

CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE PARA O PROBLEMA  
DE PREVISÃO DE MATRIZES

Lucia Silva Kubrusly

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE DOUTORA EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS

Aprovada por:

Dina Feigenbaum Cleiman

Prof. Dina Feigenbaum Cleiman  
(Presidente)

Victor Hugo de Carvalho Gouvea

Prof. Victor Hugo Carvalho Gouvea

Nelson Maculan Filho

Prof. Nelson Maculan Filho

Paul Roberto Oliveira

Prof. Paulo Roberto de Oliveira

Frederico Antonio Azevedo de Carvalho

Prof. Frederico Antonio Azevedo de Carvalho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
AGOSTO DE 1985

KUBRUSLY, LUCIA SILVA

Critérios de Estabilidade para o Problema de  
Previsão de Matrizes. (Rio de Janeiro) 1985.

vii, 156 p. 29.7 cm (COPPE-UFRJ, D.Sc., Enge  
nharia de Sistemas 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
COPPE.

I. Previsão de Matrizes I. COPPE/UFRJ  
II. Título (Série)

Ao meu amigo Gustavo,  
porque sempre soube  
ser meu amigo.

### AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos os meus amigos que durante os últimos quatro anos e meio me ajudaram direta ou indiretamente na elaboração desse trabalho.

Em particular agradeço à Dina, Victor, Miriam, Ricardo e Amir, porque eles foram ótimos.

Agradeço também a Glória, Marcia, Jô, Marise e Solange que formaram a equipe responsável pela datilografa do texto.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE PARA O PROBLEMA  
DE PREVISÃO DE MATRIZES

Lucia Silva Kubrusly  
AGOSTO 1985

Orientador: Prof<sup>a</sup> Dina Feigenbaum Cleiman

Programa: Engenharia de Sistemas

Nesse trabalho são abordados os problemas de atualização e de previsão de matrizes. Com relação ao primeiro problema, são apresentados três tipos de métodos para sua solução: o método iterativo RAS, métodos de Programação Quadrática e métodos de Programação Linear. O problema de previsão é tratado através das "estruturas básicas" das matrizes, obtidas por métodos de agregação estatística que permitem uma considerável redução dos dados originais. Baseado na evolução dessas "estruturas básicas", são definidos alguns critérios de estabilidade para a evolução da série de matrizes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of  
the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

STABILITY CRITERIA FOR THE  
PROBLEM OF MATRICES PREDICTION

Lucia Silva Kubrusly

AUGUST 1985

Chairman: Prof<sup>a</sup> Dina Feigenbaum Cleiman

Department: Systems Engineering

This work deals with the problems of updating and predicting matrices. Concerning the first problem three kinds of solution methods are discussed: iterative RAS method, Quadratic Programming methods and Linear Programming methods. The prediction problem is examined through the "basic structures" of the matrices which are determined by reduction of the original data. A statistical aggregation method is used to obtain the desired reduction. Stability criteria are then defined based on the evolution of these "basic structures".

## ÍNDICE

	Pág.
INTRODUÇÃO .....	01
 CAPÍTULO I - ATUALIZAÇÃO DE MATRIZES	
I.1 - O Problema de atualização de Matrizes .....	04
I.2 - O Método RAS .....	06
I.3 - Métodos de Programação Quadrática .....	15
I.4 - Uma Formulação Geral para os Métodos de Atualização de Matrizes .....	20
I.5 - Uma Abordagem Estatística do Problema de Atualização de Matrizes .....	24
I.6 - Atualização por Programação Linear .....	28
 CAPÍTULO II - PREVISÃO DE MATRIZES	
II.1 - A Previsão Termo a Termo .....	32
II.2 - A Previsão da Estrutura Básica da Matriz .....	33
II.3 - A Análise das Componentes Principais .....	34
 CAPÍTULO III - CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE	
III.1 - Estabilidade do Centro de Gravidade .....	51
III.2 - Estabilidade da Estrutura Básica da Matriz - 1º Nível de Agregação .....	60
III.3 - Estabilidade da Estrutura Básica da Matriz - 2º Nível de Agregação .....	64

III.4 - O Problema da Mudança de Ordem .....	71
<b>CAPÍTULO IV - PREVISÃO E ESTUDO DOS ERROS</b>	
IV.1 - A Previsão dos Coeficientes das Componentes Principais .....	79
IV.2 - A Previsão dentro das Esferas $E_i$ .....	82
IV.3 - O Erro de Previsão na Esfera $E_i$ .....	85
IV.4 - O Erro na Reconstrução da Matriz $A_{T+1}$ a partir das Componentes Principais $C_i^{T+1}$ .....	88
IV.5 - O Critério de Estabilidade e a Dimensão do Espaço $R^q$ .....	90
<b>CAPÍTULO V - APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE NA PREVISÃO DA MATRIZ DO BALANÇO ENERGÉTICO</b>	
V.1 - O Balanço Energético .....	103
V.2 - Os Resultados .....	106
<b>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES .....</b> 126	
ANEXO .....	130
BIBLIOGRAFIA .....	153

## INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é determinar critérios de estabilidade para a evolução de uma série de matrizes. As matrizes que normalmente aparecem nos problemas de previsão, são as que descrevem algum tipo de relação entre setores econômicos ou entre diversos países ou regiões. É possível citar como exemplo, a matriz de comércio exterior, a matriz do Balanço Energético, ou a matriz de insumo produto. O problema de previsão dessas matrizes apresenta normalmente duas características principais:

- i) as matrizes são de grandes dimensões,
- ii) as séries são usualmente pequenas.

O problema da dimensão da matriz pode ser contornado utilizando-se técnicas de agregação estatística que permitem uma redução dos dados originais, com uma pequena perda da informação. O objetivo dessas agregações, é manter o essencial do conjunto de dados originais (no caso, os elementos da matriz) perdendo o mínimo de informação, medida pela percentagem da variância total perdida na agregação.

Por outro lado, as séries pequenas usualmente encontradas nesses problemas, exigem métodos de previsão diversos daqueles usados para séries de grandes dimensões como por exemplo os modelos de séries temporais. A evolução das matrizes deve ser examinada, procurando-se verificar se a série de matrizes obedece a um determinado tipo de evolução no tempo, considerada estável. O presente trabalho, está dividido em seis capítulos que

serão sumariamente descritos a seguir.

O primeiro capítulo é dedicado ao tema de atualização de matrizes, que como a previsão, tem ampla utilização no problema de planejamento econômico. A diferença, é que para atualizar uma matriz, parte-se de apenas uma matriz conhecida (passada), para obter-se a matriz atual. Nesse capítulo é feita uma revisão dos métodos desenvolvidos para esse fim. São descritos o método RAS, métodos de Programação Quadrática, e métodos de Programação Linear.

No segundo capítulo é descrito o problema de previsão e a maneira pela qual será abordado, isto é, através das agregações das matrizes. O procedimento para a previsão é obter as agregações para cada matriz da série (redução dos dados), prever a agregação para o período que se deseja, e reconstruir a matriz a partir da agregação prevista. Nesse capítulo é detalhadamente descrita a técnica estatística usada na agregação de matrizes: Análise das Componentes Principais. Essa descrição detalhada é necessária, pois as propriedades dessas componentes principais extraídas das matrizes são utilizadas no desenvolvimento do estudo de estabilidade.

O terceiro capítulo é dedicado inteiramente ao estudo de estabilidade da série de matrizes. São propostos quatro critérios de estabilidade, cada um correspondendo a um tipo de evolução diferente. No primeiro critério, é verificado se existe ou não uma mudança nos elementos da matriz ao longo do tempo. O segundo procura identificar "irregularidades" na evolução das

matrizes tais como uma grande expansão em um dado tempo, ou uma expansão seguida de retração nos elementos da matriz. Os outros dois critérios são criados para as agregações das matrizes e procuram verificar "semelhanças" nas agregações ao longo do tempo.

No quarto capítulo são apresentados métodos para previsão e algumas medidas dos erros na previsão das agregações. É discutido o problema da reconstrução da matriz a partir de sua agregação, e o erro cometido nessa reconstrução é avaliado pela perda de informação devida a agregação feita.

No quinto capítulo é feita uma aplicação dos critérios de estabilidade na previsão da matriz do Balanço Energético Nacional para o ano de 1981 a partir das matrizes relativas aos anos de 1976 à 1980. A aplicação desses critérios permite analisar a evolução das agregações, possibilitando também identificar "focos de instabilidades" na evolução da série de matrizes.

Finalmente, no sexto capítulo estão as principais conclusões tiradas do estudo teórico da estabilidade na evolução de uma série de matrizes, e também do uso dos critérios definidos nesse estudo no procedimento para a previsão, como indicadores que permitem a descrição, até certo ponto, da própria evolução da série no tempo.

## CAPÍTULO I

### ATUALIZAÇÃO DE MATRIZES

Um dos problemas de planejamento econômico é o que se refere a quantificação das relações entre setores da economia. Para tanto é necessário dispor de instrumentos que permitam a determinação dessas relações. As matrizes de insumo-produto, de balanço energético, do comércio exterior, de bens de capital entre outras, são exemplos de instrumentos que fornecem medidas dessas relações. Ocorre porém, que na maioria dos casos, a elaboração dessas matrizes é de difícil execução além de ser muito dispendiosa, de tal modo que elas são elaboradas de tempos em tempos (com intervalos de 5 a 10 anos). Surge portanto a necessidade de atualizar da melhor maneira possível esses instrumentos de planejamento econômico. Esse capítulo é destinado a apresentação dos principais métodos de atualização de matrizes.

#### I.1. O Problema de Atualização de Matrizes.

Considere uma matriz  $A(n \times m)$  cujos coeficientes sejam medidas de uma certa relação entre setores econômicos. Por exemplo, suponha que cada coeficiente  $a_{ij}$  forneça a quantidade de energia gasta no setor  $i$ , proveniente da fonte de energia  $j$ . Neste caso, a soma dos coeficientes por linha e por coluna.

$$\sum_j a_{ij} = L_i$$

$$\sum_i a_{ij} = C_j$$

fornecem respectivamente a quantidade total de energia gasta no setor  $i$  ( $L_i$ ), e a quantidade total de energia proveniente da fonte  $j$  ( $C_j$ ). Os valores  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) são chamados de margens da matriz  $A$ , e por corresponderem a grandezas globais, são usualmente mais fáceis de se prever que os coeficientes  $a_{ij}$  isoladamente. Essa característica é explorada na modelagem do problema de atualização de matrizes, onde é feita a hipótese de que para um certo período (atual ou futuro) não se conhece a matriz  $A$ , mas são conhecidas suas margens  $L_i$  e  $C_j$ . A formalização do problema é dada a seguir.

Sejam:

$A_0(n \times m)$  a matriz no tempo  $t_0$

$A(n \times m)$  a matriz no tempo  $t > t_0$

Determine a matriz  $A(n \times m)$ , a partir de  $A_0(n \times m)$  e de

$$L_i = \sum_j a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$C_j = \sum_i a_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

A obtenção exata da matriz  $A$  não é possível a partir desses dados, mas pode-se obter diversas estimativas segundo diferentes métodos. Alguns desses métodos serão apresentados a seguir, a começar pelo método RAS de atualização de matrizes.

## I.2. O Método RAS.

O método RAS (ver BACHARACH - 1965) de atualização de matrizes é formulado da seguinte maneira:

Determine:  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )

tal que:

$$a_{ij} = r_i \ a_{ij}^0 s_j$$

$$\sum_j a_{ij} = L_i$$

$$\sum_i a_{ij} = C_j$$

onde:

$a_{ij}$  são os coeficientes da matriz atualizada  $A$  (que se deseja);

$a_{ij}^0$  são os coeficientes da matriz  $A_0$  (conhecida);

$L_i$  é a soma nas linhas de  $A$  (conhecida);

$C_j$  é a soma nas colunas de  $A$  (conhecida);

$r \in \mathbb{R}^n$  e  $s \in \mathbb{R}^m$  são os vetores multiplicativos que representam as alterações na matriz inicial.

A determinação dos vetores multiplicativos  $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^m$  e dos coeficientes  $a_{ij}$  pode ser feita pelo seguinte método iterativo que ajusta alternadamente as linhas e as colunas da matriz:

Sejam  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) e  $A_0(n \times m) = (a_{ij}^0)$ , dados.

Passo (0):  $k = 0$ ,  $a_{ij}^k = a_{ij}^0$ . Se  $a_i^k = \sum_j a_{ij}^k = L_i$  e

$a_j^k = \sum_i a_{ij}^k = c_j$ , faça  $A = A^k$  pare.

Senão faça  $k = k + 1$

Passo (1):  $a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{L_i}{a_i^{k-1}}$  (ajusta as margens das linhas  $L_i$ )

se  $a_j^k = \sum_i a_{ij}^k = c_j$ , faça  $A = A^k$ , pare.

Senão faça  $k = k + 1$

$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{c_j}{a_j^{k-1}}$  (ajusta as margens das colunas  $c_j$ )

se  $a_i^k = \sum_j a_{ij}^k = L_i$ , faça  $A = A^k$ , pare.

Senão volte para (1)

Assim os vetores multiplicativos serão dados por

$$r_i = \prod_{k=0}^N \frac{L_i}{a_i^{2k+1}} \quad \text{e} \quad s_j = \prod_{k=0}^N \frac{c_j}{a_j^{2k+2}}$$

onde  $N = \frac{\text{nº iterações}}{2} = \text{nº de ajuste por linhas e colunas}$

Note que esse algoritmo ajusta as margens das linhas  $L_i$  e posteriormente ajusta as margens das colunas  $C_j$  até que se obtenha os dois ajustes a menos de uma tolerância dada. Num estudo detalhado desse método, BACHARACH(1965) verifica a sua convergência, bem como a propriedade de conservação dos coeficiente nulos.

#### Aplicação do Método RAS à Matriz de Insumo Produto.

##### i) O Modelo de Insumo Produto

Entre as matrizes que descrevem relações entre diversos setores econômicos, destaca-se como principal instrumento de planejamento, a matriz de insumo produto definida por LEONTIEF (1941) no seu modelo de insumo produto cujo objetivo é de descrever quantitativamente as relações entre as indústrias numa economia em um dado período. Será apresentada a seguir a versão mais simples desse modelo, baseada nas seguintes hipóteses:

- i) A economia é composta de  $n$  indústrias produzindo  $n$  diferentes produtos utilizados como insumo no processo produtivo.
- ii) O processo produtivo apresenta retorno constante em escala.

iii)  $q_{ij}$  é a quantidade física do insumo  $i$  consumida pela indústria  $j$ .

iv)  $p_i$  é o preço do insumo  $i$ .

v)  $q_i$  é a quantidade total do insumo  $i$  consumida pela economia.

A distribuição de cada um dos  $n$  insumos entre as  $n$  indústrias é descrito pelo seguinte sistema linear:

$$q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n} = q_1$$

$$q_{21} + q_{22} + \dots + q_{2n} = q_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$q_{n1} + q_{n2} + \dots + q_{nn} = q_n$$

Multiplicando-se cada equação pelo preço  $p_i$  do insumo  $i$ , obtém-se os gastos devido a cada insumo  $i$  efetuados por cada indústria  $j$ .

$$q_{11}p_1 + q_{12}p_1 + \dots + q_{1n}p_1 = q_1p_1$$

$$q_{21}p_2 + q_{22}p_2 + \dots + q_{2n}p_2 = q_2p_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$q_{n1}p_n + q_{n2}p_n + \dots + q_{nn}p_n = q_np_n$$

Por outro lado cada indústria j tem um gasto com insumos dado por

$$q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \dots + q_{n1}p_n = q_1 p_1$$

$$q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \dots + q_{n2}p_n = q_2 p_2$$

.

.

$$q_{1n}p_1 + q_{2n}p_2 + \dots + q_{nn}p_n = q_n p_n$$

As equações desse sistema indicam que cada indústria gasta na produção exatamente o valor da sua própria produção. Isto é, está sendo considerada a hipótese de que não existe excedente econômico, e portanto toda a produção é utilizada no próprio processo produtivo.

Definindo-se como coeficiente técnico de produção a quantidade de insumos i necessária para a fabricação de uma unidade de produto j, isto é:

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_j}$$

pode-se reescrever os dois sistemas acima:

1º Sistema: quantidades físicas.

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n = q_1$$

$$\begin{aligned}
 a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n &= q_2 \\
 \vdots &\quad \vdots \\
 a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nn}q_n &= q_n
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

## 2º Sistema: Preços

$$\begin{aligned}
 a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n &= p_1 \\
 a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n &= p_2 \\
 \vdots &\quad \vdots \\
 a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n &= p_n
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

Considerando a matriz  $A(n \times n)$  formada pelos coeficientes técnicos de produção e os vetores  $q$  e  $p \in \mathbb{R}^n$  que fornecem respectivamente as quantidades físicas e os preços das  $n$  mercadorias produzidas, os dois sistemas podem ser escritos:

$$Aq = q$$

$$A^T p = p$$

onde  $A^T$  é a matriz transposta de  $A$ .

