Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

ANÁLISE DE MÉTODOS DO TIPO PROXIMAL COM REGULARIZAÇÃO QUASE-DISTÂNCIA

Felipe Antonio Garcia Moreno

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Rio de Janeiro
Junho de 2011

ANÁLISE DE MÉTODOS DO TIPO PROXIMAL COM REGULARIZAÇÃO QUASE-DISTÂNCIA

Felipe Antonio Garcia Moreno

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.

Prof. João Xavier da Cruz Neto, D. Sc.

Prof. Orizon Pereira Ferreira, D. Sc.

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Júnior, D. Sc.

Profa. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2011

Garcia Moreno, Felipe Antonio

Análise de métodos do tipo proximal com regularização quase-distância/ Felipe Antonio Garcia Moreno. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XI, 54 p. 29,7cm.

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 48 – 54.

1. método de ponto proximal. 2. quase-distância. 3. subdiferencial Fréchet. 4. subdiferencial limite. 5. desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz. 6. ponto crítico. 7. problemas de equilíbrio. 8. princípios variacionais. I. Oliveira, Paulo Roberto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

A meus pais Felipe e Isabel.
À minha esposa Kely.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por estar connosco sempre.

Ao Prof. Paulo Roberto Oliveira, pela orientação, apoio, amizade e sobre tudo pela confiança depositada todos estes anos.

Aos membros da banca examinadora, Prof. João Xavier da Cruz Neto, Prof. Orizon Pereira Ferreira, Prof. Dinamérico Pereira Pombo Júnior e Profa. Susana Scheimberg de Makler, cujas observações, críticas e sugestões enriqueceram esta tese.

Ao Prof. Angel Guillermo Coca Balta através do qual tive meu primeiro contato com a otimização (durante a orientação de minha iniciação cientifica).

À minha amada esposa Kely, pelo apoio e parceria incondicional demostrada desde sempre, acreditando na minha pesquisa dando me forças para continuar pelo caminho certo e pelas contribuições na minha pesquisa, ela é demais!.

Aos meus pais Felipe e Isabel, pelo apoio e incentivo que sempre me deram, dão e darão, muito obrigado.

Aos meus irmãos Rebeca, Arturo e Jose Luis, aos meus queridos sogros Alberto e Silvia e às minhas cunhadas e cunhados, pelo apoio direto ou indireto durante toda a minha vida acadêmica.

À Claudia Susie Camargo Rodrigues, Flávia Morgana Jacinto, Maria de Fátima Cruz Marques, Mariela Morveli Espinoza, Valéria Saldanha Motta, por terem entrado na vida da minha querida esposa e portanto na minha, sou muito grato por isso.

A todos os professores do PESC/COPE-UFRJ. Em especial ao Prof. Nelson Maculam e à Profa. Regina Burachik.

Aos colegas e amigos do PESC/COPPE/UFRJ, Paulo Sérgio, Gladyston, Nilomar Oliveira, Roberto Cristóvão & Shirley, Sissy Souza, Roberto Prata, Erika & Hebert, Guilherme Cox, Jesus, Aldo Bazán e a os demais amigos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os Funcionários do PESC/COPPE-UFRJ: Adilson, Ana Paula P, Ana Paula R, Ari, Cláudia, Deda, Eliah, Gutierrez, Itamar, Lourdes, Mercedes, Nathalia, Patrícia, Rosa, Sônia, Solange e Taísa.

Às pessoas que nós apoiaram muito nessa caminhada, como Cristiane, Margarete & Jorge, Dona Magnólia, Paulo Fernando e a todas as recentes amizades Valeu!

Ao pessoal da biblioteca do CT e do IM, por ter-me brindado muitas vezes a bibliografia que precisava, em especial ao Jorge, Zoraide e Daniele.

A todas as pessoas cujos nomes não constam nesta lista, mas que de alguma forma contribuíram para a realização desta tese.

À CAPES/CNPq-IEL Nacional - Brasil, pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DE MÉTODOS DO TIPO PROXIMAL COM REGULARIZAÇÃO QUASE-DISTÂNCIA

Felipe Antonio Garcia Moreno

Junho/2011

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho considera-se o problema de minimizar uma função não-convexa e não-diferenciável, que verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz. Para este problema desenvolve-se um método de ponto proximal com uma quase-distância associada com o objetivo de encontrar pontos críticos generalizados. Além disso, sob determinadas hipóteses, prova-se que toda sequência gerada por este método converge para um ponto critico generalizado.

Por outro lado, estuda-se o problema de equilíbrio, propõe-se um algoritmo proximal com quase-distância para este problema e apresenta-se resultados parciais neste contexto. Além disso, estuda-se uma possível extensão do princípio variacional de Borwein-Preiss via funções do tipo gauge.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYSIS OF PROXIMAL TYPE METHODS WITH QUASI-DISTANCE REGULARIZATION

Felipe Antonio Garcia Moreno

June/2011

Advisor: Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work, we consider the problem of minimizing a non-convex and non-differentiable function, which verifies the Kurdyka-Łojasiewicz property. For this problem, we develop a proximal point method with a quasi-distance associated in order to find a generalized critical point. Moreover, under appropiate assumptions, we prove that every sequence generated by this method converges to a generalized critical point.

On the other hand, we consider the equilibrium problem, we propose a proximal algorithm with quasi-distance for this problem and we present partial results in this context. Furthermore, we study a possible extension of the variational principle of Borwein-Preiss via gauge-type functions.

Sumário

Notações

$\mathbb{R}^n_+$	O conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, .., n\}$.
$\mathbb{R}^n_{++}$	O conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \quad \forall\, i = 1, .., n\}$.
$\mathscr{P}(A)$	Conjunto das partes de $A \subset \mathbb{R}^n$.
$\| \cdot \|$	Norma Euclideana.
$B(a\,, r)$	O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| < r\}$.
$\overline{B}(a\,, r)$	O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| \leq r\}$.
$\mathrm{diam}(A)$	O diâmetro do conjunto A.
$\mathrm{dom}\,(f)$	Domínio efetivo da função f.
δ_C	Função indicadora do conjunto $C \subseteq X$.
$\mathrm{epi}(f)$	O epígrafo da função f.
$\mathrm{ir}(C)$	O interior relativo do conjunto C.
$\mathrm{conv}(C)$	A envoltória convexa do conjunto C.
$\widehat{\partial} f(u)$	Subdiferencial Fréchet da função f em u.
$\partial f(u)$	Subdiferencial limite da função f em u.
$\partial^\infty f(u)$	Subdiferencial singular da função f em u.
$\nabla f(x)$	O gradiente da função f em x.
$[\alpha < f < \beta]$	O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha < f(x) < \beta\}$.
$[\alpha < f \leq \beta]$	O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha < f(x) \leq \beta\}$.
$\mathrm{crit}(f)$	O conjunto $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \in \partial f(\overline{x})\}$.
$x \xrightarrow{\Omega} \overline{x}$	Denota $x \to \overline{x}$ com $x \in \Omega$.

$\widehat{N}_\epsilon(x;\Omega)$	O conjunto dos ϵ-normais de Ω em x.
$\widehat{N}(x;\Omega)$	O cone pré-normal de Ω em x.
$N(x;\Omega)$	O cone normal básico ou limite de Ω em x.
$\mathrm{Graf}(\partial f)$	O gráfico do operador ∂f.

Introdução

Diversos problemas na programação matemática podem ser formulados pelo seguinte problema de minimização:

$$\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{0.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função própria e semicontínua inferior.

Na literatura existem diversos métodos para resolver este problema, cita-se por exemplo Bertsekas [14], Bazaara *et al.* [12], entre outros. Em particular, se a convexidade da função objetivo é considerada, pode-se usar o método de ponto proximal para sua resolução. Este método foi introduzido por Martinet [53] e Rockafellar [61]. Os métodos proximais são vistos como métodos de aproximação-regularização para a resolução de problemas em otimização convexa e desigualdades variacionais associadas a operadores monótonos maximais. Dá-se a seguir uma breve descrição deste tipo de método. Considerando o problema (0.1), o método de ponto proximal gera uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ correspondente à recursão:

$$x^{k+1} \in \arg\min\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda_k}\|u - x^k\|^2 \ : \ u \in \mathbb{R}^n\right\}, \tag{0.2}$$

onde x^0 é um ponto inicial, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números positivos. Sob a condição de convexidade de f foi provado que a sequência converge a um minimizador do problema (0.1), caso ele exista.

No entanto, na literatura existem extensões do método de ponto proximal, que trocam a distância Euclideana na iteração (0.2) por distâncias generalizadas, cita-se por exemplo as distâncias de Bregman e as φ- divergências, para mais detalhes veja Chen e Teboulle [24], Kiwiel [41], Iusem e Teboulle [38], Kanzow [39] entre outros. Porém observa-se que este tipo de abordagem preserva algumas propriedades da norma Euclideana, por exemplo a convexidade, a continuidade e a coercividade. Note que estas propriedades são as que possibilitam uma análise de convergência satisfatória. Kaplan e Tichatschke [40] analisaram algumas possibilidades e dificuldades para estender o método de ponto proximal para problemas não convexos.

Nas últimas décadas, extensões do método de ponto proximal foram obtidas relaxando a hipótese de convexidade, cita-se por exemplo os trabalhos de Pennanen [59], Iusem *et al.* [35], Chen e Pan [25], entre outros, porém ainda são preservadas algumas propriedades da norma Euclideana. Não obstante, a dificuldade surge na ausência de convexidade e diferenciabilidade. Assim é necessário considerar uma abordagem diferente para estabelecer resultados de convergência.

Por outro lado, as quase-distâncias (ou quase-métricas) têm sido extensivamente estudadas no contexto da topologia, veja por exemplo Albert [2], Fletcher e Lindgren [31], Künzi [46], Di Concilio e Gerla [27], Stojmirović [65], entre outros. Elas generalizam as distâncias no sentido de que não são simétricas. Observa-se também que uma quase-distância não é necessariamente uma função convexa, continuamente diferenciável nem coerciva, em algum de seus argumentos. Por isto não se pode proceder de modo semelhante como no caso das distâncias de Bregman ou as φ-divergências para estudar a análise de convergência de métodos proximais generalizados, quando é considerada uma quase-distância como regularização.

Além das aplicações das quase-distâncias à Teoria da Computação (veja por exemplo Brattka [22] e Künzi *et al.* [47]), elas também podem ser aplicadas na Economia, por exemplo na escolha do consumidor e funções de utilidade como foi feito por Romaguera e Sanchis [63] e Garcia *et al.* [32] , entre outras aplicações.

Uma classe importante de funções na análise não-linear são as que verificam a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz, que é uma generalização da desigualdade do gradiente de Łojasiewicz [52]. Ela foi utilizada no estudo dos limites do erro de sistemas de desigualdades analíticas na otimização por Absil *et al.* [1] e Bolte *et al.* [19]. Tais resultados são utilizados na análise de convergência de algoritmos de otimização, veja por exemplo os trabalhos de Absil *et al.* [1], Attouch *et al.* [8], Bolte *et al.* [19]. Neste contexto Attouch e Bolte [7] usaram a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz para obter a convergência do método proximal em um ambiente não convexo e não suave, e apresentaram uma análise adequada para o desenvolvimento de métodos proximais generalizados, embora somente no contexto Euclidiano.

Além disso, uma interpretação dos termos da regularização foi dada como “custos de mudança” na Economia por Attouch e Soubeyran em [9, 10]. Por outro lado, o algoritmo proximal usado por Attouch e Bolte [7] usa como termo de regularização o quadrado da distância euclidiana, a qual não pode representar um custo móvel, porque neste caso o custo para mudar de x a y é igual ao custo para mudar de y a x, uma hipótese simétrica muito restritiva para um custo móvel na modelagem de problemas. Portanto tal regularização é incapaz de atender este tipo de modelos em economia e ciências sociais.

Neste trabalho apresenta-se um método proximal generalizado para minimizar uma função não-convexa, não-diferenciável, que verifica a propriedade de Kurdyka-

Łojasiewicz. Este método gera uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ por meio da recursão:

$$x^{k+1} \in \arg\min \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u, x^k) \ : \ u \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{0.3}$$

onde $q(\cdot,\cdot)$ é uma quase-distância.

O objetivo é estabelecer a convergência do esquema de ponto proximal generalizado (0.3) para um ponto crítico generalizado, e portanto, estende-se o resultado de Attouch e Bolte [7]. Vale ressaltar que os resultados obtidos nesta parte da tese foram aceitos pela revista *Optimization* [32], junto com uma interpretação econômica do algoritmo de ponto proximal com quase-distância aplicada à formação de hábito, esta última fornecida pelo Prof. Soubeyran.

Outro tema de interesse nesta tese é o Problema de Equilíbrio PE(f, C), que consiste em:

$$\text{PE}(f, C) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C, \text{ tal que} \\ \quad f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$, e $f : C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção. Este problema é considerado por Blum e Oettli em [17], Iusem e Sosa [36, 37], Iusem *et al.* [34], Konnov [43, 45], entre outros, e é conhecido também que várias classes de problemas de programação matemática, problemas de complementariedade, desigualdades variacionais, problemas de ponto fixo, problemas de equilíbrio de Nash e problemas minimax, podem ser reformulados como o PE(f, C), para mais detalhes veja por exemplo Blum e Oettli [17] e Iusem e Sosa [36].

Ressalta-se que a aplicação do método proximal aos problemas de equilíbrio não é nova na literatura, já que tal abordagem é considerada por exemplo nos trabalhos do Antipin [4, 5], Flåm e Antipin [30], Antipin *et al.* [6], Moudafi [56–58], Van Nguyen *et al.* [66], Combettes e Hirstoaga [26], Iusem e Sosa [37] e Konnov [42, 44].

Neste contexto se propõe um algoritmo proximal com quase-distância para o problema de equilíbrio, e se apresentam alguns resultados parciais do método.

Por outro lado, em um outro trabalho em andamento, estuda-se uma possível extensão do princípio variacional de Borwein-Preiss [20] via funções do tipo gauge, veja Definição 3.2.1, com base nos resultados teóricos apresentados por Bianchi *et al.* [15] e Li e Shi [51].

