ordem parcial P entre as classes de objetos. Numa segunda etapa, durante o processo de implementação devemos transformar P em uma hierarquia Q. Esse problema pode ser formulado em termos de uma extensão arbórea de uma ordem parcial P. Encontrando uma extensão Q que minimiza o número de saltos arbóreos, produzimos uma hierarquia que é fechada para P em termos do número de novas relações adicionadas. Esta é uma motivação prática para o problema que será tratado nesta tese.

Como exemplo, temos linguagens que não implementam a modelagem ilustrada na Figura 1.1, mas implementam a modelagem ilustrada na Figura 1.2.

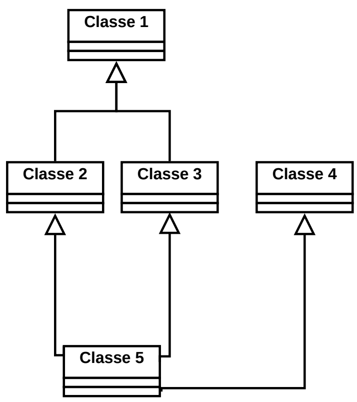


Figura 1.1:

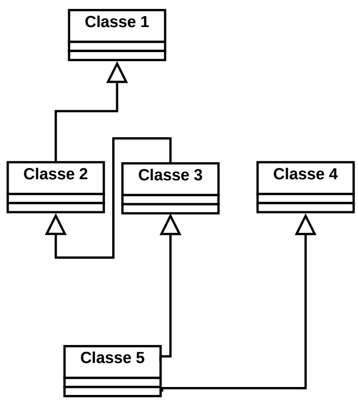


Figura 1.2:

Nesta tese definimos os saltos arbóreos e as extensões arbóreas mínimas e minimais, enunciamos o problema dos saltos arbóreos e da construção das extensões arbóreas mínimas e minimais. Também enunciamos o problema de encontrar o número total de saltos arbóreos, ou seja, o número mínimo de comparações adicionadas a ordem P de forma a transformá-la numa extensão arbórea. Estes conceitos e resultados são inéditos na literatura e foram desenvolvidos ao longo deste trabalho. Todo o conteúdo dos Capítulos 5 e 6 é original.

O problema de encontrar o número mínimo de novas relações que transformam uma ordem P qualquer numa ordem arbórea A é $NP-$completo e para as classes das ordens livre de N, série paralela e bipartidas criamos algoritmos polinomiais que calculam esse número. Obtemos também um resultado para os reticulados.

Um problema muito conhecido na literatura, que é um caso particular do número de saltos arbóreos, é o número de saltos lineares que tem como motivação um conjunto de tarefas a serem realizadas por uma certa máquina onde algumas dessas tarefas têm precedência em relação a outras. Além disso, toda vez que a máquina passa de uma tarefa para outra, que não tenha uma relação de precedência, ela necessita fazer um "setup", que envolve um custo operacional. Como fazer para minimizar este custo? Este problema de escalonamento de trabalhos tem formulação equivalente em termos de conjuntos ordenados e suas extensões lineares que possuem o número mínimo de saltos.

As seguintes publicações foram motivadas pelo trabalho desta tese: PIMENTA *et al.* (2009) e PIMENTA *et al.* (2010).

No Capítulo 2, fazemos uma apresentação geral da teoria dos conjuntos parcialmente ordenados, definimos elementos e conceitos importantes para o estudo das extensões de uma ordem finita P.

No Capítulo 3, definimos o conceito de extensões de uma ordem P, enunciamos o problema do número de saltos para extensões lineares e utilizamos um algoritmo guloso para construir as extensões lineares da ordem P.

No Capítulo 4, veremos que podemos obter uma extensão linear L particionando a ordem P em cadeias e então escrevemos L como *soma linear* das cadeias C_i de P, e denotaremos por $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$. Classificamos as cadeias de forma útil para resolvermos os problemas propostos no Capítulo 6. O número de saltos lineares de L, denotado por $s_L(P)$, é igual a k e o *número de saltos lineares* $s(P)$ é o número mínimo de $s_L(P)$ sobre todas as extensões lineares L de P. Determinar o número de saltos de uma extensão linear de um conjunto parcialmente ordenado é NP-completo mesmo para a classe das ordens de intervalo o que foi mostrado por (MITAS (1992)). Apresentamos algumas classes de ordens em que existem algoritmos eficientes para construir extensões lineares ótimas.

No Capítulo 5, definimos número de saltos arbóreos, as extensões arbóreas de uma ordem P, enunciamos o problema do número de saltos para extensões arbóreas e criamos um algoritmo para construir as extensões arbóreas de uma ordem P. Também neste capítulo estudamos a complexidade deste problema.

No Capítulo 6, resolvemos o problema do número de saltos arbóreos para as classes das ordens livre de N, série paralelo, bipartidas e reticulados e obtemos um resultado importante sobre preservação dos elementos maximais de uma ordem P em suas extensões arbóreas mínimas para as ordens livre de N e minimais para ordens quaisquer.

Finalmente, no Capítulo 7, propomos novos problemas relacionados a extensões de ordens.

Capítulo 2

Conjuntos parcialmente ordenados

2.1 Ordens e grafos

Neste capítulo, vamos ver alguns conceitos e exemplos básicos na Teoria dos conjuntos parcialmente ordenados. Veremos também como obter um diagrama de arcos ou de vértices que determina uma ordem e assim a estudaremos utilizando essas estruturas.

Definição 2.1. *Um par ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$ é dito ser um conjunto parcialmente ordenado, quando existe uma relação binária $\leq_P$ entre os elementos de X que é reflexiva, antissimétrica e transitiva, ou seja, para todo $a, b, c \in X$, temos:*

(i) $a \leq_P a$ (reflexividade);

(ii) Se $a \leq_P b$ e $b \leq_P a$ então $a = b$ (antissimetria);

(iii) Se $a \leq_P b$ e $b \leq_P c$ então $a \leq_P c$ (transitividade).

Se X é um conjunto parcialmente ordenado e vale que $a \leq b$ ou $b \leq a$ para todo par $(a, b) \in X \times X$, ou seja, quaisquer dois elementos de X são comparáveis, então dizemos que X é um *conjunto totalmente ordenado* ou uma *cadeia*. Usamos a notação $a \parallel b$ para indicar que a e b não são comparáveis em P.

A rigor, a ordem é o par (X, P) (um conjunto e a ordem parcial definida nele). No entanto, quando não há possibilidade de confusão, falamos simplesmente a ordem X ou a ordem P.

Definição 2.2. *A ordem simétrica de um conjunto ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$, denotado por $\mathcal{P}^s = (X, P^s)$, é obtida invertendo a ordem em P, se $x \leq y$ em P então $y \leq x$ em P^s.*

Alguns exemplos de conjuntos parcialmente ordenados:

Exemplo 2.3.

o conjunto $\mathcal{P}(S)$ de subconjuntos de um conjunto S é uma ordem parcial, onde $A \leq B$ significa $A \subseteq B$, são exemplos:

(i) o conjunto dos sub-anéis de um anel, ordenados por inclusão;

(ii) o conjunto dos subgrupos de um grupo, ordenados por inclusão e

(iii) o conjunto dos ideais de um anel qualquer, também ordenados por inclusão.

Atribuímos aos conjuntos com relações binárias representações por grafos e digrafos. Uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ pode ser representada por vértices e arcos de digrafos. Em uma representação por vértices, o conjunto de vértices de um digrafo corresponde ao conjunto X e há outro caso, em que X é o subconjunto do conjunto de arcos do digrafo. Seja $G = (X, A)$ com o conjunto de vértices em X e o conjunto de arcos $A \subset X \times X$, onde $(x, y) \in A$ se, e somente se, xRy, onde R é uma relação entre elementos de X. Existem dois digrafos que são usados em ordens (X, P): digrafo de comparabilidade e o diagrama de Hasse.

As propriedades da ordem P: reflexividade, antissimetria e transitividade, são assim representadas no digrafo:

- **reflexividade**: G tem um *loop* em todo vértice, isto é, $(p, p) \in A$ para todo $p \in P$;
- **antissimetria** G é acíclico, ou seja, G não tem um caminho fechado de tamanho maior que 1 e
- **transitividade** para todo caminho $(p_0, p_1, \cdots, p_l)$ em P de comprimento $l \geq 2$, G contém um arco transitivo (p_0, p_l).

Removendo as orientações, obtemos o grafo de comparabilidade G, em que as arestas de G consistem dos pares comparáveis.

Em uma ordem finita, a relação $a < b$ pode ser escrita em termos de uma relação de cobertura:

Definição 2.4. *Para os elementos x e y de um conjunto ordenado P dizemos que y cobre x, se para $z \in X$ se $x \leq z < y$ implica $z = x$ e dizemos que x é coberto por y se para $z \in X$ se $x < z \leq y$ implica $z = y$.*

A idéia de cobertura sugere uma maneira de representar uma ordem por meio de um *diagrama de vértices*, também chamado diagrama de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado P. Ele é um grafo desenhado no plano Euclidiano, em que cada vértice corresponde a um ponto de P e para cada par de cobertura $x < y$, os vértices representando x e y são ligados por uma aresta e o ponto que representa x está "abaixo" do ponto que representa y.

O diagrama de Hasse de uma ordem P, pode ser construído através de seu digrafo G removendo as orientações, todos os loops e os arcos transitivos. O digrafo de Hasse de uma ordem não possui ciclos orientados e é reduzido transitivamente.

Exemplo 2.5.

O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ (todos os divisores de 60). Este conjunto está ordenado parcialmente pela relação de divisibilidade. Seu diagrama de Hasse pode ser representado como na Figura 2.1.

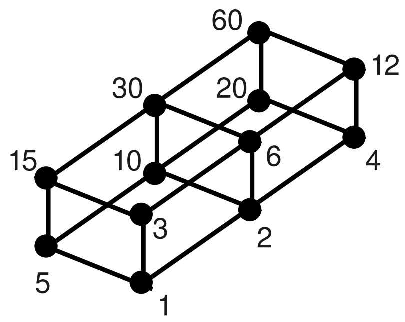


Figura 2.1: diagrama de Hasse do conjunto dos divisores de 60 ordenados por divisibilidade

O diagrama de Hasse determina completamente a ordem.

Definição 2.6. *Se $\mathcal{P} = (X, P)$ é uma ordem, então a ordem simétrica de $\mathcal{P}$, denotado $\mathcal{P}^{\int} = (X, P^s)$, é definido por:*

$$(a, b) \in P^s \Leftrightarrow (b, a) \in P$$

Definição 2.7. *Sejam $\mathcal{P} = (X, P)$ e $\mathcal{Q} = (Y, Q)$ ordens parciais, uma aplicação $f : X \to Y$ é um isomorfismo, se f é bijetiva e ambos $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ são monótonas, ou seja, $x_1 \leq x_2$ em P implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ em Q para todo $x_1, x_2 \in X$.*

Definição 2.8. *Uma função f entre as ordens P e Q é uma imersão se, para todos os elementos x, y de P, $x \leq y$ em P implica $f(x) \leq f(y)$ em Q.*

Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem e sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Dizemos que x e y são *comparáveis* em P, e escrevemos $x \perp y$ em P, quando $x < y$ em P ou $y < x$ em P. Por outro lado, x e y são *incomparáveis* em P, denotamos por $x \parallel y$, se não vale nem $x < y$ em P nem $y < x$ em P.

Uma *sub-ordem* de uma ordem (X, P), é uma ordem $(Y, P(Y))$, onde Y é um subconjunto de X e $P(Y)$ é a relação em Y obtida por restrição da relação P em X.

Definição 2.9. *Uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é conexa se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe uma sequência finita $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y$ de elementos de X tal que $x_i \perp x_{i+1}$ em P para $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Uma subordem $(Y, P(Y))$ de (X, P) é chamada uma componente de $\mathcal{P}$ se $(Y, P(Y))$ é conexo e não existe um subconjunto $Z \subset X$ contendo Y como subconjunto próprio para que $(Z, P(Z))$ é conexo.*

Definição 2.10. *Um elemento maximal de uma ordem P, denotado $\max P$ é um elemento x tal que, se $x \leq y$ então $x = y$. Não se exige que $y \leq x$ para todo $y \in P$, portanto, podem haver vários elementos maximais. Analogamente, definimos um elemento minimal de P, denotado $\min P$ é um elemento x tal que, se $y \leq x$, então $y = x$.*

Todo conjunto ordenado finito possui elementos maximais e minimais. Isto não se aplica a conjuntos ordenados infinitos, porque podem não haver elementos maximais. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é um conjunto ordenado onde não há elementos maximais.

Definição 2.11. *Um elemento u de uma ordem é um limite superior de um subconjunto A de P, se $a \leq u$ para todo $a \in A$. O elemento u é chamado menor limite superior ou $\sup A$ se u é um limite superior e, se v é outro limite superior de A, então $u \leq v$.*

A definição para *limite inferior* e *maior limite inferior* ou inf A é análoga.

Definição 2.12. *Uma ordem finita é um reticulado quando para cada par de elementos existe um único menor limite superior e um único maior limite inferior.*

Denotamos o menor limite superior dos elementos a e b por $a \vee b$ e o maior limite inferior por $a \wedge b$.

O sup e o inf do conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ são denotados, respectivamente, por

$$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \text{ e } a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n.$$

Exemplo 2.13.

(i) Sejam X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X. Então $\mathcal{P}(X)$ ordenado por inclusão é um reticulado, onde $x \vee y = x \cup y$ e $x \wedge y = x \cap y$.

(ii) O conjunto $\mathcal{D}(n)$ dos divisores (positivos) de um inteiro positivo n é um reticulado, quando ordenado por divisibilidade: $x \leq y$ se x divide y. Temos $x \vee y = mmc(x, y)$ e $x \wedge y = mdc(x, y)$.

- *Veja Figura 2.1 o conjunto dos divisores de 60 ordenados por divisibilidade é um reticulado.*

Lema 2.14. *Todo conjunto totalmente ordenado é um reticulado.*

Demonstração. Se a e b são dois elementos de um conjunto totalmente ordenado S, então $a \leq b$ ou $b \leq a$. Mas

$$a \leq b \Rightarrow a \vee b = b \text{ e } a \wedge b = a$$

$$b \leq a \Rightarrow a \vee b = a \text{ e } a \wedge b = b.$$

□

2.2 Cadeias e anticadeias

Definição 2.15. *Uma cadeia C em uma ordem parcial $\mathcal{P} = (X, P)$ é um subconjunto de X que é uma ordem total, ou seja, $C = x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, onde $x_i \in X, i = 1, \cdots, m$ e "$<$"é a ordem sobre os elementos de X. Chamamos de anticadeia A em uma ordem $\mathcal{P}$ a um subconjunto de X em que nenhum par de elementos é comparável.*

Definição 2.16. *A altura $h(P)$ de uma ordem parcial P é a cardinalidade máxima das cadeias de P enquanto que a largura $w(P)$ de P é a cardinalidade máxima das anticadeias de P.*

Um problema importante no estudo de ordens é o problema da partição da ordem em cadeias ou em anticadeias: se (X, P) é um conjunto ordenado, uma partição de (X, P) em cadeias é uma decomposição $X = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$, onde cada C_i, visto como sub-ordem, é uma cadeia. Da mesma forma, uma decomposição em anticadeias é uma decomposição $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$, onde os A_i são anticadeias de (X, P).