A matriz  $A$  que descreve o processo produtivo através dos coeficientes técnicos de produção  $a_{ij}$  é chamada de

matriz de insumo-produto e através dela é possível analisar as relações de produção econômica. Embora no modelo apresentado a matriz A seja quadrada, não é necessária essa hipótese para a utilização do método RAS para sua atualização, conforme será visto a seguir.

### ii) O Método RAS e a Matriz de Insumo Produto

Se  $A(n \times m)$  é a matriz de insumo produto, não é usual que se conheça diretamente a soma das linhas e colunas de A (necessárias para a utilização do Método RAS), mas sim as somas das linhas e colunas da matriz de fluxo de mercadoria  $X(n \times m)$  (correspondentes as quantidade físicas totais). A relação entre X e A é dada por:

$$X = A Q$$

onde Q ( $m \times m$ ) é uma matriz diagonal que fornece a produção total para cada uma das indústrias do sistema econômico em questão, isto é:

$$Q = \text{diag } (q)$$

Segundo o método RAS, a matriz atualizada será:

$$A = R A_0 S$$

onde  $R(n \times n)$  e  $S(m \times m)$  são matrizes diagonais formadas pelos vetores r e s.

Supondo conhecidos  $A_0$ , Q e as margens da matriz de fluxo X ( $u_i = \sum_j x_{ij}$ ,  $v_j = \sum_i x_{ij}$ ) tem-se:

$$X = A Q$$

$$u_i = \sum_j x_{ij}$$

$$v_j = \sum_i x_{ij}$$

Sabendo-se que

$$A = RA_0 S$$

Então pode-se escrever

$$X = RA_0 SQ$$

$$X = RA_0 QS$$

porque Q e S sendo diagonais  $SQ = QS$ . A matriz  $Y = A_0 Q$  é conhecida porque  $A_0$  e Q são supostas conhecidas, portanto o problema de se obter a matriz X de fluxos pode ser formulado segundo o método RAS de atualização.

Determine  $r \in \mathbb{R}^n$  e  $s \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$x_{ij} = r_i y_{ij} s_j$$

$$\text{s.a: } \sum_j x_{ij} = u_i$$

$$\sum_j x_{ij} = v_j$$

A matriz dos coeficientes técnicos será obtida por:

$$A = X Q^{-1}$$

### O Método RAS Modificado.

O método RAS de atualização de matrizes pode ser ligeiramente modificado para atender aos casos em que além das margens atuais, são também considerados conhecidos\* alguns dos seus atuais coeficientes. Esse método é conhecido como RAS modificado e operacionalmente é obtido, descontando-se nos totais das linhas e colunas o valor desses coeficientes que receberão valor zero provisoriamente. Procede-se então o método RAS. Como esse método preserva os zeros existentes, ao final acrescenta-se o valor conhecido para aqueles coeficientes, obtendo-se automaticamente o ajuste para as margens.

Outra maneira de se formular o problema de atualização de matrizes, é através da formulação de um problema de programação matemática. No método RAS de atualização busca-se determinar os vetores  $r$  e  $s$  que representam as alterações nos coeficientes de  $A_0$ . Uma outra maneira de modelar o problema, é supor que de um período para o outro as alterações nos coeficientes  $a_{ij}$  são as mínimas possíveis. Isto é, são mínimas tais

(\*) Trata-se do caso em que foi possível se obter boas previsões para esses coeficientes, antes de se efetuar a atualização da matriz  $A_0$ .

que atendam as restrições para as margens da matriz A. Assim o problema de atualização pode ser escrito como (\*);

Determine  $x_{ij}$   $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  tal que

$$\min f(x_{ij})$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^m x_{ij} = L_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = C_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

A função  $f(x_{ij})$  deve ser escolhida tal que descreva a alteração entre a matriz  $A_0$  e a nova matriz.

### I.3. Método de Programação Quadrática.

As formas quadráticas da função  $f$  são as mais frequentemente usadas, baseadas na idéia de ajuste estatísticos dado pela distância do  $\chi^2$ . Serão discutidas a seguir algumas dessas formulações.

(\*) A fim de evitar as notações  $a_{ij}^0$  para os coeficientes da matriz  $A_0$  e  $a_{ij}$  para os coeficientes da matriz  $A$ , será de agora em diante adotada a seguinte notação:

$x_{ij}$  para os coeficientes de  $A$

$a_{ij}$  para os coeficientes de  $A_0$

## i) Formulações de FRIEDLANDER (1961)

Determine  $X = \{x_{ij}\}$   $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$

tal que:

$$\min \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{a_{ij}}$$

$$\text{s.a: } \sum_j x_{ij} = L_i$$

$$\sum_i x_{ij} = C_j$$

onde  $A = (a_{ij})$ ,  $L_i$  e  $C_j$  são conhecidos.

Para resolver esse problema Friedlander propõe o método dos multiplicadores da Lagrange.

$$\min f = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{a_{ij}} = \min \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{2a_{ij}}$$

$$\text{s.a: } L_i - \sum_j x_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$C_j - \sum_i x_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

A função lagrangeana será:

$$L = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{2a_{ij}} + \sum_i \lambda_i (L_i - \sum_j x_{ij}) + \sum_j \mu_j (C_j - \sum_i x_{ij})$$

$$L = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{2a_{ij}} + \sum_i \lambda_i L_i - \sum_i \lambda_i \sum_j x_{ij} + \sum_j \mu_j c_j - \sum_j \mu_j \sum_i x_{ij}$$

Derivando em relação a  $x_{ij}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = \frac{(x_{ij} - a_{ij})}{a_{ij}} - \lambda_i - \mu_j = 0$$

$$\frac{x_{ij}}{a_{ij}} - 1 - \lambda_i - \mu_j = 0$$

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij} + \mu_j a_{ij}$$

Somando para todo  $i$ :

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i a_{ij} + \sum_i \lambda_i a_{ij} + \mu_j \sum_i a_{ij} = c_j$$

Mas se  $A = (a_{ij})$  é a matriz conhecida, a soma nas linhas da matriz  $A$  será:

$$\sum_i a_{ij} = c_j^0$$

$$\text{Assim } c_j = c_j^0 + \sum_i \lambda_i a_{ij} + \mu_j c_j^0 \quad (\text{I.3})$$

Somando para todo  $j$  e chamando  $\sum_j a_{ij} = L_i^0$  temos:

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j a_{ij} + \lambda_i \sum_j a_{ij} + \sum_j \mu_j a_{ij} = L_i^0$$

$$L_i = L_i^0 + \lambda_i L_i^0 + \sum_j \mu_j a_{ij} \quad (I.4)$$

Podemos escrever as equações (I.3) e (I.4).

$$C = C^0 + A^1 + MC^0 \quad (I.5)$$

$$L = L^0 + \Lambda L^0 + A\mu \quad (I.6)$$

onde  $C, C^0, \mu \in R^m$

$L, L^0, \lambda \in R^n$

$M (m \times m) = \text{diag } (\mu_j)$

$\Lambda (n \times n) = \text{diag } (\lambda_i)$

$A (n \times m) = \text{matriz inicial conhecida.}$

As equações (I.5) e (I.6) formam um sistema de  $m + n$  equações cuja solução fornece os  $(m + n)$  multiplicadores de Lagrange.

No seu trabalho Friedlander faz ainda uma relação entre essa solução e a solução obtida por um método iterativo de incrementos sucessivos com relação aos dados originais (um método semelhante ao método RAS). Essa tentativa de relacionar esses dois tipos de métodos (iterativo buscando uma solução

ção viável, e método de Programação Quadrática) será visto posteriormente com mais detalhes.

ii) Formulação de BACHEM e KORTE (1980).

Nessa formulação a função quadrática a ser minimizada é:

$$f = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - a_{ij})^2}{2a_{ij}^2}$$

$$\text{s.a: } L_i = \sum_j x_{ij}$$

$$C_j = \sum_i x_{ij}$$

fornecendo uma solução para  $x_{ij}$  dependente dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$  e  $\mu_j$ :

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij}^2 + a_{ij}^2 \mu_j$$

iii) Formulação de BACHARACH (1970)

Nessa formulação a função distância é utilizada como critério para o ajuste:

$$\min f = \sum_{ij} (x_{ij} - a_{ij})^2$$

$$\text{s.a: } \sum_j x_{ij} = L_i$$

$$\sum_i x_{ij} = c_j$$

cuja solução para  $x_{ij}$  em função dos multiplicadores de Lagrange é:

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i + \mu_j$$

Isto é, a cada elemento  $a_{ij}$  acrescenta-se uma parcela relativa a  $i$ -esima linha e outra relativa a  $j$ -ésima coluna.

#### I.4. Uma Formulação Geral para os Métodos de Atualização de Matrizes.

Para todos os métodos de atualização de matrizes até agora vistos, chega-se a uma equação para  $x_{ij}$  dependendo de dois tipos de multiplicadores (por linhas e por colunas) e do valor conhecido  $a_{ij}$ . O problema fica determinado quando a esta equação para  $x_{ij}$ , acrescenta-se as equações de vínculo

$$\sum_i x_{ij} = c_j$$

$$\sum_j x_{ij} = L_i$$

BACHEM e KORTE (1981) propõe uma relação geral entre  $x_{ij}$  e  $a_{ij}$  baseados na idéia que qualquer mudança dos coeficientes da matriz A para a matriz X devidamente ponderada, é

proporcional a uma combinação linear entre a média aritmética e o quadrado da média geométrica das mudanças por linhas e colunas  $\lambda_i$  e  $\mu_j$ , isto é:

$$\frac{x_{ij} - a_{ij}}{w_{ij}} = \frac{(\lambda_i + \mu_j)}{2} + \tau(\sqrt{\lambda_i \mu_j}) \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Considerando  $X$  ( $n \times m$ )

$A$  ( $n \times m$ )

$\lambda \in R^n$  e  $\Lambda = \text{diag } (\lambda)$

$\mu \in R^m$  e  $M = \text{diag } (\mu)$

a relação geral para  $X$  e  $A$  é dada por:

$$X = A + \Lambda W + WM + \tau \Lambda WM \quad (I.7)$$

onde  $W$  é a matriz dos pesos.

Voltando rapidamente aos métodos anteriormente abordados, as relações entre  $X$  e  $A$  são dadas por:

i) Método RAS

$$x_{ij} = r_i a_{ij} s_j$$

ii) Friedlander

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij} + \mu_j a_{ij}$$

iii) Bachem e Korte

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij}^2 + a_{ij}^2 \mu_j$$

iv) Bacharach

$$x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i + \mu_j$$

Definindo-se valores convenientes para  $W$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  é possível escrever todos esses métodos como derivados da relação geral (I - 7).

i) Para o método RAS, define-se

$$W = A, \tau = 1, \lambda = r - e_n, \mu = s - e_m$$

onde  $e_n \in \mathbb{R}^n$  e  $e_m \in \mathbb{R}^m$  são vetores formados de 1's.

$$X = A + (RA - A) + AS - A + (RA - A)(S - I)$$

$$X = RA + AS - A + RAS - RA - AS + A = RAS$$

$$\text{ou } x_{ij} = r_i a_{ij} s_j$$

ii) Friedlander

$$W = A, \tau = \rho, \lambda \text{ e } \mu \text{ os multiplos de Lagrange}$$

$$X = A + \Lambda A + \Lambda M$$

$$\text{ou } x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij} + a_{ij} \mu_j$$

iii) Bachem e Korte

$W_{ij} = a_{ij}^2$ ,  $\tau = 0$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  os multiplicadores de Langrange

$$W = \begin{vmatrix} a_{11}^2 & \dots & a_{1m}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^2 & \dots & a_{nm}^2 \end{vmatrix}$$

$$X = A + \Lambda W + W M$$

$$\text{ou } x_{ij} = a_{ij} + \lambda_i a_{ij}^2 + a_{ij}^2 \mu_j$$

iv) Bacharach

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad \tau = 0 \quad \lambda \text{ e } \mu \text{ os multiplicadores de Langrange}$$

$$X = A + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_m \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_m & \dots & \mu_m \end{vmatrix}$$

$$\text{ou } x_{ij} = a_{ij} \cdot \lambda_i + \mu_j$$

### I.5. Uma Abordagem Estatística do Problema de Atualização de Matrizes.

O problema de atualização de matrizes pode ser visto como um problema de estimação estatística no qual os coeficientes da matriz  $X$  são considerados como variáveis aleatórias cujos valores deseja-se estimar. Stone (1942) e posteriormente Byron (1978) deram um tratamento estatístico para esse problema, no caso particular em que as matrizes  $A$  e  $X$  são quadradas. Segundo esse enfoque, determina-se uma estimativa para a nova matriz tal que minimize uma função de perda quadrática. Essa função é obtida considerando-se os elementos da matriz  $X = (x_{ij})$  alinhados formando um vetor  $X \in R^{m^2}$ , e a matriz  $V(m^2 \times m^2)$  que fornece as estimativas das covariâncias entre os elementos de  $X$ , e os desvios entre os valores iniciais e os valores estimados. Assim a função perda a ser minimizada é definida por:

$$\min Z = \frac{1}{2} d' V^{-1} d + \lambda' (Gx - h)$$

onde:

$d = (x - a) \in R^{m^2}$  é o vetor dos desvios entre os valores estimados e os valores iniciais.

$V(m^2 \times m^2)$  é a estimativa da matriz de covariância

$\lambda \in \mathbb{R}^{m+m}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange relativos aos  $(m + m)$  vínculos.

$h \in \mathbb{R}^{m+m}$  são os valores dados para as somas das linhas e das colunas da matriz  $X$ . Isto é os vínculos

$$\sum_j x_{ij} = L_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_i x_{ij} = C_j \quad j = 1, \dots, m$$

São representados por:

$$G x = h \quad \text{onde}$$

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \dots 1 \\ 10 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 10 \dots 0 \\ 01 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 00 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$h = [L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_m]'$$

A fim de interpretar melhor a função  $Z$ , considere o caso particular em que  $V$  é diagonal. Nesse caso a função perda será:

$$Z = \sum_{k=1}^{m^2} \frac{(d_k)}{\sigma_k^2} - \lambda' (Gx - h)$$

onde  $\sigma_k^2$  é a variância de  $x_k$ .

Assim os desvios são ponderados pela variância do coeficiente correspondente. Uma maior variância de  $x_k$  permite um desvio  $d_k$  maior, ao passo que se  $x_k$  tiver uma pequena variância, exige-se que a estimativa para  $x_k$  seja mais próxima do valor inicial  $a_k$ . Isto é, considera-se o desvio causado pelos seguintes fatores:

i) a mudança da variável  $x_k$  ocorrida em um período

ii) a dispersão da variável  $x_k$ .

A ponderação pelas variâncias, tem como objetivo "descontar" o fator dispersão do desvio ocorrido.

No caso geral onde  $V$  não é necessariamente diagonal, a minimização da função

$$Z = \frac{1}{2} d' V^{-1} d + \lambda' (Gx - h) = \frac{1}{2} (x - a)' V^{-1} (x - a) + \lambda' (Gx - h)$$

é obtida derivando-se Z em relação X e igualando à zero:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = V^{-1} (X - a) + G' \lambda = 0$$

$$V^{-1} (X - a) = - G' \lambda$$

$$V^{-1} X = V^{-1} a - G' \lambda$$

$$X = a - V G' \lambda \quad (I.8)$$

Por outro lado, das equações de vínculos

$$Gx = h \quad (I.9)$$

Das equações (I.8) e (I.9)

$$V G' \lambda = a - x$$

$$G V G' \lambda = Ga - h$$

$$\lambda = (G V G')^{-1} Ga - (G V G')^{-1} h$$

$$\lambda = (G V G')^{-1} (Ga - h)$$

Portanto, de (I.8)

$$x = a - V G' [G' V G']^{-1} (G_a - h)$$

Embora essa solução para o problema de atualização tenha o inconveniente de necessitar da estimativa da matriz de covariância, por outro lado, o estimador de  $x$  assim determinado é um estimador BLUE (melhor estimador linear não tendencioso) conforme foi demonstrado por Theil (1961). Portanto, embora a função a ser minimizada não seja muito diferente das funções quadráticas definidas anteriormente, essa abordagem estatística do problema, ao contrário das demais, permite uma avaliação do estimador obtido.

#### I.6. Atualização por Programação Linear.

Embora os métodos RAS e de programação quadrática sejam os mais frequentemente usados no problema de atualização de matrizes, algumas tentativas de modelar esse problema foram feitas utilizando-se programação linear: MATUZEWSKI, PITTS e SAWYER (1964) e mais tarde NIJKAMP e PAELINK (1974) foram alguns dos que propuseram uma modelagem desse tipo. A ideia básica ainda é minimizar os desvios entre os valores conhecidos e os valores a serem estimados, diferindo da formulação quadrática apenas pelo fato de que nesse caso, são considerados os desvios absolutos. O problema é formulado da seguinte maneira.

Determine a matriz  $X = (x_{ij})$  tal que

$$\min \sum_{ij} |x_{ij} - a_{ij}| c_{ij}, \text{ com } c_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$$

$$\text{s.a.: } \sum_i x_{ij} = c_j$$

$$\sum_j x_{ij} = L_i$$

$$1/2 \leq x_{ij}/a_{ij} \leq 2$$

A terceira restrição adicionada impõe limites para a variação dos coeficientes, visando evitar um número muito grande de surgimento de zeros para os coeficientes da matriz X, compensado por valores comparativamente muito grandes para os demais valores. Esses limites são na verdade bastante difíceis de se estabelecer sendo uma das principais críticas feitas a essa formulação.