Este trabalho é organizado da seguinte forma: No Capítulo 1 lembram-se as definições e propriedades da quase-distância, da teoria subdiferencial, além da propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz. No Capítulo 2 apresenta-se o método de ponto proximal com quase-distância e estabelece-se a convergência da sequência gerada para um ponto crítico generalizado. No Capítulo 3 se propõe um algoritmo proximal com quase-distância para o problema de equilíbrio e estuda-se uma possível extensão do princípio variacional de Borwein-Preiss [20] via funções do tipo gauge.

Como observamos estes trabalhos encontram-se ainda em andamento. E por último, no Capítulo 4, apresentam-se as considerações finais.

Capítulo 1

Preliminares

Com o intuito de facilitar a leitura e compreensão desta tese, neste capítulo introduzem-se algumas notações, e fornecem-se as definições e propriedades básicas de quase-distâncias, teoria subdiferencial e da desigualdade de Kurdika-Łojasiewicz, as quais são necessárias para o desenvolvimento dos demais capítulos.

1.1 Quase-distância

Definição 1.1.1. [2] Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ uma aplicação. Diz-se que q é uma **quase-distância** em X se, para todo x, y, $z \in X$,

1. $q(x,y) = q(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$.

Além disso, o par (X, q) é chamado **espaço quase-métrico**.

Observação 1.1.1. Seja $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância. Então,

i) A aplicação $\overline{q}$, definida por

$$\overline{q}(x,y) := q(y,x), \qquad x,\, y \in X,$$

também é uma quase-distância em X, a qual é chamada de **quase-distância conjugada** de q.

ii) A aplicação $\hat{q}$, definida por

$$\hat{q}(x,y) := \max\{q(x,y), \overline{q}(x,y)\}, \qquad x, y \in X,$$

é uma distância em X, a qual é chamada de **distância associada** a q.

iii) Se q verifica a propriedade de simetria; isto é,

$$q(x,y) = q(y,x), \quad x,\, y \in X,$$

então q é uma distância em X.

Observação 1.1.2. Na literatura a definição de quase-distância é também conhecida como quase-pseudométrica ou quase-métrica, veja por exemplo [2, 31, 47, 63]. Vale ressaltar que Künzi em [46] considera que uma aplicação $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ é uma quase-métrica se ela verifica a desigualdade triangular e $q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, no lugar do axioma (1) da Definição 1.1.1. Em particular, Brattka [22] apresenta o seguinte exemplo: Seja a aplicação $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$q(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{se } x > y, \\ 0 & \text{se } x \leq y, \end{cases}$$

note-se que,

$$q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Porém, se $x < y$, obtem-se

$$q(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad q(y,x) = y - x > 0.$$

Portanto, q não verifica o axioma (1) da Definição 1.1.

Alguns exemplos são apresentados a seguir para ilustrar este conceito.

Exemplo 1.1.1. [27] A aplicação $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq y, \\ 1 & \text{se } x > y, \end{cases}$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.2. Raffi em [33] considera que uma função $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é uma **norma assimétrica** em $\mathbb{R}^n$ se, para todo $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$, p verificam-se as seguintes condições:

a) $p(x) = p(-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

b) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Logo, a aplicação q, definida por

$$q(x,y) := p(x - y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}^n$. Observe-se que, se a aplicação p verifica b) e c), p define uma **norma de Minkowski**.

Exemplo 1.1.3. [32] Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in \text{int}(C)$. Então, a aplicação q, definida por

$$q(x, y) = \inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha C\}, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}^n$. Primeiro note que a aplicação q está bem definida sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, porque C é uma vizinhança de 0. Além disso, a verificação do axioma 1 da Definição 1.1.1 segue, diretamente, da definição de q. Mais ainda, usando a convexidade de C, verifica-se que

$$q(x, y) \leq q(x, y) + q(y, z)$$

para $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$. Note que, a função $\inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha C\}$ é, conhecida na literatura como a função **Gauge** do conjunto C.

Exemplo 1.1.4. [32] Sejam a_i e $b_i \in \mathbb{R}_+$, onde $i = 1, ..., n$. Então, para cada $i = 1, ..., n$, a aplicação $q_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$q_i(x, y) = \begin{cases} b_i(y - x), & \text{se } x \leq y, \\ a_i(x - y), & \text{se } x > y, \end{cases}$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}$; de fato, como o Axioma 1 da Definição 1.1.1 é direto, provaremos a desigualdade triangular:

1. Se $x \leq y \leq z$: $q_i(x, y) = b_i(y - x) = b_i(z - x) - b_i(z - y) \leq q_i(x, z) + q_i(z, y)$;
2. Se $x < z < y$: $q_i(x, y) = b_i(y - x) = b_i(z - x) + b_i(z - y) = q_i(x, z) + q_i(z, y)$;
3. Se $z < y < x$: $q_i(x, y) = a_i(x - y) = a_i(x - z) - a_i(y - z) \leq q_i(x, z) + q_i(z, y)$;
4. Se $z < x < y$: $q_i(x, y) = b_i(y - x) = -b_i(x - z) + b_i(y - z) \leq q_i(x, z) + q_i(z, y)$;
5. Se $y < x < z$: $q_i(x, y) = a_i(x - y) = -a_i(z - x) + a_i(z - y) \leq q_i(x, z) + q_i(z, y)$;
6. Se $y < z < x$: $q_i(x, y) = a_i(x - y) = a_i(x - z) + a_i(z - y) = q_i(x, z) + q_i(z, y)$;

para cada $i = 1, ..., n$. Do mesmo modo a aplicação $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x, y),$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}^n$. De fato, a verificação do axioma 1 da Definição 1.1.1 segue, diretamente, da definição de q, e para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} q_i(x,y) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} [q_i(x,z) + q_i(z,y)] \\ &= q(x,z) + q(z,y), \end{aligned}$$

por conseguinte q é uma quase-distância. Esta quase-distância verifica a propriedade de que existem constantes positivas c_1 e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x-y\| \leq q(x,y) \leq c_2\|x-y\|, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

útil em alguns desenvolvimentos teóricos. Realmente, ao considerar $\overline{a} = \min\limits_{i=1,\dots,n} \{a_i, b_i\}$ e $\overline{b} = \max\limits_{i=1,\dots,n} \{a_i, b_i\}$ tem-se que

$$\overline{a}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq q(x,y) \leq \overline{b}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

e basta lembrar que $\|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ e a norma usual $\|\cdot\|$ são equivalentes.

Exemplo 1.1.5. [47] Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma função injetiva. Então a aplicação $q_g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$q_g(x,y) = \max\{g(x) - g(y), 0\},$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.6. [32] Sejam $\mu > 0$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. Então, a aplicação $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definida por

$$q(x,y) = \max\{g(x) - g(y), \mu\|x-y\|\},$$

é uma quase-distância em $\mathbb{R}^n$. De fato, da definição de q resulta que

$$q(x,y) = q(y,x) = 0 \iff x = y.$$

Além disso, note que:

1. Se $q(x,y) = g(x) - g(y)$, então

$$\begin{aligned} q(x,y) &= g(x) - g(z) + g(z) - g(y) \\ &\leq \max\{g(x) - g(z), \mu\|x - z\|\} + \max\{g(z) - g(y), \mu\|z - y\|\} \\ &= q(x,z) + q(z,y) \end{aligned}$$

2. Se $q(x,y) = \mu\|x - y\|$, então

$$\begin{aligned} q(x,y) &\leq \mu\|x - z\| + \mu\|z - y\| \\ &\leq \max\{g(x) - g(z), \mu\|x - z\|\} + \max\{g(z) - g(y), \mu\|z - y\|\} \\ &= q(x,z) + q(z,y). \end{aligned}$$

Assim

$$q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y), \quad x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n.$$

Neste trabalho serão consideradas as quase-distâncias q em $\mathbb{R}^n$ que verificam as seguintes condições:

i) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|x - y\| \leq q(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

ii) Existe $\beta > 0$ tal que

$$q(x,y) \leq \beta\|x - y\|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Note que a quase-distância apresentada no Exemplo 1.1.4 verifica (1.1) e (1.2) com $\alpha = c_1$ e $\beta = c_2$, respectivamente, e a quase-distância apresentada no Exemplo 1.1.6 verifica (1.2) com $\alpha = \mu$.

Observação 1.1.3. As quase-distâncias não verificam a condição (1.1) nem (1.2) em geral. De fato, se $n = 1$ e $g(x) = e^x$, no Exemplo 1.1.5, então

$$q_g(x,y) = \max\{e^x - e^y, 0\}$$

e para cada x e $y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, resulta que $q_g(x,y) = 0$. Portanto, não existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|x - y\| \leq q_g(x,y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se (1.2) é verificada, então para $0 < x$, tem-se $q(x,0) = e^x - 1$, assim $\frac{e^x-1}{x} \leq \beta$ para todo $x > 0$. Mas

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty.$$

Portanto, não existe $\beta > 0$ tal que verifique (1.2) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A definição a seguir lembra vários conceitos úteis para este trabalho.

Definição 1.1.2. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função e A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1. A **função indicadora** $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ do A é dada por

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A, \\ +\infty, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

2. O **Epígrafo** de f é dado por

$$\text{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \, : \, f(x) \leq \alpha\}.$$

3. O **domínio efetivo** de f, $\text{dom}\,(f)$, é dado por

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\};$$

4. f é **convexa** se, e somente se, para todo $x,\ y \in \text{dom}\,(f)$ e todo $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

5. f é **côncava** se, e somente se, $-f$ é convexa;

6. f é **coerciva** se e somente se

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

7. f é **Lipschitz** em $A \subseteq \text{dom}(f)$ se e somente se existe $\mathcal{L} > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathcal{L}\|x - y\|, \quad x,\ y \in A$$

8. f é **localmente Lipschitz** em $A \subseteq \text{dom}(f)$ se e somente se, para cada $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f \text{ é Lipschitz em } B(x, \epsilon) \cap A.$$

Observação 1.1.4. Note que a função gerada por uma quase-distância, com algum de seus argumentos fixos, não é necessariamente convexa nem coerciva em geral. Por exemplo, seja a quase-distância q definida no Exemplo 1.1.1, isto é

$$q(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq y, \\ 1, & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Para $x = \overline{z} = -1$, $y = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$\begin{aligned} q(\lambda x + (1-\lambda)y, \overline{z}) = q(0,-1) = 1, \\ q(x,\overline{z}) = q(-1,-1) = 0, \\ q(y,\overline{z}) = q(1,-1) = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$q(\lambda x + (1-\lambda)y, \overline{z}) = 1 > \frac{1}{2} = \lambda q(x,\overline{z}) + (1-\lambda)q(y,\overline{z}),$$

o que implica na não convexidade da $q(\cdot,\overline{z})$.

De forma análoga prova-se que $q(\overline{z},\cdot)$ também não é uma função convexa. Basta considerar $x = -1$, $y = \overline{z} = 0$, e $\lambda = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, da definição da q tem-se

$$q(x,y) \leq 1, \quad x,\, y \in \mathbb{R},$$

o que implica na não coercividade das funções $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ e $q(\overline{z},\,\cdot\,)$.

No entanto, existem quase-distâncias que são tanto convexas quanto coercivas. Nos próximos exemplos mostra-se esta particularidade.

Exemplo 1.1.7. Sejam q a quase-distância definida no Exemplo 1.1.4 e $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$. Então, a função $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ é convexa. De fato, visto que

$$q(x,\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i,\overline{z}_i) = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{b_i(\overline{z}_i - x_i), a_i(x_i - \overline{z}_i)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

o máximo de funções convexas é convexa e a soma finita de funções convexas também é convexa, segue o resultado.

Analogamente, prova-se que $q(\overline{z},\,\cdot\,)$ é uma função convexa.

Além disso, do fato de que a quase-distância q verifica a condição (1.1), isto é, existe $c_1 > 0$ tal que

$$c_1\|x - y\| \leq q(x,y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

conclui-se que $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ e $q(\overline{z},\,\cdot\,)$ são funções coercivas.

Exemplo 1.1.8. Sejam q a quase-distância definida no Exemplo 1.1.5 e $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$. Se

g é uma função convexa, então as funções

$$q_g(\,\cdot\,,\overline{z}) = \max\{g(\,\cdot\,) - g(\overline{z}), 0\} \quad \text{e} \quad q_g(\overline{z},\,\cdot\,) = \max\{g(\overline{z}) - g(\,\cdot\,), 0\},$$

são convexa e côncava, respectivamente.

Observação 1.1.5. Seja $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$. Se q é uma quase-distância que verifica a condição (1.1), então $q(\overline{z},\,\cdot\,)$, $q^2(\overline{z},\,\cdot\,)$, $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ e $q^2(\,\cdot\,,\overline{z})$ são funções coercivas.

O resultados que seguem estabelecem quando uma função definida a partir de uma quase-distância é Lipschitz e/ou localmente Lipschitz.

Proposição 1.1.1. *Seja $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância que verifica (1.2). Então, para cada $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$, as funções $q(\overline{z},\,\cdot\,)$ e $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ são lipschitzianas em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Do Axioma (2) tem-se que

$$q(\overline{z}, x) \leq q(\overline{z}, y) + q(y, x), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,$$

ou equivalentemente,

$$q(\overline{z}, x) - q(\overline{z}, y) \leq q(y, x), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

De forma análoga tem-se que

$$-\,q(x, y) \leq q(\overline{z}, x) - q(\overline{z}, y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Logo, de (1.3) e (1.4) obtém-se que

$$|q(\overline{z}, x) - q(\overline{z}, y)| \leq \max\{q(x, y), q(y, x)\} \leq q(x, y) + q(y, x).$$

Por outro lado, desde que q verifica a condição (1.2), existe $\mathcal{L} = 2\beta > 0$ tal que

$$|q(\overline{z}, x) - q(\overline{z}, y)| \leq \mathcal{L}\|x - y\|, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, se conclui que $q(\overline{z}, \cdot)$ é lipschitziana.