Um resultado importante no estudo da teoria dos conjuntos parcialmente ordenado é o Teorema da Decomposição de Dilworth. Antes, porém, vamos enunciar um resultado mais simples:

Proposição 2.17.

(i) Se uma ordem P tem uma cadeia de comprimento r, então não pode ser particionado em menos que r anticadeias.

(ii) Se uma ordem P tem uma anticadeia de comprimento r, então não pode ser particionado em menos que r cadeias.

Demonstração. Se uma ordem P possui uma cadeia C de comprimento r (comprimento de uma cadeia C é a sua cardinalidade) e possui uma partição em $s < r$ anticadeias, então existem elementos a e b de C que estão na mesma anticadeia da partição, o que é um absurdo. A prova da segunda parte é análoga. □

Os dois resultados seguintes estão no sentido inverso da proposição anterior: mostram que uma ordem P cuja maior cadeia, respectivamente, anticadeia, tem comprimento r, pode ser particionado em r anticadeias, respectivamente, cadeias.

Teorema 2.18. *Suponha que a maior cadeia de uma ordem P tem comprimento r. Então P pode ser particionado em r anticadeias.*

O resultado "dual" do Teorema anterior é o Teorema de Dilworth:

Teorema 2.19 (DILWORTH (1950))**.**

Se a maior anticadeia de um conjunto ordenado P possui comprimento r, então P pode ser particionado em r cadeias.

Neste capítulo, enunciamos definições, conceitos e resultados básicos de uma ordem parcial $\mathcal{P} = (X, P)$, seu diagrama de Hasse e seu grafo de comparabilidade, que serão de grande interesse nos estudos feitos neste trabalho. Também enunciamos um resultado importante na teoria de Ordens que é o particionamento da ordem em cadeias ou anticadeias.

Capítulo 3

Extensões de uma ordem

3.1 Motivação: Redes PERT-CPM

Existem dois métodos populares no controle e gestão de projetos com relações de precedência: o PERT, *Program Evaluation and Review Technique* e o CPM, *Critical Path Method*. As redes PERT evidenciam relações de precedência entre atividades e permitem calcular o tempo total de duração do projeto bem como o conjunto de atividades que necessitam de atenção especial caso contrário os atrasos em sua execução ocorrerão no projeto como um todo. Com estes métodos, os projetos podem ser vistos como um conjunto de tarefas, algumas das quais com relações de precedência entre si. Como consequência, tal conjunto de tarefas munido de uma relação de precedência é um conjunto parcialmente ordenado e a execução do projeto consiste em partir o conjunto de tarefas no menor número de cadeias possível. A existência de tempos de execução para as sucessivas tarefas implica que, em geral, se pretende determinar uma partição em cadeias, de tal forma que a maior delas tenha a menor duração possível.

Vamos a um exemplo: considere a tabela, onde são indicadas várias tarefas a levar a cabo durante a realização de um projeto e, para cada uma delas, as tarefas que devem preceder.

Denotando o conjunto de tarefas, indicadas na tabela por

$$\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$$

Código da tarefa	código de tarefas precedentes
A	–
B	A
C	B
D	B
E	C
F	C
G	D, E
H	D, E
I	G
J	H
K	F, J

Definindo a relação de ordem parcial $\preceq$ relativa as precedências, de forma que

$$\forall \gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma \quad \gamma_1 \preceq \gamma_2 \Leftrightarrow \text{ a tarefa } \gamma_1 \text{ precede a tarefa } \gamma_2,$$

obtemos o conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \preceq)$, representado pela rede da Figura 3.1, onde os arcos denotam as tarefas com os respectivos códigos, na qual, se o arco relativo a tarefa A chega ao vértice j e o arco relativo a tarefa B parte de j, significa que $A \prec B$.

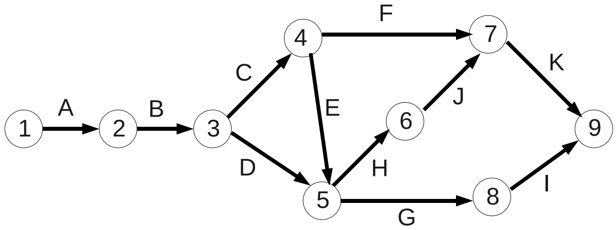


Figura 3.1: Rede de tarefas associadas a um dado projeto

Desta forma, podemos modelar este problema de escalonamento de trabalhos com formulação equivalente em termos de conjuntos ordenados e suas extensões.

Teorema 3.1. *Dado um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$, se p e $q \in X$, são não comparáveis, relativamente a P, então a relação P' tal que*

$$P' = P \cup (\downarrow p \times \uparrow q),$$

onde $\downarrow p = \{x; (x,p) \in P\}$ e $\uparrow q = \{y; (q,y) \in P\}$. R' estende R e $(p,q) \in R'$. R' é uma relação de ordem parcial.

Demonstração. Vamos mostrar que P' é uma ordem parcial.

P' é reflexiva, pois P é reflexiva.

Antissimetria: suponha que $(x,y),(y,x) \in P'$. Se ambos os pares estão em P, então $x = y$, pela antissimetria de P.

Note que, $\downarrow p \cap \uparrow q = \emptyset$, pois,

$$x \in \downarrow p \cap \uparrow q \Rightarrow (q,x),(x,p) \in P \Rightarrow (q,p) \in P,$$

o que contradiz a incomparabilidade de p e q em P. Portanto, não pode acontecer de $(x,y),(y,x) \in \downarrow p \cap \uparrow q$.

Restaram dois casos. Se $(x,y) \in P$ e $(y,x) \in \downarrow p \cap \uparrow q$, então:

$$(x,y) \in P \text{ e } (y,x) \in \downarrow p \cap \uparrow q \Rightarrow (q,x),(x,y),(y,p) \in P \Rightarrow (q,p) \in P,$$

Por outro lado, se $(y,x) \in P$ e $(x,y) \in \downarrow p \cap \uparrow q$, então

$$(y,x) \in P \text{ e } (x,y) \in \downarrow p \cap \uparrow q \Rightarrow (q,y),(y,x),(x,p) \in P \Rightarrow (q,p) \in P.$$

Em ambos os casos, $(q,p) \in P$ contradiz a escolha de p e q.

Resta provar a transitividade. Sejam $(x,y),(y,z) \in P'$. Se $(x,y),(y,z)$ estão em P então $(x,z) \in P \subset P'$, por transitividade de P. Não pode acontecer $(x,y),(y,z) \in \downarrow p \cap \uparrow q$, pois isto implicaria em $y \in \downarrow p \cap \uparrow q$.

Restaram duas possibilidades:

$$(x,y) \in Pe(y,z) \in \downarrow p \cap \uparrow q \Rightarrow (x,y),(y,p),(q,z) \in P \Rightarrow$$

$$(x,p),(q,z) \in P \Rightarrow (x,z) \in \downarrow p \cap \uparrow q \subset P'$$

$$(y,z) \in Pe(x,y) \in \downarrow p \cap \uparrow q \Rightarrow (x,z),(x,p),(q,y) \in P \Rightarrow$$

$$(x, p), (q, z) \in P \Rightarrow (x, z) \in \downarrow p \cap \uparrow q \subset P'$$

O que completa a prova da transitividade.

$\square$

Em resumo, dados dois elementos incomparáveis p e q extendemos a ordem parcial P para uma ordem parcial P' onde $p \leq q$.

3.2 Extensões de uma Ordem

Neste capítulo veremos como estender uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ a ordem $\mathcal{P}' = (X, P')$, onde $P \subset P'$. Um caso particular e muito importante sobre ordens e suas extensões é que todo conjunto parcialmente ordenado está imerso em um conjunto totalmente ordenado. Esta afirmação é baseada no Teorema de Szpilrajn [SZPILRAJN (1930)], que afirma que todo conjunto parcialmente ordenado tem uma extensão linear e que a ordem é a interseção de todas elas.

Definição 3.2. *Se P e Q são duas ordens parciais em um mesmo conjunto X, dizemos que Q é uma extensão de P se $P \subset Q$, isto é, $p \leq q$ em P implica $p \leq q$ em Q, para todo $p, q \in X$. Além disso, dizemos que Q é uma extensão linear de P, quando Q é uma cadeia, ou seja, uma ordem total dos elementos de X.*

O conjunto de todas as extensões de $\mathcal{P} = (X, P)$ é parcialmente ordenado por inclusão e P é o único elemento minimal desta ordem. Por outro lado, os elementos maximais são as ordens lineares em X que também são extensões de P.

Denota-se por $\epsilon(P)$ o conjunto de todas as extensões de P e por $\epsilon_1(P)$ o conjunto de todas as extensões lineares de P.

É fácil ver que $P = \cap \epsilon(P)$.

Definição 3.3. *Um realizador de uma ordem P é uma família $R = \{L_1, \cdots L_n\}$ de extensões lineares de P tal que $\cap_{i=1}^{n} L_i = P$.*

Isto significa que, se $R = \{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ é uma coleção de extensões lineares de P, então R é um realizador de P quando

$$x < y \text{ em } P \iff x < y \text{ em cada } L_i.$$

Teorema 3.4 (SZPILRAJN (1930)).

(i) Seja R uma ordem parcial em um conjunto X. Então existe uma ordem total R^* em X tal que $R \subset R^*$;

(ii) A interseção de todas as extensões lineares de um conjunto ordenado P é o próprio conjunto ordenado P.

O Teorema de Szpilrajn afirma que uma ordem P é a interseção de todas suas extensões lineares. Contudo, de uma maneira geral, não são necessárias todas as extensões lineares de P para determiná-lo.

Exemplo 3.5. *Considere a ordem cujo diagrama de Hasse é dado na Figura 3.2. As quatro extensões lineares L_1, L_2, L_3 e L_4 realizam esta ordem.*

$$L_1: \ [3,7,8,4,5,1,6,2] \quad L_2: \ [7,4,8,5,6,2,3,1]$$
$$L_3: \ [8,7,5,3,4,6,1,2] \quad L_4: \ [8,6,7,3,4,5,1,2]$$

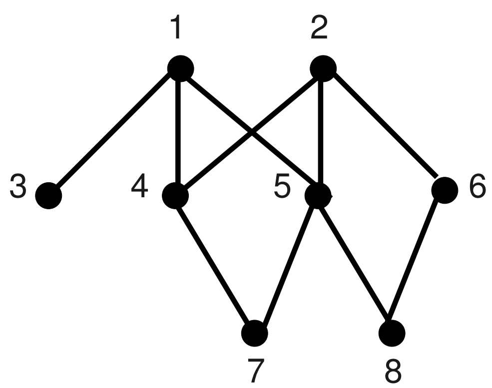


Figura 3.2: Ordem P

Definição 3.6. *A dimensão de uma ordem* $\dim(P)$ *de P é o menor número k de extensões lineares $L_1, L_2, \cdots, L_k$ de P que realizam P.*

Uma ordem parcial P é k-dimensional se $\dim(P) \leq k$.

Esta definição apareceu pela primeira vez no artigo de DUSHNIK e MILLER (1950). Pelo Teorema de Szpilrajn, toda ordem finita tem um realizador, logo, $\dim(P)$ é um inteiro positivo bem definido.

Uma ordem tem dimensão 1, se, e somente se, ela é uma cadeia. As anticadeias são exemplos de ordens de dimensão 2, já que, se L é extensão linear de uma anticadeia A, então $\{L, L^s\}$, constitui um realizador de A.

Outro fato interessante é que a ordem (X, P) e seu simétrico (X, P^s) tem a mesma dimensão. De fato, $\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$ é um realizador de P se, e somente se, $\{L_1^s, L_2^s, \cdots, L_k^s\}$ é um realizador de P^s

A proposição enunciada a seguir, caracteriza os realizadores de uma ordem P, ela é apresentada em TROTTER (1992).

Proposição 3.7. *(TROTTER (1992))*

Seja P uma ordem em X e seja $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \cdots, L_t\}$ uma família de extensões lineares de P. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i. *$\mathcal{R}$ é um realizador de P*

ii. $P = \bigcap_{i=1}^{t} L_i$

iii. *Para todo $x, y \in X$ com $x \parallel y$ em P, existem inteiros distintos i, j com $1 \leq i, j \leq t$ para os quais $x < y$ em L_i e $y < x$ em L_j*

iv. *Para todo $x, y \in E$ com $x \parallel y$ em P, existe um inteiro j com $1 \leq j \leq t$ para o qual $y < x$ em L_j*

A dimensão de uma ordem é monótona:

Proposição 3.8. *Seja P uma ordem em X, seja $Y \subset X$ e $P' = P[Y]$. Então* $\dim(P') \leq \dim(P)$.

Uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é *t-irredutível*, para algum inteiro $t \geq 2$, se $\dim(P) = t$, e $\dim(Y, P(Y)) < t$ para todo subconjunto próprio $Y \subset X$. Uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é irredutível se ela é t-irredutível para algum $t \geq 2$.

3.2.1 Exemplo Padrão

Proposição 3.9. *Para $n \geq 3$, seja $S_n = (X, P)$ uma ordem de altura dois com*

$$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_n\},$$

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \min(X, P), \ \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} = \max(X, P),$$

e $a_i \leq b_j$ em P se, e somente se $i \neq j$, para $i, j = 1, 2, \cdots, n$. A ordem S_n é uma ordem de dimensão n.

Demonstração. Para $i = 1, 2, \cdots, n$, defina a ordem linear L_i em X por

$$L_i = [a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n, b_i, a_i, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_{n+1}, \cdots, b_n].$$

Então $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ é um realizador, logo $\dim(S_n) \leq n$. Por outro lado $\dim(S_n) \geq n$. Para mostrar isso, seja $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ um realizador de S_n. Defina a função $f : [n] \longrightarrow [t]$ como segue: para cada $i \in [n]$, note que $a_i \parallel b_i$ em S_n. Então podemos escolher $f(i)$ para algum $j \in [t]$ de forma a $b_i < a_i$ em L_j.

Vamos mostrar que f é injetora: suponha o contrário que existe um par i_1, i_2 com $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ e $f(i_1) = f(i_2) = j$. Então $b_{i_1} < a_{i_1}$ em L_j e $b_{i_2} < a_{i_2}$ em L_j. Portanto, $a_{i_2} < b_{i_1}$ em P e $a_{i_1} < b_{i_2}$ em P, daí $a_{i_2} < b_{i_1}$ em L_j e $a_{i_1} < b_{i_2}$ em L_j. Então $a_{i_2} < b_{i_1} < a_{i_1} < b_{i_2} < a_{i_2}$ e, L_j que é falso. Logo, f é injetora. Concluímos assim que $\dim(X, P) = t \geq n$, como queríamos. □

Exemplo 3.10.

Diagrama de S_5:

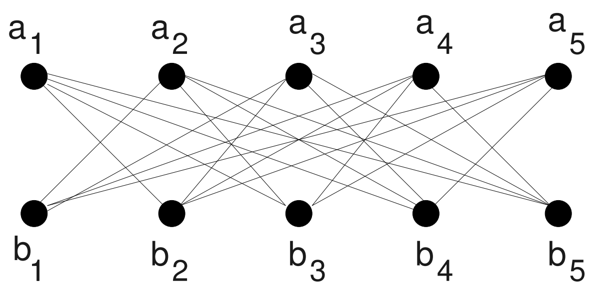


Figura 3.3: S_5

3.2.2 Dimensão e Largura

Existe uma relação importante entre dimensão e largura de uma ordem P [TROTTER (1992)].