Supondo que os coeficientes da matriz X ou sofram um acréscimo ( $x_+$ ) ou sofram um decréscimo ( $x_-$ ) ou ainda não se alteram em relação ao coeficiente inicial, pode-se escrever:

$$x_{ij} = a_{ij} + x_{ij}^+ - x_{ij}^-$$

$$x_{ij}^+ \geq 0 \quad x_{ij}^- \geq 0$$

sendo que para cada par  $(ij)$ , no máximo uma das duas variáveis ( $x_{ij}^+$  ou  $x_{ij}^-$ ) é diferente de zero. Os desvios absolutos podem ser escritos da seguinte maneira:

$$|x_{ij} - a_{ij}| = |a_{ij} + x_{ij}^+ - x_{ij}^- - a_{ij}| = |x_{ij}^+ - x_{ij}^-| \\ = (x_{ij}^+ + x_{ij}^-)$$

Portanto o problema pode ser reescrito como:

$$\min \sum_{ij} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) c_{ij}$$

$$\text{s.a.: } \sum_i (a_{ij} + x_{ij}^+ - x_{ij}^-) = c_j$$

$$\sum_j (a_{ij} + x_{ij}^+ - x_{ij}^-) = L_i$$

$$1/2 \leq (a_{ij} + x_{ij}^+ - x_{ij}^-)/a_{ij} \leq 2$$

$$x_{ij}^+ \geq 0 \quad x_{ij}^- \geq 0$$

ou ainda:

$$\min \sum_{ij} (x_{ij}^+ + x_{ij}^-) c_{ij}$$

$$\text{s.a.: } \sum_i (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) = c_j - \sum_i a_{ij}$$

$$\sum_j (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) = L_i - \sum_j a_{ij}$$

$$0 \leq x_{ij}^+ \leq a_{ij}$$

$$0 \leq x_{ij}^- \leq a_{ij}/2$$

Matuzewski, Pitts e Sawyer consideram esse problema como um problema de transporte onde os limites superiores das variáveis  $x^+$  e  $x^-$  são vistos como restrições de capacidade.

Os métodos de atualização usando programação linear são, segundo algumas análises comparativas já realizadas (ver Teixeira - 1978) inferiores aos métodos RAS e de programação quadrática. Nessas análises é usada como medida de comparação, o erro cometido na atualização através desses métodos.

## CAPITULO II

### PREVISÃO DE MATRIZES

O problema de atualização de matrizes difere do problema de previsão porque no segundo caso busca-se obter uma estimativa para a matriz  $X$  levando-se em conta não apenas uma matriz inicial  $A$ , mas uma série de matrizes no tempo  $A_1, A_2, \dots, A_T$ . Isto é, no caso da previsão utiliza-se a informação sobre a tendência de mudança apresentada nos últimos períodos para os coeficientes  $a_{ij}$ .

#### II.1 - A Previsão Termo a Termo

Van der Ploeg (1982) tratou do problema de previsão de matrizes como um problema de se ajustar uma série de matrizes econômicas supondo que cada uma delas contém erros de diversas naturezas. A matriz é representada por um vetor  $\epsilon \in \mathbb{R}^{nm}$  tal que o vetor observado no período  $t$  ( $x_t^{obs}$ ) contém uma parcela devida a medida de ruído aleatório ( $\epsilon_t^X$ ), outra devida a um erro sistemático que ocorre em todos os períodos ( $\epsilon_t^{sist}$ ), e outra contendo erros proporcionais ( $\epsilon_t^{prop}$ ) à uma série de dados conhecida ( $y_t$ ), ou seja

$$x_t^{obs} = x_t + \epsilon_t^X + \epsilon_t^{sist} + y_t \epsilon_t^{prop}$$

A estimativa para  $x_t^{obs}$  deve ser obtida de tal modo que obedeça as equações de vínculos para as margens, e minimize o vetor dos erros:

$$\epsilon' = (\epsilon^X, \epsilon^{sist}, \epsilon^{prop})$$

No seu trabalho Van der Ploeg analisa as hipóteses de autocorrelação dos erros uniforme, e de erro sistemático com tendência cíclica, e aplica seu modelo na matriz agregada (de produções globais) para a economia inglesa. Naturalmente a aplicação seria extremamente difícil para a matriz desagregada (matriz de insumo-produto) devido entre outras coisas, às suas grandes dimensões.

## II.2 - A Previsão da Estrutura Básica da Matriz

Como vimos anteriormente a previsão de matrizes apresenta dois problemas principais. Primeiro as matrizes econômicas são usualmente de grandes dimensões, tornando a previsão de todos os seus coeficientes um problema excessivamente trabalhoso. Outro aspecto de ordem prática, é que na maioria das vezes não se tem uma série de matrizes suficientemente grande para que se possa fazer estimativa de erros e tendências confiáveis. Isto é, a previsão usando modelos de séries temporais, não são aplicáveis na maioria das vezes devida a pequena dimensão da série de dados disponíveis.

A fim de contornar o problema da dimensão das matrizes, ao invés de se trabalhar com todos os coeficientes de cada matriz, passa-se a trabalhar com agregações dessas matrizes. Essas agregações devem ser tais que contenham o máximo de informações sobre a matriz com um mínimo de elementos. Em outras palavras, deve-se encontrar o essencial da matriz, e por isso mesmo essas agregações são denominadas de estrutura básica da matriz.

Uma maneira de se determinar essa estrutura básica é através da utilização de técnicas estatísticas de agregação (veja STEMMELEN (1977) e LE FOLL, BURTSCHY (1983)), das quais se destaca a Análise das Componentes Principais. Na utilização dessa técnica, que será descrita com detalhes a seguir, cada matriz  $A_t$  ( $n \times m$ ) da série é vista como uma matriz de dados, considerando-se cada coluna  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  (ou cada linha  $x_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ ) como uma variável aleatória da qual foram feitas  $n$  observações  $a_{\ell k}$  ( $k$  fixo,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ ). Na verdade para cada matriz  $A_t$  serão extraídas duas agregações: uma relativa às colunas e outra relativa às linhas. Esse par de agregações forma a chamada estrutura básica da matriz. Como essas agregações são realizadas pela mesma técnica, segundo os mesmo objetivos, muitas vezes será feita neste trabalho referência a apenas uma delas, mas todos os resultados obtidos para a agregação das colunas é válido para a agregação das linhas.

### II.3 - A Análise das Componentes Principais

#### - Agregação das colunas

Na matriz  $A$  ( $n \times m$ ) considere suas colunas  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) como variáveis aleatórias sobre as quais são feitas  $n$  observações  $a_{\ell k}$  ( $k$  fixo,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ ). Tem-se portanto um conjunto de  $m$  variáveis sobre a qual são feitas  $n$  observações. A Análise das Componentes Principais tem como objetivo descrever a configuração dessas observações no espaço das variáveis. Na figura (II.1) é apresentado um exemplo em que para duas variáveis  $X_1$  e  $X_2$  são feitas sete observações.

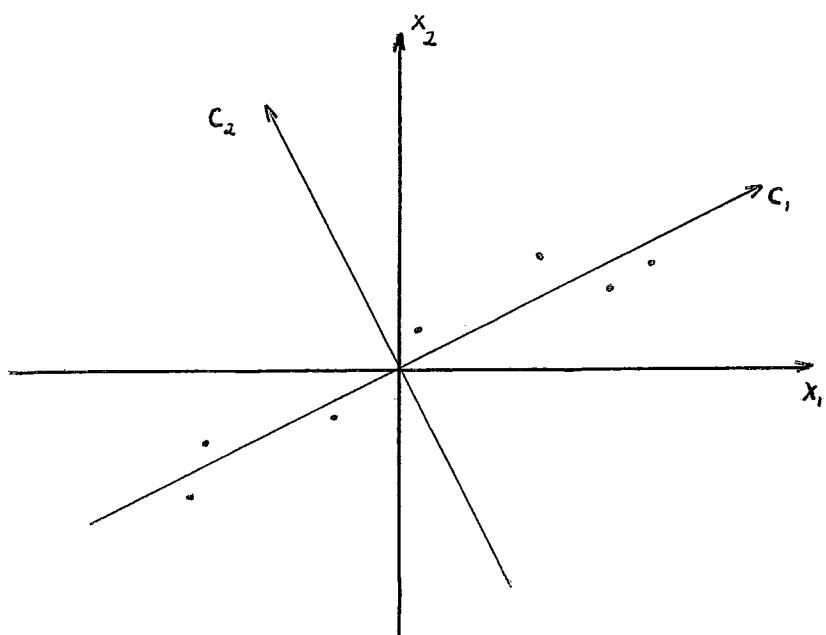


Figura II.1 - As Componentes Principais de um Conjunto de Observações

As componentes principais  $C_1$  e  $C_2$  desse conjunto de pontos acha-se representada na figura, e fornece as direções de maior dispersão dos pontos observados. Na verdade, trata-se apenas de uma rotação ortogonal do sistema de referência original (dado pelas variáveis  $X_1$  e  $X_2$ ), onde  $C_1$  é uma combinação linear de  $X_1$  e  $X_2$ , na direção de maior dispersão dos pontos.  $C_2$  é também uma combinação linear de  $X_1$  e  $X_2$  ortogonal a  $C_1$ .

Voltando a matriz  $A$  ( $n \times m$ ) representando  $n$  observações de  $m$  variáveis, pode-se considerar a nuvem de  $n$  pontos no espaço  $R^m$ . As componentes principais extraídas serão combinações lineares das  $m$  variáveis, tais que  $C_1$  tenha variância máxima;  $C_2$  tenha variância máxima e seja ortogonal a  $C_1$  (em termos estatísticos isto equivale a não correlação entre as componentes); assim sussecivamente até que  $C_m$  será uma combinação linear das  $m$  variáveis com variância máxima, e ortogonal à (ou não correlacionada com)  $C_1, C_2 \dots C_{m-1}$ .

Pode-se escrever:

$$C_1 = \sum_{k=1}^m c_{k1} x_k \quad \text{tal que var}(C_1) = \max$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^m c_{k2} x_k \quad \text{tal que var}(C_2) = \max$$

$$\dots \quad \text{corr}(C_1, C_2) = 0$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots$$

$$C_m = \sum_{k=1}^m c_{km} x_k \quad \text{tal que var}(C_m) = \max$$

$$\text{corr}(C_i, C_m) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

Na extração dessas componentes  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) ocorre que as variâncias são decrescentes devido a restrição crescente de não correlação entre elas. Usualmente as últimas componentes extraídas, têm variâncias tão pequenas que podem ser desprezadas. (Na figura II.1), a dispersão na direção de  $C_1$  é tão maior que na direção  $C_2$ , que a configuração dos pontos pode ser quase totalmente descrita na direção de  $C_1$ ). A redução na dimensão inicial do problema é obtida mantendo-se apenas as p primeiras componentes, as quais descrevem uma grande percentagem da variância total do conjunto de m variáveis.

- Determinação das Componentes Principais (ver JOHNSON, WICHERN - 1982)

Voltando-se a primeira componente  $C_1$

$$C_1 = c_{11} x_1 + c_{21} x_2 + \dots + c_{m1} x_m$$

Considerando as variáveis  $X = (X_1, \dots, X_m)'$  e o vetor dos coeficientes  $c_1 = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1})'$  pode-se escrever:

$$C_1 = c_1' X$$

Dessa forma o problema de determinar  $C_1$  passa a ser o de determinar o vetor  $c_1 \in R^m$  cuja direção seja a da maior variância do conjunto de pontos. Já que o importante é a direção dada pelo vetor  $c_1$ , pode-se considerar sua norma unitária, isto é,

$$c_1' c_1 = 1$$

Sendo

$$C_1 = c_1' X,$$

a variância de  $C_1$  será:

$$\text{var}(C_1) = c_1' \Sigma c_1$$

onde  $\Sigma$  é a matriz das covariâncias de  $X$ . Assim o problema a ser resolvido é:

Determine  $c_1 \in R^m$  tal que

$$c_1' \Sigma c_1 = \max$$

$$\text{s.a.: } c_1' c_1 = 1$$

A solução desse problema pode ser obtida utilizando-se os multiplicadores de Lagrange. A função lagrangeana será:

$$L = c_1' \Sigma c_1 - \lambda_1 (c_1' c_1 - 1)$$

Derivando em relação à  $c_1$  e igualando à zero:

$$2 (\sum - \lambda_1 I) c_1 = 0$$

$$\sum c_1 = \lambda_1 c_1$$

Esta é a equação característica da matriz  $\Sigma$  para extrair seus auto valores  $\lambda_1$  e auto vetores  $c_1$ . Por outro lado:

$$c_1' \sum c_1 = c_1' \lambda_1 c_1$$

como  $c_1' c_1 = 1$

$$c_1' \sum c_1 = \lambda_1 = \text{var}(c_1)$$

Assim a variância de  $c_1$  é um auto valor da matriz  $\Sigma$ . Como essa variância deve ser máxima,  $\lambda_1$  é o maior auto valor de  $\Sigma$ . O vetor  $c_1$  será o auto vetor correspondente normalizado.

Para se encontrar a segunda componente  $c_2$  o procedimento é análogo, só introduzindo-se a restrição de não correlação, que em termos geométricos, equivale a restrição de ortogonalidade.

Sendo

$$C_2 = \sum_{k=1}^m c_{k2} x_k$$

$$c_2 = c_2' x$$

$$\text{var}(c_2) = c_2' \sum c_2$$

O problema fica da seguinte forma:

Determine  $c_2 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$c' \sum_2 c_2 = \text{var}(C_2) = \max$$

$$\text{s.a.: } c'_2 c_2 = 1$$

$$c'_2 c_1 = 0$$

A última restrição garante a não correlação entre  $C_1$  e  $C_2$ . Da mesma maneira, usando os multiplicadores de Lagrange:

$$L = c' \sum_2 c_2 - \lambda_2 (c'_2 c_2 - 1) - \mu c'_2 c_1$$

Derivando em relação à  $c_2$  e igualando à zero:

$$2 (\sum - \lambda_2 I) c_2 - \mu c_1 = 0$$

Pré-multiplicando por  $c'_1$

$$2 c'_1 \sum_2 c_2 - \lambda_2 c'_1 c_2 - \mu c'_1 c_1 = 0$$

$$2 c'_1 \sum_2 c_2 - \mu = 0$$

Mas do primeiro problema:

$$\sum c_1 - \lambda_1 c_1 = 0$$

Pré-multiplicando por  $c'_2$

$$c'_2 \sum c_1 - \lambda_1 c'_2 c_1 = 0$$

Então  $c_2' \sum c_1 = 0 \rightarrow \mu = 0$

Assim o vetor  $c_2$  deve satisfazer:

$$(\sum -\lambda_2 I) c_2 = 0$$

$$\sum c_2 = \lambda_2 c_2$$

Ou seja  $c_2$  e  $\lambda_2$  são auto vetor e auto valor de  $\sum$ . E da mesma forma que no primeiro problema:

$$\sum c_2 = \lambda_2 c_2$$

$$c_2' \sum c_2 = c_2' \lambda_2 c_2$$

$$c_2' \sum c_2 = \lambda_2 = \text{var}(c_2)$$

Então escolhe-se  $\lambda_2$  o maior possível, diferente de  $\lambda_1$ . Será o segundo maior auto valor de  $\sum$ . O auto vetor  $c_2$  correspondente fornece os coeficientes da componente  $C_2$ .

O procedimento para determinar as demais componentes é o mesmo, isto é, no final são extraídos todos os auto valores e auto vetores da matriz  $\sum$ . Operacionalmente falando, determinar os componentes principais de um conjunto de dados, é extraír os auto vetores de sua matriz de covariância.