De forma análoga prova-se que a função $q(\,\cdot\,,\overline{z})$ é lipschitziana. □

Proposição 1.1.2. *Seja $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância que verifica (1.2). Então, para cada $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$, as funções $q^2(\overline{z},\,\cdot\,)$ e $q^2(\,\cdot\,,\overline{z})$ são localmente lipschitzianas em $\mathbb{R}^n$, onde $q^2(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := (q(\,\cdot\,,\,\cdot\,))^2$.*

Demonstração. Considere $\overline{x} \in \operatorname{dom}\,(q^2(\overline{z},\,\cdot\,)) = \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Afirma-se que para cada $w \in B(\overline{x}, \epsilon)$, existe $K_{\overline{x}} > 0$ tal que $|q(\overline{z}, w)| \leq K_{\overline{x}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|q(\overline{z}, w)| = |q(\overline{z}, w) - q(\overline{z}, \overline{z})| &\leq \mathcal{L}\|w - \overline{z}\| \\
&= \mathcal{L}\|w - \overline{x} + \overline{x} - \overline{z}\| \\
&\leq \mathcal{L}\left(\|w - \overline{x}\| + \|\overline{z} - \overline{x}\|\right) \\
&\leq \mathcal{L}\left(\epsilon + \|\overline{z} - \overline{x}\|\right).
\end{aligned}$$

Como $\overline{x}$ e $\overline{z}$ são fixados, pode-se definir a constante

$$K_{\overline{x}} := \mathcal{L}\left(\epsilon + \|\overline{z} - \overline{x}\|\right)$$

e assim se estabelece a afirmação.

Por outro lado, para quaisquer x, $y \in B(\overline{x}, \epsilon)$, da Proposição 1.1.1, se segue que

$$\begin{aligned}
|q^2(\overline{z}, x) - q^2(\overline{z}, y)| &= |q(\overline{z}, x) + q(\overline{z}, y)|\,|q(\overline{z}, x) - q(\overline{z}, y)| \\
&\leq 2K_{\overline{x}}\mathcal{L}\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Assim, como $\overline{x}$ é arbitrário, conclui-se que $q^2(\overline{z}, \cdot\,)$ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, com constante de Lipschitz $2K_{\overline{x}}\mathcal{L}$.

De forma análoga prova-se que a função $q^2(\,\cdot\,, \overline{z})$ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^n$. □

O resultado que segue diz respeito à soma de funções é coerciva.

Proposição 1.1.3. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função, $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma quase-distância, $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Se f é limitada inferiormente e $q^2(\overline{z}, \cdot\,)$ é coerciva, então a função $f + \frac{1}{\lambda}q^2(\overline{z}, \cdot\,)$ é coerciva.*

Demonstração. Já que f é limitada inferiormente, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta + \frac{1}{\lambda}q^2(\overline{z}, x) \leq \left(f + \frac{1}{\lambda}q^2(\overline{z}, \cdot\,)\right)(x). \tag{1.5}$$

Assim, desta desigualdade, tem-se que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \left(f + \frac{1}{\lambda}q^2(\overline{z}, \cdot\,)\right)(x) = +\infty. \quad □$$

Observação 1.1.6. Se q verifica a condição (1.2), a Proposição 1.1.2 implica que a função $q^2(\overline{z}, \cdot\,)$ é localmente lipschitziana, o que por sua vez junto com a semicontinuidade inferior de f implica na semicontinuidade inferior de $f + \frac{1}{\lambda}q^2(\overline{z}, \cdot\,)$.

O próximo resultado é uma consequência do Rockafellar e Wets [62, Teorema 1.9], o qual mostra que, sob certas condições, o conjunto de minimizadores de uma função é não vazio.

Teorema 1.1.1. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função semicontínua inferior, coerciva e própria. Então*

$$-\infty < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Além disso,

$$\arg\min \left\{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

é não vazio e compacto.

1.2 Teoria subdiferencial

Devido a que neste trabalho são consideradas funções não necessariamente convexas nem diferenciáveis, é necessário estabelecer com que tipo de generalizações dos subdiferenciais serão estabelecidos e/ou obtidos os resultados desta tese. Estes fatos podem ser encontrados em diversos livros de análise variacional, tais como em Borwein e Zhu [21], Mordukhovich [54], Rockafellar e Wets [62] e Schirotzek [64].

Definição 1.2.1. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferior.

1. O **subdiferencial Fréchet** de f em x, $\widehat{\partial} f(x)$, é dado por:

$$\widehat{\partial} f(x) := \begin{cases} \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \liminf\limits_{\substack{y \neq x \\ y \to x}} \frac{f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|x - y\|} \geq 0 \right\}, & \text{se } x \in \operatorname{dom}(f), \\ \\ \emptyset, & \text{se } x \notin \operatorname{dom}(f); \end{cases}$$

2. O **subdiferencial-limite** de f em x, $\partial f(x)$, é dado por

$$\partial f(x) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \exists\, x_n \to x,\ f(x_n) \to f(x),\ \widehat{\partial} f(x_n) \ni x_n^* \to x^* \right\};$$

3. O **gráfico** do operador $\partial f : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, é dado por

$$\operatorname{Graf}(\partial f) := \left\{ (\overline{x}, x^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x^* \in \partial f(\overline{x}) \right\}.$$

4. O conjunto dos pontos **críticos-limite** de f, é dado por

$$\operatorname{crit}(f) := \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \in \partial f(\overline{x}) \right\}.$$

Observação 1.2.1. Da definição acima obtém-se que $\widehat{\partial} f(x)$ é um conjunto convexo e fechado, enquanto que $\partial f(x)$ é fechado. Mais ainda,

$$\widehat{\partial} f(x) \subset \partial f(x), \quad \forall\, x.$$

Note que quando f é uma função convexa ou é dada pelo máximo de uma coleção finita de funções diferenciáveis, tem-se as seguintes caracterizações para os subdiferenciais Fréchet e limite.

Proposição 1.2.1. [62, Proposição 8.12] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa e própria, e $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f)$. Então,*

$$\partial f(\overline{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle v, x - \overline{x}\rangle\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,\} = \widehat{\partial} f(\overline{x}).$$

Proposição 1.2.2. [62, pág. 321] *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função dada por:*

$$f = \max\{f_1, ..., f_m\} \quad \textit{com} \quad f_i \in C^1(\mathbb{R}^n).$$

Então,

$$\partial f(\overline{x}) = \operatorname{conv}\{\nabla f_i(\overline{x}) \,:\, i \in I(\overline{x})\}\,,$$

onde $I(\overline{x}) = \{i \in \{1, ..., m\} \,:\, f(\overline{x}) = f_i(\overline{x})\}$.

São apresentados a seguir alguns exemplos que ilustram os conceitos de subdiferenciais Fréchet e limite.

Exemplo 1.2.1. Seja $f = \delta_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por

$$\delta_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1]\,, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$\widehat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x < 0, \\ (-\infty, 0]\,, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \in (0,1)\,, \\ [0, +\infty)\,, & \text{se } x = 1, \\ \emptyset, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Exemplo 1.2.2. [21, Exemplo 3.1.5]

1. Se $f(x) = \sqrt{|x|}$, então

$$\widehat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, & \text{se } x \neq 0, \\ (-\infty, +\infty)\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

2. Se $f(x) = \max\{\, x\,, 0\}$, então

$$\widehat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ \operatorname{conv}\{1, 0\}\,, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.2.3. [21, Exemplo 5.2.23] Se $f(x) = |\, x\,|$, então

$$\widehat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \\ [-1, 1]\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\widehat{\partial}(-f)(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x > 0, \\ 1, & \text{se } x < 0, \\ \emptyset, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$\partial\,(-f)\,(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x > 0, \\ 1, & \text{se } x < 0, \\ \{-1, 1\}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.2.4. [62, pág. 304] Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas, respectivamente, por

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que, f_1 e f_2 são diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\widehat{\partial} f_1(0) = \widehat{\partial} f_2(0) = \{0\}.$$

Porém,

$$\partial f_1(0) = [-1, 1] \quad \text{e} \quad \partial f_2(0) = (-\infty, \infty).$$

Exemplo 1.2.5. [62, Exemplo 8.53] Sejam $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e Ω um subconjunto não vazio e fechado de $\mathbb{R}^n$. Seja a distância de $\overline{x}$ a Ω, definida por

$$\operatorname{dist}(\overline{x}, \Omega) = \inf\{\|x - y\| \,:\, y \in \Omega\}\,.$$

Se $\overline{x} \notin \Omega$, então o subdiferencial Fréchet neste ponto é dado por

$$\widehat{\partial}\left(\operatorname{dist}(\,\cdot\,,\Omega)\right)(\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\overline{x}-\overline{w}}{\|\overline{x}-\overline{w}\|}, & \text{se } \operatorname{proj}_{\Omega}(\overline{x}) = \{\overline{w}\}, \\ \\ \emptyset, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e o subdiferencial limite neste ponto é dado por

$$\partial\left(\operatorname{dist}(\,\cdot\,,\Omega)\right)(\overline{x}) = \frac{\overline{x}-\operatorname{proj}_{\Omega}(\overline{x})}{\operatorname{dist}(\overline{x},\Omega)},$$

onde $\operatorname{proj}_{\Omega}(\,x\,)$ denota a projeção de x sobre Ω.

Os resultados que se seguem dizem respeito às condições necessárias de otimalidade em termos dos subdiferenciais Fréchet e limite do seguinte problema de otimização

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Teorema 1.2.1. [62, Teorema 10.1] *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ uma função própria e $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f)$. Se $\overline{x}$ é um mínimo local de f, então*

$$0 \in \widehat{\partial} f(\overline{x}) \quad e \quad 0 \in \partial f(\overline{x}).$$

Observe que a recíproca do resultado acima é válida quando f é uma função convexa.

Um resultado importante sobre a limitação do subdiferencial limite de funções localmente lipschitzianas é apresentado a continuação.

Proposição 1.2.3. [54, Corolário 1.81] *Seja φ localmente lipschitz em $\overline{x}$ com constante de lipschitz $\ell \geq 0$. Então*

$$\|x^*\| \leq \ell \qquad \forall\, x^* \in \partial\varphi(\overline{x}).$$

Para finalizar esta parte, são apresentados resultados referentes ao subdiferencial limite da soma e do produto de funções. Tais propriedades podem ser encontradas em Mordukhovich e Shao [55], Mordukhovich[54] e Rockafellar e Wets [62].

Proposição 1.2.4. [62] *Sejam $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i = 1, 2$. Se f_1 é localmente lipschitziana em $\overline{x}$ e f_2 é semicontinua inferior, com $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f_2)$, então*

$$\partial\,(f_1 + f_2)\,(\overline{x}) \subset \partial f_1(\overline{x}) + \partial f_2(\overline{x}).$$

Proposição 1.2.5. [55, Teorema 7.1] *Sejam* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. *Se* f_1 *e* f_2 *são localmente lipschitzianas em* $\overline{x}$, *então*

$$\begin{aligned} \partial(f_1.f_2)(\overline{x}) &= \partial\left(f_2(\overline{x})f_1 + f_1(\overline{x})f_2\right)(\overline{x}) \\ &\subset \partial\left(f_2(\overline{x})f_1\right)(\overline{x}) + \partial\left(f_1(\overline{x})f_2\right)(\overline{x}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, se f_1 *e* f_2 *são funções não negativas, então*

$$\partial\left(f_2(\overline{x})f_1\right)(\overline{x}) + \partial\left(f_1(\overline{x})f_2\right)(\overline{x}) = f_2(\overline{x})\,\partial f_1(\overline{x}) + f_1(\overline{x})\,\partial f_2(\overline{x}).$$

Nesta parte, denota-se:

$$x \xrightarrow{\Omega} \overline{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x \to \overline{x} \quad \text{com} \quad x \in \Omega$$

Definição 1.2.2. [54] Seja Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$.

1. Dados $x \in \Omega$ e $\epsilon \geq 0$, o conjunto dos **ϵ-normais** de Ω em x, $\widehat{N}_\epsilon(x; \Omega)$, é dado por:
$$\widehat{N}_\epsilon(x;\Omega) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \leq \epsilon \right\}. \tag{1.7}$$
Quando $\epsilon = 0$, este conjunto é conhecido como **cone pré-normal** de Ω em x, denotado por $\widehat{N}(x; \Omega)$, e seus elementos são chamados **normais Fréchet**. Se $x \notin \Omega$, define-se $\widehat{N}_\epsilon(x;\Omega) := \emptyset$ para todo $\epsilon \geq 0$.

2. Seja $\overline{x} \in \Omega$. O **cone normal básico** ou **limite** de Ω em $\overline{x}$, $N(\overline{x}; \Omega)$, é dado por:
$$N(\overline{x};\Omega) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \exists\, \epsilon_k \downarrow 0 \;\; x_k \xrightarrow{\Omega} \overline{x},\; x_k^* \in \widehat{N}_{\epsilon_k}(x_k;\Omega) \to x^* \right\} \tag{1.8}$$
e seus respectivos elementos são chamados de **normais básicos** ou **limites**. Se $\overline{x} \notin \Omega$, define-se $N(\overline{x};\Omega) := \emptyset$.

Prossegue-se com o conceito do subdiferencial singular.

Definição 1.2.3. [64] Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferior. O **subdiferencial singular** de f em x, $\partial^\infty f(x)$, é dado por:

$$\partial^\infty f(x) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : (x^*, 0) \in N\left(\,(x, f(x)); \operatorname{epi}(f)\,\right)\right\}.$$

Proposição 1.2.6. [54, Proposição 1.79] *Seja* Ω *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}^n$. *Então para qualquer* $\overline{x} \in \Omega$ *tem-se que*

$$\partial \delta_\Omega(\overline{x}) = \partial^\infty \delta_\Omega(\overline{x}) = N(\overline{x};\Omega).$$

Proposição 1.2.7. [64, Proposição 13.1.7] *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in D$. Assuma que para alguma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\overline{x}$ o conjunto $D \cap \mathcal{U}$ é convexo. Então*

$$\widehat{N}(\overline{x};\Omega) = N(\overline{x};\Omega) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leq 0 \quad \forall\, x \in D \cap \mathcal{U}\}\,.$$

Proposição 1.2.8. [64, Proposição 13.5.5] *Sejam $f_1, ..., f_m \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funções semicontínuas inferiores, e seja $\overline{x} \in \cap_{i=1}^m \mathrm{dom}\,(f_i)$. Assuma também que a seguinte Condição de Qualificação $(\mathcal{Q})$ é verificada*

$$(\mathcal{Q})\;\; [x_i^* \in \partial^\infty f_i(\overline{x}),\; i = 1, \ldots, m \text{ e } x_1^* + \cdots + x_m^* = 0] \implies x_1^* = \cdots = x_m^* = 0.$$

Então

$$\partial\,(f_1 + \cdots + f_n)\,(\overline{x}) \subset \partial f_1(\overline{x}) + \cdots + \partial f_m(\overline{x}).$$

Observação 1.2.2. Note-se que a condição de qualificação $(\mathcal{Q})$ é verificada quando:

1. [60] Dadas f_1, f_2 funções semicontínuas inferiores, convexas e próprias e $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,(f_1) \cap \mathrm{dom}\,(f_2)$:

   - Se f_1 é finita e contínua em algum $a \in \mathrm{dom}\,(f_2)$; ou
   - Se $0 \in \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\,(f_1) - \mathrm{dom}\,(f_2))$.