Lema 3.11. *Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem e seja $C \subset X$ uma cadeia. Então existem extensões lineares L_1, L_2 de P tal que:*

(i) $y < x$ em L_1 para todo $x, y \in X$ com $x \in C$ e $x \parallel y$ em P.

(ii) $y > x$ em L_2 para todo $x, y \in X$ com $x \in C$ e $x \parallel y$ em P.

Teorema 3.12 (DILWORTH (1950)). *Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem. Então $\dim(X, P) \leq w(X, P)$.*

Demonstração. Seja $n = \text{largura}(X, P)$. Pelo Teorema da partição de cadeias de Dilworth, existe uma partição $X = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$, onde C_i é uma cadeia, para $i = 1, \cdots, n$. Para cada i, usamos o Lema anterior para escolher a extensão linear L_i de P tal que C/X em L_i. Temos que $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ é um realizador de P. Para mostrar que $P = \cap_{i=1}^{t} L_i$ é suficiente mostrar que para todo $(x, y) \in \text{inc}(X, P)$, existe $j = 1, \cdots, t$ com $y < x$ em L_j. O valor desejado de j é determinado pela escolha da cadeia C_j para cada $x \in C_j$. □

Exemplo 3.13.

(i) Um anticadeia 2-elemento (X, P) satisfaz $\dim(X, P) = largura(X, P) = 2$.

(ii) Para $n \geq 3$, o exemplo padrão S_n satisfaz $\dim(S_n) = largura(S_n) = n$.

Um resultado importante neste capítulo é o Teorema de Dilworth que afirma que toda ordem parcial pode ser estendida a uma ordem total. Os trabalhos de Dilworth relacionam as cadeias e anti-cadeias com a dimensão de uma ordem e com construção de suas extensões lineares.

3.3 Extensões lineares ótimas

Nesta seção enunciamos o problema do número de saltos de uma extensão linear, ou seja, construção de uma extensão linear de uma ordem P com um número mínimo de novas relações adicionadas a esta ordem, tais extensões são chamadas de *extensões lineares ótimas*. Este problema é equivalente a maximizar o números de pares consecutivos que são pares de cobertura em P, por isso os saltos induzem uma decomposição em cadeias da ordem P para se obter L. Este assunto tem grande importância na área de escalonamento de trabalhos.

Definição 3.14. *Sejam P e Q dois conjuntos ordenados. A soma disjunta $P + Q$ de P e Q é o conjunto ordenado $P \cup Q$ tal que $x < y$ se e somente se $x,\ y \in P$ e $x < y$ em P ou $x,\ y \in Q$ e $x < y$ em Q.*

Definição 3.15. *A soma linear $P \oplus Q$ de P e Q é obtida de $P + Q$ pela adição de uma nova relação $x < y$ para todo $x \in P$ e $y \in Q$.*

Na teoria das extensões, definimos um elemento importante: os *saltos*.

Definição 3.16. *Um par consecutivo (x_i, x_{i+1}) de elementos é um salto numa extensão Q de P se $x_i \leq x_{i+1}$ e x_i não é comparável com x_{i+1} na ordem P. Se Q é uma cadeia, então dizemos que Q é uma extensão linear.*

Uma *extensão linear* L de P pode ser obtida como soma linear $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_m$ de cadeias C_i em P, cuja união é todo P. Se o elemento maximal de C_i não é comparável com o elemento minimal de C_{i+1} , $\max_P C_i \parallel \min_P C_{i+1}$, em P, então $(\max_P C_i, \min_P C_{i+1})$ é um salto em L.

Vamos denotar por $s_L(P)$ o número de saltos da extensão linear L de P.

O Teorema de Dilworth, garante um limite inferior para o número de saltos de uma ordem: $s_L(P) \geq w(P) - 1$, onde $w(P) =$ largura da ordem. É evidente que se $\max(C_i) \parallel \min(C_{i+1})$ para $i = 1, 2, \cdots, m-1$, então $s_L(P) = m-1$ e de acordo com o Teorema de Dilworth, o menor número de cadeias em que P pode ser particionado é igual a sua largura $w(P)$.

As ordens que satisfazem a igualdade $s_L(P) = w(P) - 1$ são chamadas ordens de Dilworth, ou ainda D-ordens.

Não se conhece outro método para encontrar $s_L(P)$ a não ser gerar todas as extensões lineares L de P e o número $s_L(P)$ é obtido determinando o mínimo de $s(P, L)$.

O algoritmo encontrado no artigo de KNUTH e SZWARCFITER (1974), gera todas as extensões lineares de um conjunto ordenado em complexidade de tempo $O((|P|+e) \cdot |\mathcal{L}(\mathcal{P})|)$, onde $\mathcal{L}(P)$ o conjunto de todas as extensões lineares de P, e em complexidade de espaço $O(|P|)$, onde e é o número de arestas no grafo de cobertura direcionado de P.

Os códigos de Gray se referem a qualquer método para gerar objetos combinatórios, tal que objetos sucessivos diferem de maneira pequena pré especificada. Uma extensão linear de uma ordem é uma permutação dos elementos da ordem. O problema de geração eficiente de todas as extensões lineares de uma ordem também foi estudado em DALKIN e VAROL (1988); KNUTH e SZWARCFITER (1974);

VAROL e ROTEM (1981). A área de códigos de Gray para extensões lineares de uma ordem foi introduzida por RUSKEY (1988).

PRUESSE e RUSKEY (1998) apresentaram um algoritmo para a listagem de extensões lineares de uma ordem P em tempo amortizado constante (após um pré-processamento em tempo $O(n^2)$, onde $n = |X|$).

O primeiro resultado geral sobre extensões lineares ótimas, tendo um algoritmo de tempo polinomial, foi para ordens série paralela dado por COGIS e HABIB (1979). Então Pulleyblank provou em PULLEYBLANK (1981), que o problema para ordens com cadeias de comprimento maior que 1 é $NP-$completo. O trabalho de MITAS (1992), mostra que problema do número mínimo de saltos de uma extensão linear já é NP-completo para a classe das ordens de intervalo.

Duffus, Rival e Winkler em DUFFUS *et al.* (1982) provaram que ordens livre de ciclos são ordens de Dilworth. Syslo, Koh e Chia em SYSLO *et al.* (1987) propuseram um algoritmo polinomial para reconhecer ordens de Dilworth de altura 1, ou seja, ordens bipartidas, e BOUCHITTE e HABIB (1987) provaram que o reconhecimento das ordens de Dilworth é NP-completo.

Capítulo 4

Número de saltos de uma extensão linear

Neste capítulo, estudaremos alguns algoritmos para calcular o número mínimo de saltos de uma extensão linear. Em geral é difícil descobrir qual é o número mínimo de saltos de uma extensão linear, não existe na literatura uma outra maneira a não ser gerar todas as extensões lineares da ordem e verificar quais delas tem um número mínimo de saltos. Mas há algumas classes de ordens para as quais temos algoritmos polinomiais que resolvem, tais como ordens livre de N, série paralelo, bipartidas de Dilworth e ordem obtidas através de somas lexicográficas de ordens.

Este assunto tem grande importância na área de escalonamento de tarefas.

4.1 O problema de encontrar extensões lineares ótimas

Nesta seção, vamos tratar o problema de construir extensões lineares ótimas de uma ordem P com o número $s_L(P)$ de saltos para algumas classes de ordens.

4.1.1 Extensões lineares gulosas

Uma extensão linear gulosa de um conjunto ordenado P é o primeiro exemplo de um algoritmo específico para construir uma extensão linear. Seja P um conjunto ordenado, apresentaremos dois algoritmos para encontrar uma extensão linear de P.

Do ponto de vista algorítmico, uma extensão linear gulosa é obtida pela seguinte regra: *pegue o próximo elemento que puder*.

A primeira linha do passo iterativo deste algoritmo é muito importante: **Escolha** $x_{i+1} \in M_i$, onde $M_i = \min(P_i)$.

Toda extensão linear de P pode ser obtida por esse algoritmo através de uma escolha de sequências adequada.

Vamos ver agora classes de extensões lineares formadas pela adição de condições de desempate. O passo do algoritmo consiste em pegar o elemento minimal da sub-ordem P_i. Seja uma sequência de regras de desempate $T_1, T_2, \cdots, T_m$ que são aplicadas consecutivamente. Cada T_i é uma propriedade que pode ou não ser satisfeita por elementos de M_i. A condição de desempate consiste em escolher o próximo elemento minimal que seja maior que o elemento escolhido no passo anterior. Em outro caso, escolheremos um elemento minimal qualquer de P_i. A formulação da regra desempate T_j depende do valor de i, em outros, a regra se aplicará somente enquanto outras condições são satisfeitas.

Algoritmo 1 Algoritmo Extensão Linear com Desempates: $T_1, \cdots, T_m$

$X_0 = X, P_0 = P, \mathcal{P}_0 = (X_0, P_0)$, $M_0 = min(P_0)$

Para $i = 0, 1, 2, \cdots, |X| - 1$

Para $j = 0, 1, 2, \cdots, m$

Seja $M_i' = \{x \in M_i; x_j < x \text{ em } P\}$

Se $M_i' \neq \emptyset$, **Seja** $M_i = M_i'$

Escolha $x_{i+1} \in M_i$

Seja $X_{i+1} = X_i - \{x_{i+1}\},\ P_{i+1} = P(X_{i+1}), \mathcal{P}_{i+1} = (X_{i+1},\ P_{i+1})$ e $M_{i+1} = min(P_{i+1})$

Fim

Esse exemplo envolve um desempate, $T_{i+1} = GULOSO$, definido como a seguir:

$$\text{GULOSO: Se } i > 0,\ x_i < x \text{ em } P$$

A regra de desempate GULOSA consiste em escolher o próximo elemento que seja maior que o elemento escolhido no passo anterior.

Extensões lineares formadas com este esquema desempate são chamadas extensões lineares gulosas. Note que a regra desempate GULOSO é um exemplo cuja a regra de formação depende de valores de i. Denote por G_i o subconjunto de M_i para que x_{i+1} tem que ser escolhido quando usamos o desempate GULOSO. $G_0 = M_0 = \min(X, P)$. Seja $i > 0$ e $M_i' = \{x \in M_i; x_i < x \text{ em } P\}$. Se $M_i' = \emptyset$ então $G_i = M_i$, e se $M_i' \neq \emptyset$ então $G_i = M_i'$.

Podemos obter uma extensão linear construindo como se segue: Escolha $a_1 \in P$ maximal tal que $C_1 = \{x \in P; x \leq a_1\}$ é uma cadeia em P; escolha $a_2 \in P - C_1$ maximal tal que $C_2 = \{x \in P - C_1; x \leq a_2\}$ é uma cadeia em $P - C_1$.

Em geral, escolhendo $a_i \in P - \bigcup_{j<i} C_j$ maximal tal que $C_i = \{x \in P - \bigcup_{j<i} C_j; x \leq a_i\}$ é uma cadeia em $P - \bigcup_{j<i} C_j$. Eventualmente, $P = \bigcup_{j=1}^{m} C_j$ para algum m e $L = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_m$ é uma extensão linear de P.

Uma extensão linear L de P é gulosa se, para algum m, $L = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_m$, onde cada C_i é uma cadeia em P, cada $\sup_P C_i \parallel \inf_P C_{i+1}$, e para cada i e para qualquer $x \in P$ com $\sup C_i < x$ em P, existe $y \in P - \bigcup_{j=i+1}^{m} C_j$ tal que $y < x$ em P.

4.2 Ordem Livre de N

O conjunto ordenado N é determinado pelos elementos $\{a, b, c, d\}$ sujeito às comparações $a < c, b < c, b < d, a \parallel b, d \parallel c, d \parallel a$.

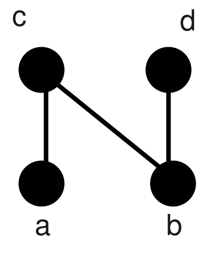
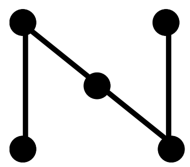


Figura 4.1: Ordem N

Uma ordem P é dita livre de N, se ela não possui nenhuma subordem isomorfa a N, isomorfismo que preserva a ordem.

Definição 4.1. *Uma propriedade sobre ordens é dita hereditária se quando ela vale para uma ordem P, ela vale para qualquer sub-ordem induzida de P.*



A propriedade ser livre de N não é hereditária. Existem ordens livre de N, tal que a retirada de qualquer cadeia viola a propriedade inicial de ser livre de N. Porém, se toda sub-ordem de uma ordem livre de N é também livre de N, então ela é necessariamente uma ordem série paralelo. Vamos estudar a classe das ordens série paralelo na seção 4.2.1.

Exemplo 4.2. *Ordem livre de N que não é hereditária pela remoção de um elemento:*

Seja $\mathcal{L}(P)$ o conjunto de todas as extensões lineares de P. O problema é computar e encontrar $L \in \mathcal{L}(P)$ tal que $s(P, L) = s_L(P)$. Uma extensão linear que satisfaz esta condição é dita uma *extensão linear ótima* (ou salto-ótima). Seja $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ o conjunto de todas as extensões lineares ótimas de P, isto é, $s(P, L) = s_L(P)$ para todo $L \in \mathcal{O}(P)$, então $\mathcal{O}(P) \subset \mathcal{L}(P)$.

Uma extensão linear gulosa é obtida utilizando o algoritmo guloso com condições de desempate.

Uma ordem pode ter extensões lineares gulosas que estão longe de serem ótimas, mas o fato importante é o seguinte:

Teorema 4.3 (RIVAL e ZAGUIA (1986)). *Toda ordem P tem uma extensão linear gulosa que é ótima.*

Exemplo 4.4.

O conjunto ordenado N e suas extensões lineares estão ilustrados na Figura 4.2.

Note que: $s_L(N) = 1$ e que $s(N, L_1) = 2$, $s(N, L_2) = 2$, $s(N, L_3) = 1$, $s(N, L_4) = 2$ e $s(N, L_5) = 3$. Neste caso, cada uma das extensões lineares L_1, L_2, L_3 são gulosas, enquanto que L_4, L_5 não são.

Um exemplo de extensão linear gulosa que não é ótima é vista no ordem N acima, as extensões L_1, L_2, L_3 são gulosas, mas somente L_3 é ótima.

Este exemplo é, em certo sentido, o único exemplo, pois se uma ordem finita P não possuir subconjunto isomorfo a N então isso não acontece. Este é o conteúdo do próximo teorema:

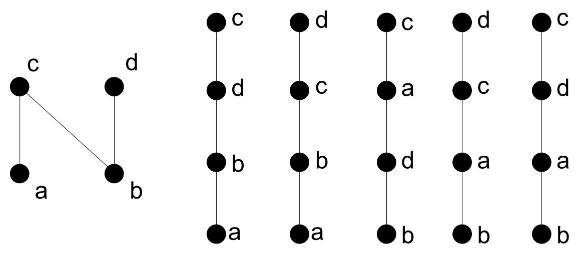


Figura 4.2: Ordem N e suas extensões lineares L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5

Teorema 4.5 (RIVAL (1983))**.** *Seja P uma ordem finita. Se P é livre de N, então toda extensão linear gulosa de P é ótima.*

Uma observação importante, que veremos no próximo capítulo, é que este resultado generaliza o resultado para ordens série-paralelo, já que esta classe pode ser caracterizada por serem ordens livre de N.