## A Interpretação das Componentes Principais

Cada componente principal terá variância igual ao auto valor de mesma ordem da matriz de covariância. Se são extraídas todas as  $m$  componentes, a variância total do conjunto original de variáveis é totalmente reproduzida.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = \text{var total} = \text{tr } \Sigma \quad (\text{II-1})$$

Onde  $\text{tr } \Sigma$  é a soma dos elementos da diagonal da matriz de covariância, ou seja a soma das variâncias das  $m$  variáveis.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = \text{tr } \Sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$$

Portanto a medida da importância descritiva de uma componente  $C_i$  qualquer, é dada pela proporção da variância total, descrita por ela:

$$\frac{\lambda_i}{\text{tr } \Sigma} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}$$

Se são mantidas  $p < m$  componentes, a proporção da variância explicada será

$$\frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \quad (\text{II.2})$$

A combinação linear das variáveis que compõe a componente  $c_i$

$$c_i = c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 + \dots + c_{mi} x_m$$

tem como coeficiente as coordenadas do  $i$ -ésimo auto vetor da matriz de covariância  $\Sigma$ . O sinal e a grandeza de  $c_{ki}$  indicam o sentido e a contribuição da  $k$ -ésima variável para a  $i$ -ésima componente. A covariância entre a variável  $x_k'$  e a componente  $c_i$  será:

$$\text{Cov}(x_k', c_i) = E(x_k' c_i) \quad (\text{supondo que as variáveis são centradas (média zero)})$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_k', c_i) &= E \left[ x_k' (c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 + \dots + c_{mi} x_m) \right] \\ &= E \left[ c_{1i} x_1 x_k' + c_{2i} x_2 x_k' + \dots + c_{mi} x_m x_k' \right] \end{aligned}$$

onde  $c_{ki}$   $k = 1, 2, \dots, m$  são constantes, portanto:

$$\text{Cov}(x_k', c_i) = c_{1i} E(x_1 x_k') + c_{2i} E(x_2 x_k') + \dots + c_{mi} E(x_m x_k')$$

$$\text{mas } E(x_1 x_k') = \sigma_{1k'} ; \quad E(x_2 x_k') = \sigma_{2k'}, \dots \quad E(x_m x_k') = \sigma_{mk'}$$

então:

$$\text{Cov}(x_k', c_i) = c_{1i} \sigma_{1k'} + c_{2i} \sigma_{2k'} + \dots + c_{mi} \sigma_{mk'}$$

$$\text{cov}(x_k', c_i) = \sum_{k=1}^m c_{ki} \sigma_{kk'}$$

Considerando-se o conjunto de todas as variáveis  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , as covariâncias entre esse conjunto e a componente  $C_i$  é dada pelo vetor

$$\sum c_i$$

onde  $\sum$  é a matriz de covariância das variáveis  $X$ ,  $c_i = (c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{mi})'$  é o  $i$ -ésima auto vetor de  $\sum$  (ou os coeficientes da combinação linear que formam  $C_i$ ). Sendo  $c_i$  auto vetor de  $\sum$  tem-se:

$$\sum c_i = \lambda_i c_i$$

A covariância entre a variável  $X_k$ , e a componente  $C_i$  será:

$$\text{Cov}(X_k, C_i) = \lambda_i c_{ik}$$

A correlação entre  $X_k$ , e  $C_i$  será:

$$\text{Corr}(X_k, C_i) = \frac{\text{cov}(X_k, C_i)}{\sqrt{\text{var}(X_k) \text{var}(C_i)}} = \frac{\lambda_i c_{ik}}{\sigma_k \sqrt{\lambda_i}} = \frac{\sqrt{\lambda_i} c_{ik}}{\sigma_k}$$

Quando as variáveis originais forem padronizadas (isto é  $\mu_k = 0$  e  $\sigma_k^2 = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ) a correlação entre cada variável  $X_k$  e a componente  $C_i$  será:

$$\text{Cov}(X_k, C_i) = \lambda_i c_{ik}$$

Essas medidas de covariância e correlação entre variáveis e componentes possibilitam a interpretação das componentes principais através das variáveis que possuem as maiores cova-

riâncias com cada componente.

### A Agregação das Linhas

A partir da matriz A ( $n \times m$ ) considere suas linhas  $X_\ell$  ( $\ell = 1, \dots, n$ ) com  $n$  variáveis aleatórias sobre as quais são feitas  $m$  observações. Trata-se nesse caso, de uma nuvem de  $m$  pontos no espaço  $R^n$ . As  $n$  componentes extraídas serão:

$$F_i = \sum_{\ell=1}^n f_{\ell i} X_\ell$$

Análogo ao caso da A.C.P. no espaço  $R^m$ , aqui trata-se de extraír  $n$  componentes não correlacionados e com variâncias decrescentes. Essas componentes são obtidas extraindo-se os auto vetores e auto valores da matriz de covariância dos dados originais.

### A Relação Entre as Duas Agregações

(Veja LEBART e FENELON - 1973)

Sendo X ( $n \times m$ ) a matriz dos dados originais, a agregação das colunas é feita a partir da matriz de covariância  $\sum_{coluna} = X'X$  ( $m \times m$ ), e a agregação das linhas é feita a partir da matriz de covariância  $\sum_{linha} = XX'$  ( $n \times n$ ). Embora essas duas matrizes tenham dimensões diferentes elas tem o mesmo posto obviamente, e portanto o nº de auto valores não nulos será o mesmo para as duas matrizes. Além disso, os auto vetores e auto valores extraídos de  $X'X$  e  $XX'$  são relacionados da seguinte forma:

Se  $c_i$  é auto vetor normalizado de  $X'X$  com auto valor  $\lambda_i$ , pode-se escrever:

$$X'X c_i = \lambda_i c_i \quad \text{com } c_i^T c_i = 1$$

Pré-multiplicando por  $X$ :

$$XX' (X c_i) = \lambda_i (X c_i)$$

Assim  $X c_i$  é auto vetor de  $XX'$  com auto valor  $\lambda_i$ . Isto é, ao auto vetor e auto valor  $c_i$  e  $\lambda_i$  de  $X'X$  corresponde um autor vetor  $f_i^* = X c_i$  associado ao mesmo auto valor  $\lambda_i$ . A normalização de  $f_i^*$  é obtida por:

$$f_i^{*T} f_i^* = (X c_i)^T (X c_i) = c_i^T X^T X c_i$$

mas por outro lado:

$$X'X c_i = \lambda_i c_i$$

$$c_i^T X^T X c_i = \lambda_i c_i^T c_i = \lambda_i$$

portanto  $f_i^{*T} f_i^* = \lambda_i$

Assim o auto vetor normalizado de  $XX'$  associado ao auto valor  $\lambda_i$  será:

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X c_i \quad (\text{II-3})$$

Usando o mesmo raciocínio, é possível se obter o auto vetor  $c_i$  de  $X'X$  a partir de  $f_i$  e  $\lambda_i$ :

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f_i \quad (\text{II-4})$$

### A Reconstrução dos Dados Iniciais X

A análise das componentes principais permite que se reconstrua a matriz de dados originais a partir das componentes que agregam linhas e colunas. Isto é, a partir do conhecimento de  $c_i$ ,  $f_i$  e  $\lambda_i$  é possível reconstruir a matriz de dados inicial  $X$ , porque:

$$\sqrt{\lambda_i} f_i = X c_i$$

$$\sqrt{\lambda_i} f_i c'_i = X c_i c'_i$$

Somando para todo  $i$

$$\sum_i \sqrt{\lambda_i} f_i c'_i = X \sum_i c_i c'_i = XI$$

Então:

$$X (n \times m) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} f_i c'_i \quad (\text{supondo } m < n = \text{posto de } X)$$

No caso de se trabalhar com apenas as  $p < m$  primeiras componentes a reconstrução é feita aproximadamente por:

$$X \approx \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} f_i c'_i$$

Assim cada termo  $a_{\ell k}$  ( $\ell = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ) da matriz original será:

$$a_{\ell k} \approx \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} f_{\ell i} c_{ik} \quad (\text{II-5})$$

#### Outras Abordagens da A.C.P.

Na descrição da técnica da A.C.P., foi usada a hipótese de que os dados da matriz  $X$  eram centrados, isto é as variáveis consideradas ( $X_k$  ou  $X_\ell$ ) têm média zero. Na verdade qualquer matriz de dados pode ser facilmente transformada para que satisfaça essa condição. Outras transformações dos dados são muitas vezes utilizadas dependendo da heterogeneidade das variáveis obtidas. Até aqui considerou-se que as componentes principais eram extraídas da matriz de covariância. Essas componentes são válidas quando se trabalha com uma matriz razoavelmente homogênea na qual as gradezas das variáveis são comparáveis de tal forma que a matriz de covariância é um instrumento adequado para a análise da estrutura dos dados. Nos casos em que a matriz de dados não é homogênea, apresentando variáveis medidas em diferentes unidades, é usual trabalhar-se com as variáveis padronizadas. Isto é, ao invés de tomar como ponto de partida a matriz  $X$  com

$$x_{k\ell} = x_{k\ell} - \bar{x}_k,$$

parte-se da matriz  $Z$  onde

$$z = \frac{x_{k\ell} - \bar{x}_k}{s_k}$$

$\bar{x}_k$  é a média da k-ésima variável

$s_k$  é o desvio padrão da k-ésima variável

Dessa forma a matriz  $Z'Z$  a ser analisada é a matriz de correlação das variáveis. Em princípio pode parecer vantajoso trabalhar sempre com a matriz de correlação, que contorna o eventual problema da heterogeneidade dos dados, mas por outro lado, a inferência estatística sobre auto valores e auto vetores da matriz de correlação (criação de intervalos de confiança e testes de hipóteses) é muito mais complicada do que no caso em que se usa a matriz de covariância.

Outra transformação dos dados usada quando se trabalha com tabelas de contingência, é a proposta por BENZECRI (1973) na técnica chamada Análise de Correspondência. Os dados são transformados de tal modo que se parte da matriz R com

$$r_{ij} = \frac{p_{ij} - p_i \cdot p_j}{\sqrt{p_i p_j}}$$

onde

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{ij} x_{ij}}$$

$$p_i = \sum_j p_{ij}$$

$$p_j = \sum_i p_{ij}$$

Portanto se o objetivo é extrair-se a estrutura básica de uma matriz A, de acordo com os dados disponíveis aplica-se uma dessas transformações e procede-se a A.C.P. obtendo-se os auto valores e auto vetores de

$$X'X \text{ e } XX'$$

ou

$$Z'Z \text{ e } ZZ'$$

ou

$$R'R \text{ e } RR'$$

os quais formam o par de agregações ou a chamada estrutura básica da matriz.

É possível reduzir a série de matrizes  $A_1, A_2 \dots A_T$  à série de estrutura básicas, e o problema de previsão passa a ser: obter a estrutura básica para o tempo  $T + 1$  a partir da série de estruturas para  $t = 1, 2, \dots T$ .

A matriz  $A_{T+1}$  é obtida aproximadamente pela fórmula de reconstrução da matriz de dados. Resta agora resolver o problema específico da previsão, já que, como foi dito anteriormente, as séries disponíveis são pequenas demais para a utilização dos métodos de previsão clássicos.

O problema será abordado através da ideia de estabilidade da série de matrizes. Isto é, uma vez que as séries são muito pequenas, a previsão só será possível se a evolução das

matrizes no tempo se der de forma bastante estável. O próximo capítulo é todo dedicado a criação de critérios de estabilidade, baseados nos coeficientes das matrizes ou baseados nas suas estruturas básicas. Em seguida, no capítulo IV, alguns procedimentos para previsão são propostos, além de avaliação dos erros cometidos, tanto na previsão quanto na reconstrução da matriz a partir de sua estrutura básica.

## CAPÍTULO III

### CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

Nesse capítulo serão estabelecidos três tipos de critérios de estabilidade para a evolução da série de matrizes. Os primeiros critérios estabelecidos são baseados na evolução dos coeficientes das matrizes representados por sua média ou "centro de gravidade". Em seguida, a evolução da série de matrizes é observada através das suas estruturas básicas, isto é, as primeiras componentes principais extraídas das matrizes  $A^t$  e suas transpostas. Essas estruturas serão primeiro analisadas diretamente, buscando-se verificar "semelhanças" entre elas nos diferentes tempos, e posteriormente a análise será feita através da agregação de todas as componentes  $C_i^t$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$  (segundo nível de agregação) onde será possível estabelecer critérios de "semelhança" e "diferença" entre as componentes.

#### III.1 - Estabilidade do Centro de Gravidade

Como foi visto no Capítulo II, pode-se considerar a matriz econômica  $A(n \times m)$  com elemento  $a_{\ell k}$  ( $\ell = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ), como uma matriz de dados com m variáveis e n observações. Cada uma das m colunas de  $A$  será uma variável  $x_k$  com observações  $a_{\ell k}$  ( $k$  fixo,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ ). Nesse caso, é possível representar esses dados com uma nuvem de n pontos no espaço  $R^m$ .

Definição III.1: Centro de gravidade da nuvem de n pontos no  $R^m$ .

Considere a nuvem de  $n$  pontos no espaço  $R^m$  fornecida pela matriz  $A$ . Seja a média da variável  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) dada por:

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n a_{\ell k}$$

chama-se centro de gravidade da nuvem de  $n$  pontos no espaço  $R^m$  ao ponto  $CG \in R^m$  cujas coordenadas são as médias das  $m$  variáveis consideradas.

$$CG = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m) .$$

Considerando-se a série de matrizes  $A^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ), a cada uma delas corresponderá um centro de gravidade:

$$CG^t = (\bar{X}_1^t, \bar{X}_2^t, \dots, \bar{X}_m^t) ; t = 1, 2, \dots, T$$

formando assim uma série de  $T$  pontos  $CG^t \in R^m$ .

Os primeiros critérios estabelecidos baseiam-se na evolução desses pontos  $CG^t$ . Inicialmente será analisado o modelo estacionário, isto é, o caso em que a série de pontos  $CG^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) sofre apenas pequenas alterações aleatórias de ano para ano. Este seria o caso em que não existe nenhum fator contribuindo para a mudança das médias das variáveis  $X_k$  ao longo do tempo. Portanto não haveria uma evolução propriamente dita, mas apenas perturbações aleatórias contribuindo para a variação dos centros de gravidade.

Modelo Estacionário para a Série dos Centros de Gravidade

Hipóteses básicas do modelo:

i)  $CG^t$  é uma variável aleatória  $\in \mathbb{R}^m$  descrita por

ii)  $CG^t = CG + \varepsilon^t$ , onde:

iii)  $CG \in \mathbb{R}^m$  é uma constante independente de  $t$ .

iv)  $\varepsilon^t \in \mathbb{R}^m$  é a perturbação aleatória no ano  $t$ .

v)  $\varepsilon^t$  tem distribuição multinormal

vi)  $E(\varepsilon^t) = 0 \quad \forall t$

vii) A matriz de covariância de  $\varepsilon^t$ ,  $\Sigma_\varepsilon$  é constante isto é:

$$\text{var}(\varepsilon_K^t) = \sigma_k^2 \quad \forall t$$

$$\text{cov}(\varepsilon_k^t, \varepsilon_{k'}^t) = \sigma_{kk'} \quad \forall t$$

Sob essas hipóteses, a variável aleatória  $CG^t$  terá as seguintes propriedades:

i)  $CG^t$  tem distribuição multinormal

$$\text{ii}) E[CG^t] = E[CG] + E[\varepsilon^t] = CG$$

$$\text{iii}) \text{var}(CG_k^t) = \text{var}(CG_k) + \text{var}(\varepsilon_k^t) = \sigma_k^2$$

$$\text{iv)} \ cov(CG_k^t, CG_{k'}^t) = cov(\varepsilon_k^t, \varepsilon_{k'}^t) = \sigma_{kk'}$$

Assim a matriz de covariância de  $CG^t$  será

$$\Sigma_{CG^t} = \sum_{\varepsilon} \text{ constante } \forall t.$$

As estimativas para a média e para a matriz de co  
variância são dadas por:

$$\bar{CG} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T CG^t$$

$$S_{CG}^2 = \frac{1}{T-1} \left[ (CG^t - \bar{CG}) (CG^t - \bar{CG})' \right]$$

$$\bar{CG}, CG^t \in R^m.$$

Embora possa parecer pouco provável que ocorra uma evolução estacionária para  $A^t$ , é importante chamar atenção para o fato que sendo  $A^t$  a matriz de insumo-produto, é razoável supor que não haja mudança nos  $a_{lk}$  se não houver mudanças tecnológicas no período, mesmo se o nível de produção da economia apresente uma real evolução no tempo. Isto porque nesse caso  $a_{lk}$  representa o gasto por unidade de produto. Sempre que a matriz  $A^t$  for composta de elementos  $a_{lk}$  "normalizados" por natureza, a hipótese do modelo estacionário não implica necessariamente numa economia estacionária.

## Ajuste do Modelo Estacionário

Verificar se o modelo estacionário descreve adequadamente a evolução dos Centros de Gravidade no tempo, é verificar se as médias das variáveis  $X_k$  permanecem constantes no tempo porque:

- O modelo estacionário se ajusta quando  $E(CG^1) = E(CG^2) = \dots = E(CG^T)$  onde  $CG^t = (\bar{X}_1^t, \bar{X}_2^t, \dots, \bar{X}_m^t)$ .

Por outro lado, considere o vetor  $X$  das  $m$  variáveis:

$$X \in \mathbb{R}^m = (X_1, X_2, \dots, X_m)$$

A cada variável  $X_k$  corresponde  $n$  observações  $a_{\ell k}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $\mu^t$  o vetor das médias das  $m$  variáveis no tempo  $t$ , isto é:

$$\mu^t = (\mu_1^t, \mu_2^t, \dots, \mu_m^t)'$$

Se  $E(CG^t)$  é constante  $\forall t$ ,  $E(\bar{X}^t)$  é constante  $\forall t$ . Mas  $E(\bar{X}^t) = E(X^t) = \mu^t$ . Portanto verificar se  $E(CG^t)$  é constante  $\forall t$  é equivalente a verificar se  $\mu^t$  é constante  $\forall t$ , ou ainda verificar se:

$$\mu^1 = \mu^2 = \dots = \mu^T, \quad \mu^t \in \mathbb{R}^m$$

Dessa forma, é possível verificar o ajuste ao modelo estacionário através de um teste de igualdade de médias. A análise de variância multivariada é o tipo de testes adequado para verificar ou não essa igualdade.