   Então tem-se a condição $(\mathcal{Q})$:

   $$\partial^\infty f_1(\overline{x}) \cap (-\partial^\infty f_2(\overline{x})) = \{0\}.$$

2. [64] Considere o seguinte problema

   $$\min_{x \in \cap_{i=1}^r A_i} f(x)$$

   onde f é localmente lipschitziana em $\overline{x}$ e $A_i := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f_i(x) \leq 0\}$, $i = 1, ..., r$, com $f_i \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estritamente diferenciável em $\overline{x} \in \cap_{i=1}^r A_i$. Se a condição de Mangasarian-Fromowitz:

   $$f_1'(\overline{x}), ..., f_r'(\overline{x}) \text{ são positivamente linearmente independentes,}$$

   é verificada, tem-se que neste caso a condição $(\mathcal{Q})$ é verificada e tem a seguinte caracterização:

   $$(\mathcal{Q}) \quad [x_i^* \in N(A_i : \overline{x}), \quad x_1^* + \cdots + x_r^* = 0 \implies x_1^* = \cdots = x_r^* = 0]\,.$$

A continuação apresenta-se um resultado técnico útil com respeito às series positivas, uma prova deste fato pode ser encontrada em Bento *et al.* [13].

Lema 1.2.1. *Seja* $\{a_k\}$ *uma sequencia de números positivos tais que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{a_{k-1}} < +\infty.$$

Então, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$.

1.3 A desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz

Nesta seção é lembrada a caracterização da desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz [48, 52] no contexto do subdiferencial limite, como foi apresentada por Attouch *et al.* em [8], Absil *et al.* em [1], Attouch e Bolte em [7] e Bolte *et al.* em [19].

Antes é necessário definir os seguintes conjuntos.

Seja $\overline{r} \in (0, +\infty]$. Define-se:

$$\mathcal{K}(0, \overline{r}) := \left\{\phi \in C[0, \overline{r}) \cap C^1(0, \overline{r}) : \phi(0) = 0 \text{ e } \phi'(r) > 0, \forall r \in (0, \overline{r})\right\},$$

onde $C[0, \overline{r})$ denota o conjunto das funções contínuas em $[0, \overline{r})$ e $C^1(0, \overline{r})$ denota o conjunto das funções continuamente diferenciáveis em $(0, \overline{r})$.

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferior e $\eta_1 < \eta_2 \leq +\infty$. Define-se:

$$[\eta_1 < f < \eta_2] := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \eta_1 < f(x) < \eta_2\}.$$

Definição 1.3.1. Diz-se que uma função f verifica a **propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz** em $\overline{x} \in \operatorname{dom}(\partial f)$ se existem $\eta \in (0, +\infty]$, uma vizinhança de $\overline{x}$, $\mathcal{U}$, uma função $\varphi \in \mathcal{K}(0, \eta)$ côncava, tais que a **desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz** dada abaixo

$$\varphi'\left(f(x) - f(\overline{x})\right) \operatorname{dist}\left(0, \partial f(x)\right) \geq 1, \tag{1.9}$$

é satisfeita para todo $x \in \mathcal{U} \cap [f(\overline{x}) < f < f(\overline{x}) + \eta]$.

Observação 1.3.1. Em particular, na definição acima, se $f|_{\operatorname{dom}(f)}$, a restrição da f ao $\operatorname{dom}(f)$, é contínua e

$$\varphi(s) := s^{1-\theta}, \quad \theta \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right),$$

então recupera-se a chamada desigualdade de Łojasiewicz. De fato, suponha que f verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz em $\overline{x} \in \operatorname{dom}(\partial f)$. Então para cada

$x \in \overline{B}(\overline{x}, \epsilon) \cap [f(\overline{x}) < f < f(\overline{x}) + r_0]$ e $\xi \in \partial f(x)$, a desigualdade (1.9) implica que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \varphi'\left(f(x) - f(\overline{x})\right) \|\xi\| \\ &\leq \left|(1-\theta)\left(f(x) - f(\overline{x})\right)^{-\theta}\right| \|\xi\| \\ &\leq \left|\left(f(x) - f(\overline{x})\right)^{-\theta}\right| \|\xi\|, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$|f(x) - f(\overline{x})|^{\theta} \leq \|\xi\|$$

Note que esta é a caracterização usada por Łojasiewicz [52], Absil *et al.* [1] e Attouch e Bolte [7].

Recentemente Attouch *et al.* em [8] provaram que uma função própria semicontínua inferior verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz em qualquer ponto que não é crítico. A continuação apresentamos uma prova deste resultado, extraida de Bento *et al.* [13]

Lema 1.3.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferior e $\overline{x} \in \operatorname{dom}(\partial f)$ tal que $0 \notin \partial f(\overline{x})$. Então, a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz é verificada em $\overline{x}$.*

Demonstração. Desde que $\overline{x} \notin \operatorname{crit}(f)$ e $\partial f(\overline{x})$ é um conjunto fechado, tem-se que

$$\delta := \operatorname{dist}(0, \partial f(\overline{x})) > 0.$$

Considere $\varphi(t) := \frac{t}{\delta}$, $\mathcal{U} := B(\overline{x}, \frac{\delta}{2})$, $\eta := \frac{\delta}{2}$ e note que para cada $x \in \operatorname{dom}(\partial f)$,

$$\varphi'\left(f(x) - f(\overline{x})\right) \operatorname{dist}(0, \partial f(\overline{x})) = \frac{\operatorname{dist}(0, \partial f(x))}{\delta} \tag{1.10}$$

Agora, para cada $x \in \mathcal{U} \cap [f(\overline{x}) - \eta < f < f(\overline{x}) + \eta]$ arbitrario, note que

$$\|x - \overline{x}\| + |f(x) - f(\overline{x})| < \delta.$$

Estabelece-se que, para cada x verificando a ultima desigualdade, verifica-se

$$\operatorname{dist}(0, \partial f(x)) \geq \delta. \tag{1.11}$$

Suponhamos por contradição, que este fato no é verificado. Então, existe as sequencias $\left\{(y^k, v^k)\right\} \subset \operatorname{Graf}(\partial f)$ e $\{\delta^k\} \subset \mathbb{R}_{++}$ tais que

$$\|y^k - \overline{x}\| + |f(y^k) - f(\overline{x})| < \delta^k \quad \text{e} \quad \|v^k\| \leq \delta^k,$$

com $\{\delta^k\}$ convergindo ao zero. Assim, desde que

$$\lim_{k\to+\infty}(y^k, v^k) = (\overline{x}, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} f(y^k) = f(\overline{x})$$

e desde que ∂f é uma aplicação fechada, segue-se que $\overline{x} \in \operatorname{crit}(f)$, o qual é uma contradição. Portanto o resultado do Lema segue-se por combinar (1.10) com (1.11). □

Na literatura são encontrados os seguintes exemplos de funções que verificam a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz.

Exemplo 1.3.1. [7, 8, 52] A propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz é verificada por:

1. Funções analíticas reais, isto é, funções C^∞ que coincidem com a sua série de Taylor na vizinhança de cada ponto.

2. Funções semialgébricas, isto é, funções cujos gráficos podem ser expressos como

$$\bigcup_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, P_{ij}(x) = 0,\, Q_{ij}(x) > 0\},$$

onde $P_{ij},\, Q_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são polinômios para todo $i = 1, \cdots, p$ e $j = 1, \cdots, q$.

3. Funções convexas que satisfazem a condição seguinte:

Para cada $\widehat{x} \in \arg\min(f)$, existem $C > 0$, $r \geq 1$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$f(x) \geq f(\widehat{x}) + C \operatorname{dist}\left(x, \arg\min(f)\right)^r, \qquad x \in \overline{B}(\widehat{x}, \epsilon).$$

Em particular, as funções fortemente convexas, verificam esta propriedade.

4. Funções "definable" em uma estrutura o-minimal.

5. Funções de Morse.

Exemplo 1.3.2. [8] Diz-se que uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **metricamente regular** em $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, se existem uma vizinhança de $\overline{x}$, $\mathcal{V}$, uma vizinhança de $F(\overline{x})$, $\mathcal{W}$, e $k > 0$ tais que

$$\operatorname{dist}\left(x, F^{-1}(y)\right) \leq k \operatorname{dist}\left(y, F(x)\right) \qquad \forall\, x \in \mathcal{V},\, \forall\, y \in \mathcal{W}.$$

Assim, considerando D um subconjunto não vazio, fechado e convexo de $\mathbb{R}^n$, F é C^1 em uma vizinhança de $\overline{x}$ e definindo

$$f(x) := \frac{1}{2}\operatorname{dist}^2\left(F(x), D\right),$$

Attouch *et al.* [8] provaram que f verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz em todos os pontos $\overline{x}$ onde F é metricamente regular, para $\varphi : s \in [0, +\infty) \mapsto k'\sqrt{2s}$, com $k' > k$ constante positiva fixa.

Observação 1.3.2. Note que as funções convexas não verificam necessariamente a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz. De fato, Bolte *et al.* em [19, Teorema 36], mostraram que existe uma função convexa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, com $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = 0$, que não verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz. Por outro lado, Absil *et al.* [1], consideraram a seguinte função C^∞ definida em coordenadas polares,

$$f(r,\theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} \left[1 - \frac{4r^4}{4r^4+(1-r^2)^4} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{1}{1-r^2}\right)\right], & \text{se } r < 1, \\ \\ 0, & \text{se } r \geq 1, \end{cases} \tag{1.12}$$

para mostrar que a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz não é verificada no conjunto

$$\left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(r,\theta) = 0\right\}.$$

De fato, para todo $\overline{r} > 0$, não existe $\psi : (0, \overline{r}) \to (0, +\infty)$ estritamente crescente e $C^1(0, \overline{r})$ tal que

$$\|\nabla\left(\psi \circ f\right)(x)\| \geq 1,$$

para valores positivos de $f(x)$ próximos de 0.

Para maiores informações sobre exemplos e aplicações da propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz em contextos mais gerais, veja por exemplo Bolte *et al.* [18], Bolte *et al.* [19] e Attouch *et al.* [8].

Capítulo 2

Um algoritmo proximal com quase-distância

Neste capítulo considera-se o seguinte **Problema de minimização**:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x), \tag{2.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função própria e semicontínua inferior.

Vale ressaltar que f não é necessariamente convexa, e no decorrer deste capítulo serão consideradas as seguintes hipóteses:

$(\mathcal{H}_1)$ $-\infty < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$;

$(\mathcal{H}_2)$ f é contínua em $\operatorname{dom}(f)$.

A seguir, se propõe para este problema um algoritmo de ponto proximal com quase-distância, a qual faz o papel da regularização. Prova-se a boa definição deste algoritmo sob condições usuais de coercividade na regularização. Por outro lado, sob hipóteses adicionais, garante-se que a sequência gerada por este método converge para um ponto crítico-limite. Os resultados deste capítulo foram publicados em [32].

2.1 O algoritmo MPQD

A seguir é apresentado o método de ponto proximal com quase-distância, denotado por MPQD, o qual gera uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ via a seguinte recursão:

Algoritmo MPQD

---

1. Considere $x^0 \in \operatorname{dom}(f)$.

2. Dado x^k, encontrar x^{k+1} tal que

$$x^{k+1} \in \arg\min \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, u) \ : \ u \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2.2}$$

onde $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência positiva, com $\lambda_k \in (\lambda_-, \lambda_+) \subset \mathbb{R}_{++}$.

3. Se $x^{k+1} = x^k$, **PARE**.

Observação 2.1.1. Já que a função objetivo não é necessariamente convexa, o algoritmo apresentado acima é do tipo local, isto é, ele se restringe a explorar em uma vizinhança de algum ponto crítico-limite.

A proposição seguinte estabelece a boa definição do método acima. Antes são necessárias as seguintes hipóteses sobre a quase-distância q:

$(\mathcal{H}_{3a})$ q verifica a condição (1.1), isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \|x - y\| \leq q(x, y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n;$$

$(\mathcal{H}_{3b})$ q verifica a condição (1.2), isto é, existe $\beta > 0$ tal que

$$q(x, y) \leq \beta \|x - y\|, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n;$$

Proposição 2.1.1. *Se as hipóteses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_{3a})$ e $(\mathcal{H}_{3b})$ são verificadas, então a sequência $\{x^k\}$, gerada pelo* **Algoritmo MPQD***, está bem definida.*

Demonstração. Este resultado é consequência direta do Teorema 1.1.1. □

Na sequência são provadas algumas propriedades do algoritmo MPQD.

Proposição 2.1.2. *Seja $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQD**. *Então $\{f(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente.*

Demonstração. Da recursão (2.2), tem-se que

$$f(x^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, x^{k+1}) \leq f(x^k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Assim,

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k), \qquad k \in \mathbb{N},$$

o que implica que a sequência $\{f(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente. Ademais, este fato junto com a limitação inferior de f implicam na convergência de $\{f(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. □

Proposição 2.1.3. *Seja $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQD**. *Então, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^2(x^k, x^{k+1}) < +\infty$. Em particular*

$$\lim_{k\to+\infty} q(x^k, x^{k+1}) = 0.$$

Demonstração. De (2.3) e do fato de λ_k pertencer ao intervalo (λ_-, λ_+), obtém-se que

$$f(x^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_+} q^2(x^k, x^{k+1}) \leq f(x^k), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Somando-se então a desigualdade acima para $k = 1, \cdots, m$, resulta que

$$\sum_{k=0}^{m} q^2(x^k, x^{k+1}) \leq 2\lambda_+ \left[f(x^0) - f(x^{m+1})\right]. \tag{2.5}$$

Por outro lado, a hipótese de limitação inferior de f implica que

$$2\lambda_+ \left[f(x^0) - \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right] < \infty.$$

Assim, considerando o limite quando $m \to +\infty$ na expressão (2.5), estabelece-se o resultado.