Considere uma ordem finita $\mathcal{P} = (X, P)$. Vamos denotar por

$$C^+(y) = \{x \in X;\ y \text{ é coberto por } x \text{ in } P\}$$

$$C^-(y) = \{x \in X;\ y \text{ cobre } x \text{ in } P\}$$

$$I(y) = \{x \in X;\ x < y \text{ in } P\}, \text{ é dito } \textit{ideal} \text{ de y}$$

$$F(y) = \{x \in X;\ y < x \text{ in } P\}, \text{ é dito } \textit{filtro} \text{ de y}$$

onde $y \in X$.

Podemos ainda denotar por $I[y] = I(y) \cup \{y\}$ e por $I(A)$ o ideal de A, onde $A \subset X$. O mesmo vale para $F[y]$ e $F(A)$.

Dizemos que P é livre de N se e somente se para todo $p, q \in P$:

$$C^-(p) \cap C^-(q) \neq \emptyset \text{ implica } C^-(p) = C^-(q) \tag{4.1}$$

Se p e q não satisfazem (4.1) então o conjunto $\{p, q, C^-(p), C^-(q)\}$ contém N, e vice-versa.

Definição 4.6. *Dizemos que p e q geram N se eles não satisfazem a condição (4.1).*

Note que uma ordem livre de N pode ser completamente caracterizado pela condição obtida em (4.1) se trocarmos os conjuntos $C^-(.)$ por $C^+(.)$.

4.2.1 Ordem série-paralelo

A classe dos grafos série-paralelo são obtidos a partir dos Diagramas de Hasse da ordem série paralela. Esta classe é muito importante na aplicação de fluxo elétrico e problemas de escalonamento. Um conjunto ordenado P é série paralelo se ele pode ser construído usando somente operações de série: $P \oplus Q$ e paralela: $P' + Q'$.

A classe das ordens série paralelas foi estudada a partir de um problema particular de escalonamento. VALDES *et al.* (1979) provou o seguinte teorema:

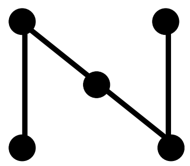
Teorema 4.7 (VALDES *et al.* (1979)). *Para uma ordem P as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) P é uma ordem série paralelo;

(ii) P não tem N como sub-ordem induzida;

GRILLET (1969) introduziu as ordens livre de N e a definiu como a classe das ordens que satisfaz a *propriedade CAC* (Cadeia-Anticadeia-Completa, isto é, cada cadeia maximal encontra cada anticadeia maximal). Grillet também mostrou que uma ordem tem a propriedade CAC se, e somente se, não contém nenhuma sub-ordem isomorfa a N.

Exemplo 4.8. *Ordem livre de N que não é hereditária pela remoção de cadeias maximais representada na Figura 4.2.1.*



Existem muita caracterizações para ordens livre de N, vamos listar algumas das mais importantes:

Teorema 4.9 (TROTTER (1992)). *Para uma ordem P as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) P tem a propriedade CAC;

(ii) P é livre de N;

4.3 Ordens de Intervalo

Uma ordem $P = (X, P)$ é uma ordem de intervalo se a cada elemento x de X existe correspondência a um intervalo I_x da reta real de modo que I_u está totalmente à esquerda de I_v se e somente se $u < v$. Tanto as ordens quanto os grafos de intervalo são bem conhecidos por seus empregos em diversas aplicações práticas e sua riqueza estrutural.

4.4 Somas lexicográficas de conjuntos ordenados

Esta seção está baseada no artigo de JUNG (2003). Estudaremos a classe dos conjuntos ordenados obtidos a partir de uma construção onde são utilizadas somas lexicográficas: soma disjunta e soma linear.

Denotamos já na seção anterior uma extensão linear de P como a soma linear de cadeias de P. Como exemplo, nas Figuras a seguir, ordens obtidas pela soma disjunta de cadeias:

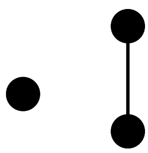


Figura 4.3: $1 + 2$

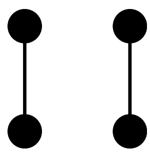


Figura 4.4: $2 + 2$

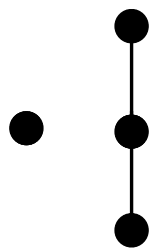


Figura 4.5: 1+3

Definição 4.10. *Um conjunto ordenado é chamado uma árvore ascendente enraizada se ela contém um menor elemento e nenhum subconjunto induzido isomorfo a* $(1+1) \oplus 1$*. Sendo assim, podemos definir árvore descendente enraizada se ela contém um maior elemento e nenhum subconjunto induzido isomorfo a* $1 \oplus (1 + 1)$*.*

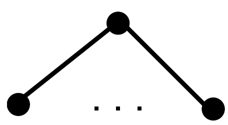


Figura 4.6: Estrutura $1 \oplus (1 + 1)$, proibida na árvore ascendente enraizada

Definição 4.11. *Um conjunto ordenado não trivial P é chamado largura-crítico se $w(P-\{x\}) < w(P)$, para todo $x \in P$. Claramente, vemos que P é largura-crítico se, e somente se, P é uma anti-cadeia. Analogamente, um conjunto ordenado não trivial P é chamado altura-crítico se $h(P-\{x\}) < h(P)$, para todo $x \in P$. Claramente, P é altura-crítico se, e somente se, P é uma ordem linear.*

Vemos que $s_L(P) \geq s_L(P-\{x\}) \geq s_L(P) - 1$.

Definição 4.12. *Dizemos que uma ordem P é salto-crítico se $s_L(P-\{x\}) < s_L(P)$ para cada $x \in P$.*

Conjuntos ordenados salto-crítico foram estudados por ELZAHAR e SCHMERL (1984), que mostraram que uma ordem salto-crítico P com número de saltos m tem pelo menos $(m+1)!$ elementos. ELZAHAR e RIVAL (1985), mostraram que existem precisamente dezessete conjuntos ordenados salto-crítico com número de saltos pelo menos três.

Definição 4.13. *A soma lexicográfica $\sum_{x\in P} Q_x$ de conjuntos ordenados Q_x sobre um conjunto ordenado P é definida como sendo o conjunto ordenado em*

$$\bigcup_{x\in P} Q_x$$

tal que $a < b$ se, e somente se $a < b$ em Q_z para algum $z \in P$, ou $x < y$ em P quando $a \in Q_x$ e $b \in Q_y$.

Obs.: $s_L(P \oplus Q) = s_L(P) + s_L(Q)$ e $s_L(P + Q) = s_L(P) + s_L(Q) + 1$, que pode ser visto facilmente se P é uma ordem paralela, então temos que

$$s_L(\sum_{x\in P} Q_x) = s_L(P) + \sum_{x\in P} s_L(Q_x).$$

4.4.1 Número de saltos de somas lexicográficas de conjuntos ordenados

Seja Q a soma lexicográfica de conjuntos ordenados Q_x sobre um conjunto ordenado P e seja $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ uma extensão linear de Q. Defina $Q_x \sim Q_y$ se $x \prec y$ ou $x \succ y$ ou $x = y$ em P e existe C_j tal que $C_j \cap Q_x \neq \emptyset$ e $C_j \cap Q_y \neq \emptyset$, e defina $Q_x \approx Q_z$ se existe uma seqüência $x = y_0, y_1, \cdots, y_k = z$ em P tal que $Q_{y_i} \sim Q_{y_{i+1}}$ para $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$.

Lema 4.14. *Seja Q a soma lexicográfica dos conjuntos ordenados Q_x sobre um conjunto ordenado P e seja $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ uma extensão linear de Q. Se $y \succ x \prec z$ (ou dualmente $y \prec x \succ z$) em P, então $Q_x \sim Q_y$ e $Q_x \sim Q_z$ implicam que $y = z$.*

Teorema 4.15 (JUNG (2003))**.** *Seja Q a soma lexicográfica de conjuntos ordenados Q_x sobre um conjunto ordenado P. Então*

$$w(P) - 1 + \sum_{x \in P} s_L(Q_x) \leq s_L(Q) \leq s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x).$$

Em particular, se P é uma ordem de Dilworth, então

$$s_L(Q) = s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x).$$

Demonstração. Para provar a primeira inequação, seja $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$ uma extensão linear ótima de Q, onde $n = s_L(Q)$. Seja $A = \{a_i \in Q; a_i = \inf C_i, i = 0, 1, \cdots, n\}$. Observe que $s_L(Q) = |A| - 1$. Para $x \in P$, seja $P_x = \{z \in P; Q_x \approx Q_y\}$. Então P_x é uma cadeia em P pelo Lema anterior. Seja $x_* = \inf P_x$ para $x \in P$. Seja $A_1 = \{a_i \in A; i$ é o menor inteiro tal que $a_i \in Q_{x_*}$ para algum $x_*\}$ e $A_2 = A - A_1$. Seja W uma anticadeia de tamanho máximo em P. Para cada $x \in W$, Q_{x_*} contém um único elemento a_x em A_1. Os P_x são disjuntos, então $x \neq y$ em W implica $a_x \neq a_y$, que significa que $|A_1| \geq w(P)$. Desde que $s_L(Q_x) \leq |\{i; C_i \cap Q_x \neq \emptyset\}| - 1 = |\{i; a_i \in A_2 \cap Q_x\}|$ para $x \in P$, temos $\sum_{x \in P} s_L(Q_x) \leq |A_2|$. Então $s_L(Q) = |A| - 1 = |A_1| - 1 + |A_2| \geq w(P) - 1 + \sum_{x \in P} s_L(Q_x)$.

Para a segunda inequação, se $L \in \mathcal{O}(P)$ e $L_x \in \mathcal{O}(Q_x)$ para cada $x \in P$, então $\sum_{x \in L} L_x \in \mathcal{L}(P)$ e então $s_L(Q) \leq + \sum_{x \in P} s_L(Q_x)$. □

Vamos conhecer outra classe de conjuntos ordenados P em que

$$s_L(\sum_{x \in P} Q_x) = s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x).$$

Teorema 4.16 (JUNG (2003))**.** *Seja Q uma soma lexicográfica dos conjuntos ordenados Q_x sobre um conjunto ordenado P. Se P é bipartido, então*

$$s_L(Q) = s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x).$$

Demonstração. Seja $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_n \in \mathcal{O}(Q)$. Definimos os conjuntos A, P_x, A_1 e A_2 como na prova do Teorema anterior. Se $\{i; a_i \in A_1\} = \{i_1, \cdots, i_m\}$ com $i_1 < \cdots < i_m$, então para cada $k = 1, \cdots, m$, $D_k = \{x \in P; Q_x \cap C_{i_k} \neq \emptyset\}$ é uma cadeia em P. Note que $x \in K_{k_1}$, $y \in D_{k_2}$ e $k_1 < k_2$ implica $x \parallel y$ em P, e que para cada $x \in P$ existe $a_k \in A_1 \cap Q_{x^*}$ tal que $x \in D_k$. Agora $D_1 \oplus \cdots \oplus D_m \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Então $s_L(P) \leq m - 1 = |A_1| - 1$. Consequentemente, temos que $s_L(P) = |A| - 1 = |A_1| - 1 + |A_2| \geq s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x)$. □ □

Exemplo 4.17. *O limite inferior de $s_L(Q)$ mostrado no Teorema 12 é justo. Considere $Q = \sum_{x \in P} Q_x$, onde Q_x é uma anticadeia de dois elementos e P é o conjunto ordenado K_n, $(4n+2)$-elementos (veja Figura 5.12 para $n = 2$). Então $s_L(Q_x) = 1$, $|K_n| = 4n + 2$, $w(K_n) = 2$, $s_L(K_n) = n + 1$ e*

$$s_L(Q) = 4n + 3 = w(K_n) - 1 + \sum_{x \in K_n} s_L(Q_x).$$

Vamos computar $s_L(Q)$ e $s_L(K_n)$ para $n = 2$. Seja $Q_{x_i} - \{a_i, b_i\}$ para $i = 1, \cdots, 10$. Então

$$L = \{a_1\} \oplus \{a_2\} \oplus \{b_2, b_4\} \oplus \{b_1, b_3\} \oplus \{a_3, a_5\} \oplus \{a_4, a_6\} \oplus \{b_6, b_8\} \oplus$$
$$\{b_5, b_7\} \oplus \{a_7, a_9\} \oplus \{a_8, a_{10}\} \oplus \{b_{10}\} \oplus \{b_9\} \in \mathcal{L}(Q)$$

e então $s_L(Q) \leq 11$.

Pelo Teorema 12, $s_L(Q) = 11$. Daí, $\{j, h\} \oplus \{i, g, f, d\} \oplus \{e, c, b\} \oplus \{a\} \in \mathcal{L}(K_2)$ mas K_2 contém $\{i, j\} \oplus \{e, f\} \oplus \{a, b\}$ cujo número de saltos é 3. Então $s_L(K_2) = 3$.

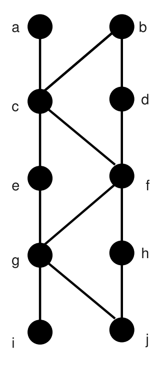


Figura 4.7: K_2

Em HABIB (1984) está implícito que a soma lexicográfica de conjuntos ordenados salto-críticos Q_x sobre um conjunto ordenado P é também salto-crítico se $|Q_x| \geq 3$ para cada $x \in P$. Daí segue o resultado:

Teorema 4.18 (JUNG (2003)). *Seja P um conjunto ordenado e $\{Q_x; x \in P\}$ uma família de ordens salto-críticos com $|Q_x| \geq 3$. Então a soma lexicográfica de Q_x sobre P é também salto-crítico.*

Vemos que se um conjunto ordenado P é série-paralelo ou bipartido então a seguinte equação vale para qualquer soma lexicográfica Q de Q_x sobre P:

$$s_L(Q) = s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x) \tag{4.2}$$

A classe $\mathcal{K}$ de conjuntos ordenados é dita ser *lexicográfica hereditária* se as seguintes condições valem:

(i) $P \in \mathcal{K}$ implica $P - \{x\} \in \mathcal{K}$ para qualquer $x \in P$;

(ii) A equação (4.2) vale para qualquer soma lexicográfica de Q_x sobre $P \in \mathcal{K}$.

Temos uma variação do Teorema anterior:

Teorema 4.19 (JUNG (2003)). *Seja P um conjunto ordenado em uma classe lexicográfica hereditária $\mathcal{K}$ e $\{Q_x; x \in P\}$ uma família de conjuntos ordenados. Se P é salto-crítico e se cada Q_x é salto-crítico ou trivial, então a soma lexicográfica de Q_x sobre P é também salto-crítico.*

Demonstração. Seja $Q = \sum_{x \in P} Q_x$.

caso 1. $\{a\} = Q_y$ para algum $y \in P$.

Seja $P' = P - \{y\}$. Agora $s_L(Q_y) = 0$ e $s_L(P') = s_L(P) - 1$. Então

$$s_L(Q - \{a\}) = s_L(P') + \sum_{x \in P'} s_L(Q_x) = s_L(P) - 1 + \sum_{y \in P} s_L(Q_y) = s_L(Q) - 1.$$

caso 2. $\{a\} \subset Q_y$ para algum $y \in P$.