## Estabilidade dos Centros de Gravidade - Caso Estacionário

Uma vez ajustada ao modelo estacionário, a decisão quanto a estabilidade da série de pontos  $CG^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) deve levar ainda em conta que se deseja obter uma previsão para os coeficientes  $a_{lk}$ , condensados aqui nos centros de gravidade das matrizes. A simples verificação do ajuste ao modelo estacionário não é suficiente como condição de estabilidade porque pode-se obter esse ajuste tanto no caso em que a dispersão dos pontos  $CG^t$  em torno da média  $\bar{CG} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T CG^t$  é pequena, indicando uma baixa perturbação, quanto no caso em que essa dispersão é grande sem apresentar tendência (ver o modelo de Análise de Variância Multivariada - JOHNSON, WICHERN, 1982). A estabilidade só será assegurada se houver, além do ajuste ao modelo estacionário, uma pequena dispersão dos pontos  $CG^t$  em torno de  $\bar{CG} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T CG^t$ , pois só nesse caso a previsão dos coeficientes  $a_{lk}$  pode ser confiável. A dispersão dos pontos  $CG^t$  em torno de  $\bar{CG}$  é estimada pelo desvio quadrático médio entre  $CG^t$  e  $\bar{CG}$ . Isto é

$$DQM(CG^t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^m (CG_k^t - \bar{CG}_k)^2$$

ou

$$DQM(CG^t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (CG^t - \bar{CG})' (CG^t - \bar{CG})$$

onde

$$(CG^t - \bar{CG}) \in \mathbb{R}^m$$

A estabilidade da evolução dos centros de gravida-

de no caso estacionário pode ser definida da seguinte maneira.

Definição III.2: Considere a série de matrizes econômicas  $A^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) e a série de centros de gravidade  $CG^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) correspondente. Diz-se que a série dos  $CG^t$  tem uma estabilidade estacionária se as seguintes condições são satisfeitas:

i)  $CG^t$  se ajusta ao modelo estacionário

ii) Dada uma tolerância  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , tem-se:  $\frac{DQM(CG^t)}{(\overline{CG})^t (\overline{CG})} < \varepsilon$

Assim além do ajuste ao modelo estacionário, a série só será estável se o desvio quadrático médio for pequeno comparado com o quadrado da norma da média dos  $CG^t$ .

#### Estabilidade da Cadeia dos Centros de Gravidade

A seguir será analisado o caso em que existe de fato uma evolução no tempo para a série de matrizes e consequentemente para a série de pontos  $CG^t$ . Trata-se portanto de analisar a forma pela qual se dá esta evolução, e definir situações de estabilidade assim como critérios que possam identificá-las. Uma abordagem semelhante pode ser vista em GOUVEA, V.H.

Definição III.3: Considere a região  $B^t \subset \mathbb{R}^m$  descrita por  $B^t = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \text{ tq } d(x, CG^t) \leq r^t, CG^t \in \mathbb{R}^m, t=1, 2, \dots, T \right\}$  onde:

$d(p_1, p_2)$  é a distância entre dois pontos quaisquer  $\in \mathbb{R}^m$

$$r^t = \max \left\{ d(CG^t, CG^{t+1}), d(CG^t, CG^{t-1}) \right\}.$$

Diz-se que a série de pontos  $CG^t \in R^m$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , forma uma cadeia estável no tempo se para cada tempo  $t$  verifica-se:

$$CG^{t'} \notin B^t, \quad t' \neq t; \quad t' \neq t-1; \quad t' \neq t+1.$$

**Teorema III.1: Estabilidade da cadeia dos centros de gravidade.**

A série de pontos  $CG^t \in R^m$ , ( $T = 1, 2, \dots, T$ ) forma uma cadeia estável no tempo se e somente se a distância entre pontos não consecutivos no tempo é maior que a distância entre pontos consecutivos.

**Prova:**

Se a cadeia é estável, por definição

$$CG^{t'} \notin B^t \quad \text{para } t' \neq t, \quad t' \neq t+1, \quad t' \neq t-1$$

isto é, se a cadeia é estável então

$$CG^{t'} \notin B^t \quad \text{se } |t - t'| \geq 2$$

$$\rightarrow d(CG^t, CG^{t'}) > r^t \quad \text{se } |t - t'| > 2$$

$$\rightarrow d(CG^t, CG^{t'}) > \max \left\{ d(CG^t, CG^{t+1}), d(CG^t, CG^{t-1}) \right\}$$

com  $|t - t'| \geq 2$

o que garante que pontos consecutivos estão mais próximos que pontos não consecutivos. Por outro lado:

$$\text{se } d(CG^t, CG^{t'}) > d(CG^t, CG^{t+1})$$

$$\text{e } d(CG^t, CG^{t'}) > d(CG^t, CG^{t-1}) \text{ com } |t - t'| \geq 2$$

$$\text{então } d(CG^t, CG^{t'}) > \max \{d(CG^t, CG^{t+1}), d(CG^t, CG^{t-1})\}$$

$$d(CG^t, CG^{t'}) > r^t \rightarrow CG^{t'} \notin B^t \rightarrow \text{cadeia estável}$$

Assim, com esse critério, são detalhadas irregularidades na evolução dos pontos tais como:

i) mudanças muito bruscas em um dado tempo, o que obrigaria  $r^t$  ser tão grande que provavelmente o conjunto  $B^t$  conteria  $CG^{t'}$  para  $t' = t + j$ ,  $j = \pm 2$ . (fig.III.1(a))

ii) inversão no tempo, correspondendo a uma grande expansão das variáveis  $X_k$  para um certo tempo e uma posterior retração das mesmas. (fig.III.1(b))

$$(a) \quad \begin{array}{ccccccc} t-1 & & t & & t+1 & & t+2 \\ \cdot & \cdot & \xleftarrow[r^t]{\hspace{1cm}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad CG^{t+2} \in B^+$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccccccc} t-1 & & t & & t+2 & & t+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad CG^{t+2} \in B^t$$

Figura III.1 - Situações de instabilidade na cadeia dos centros de gravidade

Até aqui foram vistas algumas possíveis instabilidades na evolução dos centros de gravidade e como detectá-las. Será considerada estável a série de pontos que obedecer ao critério da cadeia dos centros de gravidade ou que apresentar uma estabilidade estacionária.

### III.2 - Estabilidade da Estrutura Básica da Matriz - 1º Nível de Agregação

A estrutura básica de uma matriz econômica  $A$ , como foi definida no Capítulo II, é formada pelos  $p$  primeiros pares de componentes principais extraídas da matriz  $A$  ( $n \times m$ ) e sua transposta. A partir da previsão dessa estrutura para o período  $T + 1$ , é possível reconstruir a matriz  $A_{T+1}$ . Portanto a previsão e o estudo da estabilidade devem ser feitos tanto para as agregações das colunas como para as agregações das linhas. Sendo essas agregações equivalentes, os critérios definidos para uma, vale evidentemente para a outra. Foi escolhida para o presente estudo, a agregação obtida a partir das colunas da matriz  $A^t$ , isto é, as  $p$  primeiras componentes principais extraídas da matriz  $A^t$ . Dessa forma ao invés de analisar a série de matrizes  $A^t$ , passa-se a análise da evolução da série de componentes  $c_i^t$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ ). Antes da apresentação dos critérios de estabilidade para as agregações das colunas das matrizes  $A^t$ , é necessário caracterizar o conjunto das componentes principais, tanto pelas variáveis que as compõe como pelas suas variâncias.

## Caracterização das Componentes Principais

Definição III.4: Chama-se de contribuição da variável  $x_k^t$  para a componente  $C_i^t$  o quadrado do coeficiente da combinação linear de  $C_i^t$  relativo à variável  $x_k^t$  isto é

$$\left(c_{ik}^t\right)^2 = \text{contribuição da variável } x_k^t \text{ na composição da componente } C_i^t.$$

Definição III.5: A ordem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) da componente  $C_i^t$  é dada pela relação de ordem decrescente das variâncias das componentes extraídas no tempo  $t$ . (supondo que exista uma ordem estrita para essas variâncias, isto é:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ ).

A partir dessas duas definições, pode-se caracterizar cada componente de duas formas. Primeiro pela sua ordem  $i$ , e segundo pelas variáveis que contribuem mais fortemente para sua composição.

## A Idéia da Estabilidade da Série de Estruturas Básicas

A fim de desenvolver os próximos critérios de estabilidade serão consideradas as componentes principais extraídas da matriz de correlação dos dados. Posteriormente a estabilidade para componentes extraídas da matriz de covariância será tratada de forma análoga.

Teorema III.2: Seja  $A^t$  a matriz com colunas  $x_k^t$  e  $R^t$  a matriz de correlação a partir da qual se obtém  $C_i^t$  e  $\lambda_i^t$ ,

$i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ . Se  $x_k^t = \alpha_k^t x_k^{t'}$ ,  $t \neq t'$ ,  $\alpha_k^t \in \mathbb{R}$ , então

$$c_i^t = c_i^{t'} \quad \text{e} \quad \lambda_i^t = \lambda_i^{t'} \quad \forall i$$

Prova:

Sejam  $A^t$  ( $m \times n$ ) a matriz de dados de posto  $m$  e  $R^t$  ( $m \times m$ ) a matriz de correlação.

se  $x_k^t = \alpha_k^t x_k^{t'}$ ,  $\alpha_k^t \in \mathbb{R}$

$$\text{corr}(x_k^t, x_k^{t'}) = \text{corr}(\alpha_k^t x_k^{t'}, \alpha_k^{t'} x_k^{t'}) = \text{corr}(x_k^{t'}, x_k^{t'})$$

$$R^{t'} = R^t \rightarrow \lambda_i^{t'} = \lambda_i^t \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{e } c_i^t = c_i^{t'}$$

porque  $\lambda_i^t$  e  $c_i^t$  são os auto valores e auto vetores da matriz de correlação  $R^t$ .

A partir desse resultado, se as colunas  $x_k^t$  da matriz  $A^t$  sofrerem uma evolução descrita por:

$$x_k^t = \alpha_k^t x_k^1 \quad \forall t \rightarrow R^t = R^1 \quad \forall t$$

então

$$c_i^t = c_i^1 \quad \forall t$$

Uma evolução como a descrita acima implica em que as colunas da matriz  $A$  sofrem alterações no tempo mas suas composições básicas permanecem constantes, isto é, a relação entre os

coeficientes  $a_{ik}/a'_{ik}$  permanece constante ao longo do tempo. Portanto uma condição de estabilidade para uma série de matrizes seria a igualdade das componentes de mesma ordem  $i$  ao longo do tempo. Evidentemente a igualdade entre as componentes é teórica, e a série será considerada estável se as componentes de mesma ordem  $i$  forem "semelhantes" para todos os anos. Uma maneira de se verificar essa "semelhança" é testando se as variáveis que mais contribuem para a composição da componente  $C_i^t$  permanecem as mesmas ao longo do tempo (veja também GOUVEA, V.H.)

#### Critério de Semelhança das Componentes Principais

Definição III.6: Seja a série de agregações  $C_i^t$  ( $i = 1, 2, \dots, T$ ). Para cada componente  $C_i^t$  considere o conjunto  $V_i^t$  formado pelas variáveis  $x_{k*}^t$  que contribuem mais fortemente para a componente  $C_i^t$ , isto é:

$V_i^t = \{x_{k*}^t\}$  onde  $K^* \subset k = \{1, 2, \dots, m\}$ , é o conjunto dos índices das variáveis cujos coeficientes  $(c_{ik*}^t)^2 \geq (c_{min})^2$ , onde  $(c_{min})^2$  é o mínimo valor que  $(c_{ik}^t)^2$  pode assumir para que a variável  $x_k^t$  tenha uma contribuição significativa para  $C_i^t$ .

Para cada ordem  $i$ , as componentes  $C_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) são consideradas semelhantes se

$$V_i^1 = V_i^2 = \dots = V_i^T$$

Definição III.7: Chama-se grau de contribuição de um conjunto de variáveis  $V_i^t = \{x_{k*}^t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ )

para a componente  $C_i$  ao mínimo da contribuição total do conjunto ao longo do tempo, isto é:

$$g.c. = \min_t \left\{ \sum_{k^*} (c_{ik^*}^t)^2 \right\}$$

onde  $(c_{ik^*}^t)^2$  é a contribuição da variável  $X_{k^*}$  para a componente  $C_i$  no tempo  $t$ , e

$$\sum_{k^*} (c_{ik^*}^t)^2 \leq 1.$$

O grau de contribuição assim definido, fornece uma indicação de como escolher os conjuntos  $V_i^t$ . Eles devem descrever aproximadamente a composição da componente  $C_i^t$  e evidentemente não devem incluir todas as  $m$  variáveis, o que tornaria o critério de semelhança definido acima trivialmente satisfeito. A hipótese para utilização desse critério, é que cada componente pode ser representada por um número menor que  $m$  de variáveis que contribuam fortemente para a sua composição.

### III.3 - Estabilidade da Estrutura Básica da Matriz - Segundo Nível de Agregação

Na seção anterior foi definido um critério de estabilidade para as componentes  $C_i^t$  onde, através das variáveis que mais contribuem para as componentes de mesma ordem é possível verificar suas semelhanças. Aqui um outro enfoque será usado para verificar ainda as semelhanças entre componentes de mesma ordem, e além disso, as diferenças entre componentes de ordens distintas.

tas. As semelhanças entre as componentes já foi justificada pelo teorema III.2 da seção anterior. A exigência da diferença entre as componentes pode ser justificada porque se

$$c_i^t = c_i^1 \quad \forall t,$$

$$\text{corr}(c_i^t, c_{i'}^1) = 0 \quad \forall t$$

implicando na ortogonalidade, ou independencia entre as componentes de ordens distintas. Assim será estabelecido um critério que permita verificar essas duas condições, isto é se

$c_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) são "semelhantes" e se

$c_i^t c_{i'}^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ;  $i, i' = 1, 2, \dots, p$ ;  $i \neq i'$ ) são "distintas"

O critério proposto a seguir, ao invés de examinar cada componente  $c_i^t$  separadamente, considera o conjunto de todas as componentes  $c_i^t$  e a partir dele, verifica se as duas condições são ou não satisfeitas. Para isso as componentes  $c_i^t$  são consideradas como um conjunto de pontos no espaço  $\mathbb{R}^m$  formando uma matriz  $(m \times pT)$ . Assim como as colunas  $x_k^t$  da matriz  $A^t (n \times m)$  foram agregadas pelas componentes  $c_i^t$ , aqui serão agregadas todas as  $pT$  componentes extraindo-se suas componentes principais  $K_j$ . Trata-se portanto de um segundo nível de agregação. As componentes  $K_j$  são determinadas obtendo-se  $k_{ij}^t$  tais que:

$$K_j = \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^T k_{ij}^t c_i^t$$

$$\text{var}(K_j) = \max$$

$$\text{corr}(K_j, K_1) = \text{corr}(K_j, K_2) = \dots =$$

$$= \text{corr}(K_j, K_{j-1}) = 0$$

para  $j = 1, 2, \dots, p$

Tomando as  $q$  primeiras componentes principais, responíveis por  $Q\%$  da variância total do conjunto, pode-se representar cada componente  $c_i^t$  como um ponto no espaço  $R^q$  cujo sistema de referências é formado pelas  $q$  primeiras componentes  $K_1, K_2, \dots, K_q$ . É portanto nesse espaço  $R^q$  que as "semelhanças" e "diferenças" entre as componentes  $c_i^t$  serão verificadas.

Definição III.8: Esfera de ordem  $i$ .

Sejam  $c_i^t$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ ),  $pT$  pontos no espaço  $R^q$ . Considere o ponto

$$o_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_i^t$$

média dos pontos  $c_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) e seja

$$r_i = \max_t \{ d(o_i, c_i^t) \},$$

onde  $d(O_i, C_i^t)$  é a distância entre  $O_i$  e  $C_i^t$ . Chama-se de esfera de ordem  $i$   $E_i$ , a esfera centrada em  $O_i$  de raio  $r_i$ , isto é,  $E_i = \{x \in R^q \text{ tq } d(x, O_i) \leq r_i\}$

### Propriedades da Esfera $E_i$ .

- i)  $E_i$  contém todos os pontos  $C_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2, \dots T$ )
- ii)  $E_i$  é a menor esfera de centro  $O_i$  que contém todos os pontos  $C_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2, \dots T$ ).

### Critério de Estabilidade das Esferas Disjuntas

Definição III.9: Sejam as  $T$  estruturas básicas formadas pelas agregações das colunas de  $A^t$ , isto é, as componentes  $C_i^t$  ( $i = 1, 2, \dots p$ ;  $t = 1, 2, \dots T$ ). Seja o espaço  $R^q$  definido pela agregação dessas componentes no qual constrói-se as esferas  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots p$ ) definidas anteriormente. Considera-se estável a série das  $T$  estruturas, se as esferas  $E_i$  são disjuntas para todo  $i$ . Isto é, se  $x \in E_i \Rightarrow x \notin E_{i'}$ ,  $\forall i, \forall i', i \neq i'$ . É evidente que  $E_i$  e  $E_{i'}$  serão disjuntas se e somente se  $d(O_i, O_{i'}) > r_i + r_{i'}$ ,  $\forall i, \forall i', i \neq i'$ , onde  $d(O_i, O_{i'})$  é a distância entre os centros das esferas  $E_i$  e  $E_{i'}$ ;  $r_i$  é o raio de  $E_i$ ;  $r_{i'}$  é o raio de  $E_{i'}$ .