Em particular, da convergência de $\sum_{k=0}^{+\infty} q^2(x^k, x^{k+1})$, segue diretamente que

$$\lim_{k\to+\infty} q(x^k, x^{k+1}) = 0.$$ □

Observe-se que a recursão (2.2) pode ser caracterizada em termos do subdiferencial-limite.

Proposição 2.1.4. *Se as hipóteses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_{3a})$ e $(\mathcal{H}_{3b})$ são verificadas, então existem $\xi^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$ e $\zeta^{k+1} \in \partial \left(q(x^k, \cdot)\right)(x^{k+1})$ tais que*

$$0 = \xi^{k+1} + \frac{q(x^k, x^{k+1})}{\lambda_k} \zeta^{k+1}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Visto que x^{k+1} verifica a condição de otimalidade de primeira ordem da função $f + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, \cdot)$, o Teorema 1.2.1 implica que

$$0 \in \partial \left(f + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1}).$$

Por outro lado, desde que $(\mathcal{H}_{3b})$ é verificada, a Proposição 1.1.1 garante que para $\overline{z} = x^k$, a função $\frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, \cdot)$ é localmente lipschitziana em x^{k+1}, que acrescido à semicontinuidade inferior de f à Proposição 1.2.4 resulta em

$$0 \in \partial f(x^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k} \partial \left(q^2(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Além disso, considerando $f_1 = f_2 = q(x^k, \cdot) \geq 0$ e $\overline{x} = x^{k+1}$ na Proposição 1.2.5, resulta que

$$\partial \left(q^2(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1}) \subset 2q(x^k, x^{k+1}) \partial \left(q(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Assim, combinando (2.7) com (2.8), obtém-se que

$$0 \in \partial f(x^{k+1}) + \frac{1}{\lambda_k} q(x^k, x^{k+1}) \partial \left(q(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1}).$$

Portanto, existem $\xi^{k+1} \in \partial f(x^{k+1})$ e $\zeta^{k+1} \in \partial \left(q(x^k, \cdot) \right) (x^{k+1})$ tais que (2.6) é verificada. □

Ao longo deste capítulo o conjunto de pontos de acumulação da sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ será denotado por $\omega(x^0)$. Assim, a proposição que segue trata de algumas propriedades referentes a ele.

Proposição 2.1.5. *Seja* $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQD**. *Se a hipótese* $(\mathcal{H}_2)$ *é verificada então:*

1. f *é finita e constante sobre* $\omega(x^0)$.
2. *Se* $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *é limitada, então* $\omega(x^0)$ *é um conjunto não vazio, compacto e conexo. Além disso,*

$$\lim_{k \to +\infty} \operatorname{dist} \left(x^k, \omega(x^0) \right) = 0. \tag{2.9}$$

Demonstração. 1) Se $\omega(x^0) = \emptyset$ o resultado é verdadeiro. Suponhamos que $\omega(x^0) \neq \emptyset$, pela Proposição 2.1.2 existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = \beta. \tag{2.10}$$

Agora considere $\overline{x} \in \omega(x^0)$, com $\{x^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ sendo a subsequência de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo a $\overline{x}$. Assim, a continuidade de f e (2.10) implicam que

$$f(\overline{x}) = \lim_{j\to+\infty} f(x^{k_j}) = \beta.$$

Como $\overline{x}$ é arbitrário, a prova está concluída.

2) A limitação de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e a continuidade de f implicam, diretamente, que $\omega(x^0)$ é um conjunto não vazio, compacto e conexo. Provemos agora (2.9). Suponha, por contradição, que existem $\gamma > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\operatorname{dist}\left(x^k, \omega(x^0)\right) > \gamma, \qquad k \geq n_0.$$

Considere $\widehat{x} \in \omega(x^0)$ e uma subsequência $\{x^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{l\to+\infty} x^{k_l} = \widehat{x}$. Consequentemente $\lim\limits_{l\to+\infty} \operatorname{dist}(x^{k_l}, \widehat{x}) = 0$, o que implica em

$$\lim_{l\to+\infty} \operatorname{dist}\left(x^{k_l}, \omega(x^0)\right) = 0,$$

pois $0 \leq \operatorname{dist}\left(x^{k_l}, \omega(x^0)\right) \leq \operatorname{dist}\left(x^{k_l}, \widehat{x}\right)$. Portanto existe $n_1 := n_1(\gamma) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{dist}\left(x^{k_l}, \omega(x^0)\right) < \gamma, \qquad l \geq n_1.$$

Porém, considerando $l \geq n_1$ tal que $k_l \geq n_0$, tem-se que

$$\operatorname{dist}\left(x^{k_l}, \omega(x^0)\right) < \gamma,$$

o que é uma contradição. Segue portanto o resultado. □

Observação 2.1.2. Embora se suponha que a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto não garante a convergência da mesma. De fato, Absil *et al.* em [1, pág. 538] consideraram a função definida em (1.12), isto é,

$$f(r,\theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}}\left[1 - \frac{4r^4}{4r^4+(1-r^2)^4}\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{1}{1-r^2}\right)\right], & \text{se } r < 1, \\ 0, & \text{se } r \geq 1, \end{cases}$$

para mostrar que o conjunto $\omega(x^0)$ não é unitário.

2.2 Resultado de convergência

Antes de apresentar o principal resultado deste Capítulo, necessita-se os seguintes resultados preliminares.

Lema 2.2.1. *Sejam $\overline{z}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e q uma quase-distância que verifica $(\mathcal{H}_{3b})$. Então existe uma constante $\mathcal{L} > 0$ que independe de $\overline{z}$, $\overline{x}$ tal que:*

$$\|x^*\| \leq \mathcal{L} \qquad \forall\, x^* \in \partial\,(q(\overline{z},\,\cdot\,))\,(\overline{x}) \tag{2.11}$$

Demonstração. De $(\mathcal{H}_{3b})$ e a Proposição 1.1.1 tem-se que $q(\overline{z},\,\cdot\,)$ é uma função lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, com constante de Lipschitz $2\beta > 0$, em particular $q(\overline{z},\,\cdot\,)$ é uma função localmente lipschitziana em $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ com constante de Lipschitz 2β. Note que esta constante independe de $\overline{z}$.

Assim, a Proposição 1.2.3 implica que

$$\|x^*\| \leq 2\beta \qquad \forall\, x^* \in \partial\,(q(\overline{z},\,\cdot\,))\,(\overline{x})$$

Porém, 2β também independe de $\overline{x}$. Portanto, $\exists\, \mathcal{L} = 2\beta > 0$ que independe de $\overline{z}$, $\overline{x}$ tal que (2.11) é verificado. □

Observação 2.2.1. Em particular, se $\overline{z} = x^k$ e $\overline{x} = x^{k+1}$ no Lema 2.2.1 obtêm-se que

$$\|x^*\| \leq \mathcal{L} \qquad \forall\, x^* \in \partial\left(q(x^k,\,\cdot\,)\right)(x^{k+1}).$$

Proposição 2.2.1. *Seja $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQD**. *Então, qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é um ponto de* $\mathrm{crit}(f)$.

Demonstração. Considere $\overline{x} \in \omega(x^0)$ e $\{x^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $\overline{x}$. Prova-se que $0 \in \partial f(\overline{x})$.

De fato, da Proposicao 2.1.4, tem-se que existem $\xi^{k_j+1} \in \partial f(x^{k_j+1})$ e $\zeta^{k_j+1} \in \partial\left(q(x^{k_j},\,\cdot\,)\right)(x^{k_j+1})$ tais que

$$0 = \xi^{k_j+1} + \frac{q(x^{k_j}, x^{k_j+1})}{\lambda_{k_j}}\zeta^{k_j+1}.$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\xi^{k_j+1}\| &\leq \frac{q(x^{k_j}, x^{k_j+1})}{\lambda_{k_j}}\|\zeta^{k_j+1}\| \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{\lambda_-}q(x^{k_j}, x^{k_j+1}) \end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade é uma consequência da Observação 2.2.1, logo, considerando o limite quando $j \to +\infty$ e pela Proposição 3.1.4 implicam em

$$\lim_{j\to+\infty} \|\xi^{k_j}\| = 0.$$

o que significa que

$$0 \in \partial f(\overline{x}).$$

□

O teorema que se segue é o principal resultado deste capítulo, pois estabelece quando uma sequência gerada pelo MPQD é convergente. Observe-se que este resultado estende aquele obtido por Attouch e Bolte em [7].

Teorema 2.2.1. *Assuma que as hipóteses* $(\mathcal{H}_1)$,$(\mathcal{H}_2)$,$(\mathcal{H}_{3a})$ *e* $(\mathcal{H}_{3b})$ *são verificadas. Assuma também que* f *verifica a propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz (1.9) em* $\operatorname{crit}(f)$*. Seja* $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQD***. Se a sequência* $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q(x^k, x^{k+1}) < +\infty.$$

Em particular, a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para algum ponto crítico-limite de* f*.*

Demonstração. Como f é limitada inferiormente, sem perda de generalidade, pode-se supor que

$$f(x) := f(x) - \inf_{k\geq 0} f(x^k).$$

Assim, tem-se que

$$\lim_{k\to+\infty} f(x^k) = 0,$$

o que junto com a Proposição 2.1.5 implicam que $f(\overline{x}) = 0$, para cada $\overline{x} \in \omega(x^0)$. Além disto, da Proposição 2.2.1 resulta que $\omega(x^0) \subset \operatorname{crit}(f)$. Assim

$$\overline{x} \in \operatorname{crit}(f) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) = 0\}.$$

Por outro lado, caso ocorra $x^{k+1} = x^k$ para algum $k \geq 1$, isto não tem consequência na análise assintótica, portanto, neste caso, pode-se supor que $q(x^k, x^{k+1}) > 0$, para todo $k \geq 0$, o que diretamente implica na estrita decrescência da sequência $\{f(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Visto que f verifica a propriedade de Kurdyka- Łojasiewicz em $\operatorname{crit}(f)$, existem $\eta \in (0, +\infty]$ e φ tais que

$$\varphi \in \mathcal{K}(0,\eta) \text{ é estritamente côncava no intervalo } (0,\eta).$$

Em consequência, a função $-\varphi$ é convexa e diferenciável em $(0,\eta)$ e portanto

$$\varphi(t) - \varphi(s) \geq \varphi'(t)(t-s), \qquad s, t \in (0,\eta).$$

Então, fazendo $s = f(x^{k+1})$ e $t = f(x^k)$ na desigualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi\left(f(x^k)\right) - \varphi\left(f(x^{k+1})\right) &\geq \varphi'\left(f(x^k)\right)\left(f(x^k) - f(x^{k+1})\right) \\ &\geq \varphi'\left(f(x^k)\right)\frac{1}{2\lambda_k}q^2(x^k, x^{k+1}), \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde a última desigualdade é obtida da desigualdade (2.3) junto com o fato de que $\varphi'\left(f(x^k)\right) > 0$.

E novamente, pela propriedade de Kurdyka-Łojasiewicz de f em $\overline{x}$, existe uma vizinhança de $\overline{x}$, $\overline{B}(\overline{x}, \epsilon)$, tal que

$$\varphi'\left(f(x) - f(\overline{x})\right) \operatorname{dist}\left(0, \partial f(x)\right) \geq 1.$$

Porém $f(\overline{x}) = 0$, logo

$$\varphi'(f(x))\|\xi\| \geq 1, \qquad \forall\, x \in \overline{B}(\overline{x}, \epsilon) \cap [0 < f < \eta] \quad \forall\, \xi \in \partial f(x), \tag{2.13}$$

o que resulta em

$$\frac{1}{\|\xi^k\|} \leq \varphi'\left(f(x^k)\right), \qquad x^k \in \overline{B}(\overline{x}; \epsilon) \cap [0 < f < \eta]\ , \xi^k \in \partial f(x^k). \tag{2.14}$$

Por outro lado, como a igualdade (2.6) é verificada para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é

$$0 = \xi^k + \frac{q(x^{k-1}, x^k)}{\lambda_{k-1}}\zeta^k,$$

obtém-se

$$\left\|\xi^k\right\| = \frac{q(x^{k-1}, x^k)}{\lambda_{k-1}}\|\zeta^k\|, \qquad k \geq 0,$$

onde $\zeta^k \in \partial\left(q(x^{k-1}, \cdot)\right)(x^k)$. Além disso, desde que $\lambda_k \in (\lambda_-, \lambda_+)$ e pela Observação 2.2.1 existe $\mathcal{L} > 0$ tal que

$$\frac{\lambda_-}{q(x^{k-1}, x^k)\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\|\xi^k\|}, \qquad k \geq 0. \tag{2.15}$$

Logo, juntando as desigualdades (2.14) com (2.15) resulta que existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\lambda_-}{q(x^{k-1}, x^k)\mathcal{L}} \leq \varphi'\left(f(x^k)\right), \qquad k \geq n_0, \tag{2.16}$$

Assim, combinando (2.16) com (2.12) e do fato de $0 < \lambda_k < \lambda_+$, obtém-se

$$\frac{q^2(x^k, x^{k+1})}{q(x^{k-1}, x^k)} \leq \frac{\mathcal{L}\lambda_+}{\lambda_-}\left(\varphi\left(f(x^k)\right) - \varphi\left(f(x^{k+1})\right)\right), \qquad k \geq n_0. \tag{2.17}$$

e a soma de (2.17) para $k = n_0$ até m pode ser considerada, obténdo-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{m} \frac{q^2(x^k, x^{k+1})}{q(x^{k-1}, x^k)} &\leq \frac{\mathcal{L}\lambda_+}{\lambda_-} \sum_{k=n_0}^{m} \left(\varphi\left(f(x^k)\right) - \varphi\left(f(x^{k+1})\right)\right) \\
&= \frac{\mathcal{L}\lambda_+}{\lambda_-} \left(\varphi\left(f(x^{n_0})\right) - \varphi\left(f(x^{m+1})\right)\right) \\
&\leq \frac{\mathcal{L}\lambda_+}{\lambda_-} \left(\varphi\left(f(x^{n_0})\right) - 0\right) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

portanto, pelo Lema 1.2.1 conclui-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(x^k, x^{k+1}) < +\infty.$$

Assim, pela hipótese $(\mathcal{H}_{3a})$ existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $k \geq 0$

$$\alpha \|x^k - x^{k+1}\| \leq q(x^k, x^{k+1}),$$

Isto significa que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x^k - x^{k+1}\| < +\infty.$$

Então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, logo convergente. Consequentemente, o conjunto dos pontos de acumulação $\omega(x^0)$ é unitário. □

Observação 2.2.2. É importante mencionar que o Prof. Soubeyran contribuiu com este trabalho apresentando um modelo onde o método de ponto proximal com quase-distância é interpretado e aplicado na formação de hábito, a formulação deste modelo aparece em detalhe no trabalho que foi realizado em parceria, em [32]. De fato, nos trabalhos apresentados por Attouch e Soubeyram em [9, 10] os custos de mudança são representados com o termo de regularização, porém este termo de regularização é o quadrado da distância Euclideana, o qual é incapaz de gerar aplicações na Economia e Ciências Sociais, devido a que este não pode representar um custo de mudança, pois neste caso o custo de mudar de x para y é igual ao custo de mudar de y para x, uma suposição simétrica muito restritiva para este tipo de modelagem. Por outro lado, em [32] o modelo de formação de habito descreve um consumidor que tem:

i) uma função de utilidade separável a qual muda com a experiência, e

ii) custos de mudança entre os feixes de consumo (os quais modelam a inércia).