Agora $s_L(Q_y - \{a\}) = s_L(Q_y) - 1$. Então

$$s_L(Q - \{a\}) = s_L(P) + \sum_{x \in P - \{y\}} s_L(Q_x) + s_L(Q_y - \{a\}) =$$

$$s_L(P) + \sum_{x \in P} s_L(Q_x) - 1 = s_L(Q) - 1.$$

$\square$

Observando que as classes das ordens série-paralelo e bipartido são lexicográficas hereditárias, o que implica no seguinte corolário:

Corolário 4.20. *Seja P uma ordem série-paralelo bipartido e $\{Q_x; x \in P\}$ uma família de conjuntos ordenados. Se P é salto-crítico e se cada Q_x é salto-crítico ou trivial, então a soma lexicográfica de Q_x sobre P é também salto-crítico.*

4.5 Ordens livre de k-coroa

A primeira pergunta a ser feita é se toda ordem é uma ordem de Dilworth, ou seja, sempre existe uma extensão linear $L = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_m$ tal que cada C_i é uma cadeia em P e $m = w(P)$?

A resposta a essa pergunta é **não**.

Definição 4.21. *Um conjunto ordenado $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n\}$ de tamanho $2n$, $n \geq 2$, com essas comparações e nenhuma outra, é chamada de $n-$coroa.*

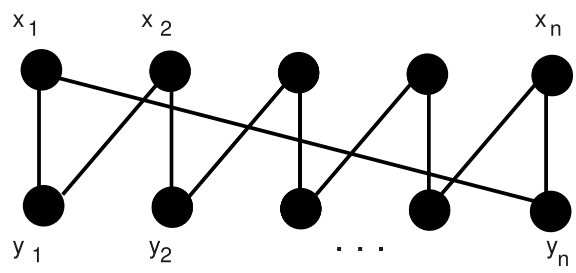


Figura 4.8: $n-$coroa

Veja o seguinte exemplo que justifique nossa resposta a pergunta feita no início desta seção:

Exemplo 4.22.

A ordem $2-$coroa $= \{a < c > b < d > a\}$ tem largura dois, (Figura 4.9) e qualquer extensão linear requer pelo menos três cadeias, por exemplo, $L(C_4) = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$.

Uma partição $C_1, C_2 \cdots, C_{w(P)}$ de P em cadeias pode ser arrumada para formar uma extensão linear de P se, e somente se, existe uma permutação ρ de

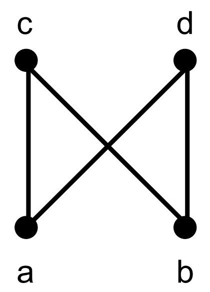


Figura 4.9: $2-$coroa

$\{1, 2, \cdots, w(P)\}$ tal que $\rho(i) < \rho(j)$ implica $x \parallel y$ para qualquer $x \in C_{\rho(i)}$ e $y \in C_\rho(j)$.

Não teremos tal permutação se existir um subconjunto (digamos $\{C_1, \cdots, C_n\}$) da partição, e elementos $x_i, y_i \in C_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, satisfazendo

$$y_1 < x_1, x_1 > y_2, y_2 < x_2, x_2 > y_3, \cdots, x_{n-1} > y_n, y_n < x_n, x_n > y_1.$$

Teorema 4.23 (DUFFUS *et al.* (1982)). *(Decomposição da extensão) Toda ordem P, sem k-coroa com $k \geq 2$ e $m = w(P)$, tem uma decomposição mínima por cadeias $C_1, C_2, \cdots, C_k$ cuja soma linear $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_k$ é uma extensão linear.*

Esse resultado pode ser reescrito como:

Teorema 4.24 (DUFFUS *et al.* (1982)). *Seja P um conjunto ordenado sem $k-$coroa. Então $s_L(P) = w(P) - 1$.*

O caso onde P tem altura dois, é um caso particular e simples de verificar. Procedendo por indução no tamanho de P: se P contém um elemento isolado a então $w(P - \{a\}) = w(P) - 1$ e $s_L(P) = s_L(P - \{a\}) + 1$. Por outro lado, como P é livre de ciclos, existe um elemento b comparável com precisamente um outro elemento, digamos, $b < c$. Se $w(P - \{b\}) = w(P)$ e, $w(P - \{b, c\}) = w(P) - 1$. Portanto, $s_L(P) = s_L(P - \{b, c\}) + 1$, em qualquer dos casos, $s_L(P) = w(P) - 1$.

Não vale a volta do teorema. Vejamos os contra-exemplos nas Figuras 4.10 e 4.11:

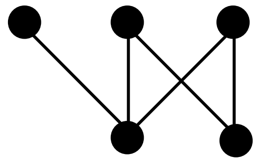


Figura 4.10: P_1

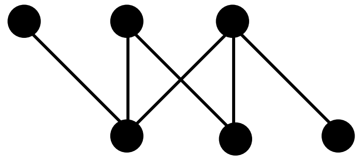


Figura 4.11: P_2

4.5.1 Ordem bipartida de Dilworth

Definição 4.25. *Uma ordem P é bipartida se P não contém nenhuma cadeia C com $|C| \geq 3$.*

Uma ordem bipartida pode ser particionada em dois subconjuntos disjuntos U e V, tal que $a \in U$ e $b \in V$ sempre que $a < b$ em P. Neste caso, escrevemos $P = (U, V)$.

O problema do número de saltos para ordens bipartidas é $NP-$completo. O artigo SYSLO (1987), propõe uma caracterização de ordens de Dilworth, descreve um algoritmo de reconhecimento de tempo polinomial para essa classe de ordens bipartidas.

DUFFUS *et al.* (1982), provaram que toda ordem livre de k-coroa é uma ordem de Dilworth. Na próxima seção, será enunciado o algoritmo para resolver este problema para ordens bipartidas.

4.6 Algoritmos aproximativos para o número de saltos de uma extensão linear

Seja $\mathcal{A}^*(P)$ a família de todas as anticadeias de tamanho máximo de P. Se $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_\rangle\}_\omega$, onde $\omega = \omega(P)$, é uma D-partição de P, então o teorema de Dilworth garante que para toda $A \in \mathcal{A}^*(\mathcal{P})$, existe uma bijeção $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, isto é, cada cadeia em $\mathcal{C}$ contém exatamente um elemento de cada anticadeia $A \in \mathcal{A}^*(P)$.

Em DILWORTH (1960) mostrou que a família de todas as anticadeias de tamanho máximo de uma ordem formam um reticulado sobre uma ordem natural induzida pela ordem de P. Disso segue que $\mathcal{A}^*(P)$ tem um maior elemento, que denotamos por A^*. Além do mais, temos que toda cadeia gulosa C em P encontra toda anticadeia A em $\mathcal{A}^*(P)$ se, e somente se, $\sup C \in A^*$.

Esta seção basea-se nos resultados de SYSLO *et al.* (1987). Isto pode ser resumido no seguinte resultado:

Teorema 4.26 (SYSLO *et al.* (1987))**.** *Uma ordem P é uma ordem de Dilworth se, e somente se, P possui uma $D-$partição $C = \{C_i\}_w$, onde $w = w(P)$, tal que C_i é uma cadeia gulosa na ordem $P_i = P - \cup_{j<i} C_j$ e $\sup C_i \in A_i^*$, onde A_i^* é o maior elemento no reticulado $\mathcal{A}^*(P_i)$ para cada $i = 1, \cdots, w$.*

Vamos assumir que P é conexo, isto é, seu diagrama de Hasse é um grafo conexo. Para $x \in P$, denote $N(x) = \{y \in P; y < x \text{ ou } x < y\}$. Um elemento x em P é um elemento final se $|N(x)| = 1$

Lema 4.27. *Toda ordem de Dilworth conexa bipartida P contém um elemento final.*

Demonstração. Seja $P = (U, W)$ uma D-ordem bipartida.

Suponha por absurdo, que $|N(x)| \neq 1$ para todo x em P. Então $C_1 = 1$ já que todo elemento em W tem no mínimo dois predecessores e $|C_\omega| = 1$ já que todo elemento em U tem no mínimo dois sucessores. Mostramos que $|C_i| = 2$, para cada $i = 1, \cdots, \omega$, que é uma contradição.

Seja $C_1 = \{a_1\}$. Para cada elemento $v \in N(a_1)$, a soma de C a L contendo b deve ter tamanho dois. Se $C = \{b\}$, então pelo Teorema anterior, a anticadeia A^* de P pode conter dois elements comparáveis a_1 e b, que é absurdo. Então para cada $b \in N(a_1)$, existe $j = j(b)$ tal que $C_j = \{a_j, b\}$. Da mesma forma, mostramos que todo elemento em $N(a_1)$ está contido na soma de C_k em L com $|C_k| = 2$. Continuando este processo, esgotamos todo elemento de P já que elementos de P têm pelo menos dois vizinhos. □

Um elemento z em P é chamado *nó* se $N(z)$ contém um elemento final de P. Pelo Lema 1, toda ordem bipartida conexa sempre contém um nó. Distinguimos três tipos de nós em uma ordem bipartida $P = (U, V)$:

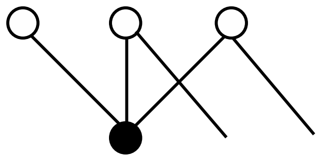


Figura 4.12: Tipo I

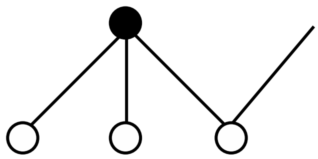


Figura 4.13: Tipo II

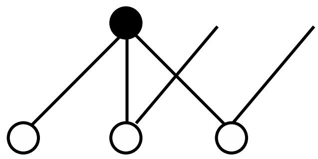


Figura 4.14: Tipo III

(I) $z \in U$;

(II) $z \in V$ e $N(z)$ contém pelo menos dois elementos finais;

(III) $z \in V$ e $N(z)$ contém exatamente um elemento final.

Seja z um nó do tipo I e z' um elemento final em $N(z)$. A cadeia consistindo de z e z', denotada por $\{z, z'\}$, é chamada de cadeia do tipo I. Seja z um nó do tipo II e z' um elemento final em $N(z)$. Chamamos $\{z'\}$ uma cadeia do tipo II. Finalmente, seja z um nó do tipo III e z' um elemento final em $N(z)$. A cadeia $\{z', z\}$ é chamada uma cadeia do tipo III.

Se $P = (U, V)$ é uma ordem de Dilworth, então uma extensão linear ótima L de P pode ser construída aplicando as operações:

(i) remova a cadeia $\{z, z'\}$ do tipo I ou a cadeia $\{z'\}$ do tipo II de P e coloque-a no início de L;

(i) remova a cadeia $\{z, z'\}$ do tipo III de P e coloque-a no final de L;

(iii) insira todos os elementos que sobraram de P entre as cadeias removidas em (i) e as cadeias removidas em (ii).

Com isso, seguem os resultados:

Teorema 4.28 (SYSLO *et al.* (1987)). *Seja $P = (U, V)$ uma ordem bipartida de Dilworth. Então para cada cadeia (z, z') do tipo I, (z') do tipo II ou (z', z) do tipo III, existe respectivamente uma extensão linear ótima de P que começa com (z, z'), ou começa com (z') ou termina com (z, z').*

Demonstração. Seja $L = C_1 \oplus \cdots \oplus C_w$ uma extensão linear ótima de P.

Se $C = (z, z')$ é uma cadeia do tipo I e L não começa com C, então tome $L' = C \oplus (C_1 - C) \oplus \cdots \oplus (C_w - C)$.

Seja (z') uma cadeia do tipo II. Se $C_1 \neq (z')$, então existe C_j $(2 \leq j \leq w)$ que contém z'. Se $C_j = (z')$, então $L' = C_j \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_{j-1} \oplus C_{j+1} \oplus \cdots \oplus C_w$. Por outro lado, temos $C_j = \{z', z\}$ e existe i $1 \leq i < j$, tal que $C_i = (z'')$. Então,

$$L' = (z') \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_{i-1} \oplus C_{i+1} \oplus \cdots \oplus C_{j-1} \oplus \{z'', z\} \oplus C_{j+1} \oplus \cdots \oplus C_w$$

é uma extensão linear ótima de P.

Seja $C = (z', z)$ do tipo *III*. Se existe C_i em L tal que $C_i = C$, então $L' = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{i-1} \oplus C_{i+1} \oplus \cdots \oplus C_w \oplus C_i$. Se $C_i = \{z'\}$, então existe $C_j,\ j > i$, tal que $z \in C_j$ Pelo Teorema anterior, temos que $|C_j| = 2$. Então existe $a \in N(z)$ tal que $C_j = \{a, z\}$. Transformamos L em L' através de L_1 e L_2, onde

$$L_1 = C_1 \oplus \cdots \oplus C_{i-1} \oplus C_{i+1} \oplus \cdots \oplus C_{j-1} \oplus C_i \oplus C_{j+1} \oplus \cdots \oplus C_w$$

$$L_2 = C_1 \oplus \cdots \oplus C_{i-1} \oplus C_{i+1} \oplus \cdots \oplus C_{j-1} \oplus \{a\} \oplus (z', z) \oplus C_{j+1} \oplus \cdots \oplus C_w$$

e

$$L' = C_1 \oplus \cdots \oplus C_{i-1} \oplus C_{i+1} \oplus \cdots \oplus C_{j-1} \oplus \cdots \{a\} \oplus C_{j+1} \oplus \cdots \oplus C_w \oplus (z', z)$$

L_1, L_2 e L' são extensões lineares ótimas de P.

□

Temos agora uma caracterização recursiva de ordens bipartidas de Dilworth:

Teorema 4.29 (SYSLO *et al.* (1987))**.** *Seja $P = (U, V)$ uma ordem bipartida e C uma cadeia em P do tipo I, II ou III. Então P é uma ordem de Dilworth se, e somente se, $P - C$ é uma ordem de Dilworth.*

Corolário 4.30 (SYSLO *et al.* (1987))**.** *Uma ordem bipartida P é uma ordem de Dilworth se, e somente se, $P - x$ é uma ordem de Dilworth para todo nó x em P.*

Os teoremas anteriores nos leva a formular o seguinte algoritmo. O algoritmo testa se P é uma ordem de Dilworth. Se for, ele retorna uma extensão linear ótima L de P.

Teorema 4.31 (SYSLO *et al.* (1987))**.** *O algoritmo está correto, isto é, encontra uma extensão linear L de P se P é uma ordem bipartida de Dilworth.*

Algoritmo 2 Algoritmo Extensão Linear

$Q \leftarrow P$; $L_1 \leftarrow \emptyset$; $L_2 \leftarrow \emptyset$;

Enquanto Q tem um elemento final, **então**

caso

I: $L_1 \leftarrow L_1 \oplus (z, z')$; $Q \leftarrow Q - \{z, z'\}$;

II: $L_1 \leftarrow L_1 \oplus (z')$; $Q \leftarrow Q - \{z'\}$;

III: $L_2 \leftarrow (z', z) \oplus L_2$; $Q \leftarrow Q - \{z, z'\}$

fim;

Se $Q \neq \emptyset$ **então**

Se Q consiste de elementos isolados **então**

$L \leftarrow L_1 \oplus \{$ elementos isolados de $Q\} \oplus L_2$

senão P não é uma ordem de Dilworth

4.7 Alguns tipos de cadeias de uma ordem P

Os resultados que veremos nesta seção, valem para ordens arbitrária P. Eles se encontram no artigo de SYSLO (1987).

4.7.1 Cadeias Gulosas

Um *salto guloso* de uma extensão linear $L = p_1p_2\cdots p_m$, (p_i, p_{i+1}) se p_i não é coberto por nenhum elemento $q \in P - L_i$ tal que $I(q) \subset \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ e $L_i = p_1p_2\cdots p_i$.