Embora o critério das esferas disjuntas forneça uma resposta quanto a estabilidade ou não da evolução das estruturas das matrizes, não fornece uma medida comparativa de estabilidade. Isto é, se duas séries de estruturas são consideradas estáveis

segundo o critério das esferas disjuntas, não é possível saber qual delas é a mais estável. Para isso é necessário definir um grau de estabilidade para a evolução dessas estruturas.

### Grau de Estabilidade

Definição III.10: Considere uma série de T estruturas, e considere ainda as esferas  $E_i$ , já definidas. Para cada par de esferas  $(E_i, E_{i'})$  é possível estabelecer a relação:

$$G_{ii'} = \frac{d(O_i, O_{i'})}{r_i + r_{i'}}$$

Chama-se grau de estabilidade (GE) de uma série de estruturas, ao menor dos valores encontrados para  $G_{ii'}$ , isto é:

$$GE = \min_{(i,i')} \{G_{ii'}\} \quad \forall i, \forall i' \quad i \neq i'.$$

Dessa definição pode-se concluir que

- i) Se a série de estruturas é estável,  $GE > 1$ .
- ii) Quanto maior o GE, mais estável é a série de estruturas.
- iii) Se  $GE \leq 1$ , a série não é considerada estável segundo o critério das esferas disjuntas.
- iv) Se  $GE = 1$ , ao menos duas das esferas se tangenciam.

São consideradas semelhantes portanto as componentes que estão na mesma esfera, e distintas aquelas que estão em esferas diferentes. O critério das esferas disjuntas exige que sejam semelhantes (isto é, que estejam na mesma esfera) as componentes de mesma ordem, e estejam em esferas diferentes as componentes de diferentes ordens.

Um alto grau de estabilidade indica que os raios das esferas são pequenos em relação a distância entre seus centros. Neste caso as componentes de mesma ordem estão concentradas e bastante afastadas das concentrações das demais componentes.

Os critérios de estabilidade apresentados nessa seção foram definidos supondo-se que as componentes principais  $C_i$  eram extraídas da matriz de correlação dos dados. Isto é, supõe-se que as variáveis  $X_k$  são normalizadas. Se no entanto ao invés da matriz de correlação  $R$ , as componentes principais forem extraídas da matriz de covariância  $S$ , o critério de igualdade das componentes de mesma ordem  $i$  permanece, mas corresponderá a uma evolução proporcional para toda a matriz, e não para cada coluna  $X_k$ , conforme será mostrado a seguir.

#### Critério de Estabilidade para as Componentes Extraídas da Matriz de Covariância

Teorema III.3: Seja a matriz de dados  $A^t$ , e  $S^t$  a matriz de covariância correspondente a partir da qual se obtém  $C_i^t$  e  $\lambda_i^t$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ ).

se  $A^t = \alpha^t A^{t'}$ ,  $\alpha^t \in \mathbb{R}$

então  $c_i^t = c_i^{t'}$

e  $\lambda_i^t = (\alpha^t)^2 \lambda_i^{t'} \forall i$

Prova: se  $A^t = \alpha^t A^{t'}$  e  $x_k^t, x_k^{t'}$  são as k-esimas colunas (variáveis) de  $A^t$  e  $A^{t'}$  respectivamente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_k^t, x_k^{t'}) &= \text{cov}(\alpha^t x_k^{t'}, \alpha^t x_k^{t'}) = \\ &= (\alpha^t)^2 \text{cov}(x_k^{t'}, x_k^{t'}) \end{aligned}$$

Portanto  $S^t = (\alpha^t)^2 S^{t'}$

Como  $c^{t'}$  e  $\lambda^{t'}$  são auto vetores e auto valores de  $S^{t'}$ , isto é:

$$S^{t'} c^{t'} = \lambda^{t'} c^{t'}$$

multiplicando-se os dois lados da equação por  $(\alpha^t)^2$  obtem-se

$$(\alpha^t)^2 S^{t'} c^{t'} = (\alpha^t)^2 \lambda^{t'} c^{t'}$$

mas como  $(\alpha^t)^2 S^{t'} = S^t$  conclui-se que

$$S^t c^{t'} = (\alpha^t)^2 \lambda^{t'} c^{t'}$$

Portanto  $c^{t'}$  e  $(\alpha^t)^2 \lambda^{t'}$  são os auto vetores e auto valores de  $S^t$  ou seja:

$$c^{t'} = c^t$$

$$(\alpha^t)^2 \lambda^{t'} = \lambda^t$$

Assim os critérios baseados na igualdade das componentes de mesma ordem  $i$ , e na diferença das componentes de ordens diferentes, continuam valendo embora correspondam a uma evolução proporcional para toda a matriz, isto é, o critério de estabilidade para componentes extraídas da matriz de covariância é mais forte que o mesmo critério para componentes extraídas da matriz de correlação.

### III.4 - O Problema da Mudança de Ordem

Nos critérios definidos para as estruturas básicas das matrizes, as componentes principais de cada estrutura são caracterizadas pela sua ordem  $i$ , assim como pelas variáveis que as compõe. Os critérios foram baseados na idéia de que componentes de mesma ordem devem ser compostas pelas mesmas variáveis sendo portanto semelhantes. Mas muitas vezes ocorre que a componente  $C_i$  em um dado tempo  $\tau$ , é descrita pelas variáveis que caracterizam a ordem  $i' \neq i$  para  $t \neq \tau$ , ao mesmo tempo que a componente  $C_i$  é descrita pelas variáveis que caracterizam a ordem  $i$  quando  $t \neq \tau$ . Nesse caso pode-se dizer que houve uma mudança de ordem no tempo  $t = \tau$ .

Definição III.11: Mudança de ordem - Diz-se que existe uma mudança de ordem em algum tempo  $\tau$ , quando os critérios de estabilidade das estruturas básicas das matrizes valem apenas

quando se troca a ordem das componentes  $C_j^T$ . Nesse caso, feita a mudança de ordem, a série de estruturas é considerada estável.

Para compreender melhor o que acontece na série de estruturas das matrizes quando for verificada uma mudança de ordem, é necessário analisar o problema das estimativas das variâncias das componentes principais extraídas, lembrando que a ordem das componentes é dada pela relação de ordem decrescente de suas variâncias. Como foi visto no Capítulo II, as variâncias das componentes principais são dadas pelos autovalores extraídos da matriz de covariância (ou da matriz de correlação) das variáveis originais. Na prática no entanto, trabalha-se evidentemente com a matriz de covariância (ou correlação) amostral, e consequentemente seus autovalores são na verdade estimativas para as variâncias das componentes  $C_j$ . Assim, quando ocorre uma mudança de ordem em um tempo  $\tau$ , não significa necessariamente que a variância da componente  $C_j$  tornou-se maior (ou menor) que a variância da componente  $C_{j'}$ , mas apenas que no tempo  $\tau$ , a estimativa da variância de  $C_j$  foi maior (ou menor) que a estimativa da variância de  $C_{j'}$ , ao contrário do que ocorreu nos outros tempos  $t \neq \tau$ . Portanto para se tratar do problema da mudança de ordem é necessário um estudo das estimativas dos parâmetros  $\lambda_j$  e  $\lambda_{j'}$ .

#### Intervalo de Confiança para $\lambda_j$ e $\lambda_{j'}$

A partir das estimativas  $\lambda_j$  e  $\lambda_{j'}$ , em alguns casos é possível se estabelecer intervalos de confiança para os parâmetros  $\lambda_j$  e  $\lambda_{j'}$ , isto é, determinar  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $L_1$  e  $L_2$  tais que:

$$i) P(M_1 < \lambda_j < M_2) = (1 - \alpha)$$

$$\text{ii) } P(L_1 < \lambda_{ij} < L_2) = (1 - \alpha)$$

onde  $(1 - \alpha)$  é o nível de confiança do intervalo com  $0 < \alpha < 1$ .

Supondo  $\lambda_{ij} > \lambda_{i'j}$ , duas possíveis situações para os intervalos de confiança são mostradas na figura (III.2).

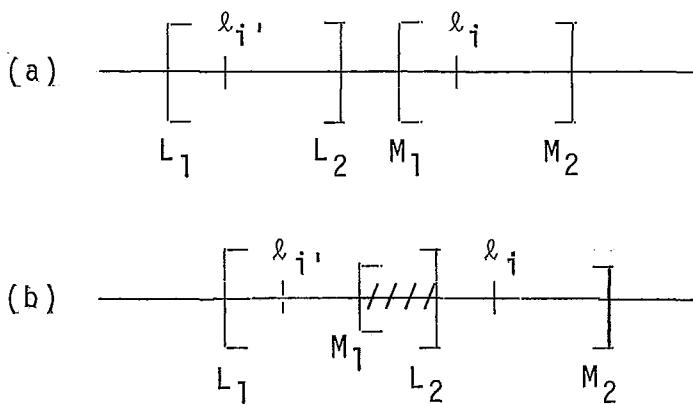


Figura III.2 - Intervalos de confiança para  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_{i'j}$

Se as estimativas  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_{i'j}$  são muito próximas, os intervalos de confiança podem apresentar uma região de interseção (fig. III.2(b)). Isto significa que dentro do nível de confiança estabelecido, não se pode afirmar que  $\lambda_{ij} > \lambda_{i'j}$ , embora esta ordem tenha sido observada para as estimativas  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_{i'j}$ . Portanto, mantendo-se o nível de confiança  $(1 - \alpha)$ , quanto mais próximos forem os valores  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_{i'j}$ , maior a interseção dos intervalos, e consequentemente menor a confiança com que se pode inferir a ordem amostral  $\lambda_{ij} > \lambda_{i'j}$  para a população.

Os intervalos de confiança para os parâmetros  $\lambda_{ij}$  a partir de suas estimativas  $\lambda_{ij}$  foram estabelecidos por ANDERSON (1963) e LAWLEY (1956) quando as variáveis envolvidas tem distri-

buição multinormal e os auto valores da matriz de covariância são distintos. Nesse caso, se o tamanho da amostra for suficientemente grande, pode-se afirmar que:

$$P \left\{ \frac{\lambda_i}{1 + z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}} \leq \lambda_i \leq \frac{\lambda_i}{1 - z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}} \right\} = (1 - \alpha)$$

onde:  $n$  é o tamanho da amostra

$z_{\alpha/2}$  é o valor tal que  $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$Z$  é a variável aleatória normal padrão.

Assim os limites para os intervalos de confiança  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $L_1$  e  $L_2$  para  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i'}$ , respectivamente são dados por:

$$M_1 = \frac{\lambda_i}{1 + z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}}, \quad M_2 = \frac{\lambda_i}{1 - z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}}$$

$$L_1 = \frac{\lambda_{i'}}{1 + z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}}, \quad L_2 = \frac{\lambda_{i'}}{1 - z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}}$$

### Interseção dos Intervalos de Confiança

Supondo  $\lambda_i > \lambda_{i'}$ , haverá interseção dos intervalos de confiança se o limite inferior do intervalo para  $\lambda_i$  for menor

que o limite superior do intervalo para  $\lambda_i$ , isto é se  $M_1 < L_2$ . Considerando o mesmo nível de confiança para os dois intervalos, pode-se escrever:

$L_2 - M_1 > 0 \rightarrow$  existe interseção dos intervalos de confiança

$L_2 - M_1 \leq 0 \rightarrow$  não existe interseção.

**Teorema III.4:** Se  $X$  tem distribuição multinomial e  $\lambda_i, \lambda_{i'}$  são autovalores da matriz de covariância  $\Sigma$  cujas estimativas são dadas por  $\hat{\lambda}_i$  e  $\hat{\lambda}_{i'}$ , autovalores da matriz de covariância amostral  $S$  e supondo  $\lambda_i > \lambda_{i'}$ , então, considerando-se grandes amostras, existe interseção do intervalo de confiança ao nível de  $(1 - \alpha) 100\%$  dada por  $L_2 - M_1 > 0$  quando

$$\frac{(\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_{i'})}{(\hat{\lambda}_i + \hat{\lambda}_{i'})} < Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Prova:

$$L_2 - M_1 = \frac{\hat{\lambda}_{i'}}{1 - Z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}} - \frac{\hat{\lambda}_i}{1 + Z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)}}$$

$$L_2 - M_1 = \frac{\hat{\lambda}_{i'} \left( 1 + Z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)} \right) - \hat{\lambda}_i \left( 1 - Z_{\alpha/2} \sqrt{2/(n-1)} \right)}{1 - Z_{\alpha/2}^2 \left( \frac{2}{n-1} \right)}$$

se  $n$  for suficientemente grande,  $1 - Z_{\alpha/2}^2 \left( \frac{2}{n-1} \right) > 0$ , portanto

$$L_2 - M_1 \leq 0 \Leftrightarrow \ell_{i^+} + \ell_{i^-} Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1} - (\ell_{i^+} - \ell_{i^-}) Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1} \leq 0$$

$$(\ell_{i^+} - \ell_{i^-}) + (\ell_{i^+} + \ell_{i^-}) Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1} \leq 0$$

$$(\ell_{i^+} - \ell_{i^-}) \leq (\ell_{i^+} + \ell_{i^-}) Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1}$$

$$(\ell_{i^+} - \ell_{i^-}) \geq (\ell_{i^+} + \ell_{i^-}) Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1}$$

$$\frac{(\ell_{i^+} - \ell_{i^-})}{(\ell_{i^+} + \ell_{i^-})} \geq Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1}$$

Então pode-se concluir que

se  $\frac{(\ell_{i^+} - \ell_{i^-})}{(\ell_{i^+} + \ell_{i^-})} \geq Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1} \rightarrow$  não há interseção dos intervalos de confiança

se  $\frac{(\ell_{i^+} - \ell_{i^-})}{(\ell_{i^+} + \ell_{i^-})} < Z_{\alpha/2} \sqrt{2/n-1} \rightarrow$  há interseção

### Região de Interseção dos Intervalos de Confiança

Uma vez verificada a interseção dos intervalos, a região de interseção é dada por:

$$L_2 - M_1 = \frac{1}{1 - Z_{\alpha/2}^2 \left( \frac{2}{n-1} \right)} \left[ (\ell_{i^+} + \ell_{i^-}) Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}} - (\ell_{i^+} - \ell_{i^-}) \right] > 0$$

$$L_2 - M_1 = \frac{(\lambda_{i'} + \lambda_i)}{1 - Z_{\alpha/2}^2 \left( \frac{2}{n-1} \right)} \left[ Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}} - \frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})}{(\lambda_{i'} + \lambda_i)} \right] > 0$$

como  $(\lambda_{i'} + \lambda_i) > 0$  (porque  $\lambda_{i'}$  e  $\lambda_i$  são positivos)

$$1 - Z_{\alpha/2}^2 \left( \frac{2}{n-1} \right) > 0 \quad (\text{supondo } n \text{ grande})$$

$$(\lambda_i - \lambda_{i'}) > 0 \quad (\text{por hipótese } \lambda_i > \lambda_{i'})$$

então a região de interseção dos intervalos de confiança será maior na medida em que  $\frac{(\lambda_i - \lambda_{i'})}{(\lambda_{i'} + \lambda_i)}$  for menor, sendo máxima quando  $\lambda_i = \lambda_{i'}$ , situação que equivale a coincidência dos intervalos, sendo a interseção a própria amplitude desse intervalo.

### Máximo Nível de Confiança

Uma outra maneira de se analisar o problema é, a partir das estimativas  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i'}$  ( $\lambda_i > \lambda_{i'}$ ) obtidas, determinar qual o máximo nível de confiança para o qual não existe interseção dos respectivos intervalos. Isto é, dadas as estimativas  $\lambda_i > \lambda_{i'}$ , determinar com que grau de confiança pode-se afirmar que  $\lambda_i > \lambda_{i'}$ . Seja  $(1 - \alpha_{\min})$  o nível de confiança que permite os maiores intervalos para  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i'}$ , tal que não haja interseção entre eles, isto é, tal que:

$$L_2 - M_1 = 0$$

Então:

$$\frac{(\lambda_i - \lambda_{i+1})}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})} = z_{\alpha_{min}/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Portanto

$$z_{\alpha_{min}/2} = \frac{(\lambda_i - \lambda_{i+1})}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Quanto mais próximo  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i+1}$ , menor o valor  $z_{\alpha_{min}/2}$ , sendo maior o valor de  $\alpha_{min}/2$ , e menor o nível de confiança  $(1 - \alpha_{min})$ . Isto é, quanto mais próximos os valores  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i+1}$ , menor a probabilidade (dada por  $1 - \alpha_{min}$ ) dos intervalos construídos sem interseção conterem os parâmetros  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i+1}$  respectivamente, ou ainda, menor a confiança com que se pode inferir a ordem  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$  a partir da observação  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ .

## CAPÍTULO IV

### PREVISÃO E ESTUDO DOS ERROS

Na primeira parte deste Capítulo, além dos métodos mais freqüentemente usados para previsão da estrutura básica da matriz, será apresentada uma proposta para previsão dessa estrutura a partir do segundo nível de agregação. A segunda parte desse capítulo é destinada ao estudo dos erros devido à previsão e à reconstrução da matriz  $A_{T+1}$  à partir de sua estrutura básica.

#### IV.1 - A Previsão dos Coeficientes das Componentes Principais

Como foi visto no Capítulo II, o problema de previsão de matrizes vem sendo abordado através de suas componentes principais com o seguinte procedimento:

A partir da série de matrizes ( $n \times m$ )

$A_1, A_2, \dots, A_T$  obtém-se a série de estruturas básicas formadas pelas agregações das colunas e das linhas de  $A_t$ :

$$c_i^t = \sum_{k=1}^m c_{ik}^t x_k^t \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{agregação das colunas})$$

$$f_i^t = \sum_{\ell=1}^n f_{\ell i}^t x_{\ell}^t \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{agregação das linhas})$$

A previsão é feita sobre os coeficientes  $c_{ik}^t$  e  $f_{\ell i}^t$  obtendo-se a estrutura básica para  $t = T+1$ , isto é,  $c_i^{T+1}$  e  $f_i^{T+1}$ .

O problema portanto é obter os coeficientes  $c_{ik}^{T+1}$  e  $f_{\ell i}^{T+1}$  a partir dos coeficientes  $c_{ik}^t$  e  $f_{\ell i}^t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ;  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $\ell = 1, 2, \dots, n$ ).

Os procedimentos mais freqüentemente usados para previsão dos coeficientes das componentes serão apresentados a seguir. (Veja STEMMELEN - 1977).

### i) Pequenas variações aleatórias.

Suponha que os coeficientes  $c_{ik}^t$  ( $i$  fixo,  $k$  fixo,  $t = 1, 2, \dots, T$ ), isto é, que as contribuições da variável  $x_k$  para a composição da componente  $C_i$  ao longo do tempo varie muito pouco, e não apresente tendência de crescimento ou decréscimo sistemático no tempo. É usual nesse caso obter-se a previsão de  $c_{ik}$  pela média dos coeficientes  $c_{ik}^t$ :

$$c_{ik}^{T+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_{ik}^t$$

Esta situação é freqüentemente encontrada para aqueles coeficientes  $c_{ik}$  correspondentes as variáveis que pouco contribuem para a composição de  $C_i$ . Quando essa propriedade é verificada também para os maiores coeficientes de  $C_i$ , pode-se dizer que esta componente não varia praticamente sua composição ao longo do tempo, o que equivale a uma situação estável (ao menos para  $C_i$  - veja o Capítulo III).

ii) Pequenas variações para os últimos anos da série.

Suponha que os coeficientes  $c_{ik}^t$  apresentem uma nítida variação para os primeiros anos da série, e a partir de um certo  $t = \tau$ , os coeficientes se apresentem aproximadamente iguais. Observa-se nesse caso uma variação na contribuição da variável  $X_k$  para a composição de  $C_i$ , e posteriormente, (para  $t \geq \tau$ ) essa contribuição se estabiliza. Nesse caso, a previsão de  $c_{ik}$  é usualmente obtida repetindo-se o último valor  $c_{ik}^T$ :

$$c_{ik}^{T+1} = c_{ik}^T$$

iii) Variação dos coeficientes no tempo.

Suponha que os coeficientes  $c_{ik}^t$  ( $i$  fixo,  $k$  fixo,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) apresentem uma evolução ao longo do período  $T$  de tal forma que não é recomendável a aplicação dos procedimentos descritos anteriormente. Nesse caso, procura-se ajustar uma curva aos pontos  $\epsilon R^2 (c_{ik}, t)$ . A previsão é feita pela extrapolação da curva para o tempo  $T+1$ . Ou seja: dado  $(c_{ik}^t, t)$   $i, k$ , fixos;  $t = 1, 2, \dots, T$ , ajusta-se os pontos a fim de obter uma função que descreva a evolução dos coeficientes  $c_{ik}$ :

$$c_{ik}^t = f(t)$$

A previsão para  $c_{ik}^{T+1}$  será dada por

$$c_{ik}^{T+1} = f(T+1)$$

#### IV.2 - A Previsão Dentro das Esferas $E_i$ .

Os métodos aqui propostos tem como objetivo obter a estrutura básica da matriz no ano  $T+1$  (agregação das linhas e das colunas), uma vez verificada a estabilidade da série de matrizes pelo critério das esferas disjuntas. A previsão será tratada no espaço  $R^q$  que contém as esferas  $E_i$ , sendo cada componente  $C_i$  um ponto nesse espaço. Nessa situação não é necessário analisar cada coeficiente  $c_{ik}$ , porque no segundo nível de agregação descrito pelas componentes  $K_j$  ( $j = 1, 2 \dots p$ ) é possível uma visão global das componentes  $C_i$ .

i) O primeiro procedimento proposto corresponde à situação em que os pontos  $C_i^t$ ,  $i$  fixo,  $t = 1, 2 \dots T$  descrito no espaço  $R^q$  pelas componentes  $K_j$  ( $j = 1, 2 \dots q$ ), estão uniformemente distribuídos dentro da esfera  $E_i$ . Neste caso a previsão para  $C_i^{T+1}$  é dada pelo centro da esfera, ou seja, pela média dos pontos  $C_i^t$  ( $i$  fixo,  $t = 1, 2 \dots T$ ).

$$C_i^{T+1} = o_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_i^t$$

ii) A segunda situação considerada, é aquela em que a série é estável a menos de um tempo  $\tau$ . Isto é, as esferas  $E_i$ ,  $i = 1, 2 \dots p$ , construídas para as componentes  $C_i^t$  só são disjuntas se a matriz  $A_\tau$  é excluída da série. Esse fato indica que no tempo  $\tau$  algum evento excepcional ocorreu modificando a estrutura da matriz  $A_\tau$ , mas não houve repercussão nos demais tempos

$t > \tau$  (\*). Nesta situação, se o número de matrizes que formam a série não for muito pequeno, abandona-se os dados relativos ao tempo  $\tau$ , reconstrói-se as esferas  $E_i$   $i = 1, 2 \dots p$ , as quais serão disjuntas por hipótese e adota-se o procedimento descrito anteriormente:

$$c_i^{T+1} = o_i = \frac{1}{T} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq \tau}}^T c_i^t$$

Nas duas situações anteriormente descritas as previsões serão tão mais satisfatórias quanto maior o grau de estabilidade da estrutura, isto é, quanto mais os pontos  $c_i^t$ ,  $t = 1, 2 \dots T$  estiverem concentrados em torno da média  $o_i$ . Nos casos em que o grau de estabilidade for pequeno, indicando que os pontos estão muito espalhados em torno de sua média  $o_i$ , é necessário fazer uma análise mais fina do que ocorre com esses pontos na região do espaço  $R^q$  definida pela esfera  $E_i$ . Essa análise é semelhante aquela feita no início desse Capítulo quando procurou-se descrever a evolução dos coeficientes  $c_{ik}^t$  ao longo do tempo. Agora os pontos  $c_i^t$  são analisados e não mais os coeficientes  $c_{ik}^t$ .

iii) Suponha que a distância entre pontos consecutivos diminui com o tempo, isto é:

$$d \left( c_i^t, c_i^{t+1} \right) < d \left( c_i^{t'}, c_i^{t'+1} \right) \text{ se } t > t'$$

---

(\*) Note que se  $\tau = T$ , consequências futuras de tal mudança na estrutura da matriz não podem ser avaliadas e nesse caso a previsão para  $T+1$  não pode ser feita dessa maneira.

Quando os pontos  $c_i^t$ ,  $t = 1, 2 \dots T$ , apresentam uma evolução desse tipo na região definida pela esfera  $E_i$ , a previsão para o tempo  $T+1$  é dada pelo último valor observado, isto é:

$$c_i^{T+1} = c_i^T$$

iv) Suponha que os pontos  $c_i^t$ ,  $t = 1, 2 \dots T$ , apresentem uma evolução no tempo na qual é possível se observar uma tendência ao longo do tempo. Nesse caso procura-se ajustar uma curva aos pontos  $(c_i^t, t)$  a fim de descrever esses pontos como uma função do tempo, isto é:

$$c_i^t = f(t)$$

Se for possível se obter esse ajuste, a previsão para o ponto  $c_i$  no ano  $T+1$  será dada por:

$$c_i^{T+1} = f(T+1)$$

As quatro situações descritas correspondem a evoluções com diferentes graus de estabilidade. Nas situações (i) e (ii) as variações na série de estruturas podem ser consideradas muito pequenas (alto grau de estabilidade), indicando que as proporções entre os coeficientes das matrizes  $A_t$  são aproximadamente constantes. Na situação (iii) observa-se uma mudança na série de estruturas nos primeiros tempos e uma tendência à maior estabilidade nos tempos mais recentes. Pode-se interpretar essa situação como uma economia em mudança, tendendo ao equilíbrio. A última situação, ao contrário, não apresenta nenhuma tendência no

sentido da estabilidade. É possível também que o ponto  $c_i^{T+1}$  previsto situe-se fora da esfera  $E_i$ , violando a condição de estabilidade anteriormente proposta. Essa situação corresponde a uma mudança gradual nas proporções entre os coeficientes da matriz acarretando numa previsão menos precisa. A seguir será tratada a questão da precisão considerando-se cada uma das situações aqui descritas.

#### IV.3 - O Erro de Previsão na Esfera $E_i$ .

Na medida do erro de previsão do ponto  $c_i^{T+1}$  é necessário levar-se em conta o procedimento adotado para a previsão, bem como, suas hipóteses implícitas. Consequentemente, serão propostas diferentes medidas para o erro, segundo os diferentes procedimentos adotados.

$$\text{i)} c_i^{T+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_i^t = \bar{c}_i$$

Esse tipo de previsão foi sugerida para uma evolução da série de estruturas que apresente um alto grau de estabilidade. Essa situação pode ser visualizada abaixo:

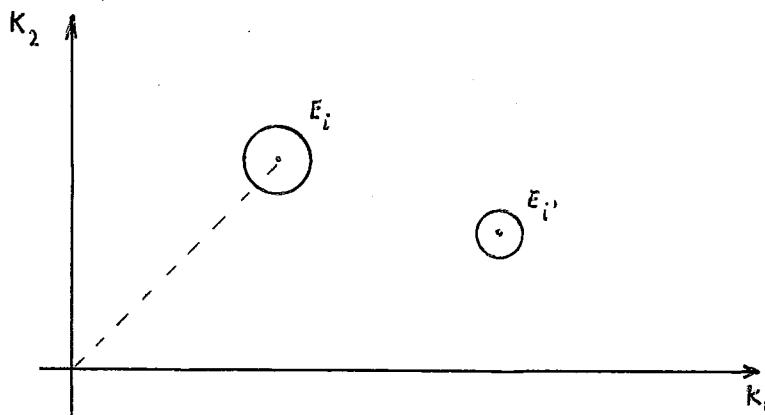


Figura IV.1 - Uma série de estruturas com alto grau de estabilidade.

A hipótese implícita nesse procedimento para a previsão é que  $c_i^t$  ( $t = 1, 2 \dots T$ ) varia somente devido a pequenas perturbações aleatórias em torno de uma média desconhecida. Tomar  $c_i^{T+1} = o_i$ , equivale a considerar como melhor estimativa para  $c_i^t$  ( $t = 1, 2 \dots T$ ) sua média que por sua vez é estimada por  $o_i$ . Em particular a estimativa para  $t = T+1$  é a previsão  $c_i^{T+1}$  a qual será dada também por  $o_i$ . O raio  $r_i$  da esfera  $E_i$  fornece a máxima distância entre a previsão  $o_i$  e os valores observados para  $c_i^t$ . Supondo que a série permanece estável no ano  $T+1$ ,  $c_i^{T+1}$  deverá estar dentro da esfera  $E_i$  e portanto o máximo desvio entre o valor estimado  $o_i$  e o verdadeiro valor de  $c_i^{T+1}$  será  $r_i$ . Uma medida de erro para a previsão pode ser obtida pela razão entre o desvio máximo  $r_i$  e o valor estimado  $o_i$ .

**Definição IV.1:** Se a previsão de  $c_i^{T+1}$  é obtida por  $o_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_i^t$  o erro máximo da previsão é dada por

$$\text{Erro max} = \frac{\max d(c_i^t, o_i)}{d(o, o_i)} = \frac{r_i}{\|o_i\|}$$

Uma outra medida para o erro pode ser obtida analisando-se a variação média de  $c_i^t$  em torno de sua média ao longo do tempo, e compará-la com a dispersão das componentes  $c_i^t$  ( $t = 1, 2 \dots T$ ) em relação a origem.

**Definição IV.2:** Seja a previsão de  $c_i^{T+1}$  obtida por  $o_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_i^t$ . Sendo a variância da componente  $c_i$  no tempo dada por:

$$(VT)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (c_i^t - o_i)' (c_i^t - o_i)$$

e a variância das normas de  $c_i^t$  dada por  $(VN)^2 = \sum_{t=1}^T (c_i^t)' (c_i^t)$ ,

chama-se erro médio da previsão de  $c_i^{T+1}$  a razão entre  $(VT)^2$  e  $(VN)^2$ , isto é:

$$\text{Erro médio} = \frac{(VT)^2}{(VN)^2}$$

iii)  $c_i^{T+1} = c_i^T$

Esse tipo de previsão tem implícita a hipótese que a distância entre os pontos  $c_i^{T+1}$  e  $c_i^T$  é menor ou igual que a distância entre os pontos  $c_i^T$  e  $c_i^{T-1}$ ; isto é equivalente a definir uma pequena esfera com centro  $c_i^T$  e raio  $= d(c_i^T, c_i^{T-1})$ , sendo a previsão o centro dessa pequena esfera. Uma medida para o erro cometido nesse tipo de previsão pode ser obtida pela comparação entre a esfera  $E_i$  e essa pequena esfera de centro  $c_i^T$  e raio  $= d(c_i^T, c_i^{T-1})$ .

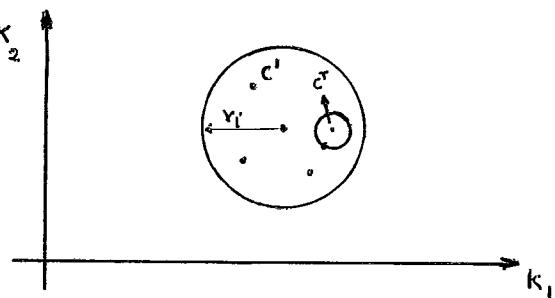


Figura IV.2 - O erro na previsão de  $c_i^{T+1} = c_i^T$ .

Definição IV.3: Se a previsão para  $c_i^{T+1}$  é obtida por  $c_i^{T+1} = c_i^T$ , o erro cometido nessa previsão pode ser avaliado por

$$\text{Erro} = \frac{d(c_i^T, c_i^{T-1})}{r_i}$$

Note que se o erro definido acima não for pequeno, indica que a redução nas distâncias entre os pontos  $c_i^t$  durante o período todo (hipótese adotada para esse procedimento na previsão) não é muito significativa, e a previsão de  $c_i^{T+1}$  por  $c_i^T$  não será muito confiável.

iii)  $c_i^{T+1}$  obtido pela determinação da evolução no tempo dos pontos  $c_i^t$  ( $t = 1, 2 \dots T$ ).

$$c_i^t = f(t) \Rightarrow c_i^{T+1} = f(T+1)$$

O erro será dado segundo o modelo que ajustar os pontos da melhor forma. Isto é, a medida de erro depende da função  $f$  obtida.

#### IV.4 - O Erro na Reconstrução da Matriz $A_{T+1}$ a Partir das Componentes Principais $c_i^{T+1}$ .

Ao se optar pela previsão das estruturas básicas das matrizes, ao mesmo tempo que há uma redução no número de coeficientes a serem previstos, surge um problema quanto à reconstrução da matriz final  $A_{T+1}$  que será obtida aproximadamente, uma vez que parte da variância total do conjunto de dados originais foi perdida na agregação. Como foi apresentado no Capítulo II, supondo que as agregações das linhas e colunas sejam compostas de  $p < m$  componentes e que se obtenha a previsão dessas agregações para o tempo  $T+1$ , a reconstrução da matriz  $A_{T+1}$  será dada aproximadamente por:

$$a_{\ell k}^{T+1} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i^{T+1}} f_{\ell i}^{T+1} c_{ik}^{T+1}$$

O erro na reconstrução é avaliado pela proporção da variância perdida na agregação em relação a variância total, (STEMMELIN-1977) isto é:

Sendo a variância total do conjunto de dados dada pela equação (II.1):

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \text{variância total}$$

A percela da variância perdida é dada pelas variâncias das componentes que não fazem parte das estruturas básicas, isto é, as componentes de ordem maiores que p:

$$\sum_{i=p+1}^m \lambda_i = \text{variância perdida.}$$

O erro na reconstrução é dado pela proporção da variância perdida:

$$\text{Erro} = \frac{\sum_{i=p+1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}$$

É interessante chamar atenção para o fato de que esse erro é regulável com o número p de componentes mantidas para formar a estrutura básica. Usualmente parte-se de um valor a priori para esse erro, e determina-se o número p de componentes que devem ser mantidas.