Em resumo, o Prof. Soubeyran considerou:

i) o aspecto de adaptação (por preferências variáveis que requerem otimização repetida),

ii) o custos de mudança como uma quase-distância, e

iii) a desutilidade do custo de mudança como uma função convexa crescente de custos de mudança.

Além disso, considera-se a quase-distância do Exemplo 1.1.4, a qual interpreta os custo de mudança entre feixes de consumo e a desutilidade do custo de mudança como o quadrado desta quase-distância.

Capítulo 3

Trabalhos em Andamento

Neste Capítulo apresentamos trabalhos que encontram-se em andamento.

O problema de interesse deste capítulo é o **Problema de Equilíbrio** PE(f, C) o qual consiste em:

$$\text{PE}(f,C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção que verifica a seguinte propriedade:

P1. $f(x, x) = 0$ para todo $x \in C$;

O problema PE(f, C) generaliza várias classes de problemas de programação matemática, problemas de complementariedade, desigualdades variacionais, problemas de ponto fixo, problemas de equilíbrio de Nash e problemas minimax, para detalhes veja por exemplo Blum e Oettli [17] e Iusem e Sosa [36].

Por outro lado, a aplicação do método proximal aos problemas de equilíbrio não é nova na literatura, já que tal abordagem é considerada por exemplo nos trabalhos Antipin [4, 5], Flåm e Antipin [30], Antipin *et al.* [6], Moudafi [56–58], Van Nguyen *et al.* [66], Combettes e Hirstoaga [26], Iusem e Sosa [37] e Konnov [42, 44].

Neste contexto se propõe um algoritmo proximal com quase-distância para o problema de equilíbrio, e apresentam-se alguns resultados parciais, estendendo o método MPQD apresentado no Capítulo 2.

A seção seguinte trata de um segundo trabalho em andamento, no qual se estuda uma extensão do princípio variacional de Borwein-Preiss [20] usando funções do tipo gauge, veja Definição 3.2.1, com o intuito de estudar a existência de soluções do problema de equilíbrio com base nos resultados teóricos apresentados por Bianchi *et al.* em [15] e Li e Shi em [51].

3.1 Um método proximal para o problema PE(f, C)

Nesta seção, se apresenta um algoritmo proximal para o problema de equilíbrio PE(f, C) associado com uma quase-distância, a qual faz o papel da regularização. A boa definição deste algoritmo é provada sob condições usuais de coercividade na regularização e uma caracterização em termos do subdiferencial limite das iterações proximais; além disso são apresentadas algumas propriedades decorrentes do método.

Nesta seção assume-se as seguintes hipóteses:

P2. $f \in \mathcal{A} := \{f : C \times C \to \mathbb{R} \, : \, f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \quad \forall x, y, z\}$;

P3. $f(u, \cdot\,) : C \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferior e limitada inferiormente para todo $u \in C$;

No próximo exemplo apresenta-se funções que verificam as hipóteses **P1-P3**.

Exemplo 3.1.1. [15] Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferior e limitada inferiormente. Então

1. $f(x, y) := g(y) - g(x)$.

2. $$f(x, y) = \begin{cases} \exp^{-\|x-y\|} + 1 + g(y) - g(x) & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

verificam a condição **P1** , **P2** e **P3** .

Observa-se que **P2** é considerada nos trabalhos de Al-Homidan *et al.* [3] para Q-funções, Lin e Du [49, 50] para τ-funções e funções do tipo fitting, e também nos trabalhos de Bianchi *et al.* [15], Blum e Oettli [17] e Castellani *et al.* [23], com o intuito de evitar a hipótese de convexidade da função $f(u, \cdot\,)$.

Denota-se por $S(f, C)$ o conjunto de soluções do problema PE(f, C).

A seguinte hipótese será útil no desenvolvimento a seguir

(**H**) $\exists\, r > 0 \, : \, \forall\, x \in C$ com $\|x\| > r$, $\exists\, y \in C$, $\|y\| < \|x\|$ tal que $f(x, y) \leq 0$.

Proposição 3.1.1. [23, Teorema 3.5] *Suponha que $f \in \mathcal{A}$ e C é fechado. Se a condição* (**H**) *é satisfeita e $f(u, \cdot\,)$ é semicontínua inferior para todo $u \in C$, então $S(f, C) \neq \emptyset$.*

A hipótese (**H**) é uma condição de coercividade, apresentada por Bianchi e Pini em [16] para problemas de equilíbrio com domínios não limitados, e é considerada em trabalhos na literatura, veja por exemplo Bianchi *et al.* [15] e Castellani *et al.* [23].

Uma consequência direta do resultado prévio é o seguinte.

Corolário 3.1.1. *Suponha que a bifunção verifica a condição* (**H**)*. Então, para cada* $u \in C$ *verifica-se que* $f(u, \cdot)$ *e uma função limitada inferiormente.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.1, $S(f, C) \neq \emptyset$, então existe $u^* \in C$ tal que

$$-f(u^*, u) \leq f(u^*, z) - f(u^*, u) \leq f(u, z) \qquad \forall\, z \in C,$$

portanto tem-se o resultado. □

3.1.1 O algoritmo MPQDE

A seguir é proposto um método de ponto proximal com quase-distância para o problema PE(f, C), que gera uma sequência $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ via a seguinte recursão:

Algoritmo MPQDE

---

1. Considere $u^0 \in C$.

2. Dado u^k, encontrar $u^{k+1} \in C$ tal que

$$u^{k+1} \in \arg\min \left\{ f(u^k, u) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, u) \;:\; u \in C \right\}, \tag{3.2}$$

onde $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência positiva, com $\lambda_k \in (\lambda_-, \lambda_+) \subset \mathbb{R}_{++}$.

3. Se $u^{k+1} = u^k$, **PARE**.

A proposição seguinte estabelece a boa definição do método acima. Antes são necessárias as seguintes hipóteses sobre a quase-distância q usadas no Capítulo 2:

$(\mathcal{H}_{3a})$ q verifica a condição (1.1), isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|x - y\| \leq q(x, y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n;$$

$(\mathcal{H}_{3b})$ q verifica a condição (1.2), isto é, existe $\beta > 0$ tal que

$$q(x, y) \leq \beta\|x - y\|, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 3.1.2. *Se as hipóteses* **P3**, $(\mathcal{H}_{3a})$ *e* $(\mathcal{H}_{3b})$ *são verificadas, então a sequência* $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, gerada pelo* **Algoritmo MPQDE***, está bem definida.*

Demonstração. Dado $u^k \in C$, segue das hipóteses que a função $f(u^k, \cdot) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, \cdot) + \delta_C$ é semicontínua inferior e verifica que

$$-\infty < \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u^k, u) + \frac{1}{2\lambda_+} q^2(u^k, u) \leq f(u^k, u) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, u) + \delta_C(u).$$

Nestas condições, $f(u^k, \cdot) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, \cdot) + \delta_C$ é uma função coerciva, e portanto o resultado segue do Teorema 1.1.1. $\square$

Proposição 3.1.3. *Seja $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQDE**. *Então para qualquer $u \in C$ verifica-se*

$$f(u^k, u) \leq f(u^{k+1}, u) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

Demonstração. Da recursão (3.2), tem-se que

$$f(u^k, u^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, u^{k+1}) \leq f(u^k, u^k) = 0 \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Assim,

$$f(u^k, u^{k+1}) \leq 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Devido a que $f \in \mathcal{A}$ temos que para qualquer $u \in C$

$$f(u^k, u) \leq f(u^k, u^{k+1}) + f(u^{k+1}, u) \leq f(u^{k+1}, u), \qquad k \in \mathbb{N},$$

$\square$

Proposição 3.1.4. *Seja $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo* **Algoritmo MPQDE**. *Então, $\sum_{k=0}^{+\infty} q^2(u^k, u^{k+1}) < +\infty$. Em particular*

$$\lim_{k\to+\infty} q(u^k, u^{k+1}) = 0.$$

Demonstração. De (3.4) e levando em conta que $\lambda_k \in (\lambda_-, \lambda_+)$, obtemos que

$$f(u^k, u^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_+} q^2(u^k, u^{k+1}) \leq 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Somando a desigualdade (3.5), para $k = 1, \cdots, m$, e utilizando a desigualdade triangular da definição do conjunto $f \in \mathcal{A}$ resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} q^2(u^k, u^{k+1}) &\leq -2\lambda_+ \sum_{k=0}^{m} \left[f(u^k, u^{k+1})\right] \\
&\leq -2\lambda_+ \left[f(u^0, u^{m+1})\right] \\
&\leq -2\lambda_+ \left[\inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u^0, u)\right] \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade é devido a **P3**. Agora, como a desigualdade acima é válida para todo m, segue o primeiro resultado. Finalmente, da convergência de $\sum_{k=0}^{+\infty} q^2(u^k, u^{k+1})$, tem-se

$$\lim_{k \to +\infty} q(u^k, u^{k+1}) = 0,$$

conforme desejado. □

No próximo resultado é estabelecida uma caracterização da recursão (3.2) em termos do subdiferencial limite. Antes é necessária a seguinte condição de qualificação:

($\mathcal{Q}$). Seja $u \in C$. Se para todo $\overline{x} \in C$, $\xi^* \in \partial^\infty f(u, \cdot)(\overline{x})$ e $\eta^* \in N(\overline{x}; C)$ tem-se que

$$\xi^* + \eta^* = 0 \implies \xi^* = \eta^* = 0.$$

Proposição 3.1.5. *Se as hipóteses* **P3**, $(\mathcal{H}_{3a})$, $(\mathcal{H}_{3b})$ *e* $(\mathcal{Q})$ *são verificadas, então existem* $\xi^{k+1} \in \partial f(u^k, \cdot)(u^{k+1})$, $\eta^{k+1} \in N(u^{k+1}; C)$ *e* $\zeta^{k+1} \in \partial\left(q(u^k, \cdot)\right)(u^{k+1})$ *tais que*

$$0 = \xi^{k+1} + \eta^{k+1} + \frac{q(u^k, u^{k+1})}{\lambda_k}\zeta^{k+1}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Visto que u^{k+1} verifica a condição de otimalidade de primeira ordem da função $f(u^k, \cdot) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, \cdot) + \delta_C$, o Teorema 1.2.1 implica que

$$0 \in \partial\left(f(u^k, \cdot) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, \cdot) + \delta_C\right)(u^{k+1}).$$

Por outro lado, a função $\frac{1}{2\lambda_k} q^2(u^k, \cdot)$ é localmente lipschitziana em u^{k+1} que, junto com a semicontinuidade inferior de $f(u^k, \cdot) + \delta_C$ e a Proposição 1.2.4 resultam em

$$0 \in \partial\left(f(u^k, \cdot) + \delta_C\right)(u^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k}\partial\left(q^2(u^k, \cdot)\right)(u^{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

Além disso, considerando $f_1 = f_2 = q(u^k, \cdot) \geq 0$ e $\overline{x} = u^{k+1}$ na Proposição 1.2.5, resulta que

$$\partial\left(q^2(u^k,\,\cdot\,)\right)(u^{k+1}) \subset 2q(u^k,u^{k+1})\partial\left(q(u^k,\,\cdot\,)\right)(u^{k+1}), \quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Ainda mais, devido a $(\mathcal{Q})$ obtém-se pela Proposição 1.2.8 que

$$\partial\left(f(u^k,\,\cdot\,)+\delta_C\right)(u^{k+1}) \subset \partial f(u^k,\,\cdot\,)(u^{k+1}) + N(u^{k+1};C) \tag{3.9}$$

onde N_C detona o cone normal do conjunto convexo fechado C. Assim, combinando (3.7) com (3.8), obtém-se que

$$0 \in \partial f(u^k,\,\cdot\,)(u^{k+1}) + N(u^{k+1};C) + \frac{1}{\lambda_k}q(u^k,u^{k+1})\partial\left(q(u^k,\,\cdot\,)\right)(u^{k+1}).$$

Portanto existem $\xi^{k+1} \in \partial f(u^k,\,\cdot\,)(u^{k+1})$, $\eta^{k+1} \in N(u^{k+1};C)$ e $\zeta^{k+1} \in \partial\left(q(u^k,\,\cdot\,)\right)(u^{k+1})$ para os quais (3.6) é verificada. □

Lembre-se que $\omega(u^0)$ denota o conjunto de pontos de acumulação da sequência $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposição 3.1.6. *Suponha que a bifunção $f(\,\cdot\,,x):C\to\mathbb{R}$ é uma função contínua para todo $x\in C$. Seja $\{u^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, convergindo para $\overline{u}\in\omega(u^0)$. Então*

$$\lim_{j\to\infty} f(u^{k_j},u^{k_j+1}) = 0.$$

Demonstração. Desde que a subsequência $\{u^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$de $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $\overline{u}$ e do fato de que C é fechado, tem-se que $\overline{u}\in C$; assim de (3.2) resulta

$$f(u^{k_j},u^{k_j+1}) + \frac{1}{2\lambda_+}q^2(u^{k_j},u^{k_j+1}) \le f(u^{k_j},\overline{u}) + \frac{1}{2\lambda_-}q^2(u^{k_j},\overline{u});$$

logo,

$$f(u^{k_j},u^{k_j+1}) \le f(u^{k_j},\overline{u}) + \frac{1}{2\lambda_-}q^2(u^{k_j},\overline{u}). \tag{3.10}$$

Por outro lado $f\in\mathcal{A}$, portanto

$$f(u^{k_j},\overline{u}) \le f(u^{k_j},u^{k_j+1}) + f(u^{k_j+1},\overline{u}),$$

ou equivalentemente,

$$f(u^{k_j},\overline{u}) - f(u^{k_j+1},\overline{u}) \le f(u^{k_j},u^{k_j+1}) \tag{3.11}$$

Combinando as desigualdades (3.10) e (3.11), resulta que

$$f(u^{k_j},\overline{u}) - f(u^{k_j+1},\overline{u}) \le f(u^{k_j},u^{k_j+1}) \le f(u^{k_j},\overline{u}) + \frac{1}{2\lambda_-}q^2(u^{k_j},\overline{u}).$$

Visto que $\lim_{j\to\infty} u^{k_j} = \overline{u}$, considera-se o limite quando $j \to \infty$, em ambos lados da desigualdade anterior para obter que

$$\lim_{j\to\infty} f(u^{k_j}, u^{k_j+1}) = 0. \qquad \square$$

3.2 Existência de equilíbrio via o princípio variacional de Borwein-Preiss

O estudo de princípios variacionais para garantir existência de ϵ-soluções em problemas de minimização é bem conhecido na literatura, veja por exemplo Ekeland [28, 29], Borwein e Preiss [20] e Borwein e Zhu [21]. Para o problema PE(f, C) Bianchi *et al.* em [15] estenderam o princípio variacional de Ekeland [28, 29] para obter a existência de ϵ-soluções do PE(f, C).