Uma extensão linear é gulosa se todos os saltos são gulosos.

É conveniente definirmos extensão linear gulosa em termos de cadeias gulosas: uma *cadeia gulosa* em P se $I(p)\cup\{p\} = C$, onde $p = \sup C$ e para nenhum elemento $q \in C^+(p)$, a cadeia $C \cup \{q\}$ tem essa propriedade.

Se $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$ é uma extensão linear gulosa de P então C_0 é uma cadeia gulosa em P e C_i é uma cadeia gulosa em $P_i = P - \cup_{j<i}C_j$, $i = 1, \cdots, k$. Se a extensão linear $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$ não é gulosa, seja C_i a primeira cadeia

em L que não é gulosa, podemos transformar C_i numa cadeia gulosa C_i' em P_i e então modificar $C_j' = C_j - C_i'$ para $j > i$. Então obteremos uma extensão linear $L' = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_i' \oplus C_{i+1}' \oplus \cdots C_k'$ em que $s(P, L') \leq s(P, L)$.

Podemos dizer que uma ordem P é gulosa se toda extensão linear gulosa é ótima, isto é, $G(P) \subseteq O(P)$, onde $G(P)$ é o conjunto das extensões gulosas de P e $O(P)$ é o conjunto das extensões salto ótimas de P.

4.7.2 Cadeias fortemente gulosas

Uma cadeia C é fortemente gulosa se:

(i) $\sup C$ é maximal em P;

(ii) existe $q \in P$, $q \neq \sup C$ tal que $C^+(q) = C^+(\sup C)$ e o conjunto $Q(q) = \{q\} \cup I(q) \cup \{r;\ \text{r cobre elementos de } I(q)\}$ é livre de N em P.

Exemplo 4.32.

A ordem P contém três cadeias gulosas: p_1, p_2p_5 e p_3p_6. a cadeia p_1 não é fortemente gulosa em P porque não existe q tal que $F_c(p_1) = F_c(q)$. A cadeia p_2p_5 é fortemente gulosa e p_3p_6 não é já que dois elementos do conjunto $Q(p_5) = \{p_5, p_2, p_4\}$, que são p_4 e p_5, não satisfazem a condição (4.1).

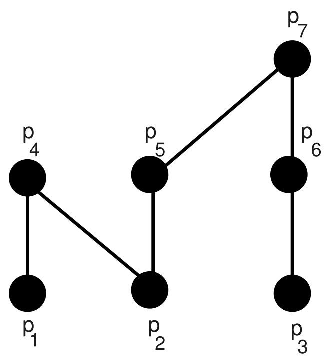


Figura 4.15: Ordem P

Teorema 4.33 (SYSLO (1995)). *Se uma ordem P contém uma cadeia fortemente gulosa C então toda extensão linear L de P pode ser transformada em uma extensão linear gulosa L^* de P que começa com C e $s(P, L^*) \leq s(P, L)$*

Exemplo 4.34.

Para ilustrar o Teorema anterior, vamos considerar uma ordem P*, com diagrama mostrado na Figura 4.16.Esta ordem tem exatamente uma cadeia fortemente gulosa* $C = p_3p_5$*. Temos* $F(\sup C) = F(p_2)$ *e* $Q(p_2) = \{p_1, p_2, p_4\}$*. Portanto,* $Q(p_2)$ *é livre de* N*. Se tomarmos* $L = p_1p_2 \oplus p_4 \oplus p_3p_5p_7 \oplus p_6 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$*. Note que* p_1p_2 *não é uma cadeia fortemente gulosa, já que* $\sup(p_1p_2)$ *não é maximal em* P *e o conjunto* $Q(p_5) = \{p_5, p_3, p_6\}$ *não é livre de* N*, já que* $I_c(p_5) \cap I_c(p_6) \neq \emptyset$ *e* $p_4 \in I_c(p_6) - I_c(p_5)$*. Entretanto existe uma extensão linear ótima que começa com* p_1p_2*,* $L' = p_1p_2 \oplus p_3p_5p_7 \oplus p_4p_6$.

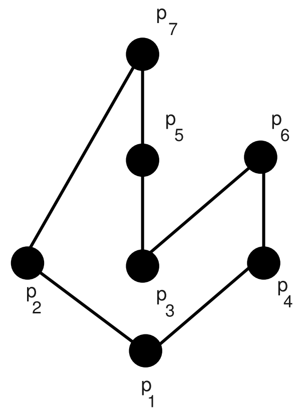


Figura 4.16: Exemplo

Vemos então, que as cadeias fortemente gulosas são usadas para reduzir o tamanho da ordem no problema do número de saltos. Logo temos

Corolário 4.35 (SYSLO (1995))**.** *Se uma ordem contém uma cadeia fortemente gulosa* C *então* P *tem uma extensão linear ótima que começa em* C *e* $s_L(P) = s_L(P - C) + 1$.

Toda cadeia gulosa numa ordem P livre de N é fortemente gulosa e toda extensão linear ótima numa ordem livre de N consiste de cadeias fortemente gulosas. Uma extensão $L \in \mathcal{L}(P)$ é uma extensão linear fortemente gulosa de P se consiste de cadeias fortemente gulosas e P é uma *ordem fortemente gulosa* se toda extensão linear gulosa é fortemente gulosa. A ordem P fortemente gulosa é gulosa, isto é, toda extensão linear gulosa de P é ótima. O contrário nem sempre é verdade. Um

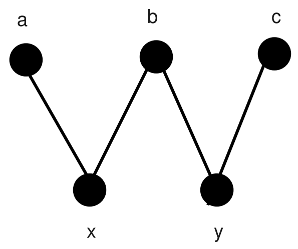


Figura 4.17: Ordem W, suas extensões lineares gulosas são: $\{x, b, y, c, a\}$, $\{x, b, y, a, c\}$, $\{y, c, x, b, a\}$ e $\{y, c, x, a, b\}$

exemplo de ordem fortemente gulosa é o W, que não é livre de N. O 3-coroa é guloso mas não é fortemente guloso.

Estes resultados não se aplicam sempre. Existem classes de conjuntos ordenados que não contém uma cadeia fortemente gulosa. Então para aplicar os resultados anteriores, as ordens devem conter somente cadeias fortemente gulosas. Vamos ver outro tipo de cadeias que podem ser encontradas em conjuntos ordenados que não possuem cadeias fortemente gulosas. Essas cadeias podem ser encontradas em qualquer conjunto ordenado, são as cadeias semi-fortemente gulosas.

4.7.3 Cadeias semi-fortemente gulosas

Para aplicar os resultados anteriores, as ordens devem conter somente cadeias fortemente gulosas. Existe outro tipo de cadeia que pode ser encontrada em qualquer ordem que não contenha cadeias fortemente gulosas.

Uma cadeia C é *semi-fortemente gulosa* em P, se:

s.1 Existe $p \in C$ e $q \notin C$ tal que p e q geram N em P;

s.2 $F_c(\sup C) \nsubseteq F_c(r)$ para todo $r \notin C$.

Uma cadeia semi-fortemente gulosa C é do tipo a se ela satisfaz a primeira condição, no outro caso dizemos que é do tipo b. Note que algumas cadeias semi-fortemente gulosas C do tipo a são fortemente gulosas, isto é, quando $\sup C$ é maximal em P.

Nem toda ordem possui somente cadeias fortemente gulosas e toda ordem que não possui cadeias fortemente gulosas contém cadeias semi-fortemente gulosas.

Lema 4.36. *Uma cadeia gulosa C que não é nem fortemente gulosa nem semi-fortemente gulosa satisfaz as condições:*

(i) Para todo $q \in C$ ($q \neq \sup C$), se existe $q' \in F_c(q') = \{q\}$.

(ii) Não existe $r \notin C$ tal que $F_c(r) \supseteq F_c(\sup C) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja C uma cadeia gulosa que não é nem fortemente gulosa nem semi-fortemente gulosa. A condição $F_c(\sup C) \neq \emptyset$ garante que $\sup C$ não é maximal em P, por outro lado, C pode ser uma cadeia fortemente gulosa. As condições 1. e 2. constituem a negação das condições (s.1) e (s.2), respectivamente. □

Teorema 4.37 (SYSLO (1995)). *Se uma ordem P não tem cadeia fortemente gulosa então P tem uma cadeia semi-fortemente gulosa.*

Em uma cadeia semi-fortemente gulosa C de P destacamos um elemento e denotamos por $p(C)$. Se C é do tipo a então $p(C) = I_c(p)$ para o menor p que satisfaz a condição (s.1), caso contrário, $p(C) = \sup C$. Note que $p(C)$ é único para uma dada cadeia C mas duas cadeias semi-fortemente gulosas C e C' podem ter $p(C) = p(C')$.

Lema 4.38. *Para uma ordem arbitrária P que não contém cadeia fortemente gulosa, se $K = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_l$ é um segmento inicial de uma extensão linear de P tal que a ordem $\cup_{i=1}^{l-1} C_i$ não contém elementos $p(C)$ para qualquer cadeia semi-fortemente gulosa C de P, então nenhum elemento x em C_i ($x \neq \sup C_i$) é coberto por y em C_j ($y \neq \inf C_j$) para todo $i > j \leq l$.*

Agora podemos enunciar um a propriedade das cadeias semi-fortemente gulosas.

Teorema 4.39 (SYSLO (1995)). *Se uma ordem P não contém cadeia fortemente gulosa então para toda extensão linear gulosa L de P existe uma extensão linear gulosa L^* de P que começa com uma cadeia semi-fortemente gulosa e $s(P, L^*) \leq s(L, P)$.*

Definição 4.40. *Uma extensão $L = C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$ de P é uma extensão linear semi-fortemente gulosa se C_i é uma cadeia fortemente gulosa em $P_i = P - \cup_{j<i} C_j$ ou uma semi-fortemente gulosa se P_i não tem cadeias fortemente gulosas.*

Os dois Teoremas anteriores implicam em:

Corolário 4.41. *Toda ordem tem uma extensão linear ótima que é semi-fortemente gulosa.*

Um algoritmo guloso gera as extensões lineares de uma ordem qualquer. O algoritmo guloso com condições de desempate resolve o problema de encontrar as extensões lineares ótimas de ordens livre de N. Se a ordem é qualquer sempre existe uma extensão linear gulosa que é ótima, porém podem existir extensões lineares gulosas que estão longe de serem ótimas. Neste capítulo, estudamos o problema de encontrar o número de saltos das classes das ordens livre de N, série paralelo, bipartidas de Dilworth e de somas lexicográficas. Vimos também alguns resultados gerais sobre cadeias fortemente gulosas e semi-fortemente gulosas que podem ser unidas para compor uma extensão linear da ordem .

Capítulo 5

Extensões Arbóreas

Na programação orientada a objetos, implementa-se um conjunto de classes que definem os objetos presentes no sistema de software. Cada classe determina o comportamento e estado possíveis de seus objetos, assim como o relacionamento com outros objetos. A relação de herança é o mecanismo pelo qual uma classe de objetos (subclasse) pode estender outra classe de objetos (super-classe), aproveitando seus comportamentos e variáveis possíveis. Um exemplo de herança: mamífero é super-classe de humano. Ou seja, um humano é um mamífero. Há herança múltipla quando uma subclasse possui mais de uma super-classe.

Nosso objeto de estudos neste capítulo são as extensões arbóreas de uma ordem P. O objetivo é construir uma extensão arbórea A de uma ordem P adicionando novas relações no diagrama de Hasse de P. Esse problema é uma generalização do problema de construir uma extensão linear. Nosso propósito então, é construir uma extensão arbórea adicionando um número mínimo de relações no diagrama de Hasse de P, que é diferente do problema de adicionar novas comparações a ordem.

5.1 Ordem Arbórea

Definição 5.1. *Um conjunto ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$ é uma ordem arbórea se, e somente se, dados x e y elementos incomparáveis de X, não existe $z \in X$ com $x \leq z$ e $y \leq z$.*

Equivalentemente, uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é arbórea se para todo $x \in X$, o ideal $I(x)$ é uma cadeia. Em TROTTER (1992) está definida tais ordens como florestas de computação.

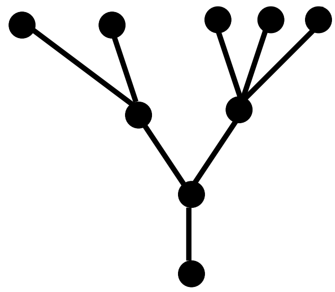


Figura 5.1: Árvore de computação

No artigo de SZWARCFITER (2003) é apresentado um algoritmo para a geração de extensões florestais de uma ordem P, isto é, extensões cujos diagramas de Hasse são grafos acíclicos. Este algoritmo tem tempo $O(n^2)$ por extensão gerada após um pré-processamento de tempo $O(mn)$.

Em QUEIROZ (2005) apresenta um algoritmo para a geração de extensões arbóreas de uma ordem P.

Vamos caracterizar o grafo de uma ordem arbórea usando um resultado geral dado por Golumbic e Wolk:

Um grafo G é perfeito se em todo subgrafo induzido H de G, $\chi(H) = \omega(H)$, onde $\chi(H)$ e $\omega(H)$ representam o número cromático e o tamanho da maior clique de H, respectivamente. Um grafo G é trivialmente perfeito se em todo subgrafo induzido H de G, $\alpha(H) = |\mathcal{C}(H)|$, onde $|\mathcal{C}(H)|$ denota o conjunto de todas as cliques maximais de um grafo G, onde

Teorema 5.2 (GOLUMBIC (1978))**.** *Seja G um grafo. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) G é o grafo de comparabilidade de uma ordem arbórea;

(ii) G não contém P_4 e C_4 induzido;

(iii) G é trivialmente perfeito.

Obs. $P_4 = N$ e $C_4 = 2-$coroa.

Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem, vamos definir por $\mathcal{A} = (X, A)$ a extensão arbórea de $\mathcal{P}$ e por $\mathcal{H}(P)$ o diagrama de Hasse da ordem $\mathcal{P}$ que determinam as relações de cobertura em P.

Neste capítulo, consideraremos dois problemas relacionando o diagrama de Hasse e o grafo de comparabilidade de uma extensão arbórea:

(i) Dada uma ordem $\mathcal{P}$, determinar a extensão arbórea $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A} \backslash \mathcal{P}|$ é mínimo, ou seja, o número mínimo de comparações que a estende à ordem P numa ordem arbórea $\mathcal{A}$;

(ii) Dada uma ordem $\mathcal{P}$, determinar a extensão arbórea $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{H}(A) \setminus P|$ é mínimo, ou seja, o número mínimo de relações de cobertura que estende o diagrama de Hasse de P numa extensão arbórea A.

Veja na Figura a seguir, que os problemas são distintos:

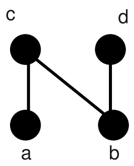


Figura 5.2:

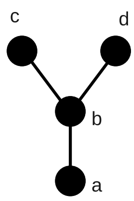


Figura 5.3:

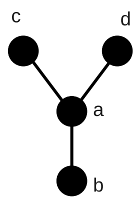


Figura 5.4:

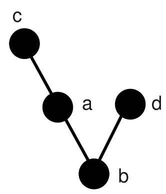


Figura 5.5:

A Figura 5.2 é o diagrama de Hasse de uma ordem $\mathcal{N}$. As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5, são exemplos de extensões arbóreas da ordem N. Note que em 5.3 e 5.4, $|\mathcal{H}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{N})| = 1$ e $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{N}| = 2$. Já na Figura 5.5, temos $|\mathcal{H}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{N}| = |\mathcal{A} \setminus \mathcal{N}| = 1$.

A extensão linear ótima da ordem $\mathcal{N}$, tem $|\mathcal{H}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{N}| = 1$, enquanto que $|\mathcal{A} \backslash \mathcal{N}| = 3$. Veja a Figura 5.6.

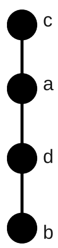


Figura 5.6: Extensão linear ótima

Neste sentido, definimos os *saltos arbóreos totais* como um par (x, y) de uma extensão Q da ordem P se $x \leq y$ em Q e $x \parallel y$ na ordem P, onde Q é uma ordem arbórea.

Definimos também o *salto arbóreo* como uma relação de cobertura (x, y) no diagrama de Hasse da extensão Q tal que $(x, y) \notin P$.

Se o número de novas relações de cobertura, que forem adicionadas aos elementos de P transforma seu diagrama de Hasse numa ordem arbórea A, for mínimo, dizemos que Q é uma *extensão arbórea ótima*.

Conjectura: *Conjecturamos que encontrar uma extensão arbórea $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ tal que $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{P}|$ é mínimo é um problema $NP-$completo. Note que encontrar o número de comparações adicionadas à ordem de forma a transformá-la numa extensão linear é fixo da ordem de $\frac{n(n-1)}{2} - |P|$.*

O Teorema de Dilworth nos dá um limite inferior para o número de saltos arbóreos de uma ordem P: $s_A(P) \geq w(P) - |M|$, onde M é o conjunto dos elementos maximais de P.

Neste trabalho, tratamos de uma generalização do problema do número de saltos de uma extensão linear de uma ordem P, dando ênfase ao fato de que estamos atribuindo um número mínimo de relações ao diagrama de Hasse, que não é equivalente a adicionar um número mínimo de comparações a ordem P, como vimos em exemplo anterior.

Definição 5.3. *O número de saltos arbóreos , denotado por $s_A(P)$, de uma ordem finita e conexa $\mathcal{P} = (X, P)$, é o número mínimo de relações de cobertura que adicionamos ao diagrama de Hasse de P que a torna uma ordem arbórea $\mathcal{A}$.*

Definição 5.4. *O número total de saltos arbóreos, é o número mínimo de comparações que adicionadas a uma ordem finita e conexa $\mathcal{P} = (X, P)$ a transforma numa ordem arbórea $\mathcal{A}$.*

Sendo assim, vamos definir alguns parâmetros importantes:

(i) $s_L^*(P) =$ número total de saltos lineares

(ii) $s_L(P) =$ número de saltos lineares

(iii) $s_A^*(P) =$ número total de saltos arbóreos

(iv) $s_A(P) =$ número de saltos arbóreos

5.1.1 Complexidade do problema

O problema de otimização associado as extensões arbóreas é: construir uma extensão linear L de uma ordem P com um número mínimo de saltos no diagrama de Hasse:

Analogamente, podemos enunciar o problema de decisão correspondente como: existe uma extensão linear L de P com um número de saltos menor ou igual a k?

Π: Extensão linear

Instância: Ordem P, inteiro k

Pergunta: Existe extensão linear L de P com número de saltos menor ou igual a k?

Π': Extensão arbórea

Instância: Ordem P', inteiro k'

Pergunta: Existe extensão arbórea A de P' com número de saltos menor ou igual a k?

Teorema 5.5. *Construir uma extensão arbórea ótima $\mathcal{A}$ de uma ordem $\mathcal{P}$ é um problema NP-completo, mesmo se P for uma ordem de intervalo.*

Demonstração. Para mostrar que o problema é $NP-$completo, basta transformarmos o problema Π no problema Π'. Sabemos que Π é $NP-$completo (PULLEYBLANK, 1981) mesmo para ordem de intervalo (MITAS, 1992). É fácil ver que $\Pi' \in NP$, pois dada uma extensão arbórea A de P', basta verificar quais relações, (ou arestas, no caso de diagrama de Hasse da ordem) estão contidas em A e não estão em P'.

Para provar que Π' é $NP-$difícil, utilizaremos a seguinte transformação polinomial: P' é formado pela ordem P mais um elemento v, usando a operação de soma linear $\oplus$, da seguinte forma: $P' = v \oplus P$. Seja P é uma ordem de intervalo, P' naturalmente também o é pois, em uma representação de P por intervalos, basta acrescentar um novo intervalo correspondente a v de tal modo que ele preceda aos demais. Note que v é o único elemento maximal de P'. Além disso, tome $k' = k$.

Se a resposta a Π for verdade, então Π' também é válido pois toda extensão linear é uma extensão arbórea.

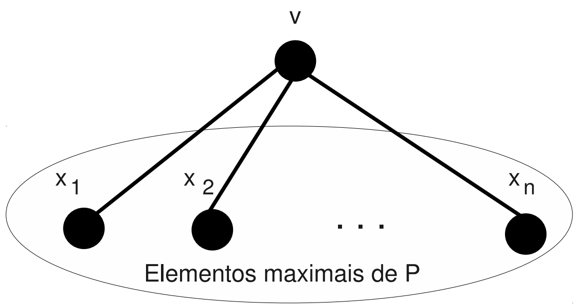


Figura 5.7: Operação soma linear: $P' = v \oplus P$

Se a resposta a Π' for verdade, então Π também é válido pois, como P' possui um único elemento maximal, toda extensão arbórea de P' é um extensão linear. Consequentemente, encontrar a extensão arbórea de P' é equivalente a encontrar a extensão linear de P.

Portanto, encontrar a extensão arbórea A para uma ordem P qualquer é um problema $NP-$completo.

□

Podemos construir uma extensão arbórea de uma ordem P adicionando comparações aos seus elementos e verificando, em cada nova comparação adicionada, se a nova ordem obtida é arbórea. Usando este método, conseguimos gerar todas as extensões arbóreas de P. Na próxima seção, sugerimos um algoritmo que encontra uma extensão arbórea minimal, que pode ser ótima ou não.

5.2 Extensões arbóreas minimais de uma ordem

Nesta seção, sugerimos um algoritmo para encontrar uma extensão arbórea minimal de uma ordem qualquer.

Definição 5.6. *Seja P uma ordem qualquer, uma extensão arbórea $\mathcal{A} = (X, A)$ de P é minimal quando a operação de retirada de qualquer salto de A, viola a condição de ser uma ordem arbórea.*

É fácil ver que:

Lema 5.7. *Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem finita e $v \in X$. $I(v)$ induz uma cadeia em qualquer extensão arbórea de P.*

Isto vale porque uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é arbórea quando $|C^{-}(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.

Definição 5.8. *Um elemento $x \in X$ é chamado de violador da ordem P quando $|C^{-}(x)| > 1$.*

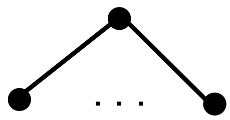


Figura 5.8: Violador - estrutura proibida na ordem arbórea

Segue daí que, uma ordem $\mathcal{A} = (X, A)$ é arbórea se, e somente se,

$$N(A) = \sum_{x \in S(A)} (|C^{-}(x)| - 1) = 0$$

onde

$$S(P) = \{x \in X \mid \text{ x é um violador da ordem } P\}.$$

O número $N(P)$ dá uma certa medida de quanto uma ordem P está afastada de ser uma ordem arbórea.

Uma outra maneira de se obter uma extensão arbórea minimal é utilizando o algoritmo, sugerido neste capítulo, que compara os elementos do Ideal de um violador.

O propósito do algoritmo é construir uma extensão $\mathcal{A} = (X, A)$ da ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ que é arbórea e minimal. Note que o algoritmo não gera todas as extensões arbóreas de P.

O algoritmo que apresentamos para a construção de extensões arbóreas se constitui de uma sucessão de etapas. Em cada uma delas construímos uma extensão P_i de P tal que

$$N(P) > N(P_1) > N(P_2) > \dots$$

Depois de um número finito de etapas o algoritmo chega a uma extensão A de P tal que $N(A) = N(P_k) = 0$.

A cada etapa, o algoritmo diminui a cardinalidade de $S(P_i)$. Para isso, introduz relações entre antecessores de vértices em $S(P_i)$.

5.2.1 Algoritmo

Seja $P_0 = P$. Em cada etapa, P_i é uma extensão de P. Se $N(P_i) = 0$ então P_i é uma extensão arbórea de P e o algoritmo pára. Neste caso, temos um salto de P_i em relação a P_{i-1}.

Se $N(P_i) > 0$, então seja $M(P_i)$ a sub-ordem de P_i induzida pelos violadores de P_i, ou seja, $|C^{[}-](x)| > 1 \Rightarrow x \in S(P_i)$. Seja $C^-(S(P_i))$ o conjunto dos antecessores de $S(P_i)$.

Introduzimos agora relações em P_i que tornam a sub-ordem formada pela união dos ideais dos elementos de $S(P_i)$ uma árvore. Fazemos isso introduzindo $\gamma_A(P_i)$ relações e todas as demais relações que se tornaram implícitas por transitividade.

Algoritmo 3 Transforma P

$P_0 = P$, $i = 0$

Enquanto existe $v \in P_i$ tal que $v \in S(P_i)$, **faça**

$i \leftarrow i + 1$

$X = C^-(v)$

Enumere os elementos de X

Enquanto $|C^-(v)| > 1$ **faça**

Sejam x_1 e x_2 dois elementos de $C^-(v)$, introduza a relação $x_1 \leq y$, onde $y = \min\{I(x_1) \setminus I(x_2)\}$

Exemplo 5.9.

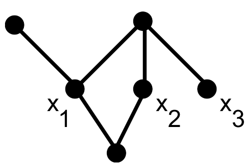


Figura 5.9: Ordem P

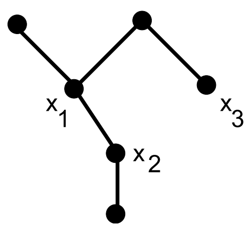


Figura 5.10: Extensão 1

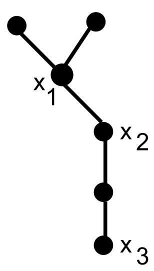


Figura 5.11: Árvore

Note que, x_1 é o elemento máximo de uma cadeia formada pelo ideal de um elemento $v \in S(P_i)$, x_2 é o elemento máximo de uma cadeia formada pelo ideal de um elemento de $v \in S(P_i)$, assim por diante.

Seja P_{i+1} a ordem resultante.

$$N(P_{i+1}) = N(P_i) - \sum_{x \in S(P_i)} (|C^{-}(x)| - 1)$$

Observe que ao final de cada etapa do algoritmo, todos os vértices em $S(P_i)$ passam a ter grau de entrada igual a 1.

Exemplo 5.10. *Seja a ordem P dada na Figura 5.9:*

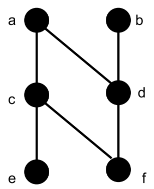


Figura 5.12: Ordem P

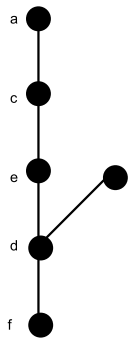


Figura 5.13: Árvore

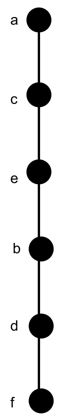


Figura 5.14: Ext. linear

O algoritmo constrói as extensões minimais da ordem P dada na Figura 5.12, mas somente a extensão da Figura 5.13 é ótima. Já a extensão linear dada na Figura 5.14, não é gerada pelo algoritmo. Observe que para gerar uma extensão arbórea mínima, devido a natureza do problema, ainda não conhecemos um método que não seja equivalente a gerar todas as extensões arbóreas minimais e verificar qual delas possui o menor número de saltos arbóreos.

Teorema 5.11. *O algoritmo descrito, constrói uma extensão arbórea minimal $\mathcal{A} = (X, A)$ da ordem $\mathcal{P} = (X, P)$.*

Demonstração. Para mostrar que P_i é uma ordem, basta mostrar que em cada P_i não introduzimos ciclos, ou seja, que P_i é anti-simétrica.

Suponha que P_i não seja anti-simétrica, então existem $x_j, x_k \in X$ tal que $x_j \leq x_k$ e $x_k \leq x_j \in P_i$. Mas, P_{i-1} é uma ordem, o que implica que $x_j \leq x_k$ ou $x_k \leq x_j \in P_{i-1}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_k \leq x_j \in P_{i-1}$, isto implica que em P_i, $x_k \in I(x_k) - I(x_j) = \emptyset$, absurdo.

Para concluir, P_i é transitiva, pois a cada iteração, as demais relações ficam estabelecidas, implicitamente, no diagrama de Hasse da ordem por transitividade.

Com isso, mostramos que P_i é uma ordem para todo $i = 1, \cdots, n$. É fácil ver que $P = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = A$. Ou seja, P_{i+1} é uma extensão de P_i.

Vamos verificar que $P_n = A$ é uma ordem arbórea: suponha que A não seja arbórea, então existe um elemento $v \in X$ tal que $I(v)$ não é totalmente ordenado, ou seja, $|C^-(v)| > 1$. Isto implica que $|C^-(v)| > 1$ em P_l, para $1 \leq l \leq m \leq n$. Sejam x_j e $x_k \in N_c^-(v)$, tais que $x_j \parallel x_k$. O algoritmo diminui $|C^-(v)|$, relacionando $x_j \leq \min\{P \setminus (I(x_{i+1}) \cap I(x_i))\}$, esta operação não aumenta a cardinalidade de nenhum outro $w \in S(P_i)$. Portanto, em P_m, $I(v)$ é totalmente ordenado, para $m \leq n$. Concluímos assim que A é uma ordem arbórea.

Vamos mostrar agora que A é uma extensão arbórea minimal de P. Em cada iteração do algoritmo $|C^-(v)|$ diminui em uma unidade. Equivalentemente, a retirada de um salto de A aumenta em uma unidade a cardinalidade de $C^-(v)$, porque este salto liga um dos elementos x_i, $i = 1, \cdots,\ |C^-(v)|$, ao elemento mínimo do conjunto $I(x_{i+1}) \setminus I(x_i)$. Portanto, esta operação aumenta a cardinalidade de $C^-(v)$ e não introduz novos vértices com grau de entrada maior que um na ordem. $\square$

Uma observação importante, é que a extensão arbórea obtida pelo algoritmo sugerido é minimal, mas não necessariamente mínima. Podemos obter uma extensão arbórea minimal que está longe de ser mínima. No próximo Capítulo veremos que o algoritmo encontra as extensões arbóreas ótimas das ordens livre de N, série paralelo e ordens bipartidas.

Capítulo 6

Número de saltos arbóreos

Neste capítulo estudamos o problema do número de saltos arbóreos e a construção de extensões arbóreas ótimas para as classes das ordens livre de N, série paralelo e as ordens bipartidas, baseados no algoritmo sugerido no Capítulo 5. E ainda discutimos o número de saltos arbóreos para os reticulados.

6.1 Ordens livre de N

Vimos no Capítulo 4 alguns tipos de cadeias gulosas. Neste capítulo estamos interessados nas cadeias que satisfazem as seguintes condições:

(i) $\sup C$ é maximal em P ou

(ii) existe $q \in P$, $q \in S(P)$ e $C^+(\sup C) = q$.