No contexto das quase-distâncias, Homidan *et al.* em [3] generalizaram o princípio variacional de Ekeland seguindo a prova apresentada por Bianchi *et al.* [15].

Por outro lado, Borwein e Preiss, em 1987, observaram que o princípio variacional de Ekeland tem uma limitação na sua aplicação, a qual consiste em que quando a função objetivo é diferenciável, a função perturbada a qual é definida por somar à função objetivo um múltiplo da função distância, não é diferenciável. Motivados por isto eles formularam o **princípio variacional suave** [20], com o qual analisaram a subdiferenciabilidade e diferenciabilidade de funções convexas no contexto dos espaços de Banach. Apresentamos a seguir este resultado:

Teorema 3.2.1. (Principio variacional suave de Borwein-Preiss) *Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ uma função semicontínua inferior limitada inferiormente, $\lambda > 0$ e $p \geq 1$. Suponha que $\epsilon > 0$ e $z \in X$ verificam*

$$f(z) \leq \inf_X f + \epsilon.$$

Então existem $y \in X$, uma sequência $\{x_i\} \subset X$ com $x_1 = z$ e uma função $\varphi_p : X \to \mathbb{R}$ da forma

$$\varphi_p(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|x - x_i\|^p,$$

onde $\mu_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = 1$ tais que as condições seguintes são verificadas

1. *$\|x_i - y\| \leq \lambda$, $i = 1, 2, \ldots$;*

2. *$f(y) + (\epsilon/\lambda^p)\varphi_p(y) \leq f(z)$; e*

3. *$f(x) + (\epsilon/\lambda^p)\varphi_p(x) > f(y) + (\epsilon/\lambda^p)\varphi_p(y)$, para todo $x \in X \setminus \{y\}$.*

Li e Shi em [51] estenderam o Teorema 3.2.1 substituindo a distância e a norma por funções do tipo gauge no contexto dos espaços métricos completos porém consideraram somente o problema de minimização. Portanto, o objetivo desta seção é estender o princípio variacional de Borwein-Preiss para estudar a existência de equilíbrio com funções do tipo gauge.

Definição 3.2.1. [21] Seja (X, d) um espaço métrico completo. Diz-se que a função contínua $\rho : X \times X \to [0, \infty]$ é do **tipo gauge** em (X, d) se ela verifica que

1. $\rho(x, x) = 0, \forall\, x \in X$,

2. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que para quaisquer $y, z \in X$

$$\rho(y, z) \leq \delta \text{ implica que } d(y, z) < \epsilon.$$

Exemplo 3.2.1. [51] Seja (X, d) um espaço métrico, e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função contínua e estritamente crescente tal que $g(0) = 0$. Então $\rho(x, y) = g(d(x, y))$ é uma função do tipo gauge. Em particular, para ϵ, $\lambda > 0$, a função

$$\rho(x, y) = \frac{\epsilon}{\lambda} d(x, y) \quad \text{é gauge.}$$

Observe que esta função é usada no principio variacional de Ekeland, e para $p \geq 1$ a função

$$\rho(x, y) = \frac{\epsilon}{\lambda^p} d^p(x, y) \quad \text{também é gauge,}$$

e é usada no principio variacional suave de Borwein-Preiss.

Exemplo 3.2.2. Seja q uma quase- distância que verifica $(\mathcal{H}_{3a})$ e $(\mathcal{H}_{3b})$. Então

$$\rho(x, y) = q(x, y) \qquad \text{é do tipo gauge.}$$

Por usar funcoes do tipo gauge, o Teorema 3.2.1, pode-se ser expresso na seguinte forma:

Teorema 3.2.2. [21, Teorema 2.5.2] *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferior limitada inferiormente. Assumamos que ρ é do tipo gauge. Dada $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de números positivos, e suponhamos que $\epsilon > 0$ e $z \in X$ verificam:*

$$f(z) \leq \inf_X f + \epsilon.$$

Então existem $\overline{y} \in X$ e uma sequência $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que :

1. $\rho(\overline{y}, z) \leq \dfrac{\epsilon}{\delta_0}$;

2. $\rho(\overline{y}, x_i) \leq \dfrac{\epsilon}{2^i \delta_0}$;

3. $f(\overline{y}) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i \rho(\overline{y}, x_i) \leq f(z)$;

4. $f(x) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i \rho(x, x_i) > f(\overline{y}) + \sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i \rho(\overline{y}, x_i), \qquad \forall\, x \in X \setminus \{\overline{y}\}$.

Na prova dos princípios variacionais usa-se o seguinte resultado conhecido. Sua demostração pode ser encontrada, por exemplo em Bachman e Narici [11, Teorema 5.1].

Teorema 3.2.3. *Um espaço métrico X é completo se, e somente se, para qualquer sequência de conjuntos não vazios e fechados $\{F_n\}$, tais que*

$$F_{n+1} \subset F_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, *existe* $\overline{x} \in X$ *tal que*

$$\bigcap_n F_n = \{\overline{x}\}.$$

A seguir é apresentado o principal resultado desta seção, uma generalização parcial do princípio variacional suave de Borwein-Preiss para problemas de equilíbrio. A idéia da prova e motivada nos resultados de Li e Shi [51], Bianchi *et al.* [15] e Borwein e Zhu [21]. A prova apresentada a seguir considera $X = \mathbb{R}^n$, porém esta pode ser estendida ao contexto dos espaços de Banach.

Teorema 3.2.4. *Seja C um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$. Assuma que as seguintes condições são verificadas:*

P1. $f(x, x) = 0$ *para todo* $x \in C$;

P2. $f \in \mathcal{A} := \{f : C \times C \to \mathbb{R} \,:\, f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \quad \forall x, y, z\}$;

P3. $f(x, \cdot\,) : C \to \mathbb{R}$ *é uma função semicontínua inferior e limitada inferiormente para todo* $x \in C$;

Suponha que ρ é uma função do tipo gauge e $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência de números positivos, e assuma que $\epsilon > 0$ e $z \in C$. Então existem $\overline{y} \in C$ e uma sequência $\{x_i\} \subset X$ tais que as seguintes condições são verificadas

1. $\rho(\overline{y}, z) \leq \epsilon/\delta_0$,

2. $\rho(\overline{y}, x_i) \leq \epsilon/(2^i \delta_0)$,

3. $f(z, \overline{y}) + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \rho(\overline{y}, x_i) \leq 0$.

Demonstração. Defina as sequências $\{x_i\}$ e $\{S_i\}$ indutivamente iniciando com $x_0 := z$ e

$$S_0 := \{x \in C \ : \ f(x_0, x) + \delta_0 \rho(x, x_0) \leq 0\}. \tag{3.12}$$

Como $x_0 \in S_0$, este conjunto é não vazio. Além disso, S_0 é fechado devido a que $f(x_0, \cdot)$ e $\rho(\cdot, x_0)$ são funções semicontínuas inferiores. Ademais, devido a **P3**, tem-se, para todo $x \in S_0$, que

$$-\infty < \inf_{t \in C} f(x_0, t) \leq f(x_0, x) \leq f(x_0, x) + \delta_0 \rho(x, x_0).$$

Consequentemente, existe $x_1 \in S_0$ tal que

$$f(x_0, x_1) + \delta_0 \rho(x_1, x_0) \leq \inf_{x \in S_0} [f(x_0, x) + \delta_0 \rho(x, x_0)] + \frac{\epsilon \delta_1}{2\delta_0}.$$

Assim, de forma similar define-se

$$S_1 := \left\{ x \in S_0 \ : \ f(x_1, x) + \sum_{k=0}^{1} \delta_k \rho(x, x_k) \leq \delta_0 \rho(x_1, x_0) \right\}.$$

Em geral, suponha que x_j, S_j já estão definidos, para $j = 0, 1, \ldots, i-1$, tais que eles verificam

$$f(x_{j-1}, x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \leq \inf_{x \in S_{j-1}} \left[f(x_{j-1}, x) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] + \frac{\epsilon \delta_j}{2^j \delta_0}$$

e

$$S_j := \left\{ x \in S_{j-1} \ : \ f(x_j, x) + \sum_{k=0}^{j} \delta_k \rho(x, x_k) \leq \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \right\}.$$

Agora escolha $x_i \in S_{i-1}$ tal que

$$f(x_{i-1}, x_i) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \leq \inf_{x \in S_{i-1}} \left[f(x_{i-1}, x) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] + \frac{\epsilon \delta_i}{2^i \delta_0} \tag{3.13}$$

e defina

$$S_i := \left\{ x \in S_{i-1} \ : \ f(x_i, x) + \sum_{k=0}^{i} \delta_k \rho(x, x_k) \leq \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \right\}. \tag{3.14}$$

Assim para qualquer $i = 1, 2, \ldots$ o conjunto S_i é não vazio e fechado. Logo, de (3.13) e (3.14) tem-se, para todo $x \in S_i$, que

$$
\begin{aligned}
\delta_i\rho(x,x_i) &\leq \left[\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x_i,x_k)\right] - \left[f(x_i,x) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x,x_k)\right] \\
&= \left[\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x_i,x_k)\right] - f(x_i,x) - \left[\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x,x_k)\right] \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x_i,x_k)\right] + f(x_{i-1},x_i) - f(x_{i-1},x) - \left[\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x,x_k)\right] \\
&= \left[f(x_{i-1},x_i) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x_i,x_k)\right] - \left[f(x_{i-1},x) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x,x_k)\right] \\
&\leq \left[f(x_{i-1},x_i) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(x_i,x_k)\right] - \inf_{t\in S_{i-1}}\left[f(x_{i-1},t) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\rho(t,x_k)\right] \\
&\leq \frac{\epsilon\delta_i}{2^i\delta_0},
\end{aligned}
$$

e, consequentemente,

$$\rho(x,x_i) \leq \frac{\epsilon}{2^i\delta_0}, \qquad \forall\, x\in S_i. \tag{3.15}$$

Como ρ é uma função do tipo gauge, a desigualdade (3.15) implica em que

$$\|x-x_i\| < \frac{\epsilon}{2^i\delta_0}, \qquad \forall\, x\in S_i,$$

portanto segue-se da desigualdade triangular que

$$\lim_{i\to\infty}\operatorname{diam}(S_i) = 0.$$

Sabe-se que $(\mathbb{R}^n,d)$ é um espaço métrico completo (onde $d(x,y)=\|x-y\|$ para $x,y\in\mathbb{R}^n$) e, pelo Teorema 3.2.3, como $S_{i+1}\subset S_i$, conclui-se então que existe $\overline{y}\in C$ tal que

$$\overline{y}\in\bigcap_{i=0}^{\infty}S_i.$$

Assim, de (3.15) se verificam as condições *1* e *2*. Por outro lado, observe que $x_1\in S_0$ satisfaz (3.12), $x_2\in S_1$ e da desigualdade triangular segue que

$$
\begin{aligned}
0 &\geq f(x_0,x_1) + \delta_0\rho(x_1,x_0) \\
&\geq f(x_0,x_1) + f(x_1,x_2) + \sum_{k=0}^{1}\delta_k\rho(x_2,x_k) \\
&\geq f(x_0,x_2) + \sum_{k=0}^{1}\delta_k\rho(x_2,x_k),
\end{aligned}
$$

Seja $j \geq 2$ fixo. Considerando que $\overline{y} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ obtém-se, para qualquer $q \geq j$, que

$$\begin{aligned}
0 &\geq f(x_0, x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \\
&\geq f(x_0, x_q) + \sum_{k=0}^{q-1} \delta_k \rho(x_q, x_k) \\
&\geq f(x_0, x_q) + f(x_q, \overline{y}) + \sum_{k=0}^{q} \delta_k \rho(\overline{y}, x_k) \\
&\geq f(x_0, \overline{y}) + \sum_{k=0}^{q} \delta_k \rho(\overline{y}, x_k). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Nestas condições, considerando o limite em (3.16) quando $q \to \infty$ tem-se que

$$\begin{aligned}
0 &\geq f(x_0, \overline{y}) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(\overline{y}, x_k) \\
&= f(z, \overline{y}) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(\overline{y}, x_k)
\end{aligned}$$

que verifica a condição *3*. □

Capítulo 4

Conclusão

Neste capítulo apresentam-se as considerações finais bem como planos para o futuro.

4.1 Considerações finais

Este texto é uma exposição unificada do trabalho aceito em parceria com o Prof. Soubeyran [32], e dos trabalhos em andamento sobre o problema de equilíbrio e o estudo de ϵ-soluções para dito problema mediante uma extensão do principio variacional de Borwein-Preiss.

Para ser mais explícito, na primeira parte desta trabalho estuda-se o problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \tag{4.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função própria e semicontínua inferior.

Propõe-se um método de ponto proximal com uma quase-distância para encontrar pontos críticos-limites da função f, denotado por **Algoritmo MPQD**. Mostra-se a boa definição da sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gerada por este algoritmo na Proposição 2.1.1; prova-se a convergência da sequência $\{f(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ na Proposição 2.1.2; além disso, na Proposição 2.2.1 estabelece-se que os pontos de acumulação de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pertencem ao conjunto dos pontos críticos-limites e finalmente, quando as hipóteses $(\mathcal{H}_1)$,$(\mathcal{H}_2)$,$(\mathcal{H}_{3a})$ e $(\mathcal{H}_{3b})$ são verificadas e a desigualdade de Kurdyka-Łojasiewicz (1.9) é satisfeita por f, obtém-se que a sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto crítico-limite, caso esta seja limitada, ver Teorema 2.2.1.

Na segunda parte é considerado o problema de equilíbrio

$$\mathrm{PE}(f,C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C, \text{ tal que} \\ f(x^*,y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C, \end{cases}$$

onde C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$, e $f : C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção. Propõe-se um método de ponto proximal com uma quase-distância para encontrar pontos críticos-limites da função $f(u, \cdot)$, denotado por **Algoritmo MPQDE**, e prova-se a boa definição da sequência $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gerada por este algoritmo na Proposição 3.1.2, uma caracterização em termos do subdiferencial limite das iterações proximais na Proposição 3.1.5 e são apresentadas algumas propriedades decorrentes do método.

Como um segundo tema referente ao problema $\mathrm{PE}(f, C)$ estuda-se a existência de soluções do problema $\mathrm{PE}(f, C)$ usando uma extensão parcial do princípio variacional de Borwein-Preiss, obtendo-se o Teorema 3.2.4. Nele são usadas as funções do tipo gauge, como em Li e Shi [51] e Borwein e Zhu [21].

4.2 Trabalhos futuros

- Estabelecer a convergência do método para um ponto crítico-limite da bifunção f.
- Fornecer uma versão inexata do algoritmo **MPQD**.
- Estabelecer um algoritmo para a resolução do problema com restrições,

  $$\min_{x\in C} f(x), \tag{4.2}$$

  onde C é um conjunto convexo fechado de $\mathbb{R}^n$, mediante esquemas proximais exatos (e inexatos) com busca local, isto é

  $$x^{k+1} \in \arg\min \left\{ f(x^k) + \frac{1}{2\lambda_k} q^2(x^k, u) \,:\, u \in \overline{B}(x^k, r^k) \right\}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

  e $\{r^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de raios a ser definida no processo iterativo.
- Com o intuito de aplicar na Economia e na formação de hábito como é feito em Garcia *et al.* [32], surge o interesse em aprofundar o estudo de regularizações não simétricas.

Referências Bibliográficas

[1] Absil, P.-A. and Mahony, R. and Andrews, B., *Convergence of the iterates of descent methods for analytic cost functions*, SIAM J. Optim. **16** (2005), no. 2, 531–547 (electronic). MR 2197994 (2006j:90065)

[2] Albert, G. E., *A note on quasi-metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 479–482. MR 0004104 (2,320b)

[3] Al-Homidan, S. and Ansari, Q. H. and Yao, J.-C., *Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory*, Nonlinear Anal. **69** (2008), no. 1, 126–139. MR 2417858 (2010a:47149)

[4] Antipin, A. S., *Equilibrium programming problems: prox-regularization and prox-methods*, Recent advances in optimization (Trier, 1996), Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 452, Springer, Berlin, 1997, pp. 1–18. MR 1467017 (98f:90056)

[5] ———, *Equilibrium programming: proximal methods*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **37** (1997), no. 11, 1327–1339. MR 1489507 (99a:90179)

[6] Antipin, A. S. and Budak, B. A. and Vasil′ev, F. P., *Methods for solving equilibrium programming problems*, Differ. Uravn. **41** (2005), no. 1, 3–11, 141. MR 2213261 (2006m:91102)

[7] Attouch, H. and Bolte, J., *On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features*, Math. Program. **116** (2009), no. 1-2, Ser. B, 5–16. MR 2421270 (2009i:90133)

[8] Attouch, H. and Bolte, J. and Redont, P. and Soubeyran, A., *Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: an approach based on the Kurdyka-łojasiewicz inequality*, Math. Oper. Res. **35** (2010), no. 2, 438–457. MR 2674728

[9] Attouch, H. and Soubeyran, A., *Inertia and reactivity in decision making as cognitive variational inequalities*, J. Convex Anal. **13** (2006), no. 2, 207–224. MR 2252229 (2007g:91030)

[10] ———, *Local search proximal algorithms as decision dynamics with costs to move*, Set-Valued and Variational Analysis **19** (2011), 157–177, 10.1007/s11228-010-0139-7.

[11] Bachman, G. and Narici, L., *Functional analysis*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2000, Reprint of the 1966 original. MR 1819613 (2001k:46001)

[12] Bazaraa, M. S. and Sherali, H. D. and Shetty, C. M., *Nonlinear programming*, third ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006, Theory and algorithms. MR 2218478 (2006k:90001)

[13] Bento, G. C. and da Cruz Neto, J. X. and Oliveira, P. R. , *Convergence of inexact descent methods for nonconvex optimization on riemannian manifolds*, ArXiv e-prints (2011).

[14] Bertsekas, D. P., *Nonlinear programming. 2nd ed.*, Belmont, MA: Athena Scientific. xiv, 777 p., 1999 (English).

[15] Bianchi, M. and Kassay, G. and Pini, R., *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), no. 2, 502–512. MR 2130718 (2006b:49033)

[16] Bianchi, M. and Pini, R., *Coercivity conditions for equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. **124** (2005), no. 1, 79–92. MR 2129262 (2005k:90206)

[17] Blum, E. and Oettli, W., *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), no. 1-4, 123–145. MR 1292380 (95i:90089)

[18] Bolte, J. and Daniilidis, A. and Lewis, A. and Shiota, M., *Clarke subgradients of stratifiable functions*, SIAM J. Optim. **18** (2007), no. 2, 556–572 (electronic). MR 2338451 (2008m:49092)

[19] Bolte, J. and Daniilidis, A. and Ley, O. and Mazet, L., *Characterizations of łojasiewicz inequalities: subgradient flows, talweg, convexity*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 6, 3319–3363. MR 2592958

[20] Borwein, J. M. and Preiss, D., *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), no. 2, 517–527. MR 902782 (88k:49013)

[21] Borwein, J. M. and Zhu, Q. J., *Techniques of variational analysis*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 20, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2144010 (2006h:49002)

[22] Brattka, V., *Recursive quasi-metric spaces*, Theoret. Comput. Sci. **305** (2003), no. 1-3, 17–42, Topology in computer science (Schloß Dagstuhl, 2000). MR 2013564 (2005a:03122)

[23] Castellani, M. and Pappalardo, M. and Passacantando, M., *Existence result for nonconvex equilibrium problems*, Optim. Methods Softw. **25** (2010), no. 1, 49–58.

[24] Chen, G. and Teboulle, M., *Convergence analysis of a proximal-like minimization algorithm using Bregman functions*, SIAM J. Optim. **3** (1993), no. 3, 538–543. MR 1230155 (94e:90093)

[25] Chen, J.-S. and Pan, S., *A proximal-like algorithm for a class of nonconvex programming*, Pac. J. Optim. **4** (2008), no. 2, 319–333. MR 2426631 (2009g:90085)

[26] Combettes, P. L. and Hirstoaga, Sever A., *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), no. 1, 117–136. MR 2138105 (2006a:90151)

[27] Di Concilio, A. and Gerla, G., *Quasi-metric spaces and point-free geometry*, Math. Structures Comput. Sci. **16** (2006), no. 1, 115–137. MR 2220893 (2006k:54040)

[28] Ekeland, I., *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353. MR 0346619 (49 #11344)

[29] ———, *The ϵ-variational principle revisited*, Methods of nonconvex analysis (Varenna, 1989), Lecture Notes in Math., vol. 1446, Springer, Berlin, 1990, With notes by S. Terracini, pp. 1–15. MR 1079757 (91k:49009)

[30] Flåm, S. D. and Antipin, A. S., *Equilibrium programming using proximal-like algorithms*, Math. Programming **78** (1997), no. 1, Ser. A, 29–41. MR 1454787 (99b:90090)

[31] Fletcher, P. and Lindgren, W. F., *Quasi-uniform spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 77, Marcel Dekker Inc., New York, 1982. MR 660063 (84h:54026)

[32] Garcia, F. A. and Oliveira, P. R. and Soubeyran, A. , *A proximal algorithm with quasi distance. application to habit's formation*, Optimization (2011).

[33] García-Raffi, L. M., *Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces*, Topology Appl. **153** (2005), no. 5-6, 844–853. MR 2203894 (2006i:54032)

[34] Iusem, A. N. and Kassay, G. and Sosa, W., *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Math. Program. **116** (2009), no. 1-2, Ser. B, 259–273. MR 2421281 (2009c:49011)

[35] Iusem, A. N. and Pennanen, T. and Svaiter, B. F., *Inexact variants of the proximal point algorithm without monotonicity*, SIAM J. Optim. **13** (2003), no. 4, 1080–1097 (electronic). MR 2005918 (2004h:90052)

[36] Iusem, A. N. and Sosa, W., *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization **52** (2003), no. 3, 301–316. MR 1995678 (2004e:90160)

[37] ______, *On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces*, Optimization **59** (2010), no. 8, 1259–1274. MR 2738606

[38] Iusem, A. N. and Teboulle, M., *Convergence rate analysis of nonquadratic proximal methods for convex and linear programming*, Math. Oper. Res. **20** (1995), no. 3, 657–677. MR 1354775 (96g:90051)

[39] Kanzow, C., *Proximal-like methods for convex minimization problems*, Optimization and control with applications, Appl. Optim., vol. 96, Springer, New York, 2005, pp. 369–392. MR 2144385 (2005m:90082)

[40] Kaplan, A. and Tichatschke, R., *Proximal point methods and nonconvex optimization*, J. Global Optim. **13** (1998), no. 4, 389–406, Workshop on Global Optimization (Trier, 1997). MR 1673455 (99k:90122)

[41] Kiwiel, K. C., *Proximal minimization methods with generalized Bregman functions*, SIAM J. Control Optim. **35** (1997), no. 4, 1142–1168. MR 1453294 (98e:90103)

[42] Konnov, I. V., *Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. **119** (2003), no. 2, 317–333. MR 2028996 (2004i:49016)

[43] ———, *Generalized monotone equilibrium problems and variational inequalities*, Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, Nonconvex Optim. Appl., vol. 76, Springer, New York, 2005, pp. 559–618. MR 2098909

[44] ———, *Partial proximal point method for nonmonotone equilibrium problems*, Optim. Methods Softw. **21** (2006), no. 3, 373–384. MR 2197502 (2006i:90113)

[45] Konnov, I. V. and Schaible, S., *Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity*, J. Optim. Theory Appl. **104** (2000), no. 2, 395–408. MR 1752324 (2001d:90119)

[46] Künzi, H.-P. A., *Nonsymmetric topology*, Topology with applications (Szekszárd, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 4, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1995, pp. 303–338. MR 1374814 (96k:54044)

[47] Künzi, H.-P. A. and Pajoohesh, H. and Schellekens, M. P., *Partial quasi-metrics*, Theoret. Comput. Sci. **365** (2006), no. 3, 237–246. MR 2269455 (2007f:54048)

[48] Kurdyka, K., *On gradients of functions definable in o-minimal structures*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 3, 769–783. MR 1644089 (2000b:03139)

[49] Lin, L.-J. and Du, W.-S., *Ekeland's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), no. 1, 360–370. MR 2262210 (2007g:49032)

[50] ———, *On maximal element theorems, variants of Ekeland's variational principle and their applications*, Nonlinear Anal. **68** (2008), no. 5, 1246–1262. MR 2381668 (2009a:90094)

[51] Li, Y. and Shi, S., *A generalization of Ekeland's ϵ-variational principle and its Borwein-Preiss smooth variant*, J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), no. 1, 308–319. MR 1761165 (2001e:49033)

[52] Łojasiewicz, S., *Ensembles semi-analytiques*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (Seine-et-Oise) France, 1965.

[53] Martinet, B., *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), no. Ser. R-3, 154–158. MR 0298899 (45 #7948)

[54] Mordukhovich, B. S., *Variational analysis and generalized differentiation. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 330, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Basic theory. MR 2191744 (2007b:49003a)

[55] Mordukhovich, B. S. and Shao, Y. H., *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 4, 1235–1280. MR 1333396 (96h:49036)

[56] Moudafi, A., *Proximal point algorithm extended to equilibrium problems*, J. Nat. Geom. **15** (1999), no. 1-2, 91–100. MR 1659362 (2000b:90081)

[57] ———, *Second-order differential proximal methods for equilibrium problems*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), no. 1, Article 18, 7 pp. (electronic). MR 1965998 (2004c:90093)

[58] ———, *On finite and strong convergence of a proximal method for equilibrium problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **28** (2007), no. 11-12, 1347–1354. MR 2372261 (2008j:90091)

[59] Pennanen, T., *Local convergence of the proximal point algorithm and multiplier methods without monotonicity*, Math. Oper. Res. **27** (2002), no. 1, 170–191. MR 1886225 (2002k:90148)

[60] Penot, J.-P., *Subdifferential calculus without qualification assumptions*, J. Convex Anal. **3** (1996), no. 2, 207–219. MR 1448052 (2000d:49030)

[61] Rockafellar, R. T., *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), no. 5, 877–898. MR 0410483 (53 #14232)

[62] Rockafellar, R. T. and Wets, R. J.-B., *Variational analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 317, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1491362 (98m:49001)

[63] Romaguera, S. and Sanchis, M., *Applications of utility functions defined on quasi-metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **283** (2003), no. 1, 219–235. MR 1994186 (2004g:91044)

[64] Schirotzek, W., *Nonsmooth analysis*, Universitext, Springer, Berlin, 2007. MR 2330778 (2008m:49002)

[65] Stojmirović, A., *Quasi-metric spaces with measure*, Proceedings of the 18th Summer Conference on Topology and its Applications, vol. 28, 2004, pp. 655–671. MR 2159751 (2006c:54023)

[66] Van Nguyen, T. T. and Strodiot, J.-J. and Nguyen, V. H., *The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems*, J. Global Optim. **44** (2009), no. 2, 175–192. MR 2506670