Se a ordem P é livre de N, então o conjunto

$$Q(q) = \{q\} \cup I(q) \cup \{r; \quad \text{r cobre elementos de } I(q)\}$$

é livre de N.

Sendo assim, podemos classificar as cadeias gulosas como cadeias extremais, se satisfazem a condição (i) e cadeias violadoras, se satisfazem a condição (ii). Desta forma, é fácil ver que as ordens livre de N devem conter cadeias extremais e violadoras. Já as ordens arbóreas devem conter somente cadeias extremais.

Lema 6.1. *As ordens arbóreas possuem somente cadeias extremais.*

Demonstração. Basta verificar que $C^{-}(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. $\square$

6.1.1 Número de saltos arbóreos de uma ordem livre de N

Para as ordens livre de N, podemos resolver o problema do número arbóreo de saltos com um algoritmo polinomial. Um resultado importante desta seção é que os elementos maximais de uma ordem livre de N são preservados na extensão arbórea.

Baseados nos resultados sobre o número de saltos de uma extensão linear para ordens livre de N dados por I. Rival e M.M Syslo, obtemos o resultado geral para o problema do número de saltos Hasse arbóreos das ordens livre de N:

Teorema 6.2. *Sejam P uma ordem finita, conexa e livre de N, então $s_A(P) = s_L(P) - |M(P)| + 1$, onde $|M(P)|$ é o conjunto dos elementos maximais de P.*

Demonstração. Seja $P = \cup_{i=1}^{n} C_i$, onde C_i são cadeias gulosas violadoras ou extremais de P.

Algoritmo 4 Extensão arbórea ótima de P

$P' \leftarrow P$

$P'' \leftarrow \emptyset$

Enquanto existir C_j é cadeia violadora de P', **faça**

$P'' \leftarrow P'' \oplus C_j$

Remova C_j de P'

$P'' \leftarrow P'' \oplus P'$

A ordem P'' obtida do algoritmo anterior é arbórea, pois só possui cadeias gulosas extremais.

$\square$

A partir do teorema anterior, observamos que as extensões arbóreas mínimas das ordens livre de N preservam seus elementos maximais. Além disso, podemos ver pelo algoritmo Transforma P, mostrado no Capítulo 5, que sempre existe uma extensão arbórea minimal que preserva os elementos maximais de uma ordem P qualquer.

Teorema 6.3. *Numa ordem P, existe uma extensão arbórea minimal que preserva os elementos maximais de P. E mais ainda, os elementos maximais de uma ordem P livre de N são preservados nas extensões arbóreas mínimas A de P.*

Demonstração. O algoritmo Transforma P demonstra a primeira parte do teorema. Para a segunda, basta observar no Teorema anterior que as cadeias extremais são mantidas na extensão arbórea.

$\square$

RIVAL (1983), mostrou que para uma ordem P livre de N, vale que $s_L(P) = m - 1$, onde m é o número de cadeias gulosas extremais e violadoras. Já o número de saltos arbóreos se relaciona com essa constante por $s_A(P) = s_L(P) - k + 1$, onde $k = |M|$ é constante em P.

6.2 Número de saltos arbóreo em outras classes de ordem

Nesta seção vamos determinar o número de saltos arbóreo das ordens série paralela, bipartida e reticulados. Lembrando que a classe das ordens livre de N é uma generalização das ordens série-paralelo.

6.2.1 Ordem série paralela

Lema 6.4. *Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem série paralela. Temos,*

$$e_i, e_j \in S(P) \Rightarrow I(e_i) \cap I(e_j) = \emptyset \text{ ou } I(e_i) = I(e_j).$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, $I(e_i) \neq I(e_j)$ e $I(e_i) \cap I(e_j) \neq \emptyset$, então existe uma subordem induzida $\mathcal{P}' = (X', P)$, onde $X' \subset X$ em que e_i e $e_j \in X'$ geram N, o que é uma contradição. $\square$

Para resolver o problema do número de saltos arbóreos de uma ordem série paralelo, realizamos um processo de redução da ordem P para a ordem P_r, fazendo a substituição dos ideais que têm interseção comum pelo conjunto vazio.

Definição 6.5. *Seja $\mathcal{P} = (X, P)$ uma ordem série paralela. Defina por elementos semelhantes inferiormente os vértices $v_i \in X$ tal que $I(v_i) = I(v_j)$, para $i \neq j$.*

Exemplo 6.6.

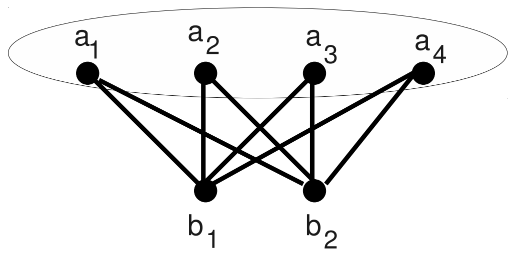


Figura 6.1: $I(a_1) = I(a_2) = I(a_3) = I(a_4)$ em uma ordem série paralela

Definição 6.7. *Dada uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$, defina por ordem reduzida $\mathcal{P}^{\nabla} = (X, P_r)$ a ordem obtida de P substituindo, para cada conjunto de elementos semelhantes inferiormente $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ o Ideal $I(e_i)$, $i > 1$, pelo conjunto vazio.*

Exemplo 6.8.

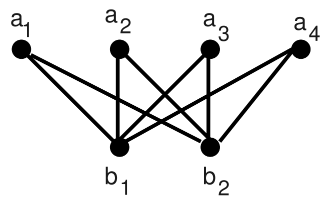


Figura 6.2: $I(a_1) = I(a_2) = I(a_3) = I(a_4)$

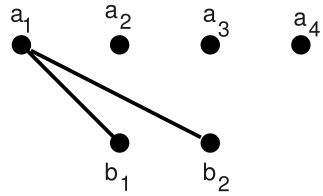


Figura 6.3: $I(a_2) = I(a_3) = I(a_4) = \emptyset$

Teorema 6.9. *Seja $\mathcal{P}_r = (X, P_r)$ a ordem reduzida de uma ordem série paralela $\mathcal{P} = (X, P)$. Então*

$$s_A(P_r) = \sum_{e \in X} |C^{-}(e)| - 1 = s_A(P)$$

Demonstração. Sejam $E_1, \cdots, E_n$ os conjuntos contendo os elementos semelhantes inferiormente.

Da sub-ordem obtida após procedimento de redução, para cada $E_i, i = 1, \cdots, n$, o número de saltos que resolve o violador $e_{1i}1$ é $|C^-(e_{1i})| - 1$.

Portanto, $s_A(P_r) = \sum_{e \in X} |C^-(e)| - 1$.

Para mostrar que $s_A(P_r) = s_A(P)$, basta verificar que após adicionarmos os saltos da ordem P_r, adicionamos também as demais relações da ordem P, faltando somente adicionar as relações dos elementos maximais. Após esse processo, a ordem obtida é uma ordem arbórea ótima.

□

Podemos obter facilmente um limite superior para o número arbóreo de saltos de uma ordem conexa.

Teorema 6.10. *Seja P uma ordem conexa, então*

$$s_A(P) \leq \sum_{v \in S} |C^-(v)| - 1.$$

Demonstração. Numa ordem P, existem $|S|$ elementos onde $|C^-(v)| > 1$. Numa ordem arbórea conexa, vale $|C^-(x)| = 1$, $\forall x \in X$. Logo, segue o resultado. □

A ordem reduzida de uma ordem série paralela é exemplo de subclasse onde vale a igualdade

$$s_A(P) = \sum_{e \in S} |C^-(e)| - 1.$$

6.2.2 Reticulados e ordens bipartidas

Para os reticulados encontrar uma solução do problema do número de saltos arbóreos é equivalente a encontrar o número de saltos lineares, sendo assim vale que $s_L(P) = s_A(P)$. Note que um reticulado possui um único elemento maximal, do contrário se possuísse dois elementos maximais distintos não atenderia a definição. Sendo assim, construir a extensão arbórea mínima é equivalente a encontrar sua extensão linear ótima.

Já as ordens bipartidas, basta verificar o $\min\{M(P), m(P)\}$, onde $M(P)$ é o conjunto dos elementos maximais e $m(P)$ é o conjunto dos elementos minimais da ordem P, sendo assim $s_A(P) = \min\{M(P), m(P)\} - 1$, pois esse número pode ser calculado em P ou no sua ordem simétrica P^s.

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo, apresentamos nossas considerações finais bem como nossos planos para trabalhos futuros.

7.1 Considerações finais

Nesta tese criamos e desenvolvemos o conceito de extensões arbóreas mínimas e minimais e o número de saltos arbóreos.

Provamos que este problema é NP-completo para o caso geral e verificamos que para a classe das ordens de intervalo o problema é NP-completo. Consideramos algumas classes de ordens e concluímos que o problema tem solução polinomial para as ordens ordens livre de N, série paralela e bipartidas e resolvemos o problema para os reticulados . Desenvolvemos um algoritmo polinomial que gera uma extensão arbórea ótima para essas classes e calculamos este número.

Este assunto é de grande interesse na área de programação orientada a objetos onde, para uma aplicação especial produzimos uma ordem parcial P entre as classes de objetos. A relação de herança é o mecanismo pelo qual uma classe pode estender outra classe. Como já vimos, esse problema pode ser formulado em termos de extensão arbórea de uma ordem P. Encontrando uma extensão Q que minimiza o número de saltos arbóreos, produzimos uma hierarquia que é fechada para P em termos do número de novas relações adicionadas.

Assim, generalizamos o problema do número de saltos de uma extensão linear para o caso arbóreo. Desenvolvemos um mecanismo de reduzir o problema do número de saltos arbóreos ao problema do número de saltos de extensões lineares.

Sobre estes problemas pretendemos estabelecer novas propriedades, encontrar novas classes de ordens onde o problema possa ser polinomial, bem como verificar a existência novas aplicações.

7.2 Trabalhos futuros

Temos interesse em estudar a conjectura proposta no Capítulo 5: determinar o número mínimo de comparações adicionadas a uma ordem P de forma a transformá-la numa extensão arbórea, estudar a complexidade deste problema bem como encontrar uma caracterização para as extensões arbóreas minimais. Buscamos também um limite superior mais justo para o número de saltos arbóreos de uma ordem P e estudar novas classes de ordens onde possamos resolver os problemas propostos nesta tese com algoritmos polinomiais ou aproximativos.

É nossa intenção estender o resultado a outros tipos de saltos e definí-los como novas relações adicionadas à ordem P, de forma a estendê-la a uma outra classe de ordem. Objetivo será encontrar o número mínimo de saltos que a transforma numa extensão mínima ou minimal, como por exemplo, estender uma ordem P qualquer à uma ordem 2-dimensional. Assim, podemos definir os saltos 2-dimensionais ou saltos de permutação.

Referências Bibliográficas

BOUCHITTE, V., HABIB, M., 1987, "NP-completeness properties about linear extensions", *Order*, v. 4, pp. 143–154.

COGIS, O., HABIB, M., 1979, "Nombre de sauts et graphes série-paralèles", *RAIRO Informatique Théorique*, v. 13, pp. 3–18.

DALKIN, A. D., VAROL, Y. L., 1988, "On the generation of all topological sortings", *Journal of Algorithms*, v. 4, pp. 150–162.

DILWORTH, R. P., 1950, "A decomposition theorem for partially ordered sets", *Annals of Mathematics*, v. 51, pp. 161–166.

DILWORTH, R., 1960, "Some combinatorial problems on partially ordered sets", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, v. 10, pp. 85–90.

DUFFUS, D., RIVAL, I., WINKLER, P., 1982, "Minimizing setups for cycle-free ordered sets", *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 85, pp. 509–513.

DUSHNIK, B., MILLER, E. W., 1950, "Partially ordered sets", *Journal of the American Mathematical Society*, v. 1, pp. 77–94.

ELZAHAR, M., RIVAL, I., 1985, "Exemples of jump-critical ordered sets", *SIAM Journal Algebra Discrete Mech.*, v. 6, pp. 713–720.

ELZAHAR, M., SCHMERL, J., 1984, "On the size of jump-critical ordered sets", *Order*, v. 1, pp. 3–5.

GOLUMBIC, M. C., 1978, "Trivially perfect graphs", *Discrete Mathematics*, v. 24, pp. 105–107.

GRILLET, P., 1969, "Maximal Chains and Antichains", *Fundamenta Mathematicae*, v. 65, pp. 157–167.

HABIB, M., 1984, "Comparability invariants", *Annals Discrete Mathematics*, v. 23, pp. 371–386.

JUNG, H. C., 2003, "On the jump number of lexicographic sums of ordered sets", *Czechoslovak Mathematical Journal*, v. 53 (128), pp. 343–349.

KNUTH, D. E., SZWARCFITER, J. L., 1974, "A structured program to generate all topological sorting arrangementes", *Information Processing Letter*, v. 2, pp. 153–157.

MITAS, J., 1992, "Tackling the jump number of interval orders", *Order*, v. 8.

PIMENTA, A., KLEIN, S., SZWARCFITER, J. L., 2009, "Sobre o número de saltos em ordens parciais". XLI SOBRAPO, Porto Seguro, Brazil.

PIMENTA, A., HABIB, M., KLEIN, S., SZWARCFITER, J. L., 2010, "The arboreal jump number of an order", *In preparation*.

PRUESSE, G., RUSKEY, F., 1998, "Generating linear extensions fast", *SIAM Journal on Computing*, v. 23, pp. 275–290.

PULLEYBLANK, W. R., 1981, "On minimizing setups in precedence-constrained scheduling", unpublished manuscript.

QUEIROZ, A. B., 2005, *Algoritmos para a Geração de Classes de Extensões de Conjuntos Parcialmente Ordenados*. COPPE - Sistemas - Rio de Janeiro, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

RIVAL, I., 1983, "Optimal linear extensions by interchanging chains", *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 89.

RIVAL, I., ZAGUIA, N., 1986, "Constructing greedy linear extensions by interchanging chain", *Order*, v. 3.

RUSKEY, F., 1988, "Research problem 90", *Discrete Mathematics*, v. 70, pp. 111–112.

SYSLO, M. M., 1995, “On some new types of greedy chains and greedy linear extensions of partially ordered sets”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 60, pp. 349–358.

SYSLO, M. M., 1987, “Minimizing the jump number for partially ordered sets: a graph theoretic approach, II”, *Discrete Mathematics*, v. 63, pp. 279–295.

SYSLO, M. M., CHIA, W. L., KOH, K. M., 1987, “A characterization of bipartite Dilworth posets”, *International Conference on Optimization Techniques and Applications*, v. 8–10, pp. 451–459.

SZPILRAJN, E., 1930, “Sur l’extension de l’ordre partiel”, *Fundamenta Mathematicae*, v. 16, pp. 386–389.

SZWARCFITER, J. L., 2003, “Generating all forest extensions of a partially ordered set”, *Lecture Notes in Computer Science*, v. 2653, pp. 635.

TROTTER, W., 1992, *Combinatorics and Partially Ordered Sets.*

VALDES, J., TARJAN, R. E., LAWLER, E. L., 1979, “The recognition of series parallel digraphs”, *Proceedings of the XI Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 1–12.

VAROL, Y. L., ROTEM, D., 1981, “An algorithm to generate all topological sorting arrangements”, *Computer Journal*, v. 24, pp. 83–84.