#### IV.5 - O Critério de Estabilidade e a Dimensão do Espaço $R^q$ .

O critério de estabilidade das esferas disjuntas definido em (Def. III.9), estabelece a estabilidade para a série de estruturas básicas quando todas as esferas construídas no espaço  $R^q$  segundo a Definição III.8 são disjuntas. No entanto,  $q < pT$  é uma dimensão reduzida dos dados utilizados no segundo nível de agregação (nesse caso, as  $pT$  componentes  $C_i^T$ ), e uma parte da variância total não está descrita em  $R^q$ . Portanto se a interseção entre duas esferas for verificada em  $R^q$ ,  $q < pT$ , o que se pode afirmar é que as projeções de  $E_i$  e  $E_{i'}$ , no subespaço  $R^q$  se interceptam. Uma situação desse tipo está ilustrada Figura IV.3.

A escolha da dimensão deve ser feita de tal forma que se houver interseção nas projeções de  $E_i$  e  $E_{i'}$ , em  $R^q$ , provavelmente essa interseção não desaparece se  $E_i$  e  $E_{i'}$ , for descrita em  $R^{q+j}$ ,  $j = 1, 2 \dots pT-q$ . Para ocorrer uma situação como a descrita na figura IV.3 e a dispersão dos pontos na direção  $q+1$  deve ser suficientemente grande para desfazer a interseção verificada em  $R^q$ . A seguir será analisada a relação sobre a ocorrência de uma situação como essa, e a variância na direção  $q+1$ .

Condição necessária para que não haja interseção de  $E_i$  e  $E_{i'}$  no  $R^{q+1}$ .

Suponha que as esferas  $E_i$  e  $E_{i'}$ ,  $\in R^q$  se interceptam. Isto significa que:

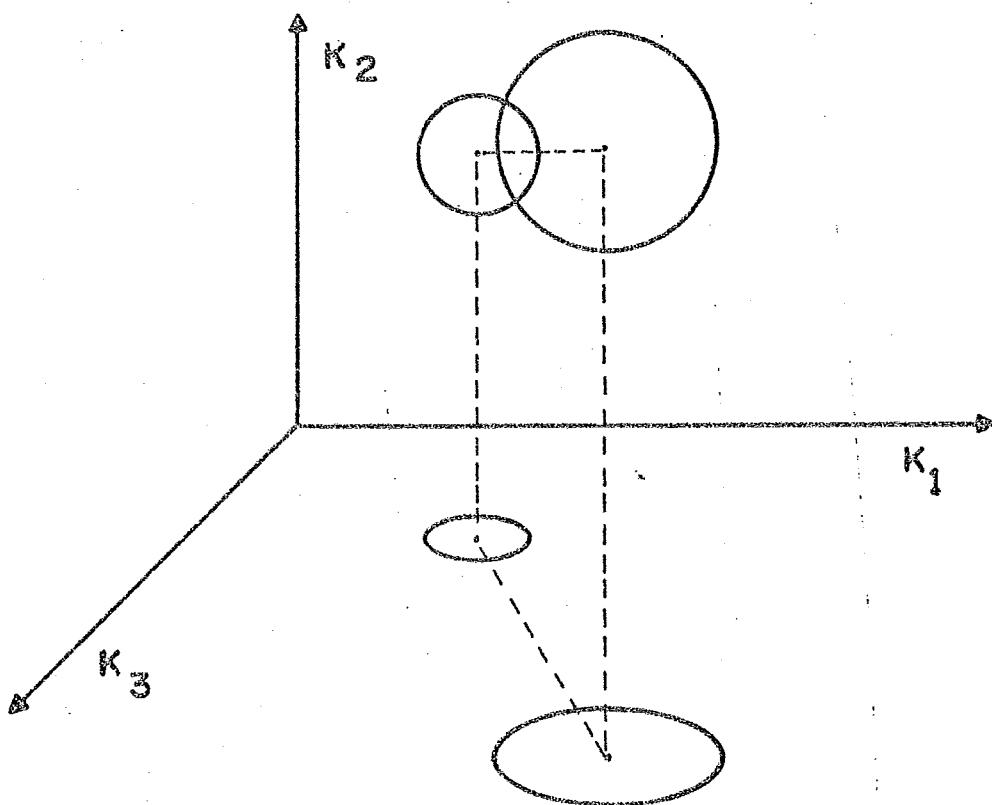


Figura IV.3 - As projeções de  $E_i$  e  $E_i'$ , no plano  $(K_1 \times K_2) \in \mathbb{R}^2$  se interceptam, mas  $E_i$  e  $E_i'$ , em  $\mathbb{R}^3$  não se interceptam.

$d(o_i, o_{i'}) < r_i + r_{i'}$ , onde

$$o_i \in R^q = (o_{i1}, o_{i2}, \dots, o_{ip})'$$

$$o_{i'} \in R^q = (o_{i'1}, o_{i'2}, \dots, o_{i'p})'$$

$r_i$  e  $r_{i'}$  são os raios de  $E_i$  e  $E_{i'}$ , medidos em  $R^q$ .

Passando-se para a dimensão  $q+1$  (isto é, considerando o espaço gerado por  $K_1, K_2, \dots, K_q, K_{q+1}$ ) ocorrerá interseção se

$$d(o_i, o_{i'}) \in R^{q+1} < (r_i + r_{i'}) \in R^{q+1}$$

ou ainda

$$d^2(o_i, o_{i'}) \in R^{q+1} < (r_i + r_{i'})^2 \in R^{q+1}$$

Mas a distância ao quadrado entre os centros  $o_i$  e  $o_{i'}$ , em  $R^{q+1}$  é igual à:

$$d^2(o_i, o_{i'}) \in R^{q+1} = d^2(o_i, o_{i'}) \in R^q + (o_{iq+1} - o_{i'q+1})^2$$

Isto é, passando-se para a dimensão  $q+1$ , a distância ao quadrado entre os centros das esferas é acrescida da parcela  $(o_{iq+1} - o_{i'q+1})^2$ . Além disso, a soma dos raios  $r_i$  e  $r_{i'}$ , em  $R^{q+1}$  será maior ou igual a mesma soma em  $R^q$ . Assim, se:

$$d^2(o_i, o_{i'}) \in R^{q+1} < (r_i + r_{i'})^2 \in R^q$$

$$\rightarrow d^2(o_i, o_{i'}) \in R^{q+1} < (r_i + r_{i'})^2 \in R^{q+1}$$

Portanto uma condição necessária (não suficiente) para se desfazer a interseção das esferas na dimensão  $q+1$ , quando existe interseção na dimensão  $q$  é dada por

$$d^2(O_i, O_{i'}) \in R^{q+1} > (r_i + r_{i'})^2 \in R^q$$

ou melhor

$$d^2(O_i, O_{i'}) \in R^q + (O_{iq+1} - O_{i'q+1})^2 > (r_i + r_{i'})^2 \in R^q$$

$$(O_{iq+1} - O_{i'q+1})^2 > [(r_i + r_{i'})^2 - d^2(O_i, O_{i'})] \in R^q$$

Supondo que a interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$  foi verificada no  $R^q$ , então  $(r_i + r_{i'})$  e  $d(O_i, O_{i'}) \in R^q$  já foram calculados e

$$A_q = (r_i + r_{i'})^2 - d^2(O_i, O_{i'}) \in R^q$$

chamado parâmetro de interseção no espaço  $R^q$ , pode ser obtido diretamente. A condição necessária para que não haja interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$  no  $R^{q+1}$  pode ser escrita como:

$$(O_{iq+1} - O_{i'q+1})^2 > A_q \in R^q \quad (\text{IV.1})$$

Fica então estabelecida uma condição necessária para que a interseção se desfaça no  $R^{q+1}$ , em função do parâmetro de interseção  $A_q$  e da diferença ao quadrado entre as coordenadas na direção  $q+1$  dos centros das esferas  $E_i$  e  $E_{i'}$ . Será comparada a seguir a dispersão (variância) dos pontos na direção  $q+1$  e a diferença dos centros das esferas nessa mesma direção.

A Variância na Direção  $q+1$  e a Variação na Distância entre  $o_i$  e  $o_{i'}$ ,

Segundo a Definição III.8, os centros das esferas  $o_i$  e  $o_{i'}$ , são dados por:

$$o_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_i^t$$

$$o_{i'} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_{i'}^t$$

onde os pontos  $c_i^t$  e  $c_{i'}^t$ ,  $\in \mathbb{R}^q$  são descritos pelos coeficientes  $k_{ij}^t$  que são as coordenadas na direção das componentes  $K_j$   $j = 1, 2 \dots q$ . Portanto para a direção  $q+1$  pode-se escrever:

$$o_{iq+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T k_{iq+1}^t$$

$$o_{i'q+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T k_{i'q+1}^t$$

$$(o_{iq+1} - o_{i'q+1}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (k_{iq+1}^t - k_{i'q+1}^t)$$

Por outro lado, sendo a média dos coeficientes  $K_{ij}^t$  na direção  $q+1$  dada por:

$$\bar{K}_{q+1} = \frac{1}{pT} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^T K_{iq+1}^t$$

a variância dos pontos  $C_i^t$  na direção  $q+1$  em relação a essa média será dada por:

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^T (K_{iq+1}^t - \bar{K}_{q+1})^2$$

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \sum_i \sum_t (K_{iq+1}^t)^2 + (\bar{K}_{q+1})^2 - 2K_{iq+1}^t \bar{K}_{q+1}$$

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \left[ \sum_i \sum_t (K_{iq+1}^t)^2 + \sum_i \sum_t (\bar{K}_{q+1})^2 - 2\bar{K}_{q+1} \sum_i \sum_t K_{iq+1}^t \right]$$

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \left[ \sum_i \sum_t (K_{iq+1}^t)^2 + pT(\bar{K}_{q+1})^2 - 2\bar{K}_{q+1} pT \bar{K}_{q+1} \right]$$

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \left[ \sum_i \sum_t (k_{iq+1}^t)^2 - pT(\bar{k}_{q+1})^2 \right] \quad (\text{IV.2})$$

Assim foi possível expressar a variância na direção  $q+1$  em função dos coeficientes  $k_{iq+1}^t$   $i = 1, 2 \dots p$ ,  $t = 1, 2 \dots T$ . Por outro lado a diferença entre as coordenadas dos centros  $o_i$  e  $o_{i,q+1}$ , na direção  $q+1$  pode ser escrita como:

$$(o_{iq+1} - o_{i',q+1}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (k_{iq+1}^t - k_{i',q+1}^t)$$

Anteriormente foi definida uma condição necessária para que não haja interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$ , no  $R^{q+1}$  em função dessa diferença ao quadrado:

$$(o_{iq+1} - o_{i',q+1})^2 > A_q \in R^q$$

A seguir será estabelecido um limite superior para  $(o_{iq+1} - o_{i',q+1})^2$  em função de  $\Lambda_{q+1}$ , de tal forma que se

$\limsup (o_{iq+1} - o_{i',q+1})^2 < A_q \rightarrow$  existe interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$ , no  $R^{q+1}$ . Para isso será obtida uma expressão para a dispersão dos centros  $o_i$   $i = 1, 2 \dots p$  na direção  $q+1$  (variância de  $o_{q+1}$ ) a qual estará ligada a diferença  $(o_{iq+1} - o_{i',q+1})$ .

A variância de  $o_{iq+1}$

Sejam  $o_{iq+1}$  p pontos na reta definida pela direção de  $K_{q+1}$ . É possível calcular a média e a variância desses pontos como se fossem p observações sobre a variável  $o_{q+1}$ :

$$\bar{o}_{q+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p o_{iq+1}$$

mas

$$o_{iq+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T K_{iq+1}^t$$

$$\bar{o}_{q+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T K_{iq+1}^t = \frac{1}{pT} \sum_i \sum_t K_{iq+1}^t = \bar{K}_{q+1}$$

$$\text{var}(o_{q+1}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1})^2$$

$$\text{var}(o_{q+1}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T K_{iq+1}^t - \bar{o}_{q+1} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{var}(o_{q+1}) &= \frac{1}{pT^2} \sum_i \left[ \sum_t (K_{iq+1}^t)^2 + (\bar{o}_{q+1})^2 + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{t'=2}^T K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \bar{o}_{q+1} \sum_{t=1}^T K_{iq+1}^t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(o_{q+1}) &= \frac{1}{pT^2} \left[ \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 + p (\bar{o}_{q+1})^2 + \sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \bar{o}_{q+1} \sum_{it} K_{iq+1}^t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2 \bar{o}_{q+1} \sum_{it} K_{iq+1}^t \end{aligned}$$

como  $\sum_{it} K_{iq+1}^t = pT \bar{O}_{q+1}$  podemos escrever

$$\text{var } (\bar{O}_{q+1}) = \frac{1}{pT^2} \left[ \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 + p \bar{O}_{q+1} + \sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} - 2pT(\bar{O}_{q+1})^2 \right]$$

$$\text{var } (\bar{O}_{q+1}) = \frac{1}{pT^2} \left[ \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 - p(2T-1) (\bar{O}_{q+1})^2 + \sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} \right]$$

$$pT^2 \text{ var } (\bar{O}_{q+1}) = \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 - pT(\bar{O}_{q+1})^2 - pT(\bar{O}_{q+1})^2 + p(\bar{O}_{q+1})^2 + \sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'}$$

Da equação (IV.2):

$$\Lambda_{q+1} = \frac{1}{pT} \left[ \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 - pT(\bar{K}_{q+1})^2 \right]$$

Então:

$$pT^2 \text{ var } (\bar{O}_{q+1}) = pT \Lambda_{q+1} - p(\bar{O}_{q+1})^2(T-1) + \sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'}$$

Se fosse possível garantir que a última parcela à direita assume valores negativos, seria possível afirmar que  $pT^2 \text{ var } (\bar{O}_{q+1})$  é menor ou igual a  $pT \Lambda_{q+1}$ , já que  $p(\bar{O}_{q+1})^2(T-1)$  é maior ou igual a zero. A fim de estabelecer uma desigualdade desse tipo, essa parcela será analisada para o caso mais desfavorável em que todos os termos do somatório são positivos.

$$K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} > 0 \quad \forall t \quad \forall t'$$

Caso mais desfavorável  $\rightarrow$  máxima estabilidade

$$\Rightarrow K_{iq+1}^t = K_{iq+1}^{t'}$$

Portanto

$$\sum_{itt'} K_{iq+1}^t K_{iq+1}^{t'} \leq (T-1) \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2$$

Assim

$$pT^2 \operatorname{var} (\theta_{q+1}) \leq pT \Lambda_{q+1} - pT (\bar{\theta}_{q+1})^2 (T-1) + (T-1) \sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2$$

Sendo

$$pT (\bar{\theta}_{q+1})^2 (T-1) \geq 0$$

e  $\sum_{it} (K_{iq+1}^t)^2 = 1$  porque  $K_{q+1}$  é um auto vetor normalizado, por hipótese do modelo de componentes principais. Portanto, pode-se escrever a desigualdade:

$$pT^2 \operatorname{var} (\theta_{q+1}) \leq pT \Lambda_{q+1} + (T-1)$$

$$\operatorname{var} (\theta_{q+1}) \leq \frac{\Lambda_{q+1}}{T} + \frac{(T-1)}{pT^2}$$

Límite inferior para  $(\theta_{iq+1} - \theta_{i',q+1})^2$

A diferença entre os centros das esferas  $E_i$  e  $E_{i'}$ ,

é dada por:

$$\begin{aligned} (o_{iq+1} - o_{i'q+1}) &= (o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1} - o_{i'q+1} + \bar{o}_{q+1}) \\ &= (o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1}) - (o_{i'q+1} - \bar{o}_{q+1}) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (o_{iq+1} - o_{i'q+1})^2 &= (o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1})^2 + (o_{i'q+1} - \bar{o}_{q+1})^2 - \\ &\quad - 2(o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1})(o_{i'q+1} - \bar{o}_{q+1}) \end{aligned}$$

Sendo var  $(o_{q+1}) = \frac{1}{p} \sum_i (o_i - \bar{o}_{q+1})^2$ ,

as duas primeiras parcelas estão incluídas no somatório que define a var  $(o_{q+1})$ , então:

$$p \text{ var } (o_{q+1}) \geq (o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1})^2 + (o_{i'q+1} - \bar{o}_{q+1})^2$$

Se  $(o_{iq+1} - \bar{o})(o_{i'q+1} - \bar{o}) > 0$  então

$$(o_{iq+1} - o_{i'q+1})^2 \leq p \text{ var } (o_{q+1})$$

Se  $(o_{iq+1} - \bar{o}_{q+1})(o_{i'q+1} - \bar{o}_{q+1}) < 0$ , o limite será estabelecido da seguinte maneira:

Suponha que  $\max \{|o_{iq+1} - \bar{o}|, |o_{i'q+1} - \bar{o}|\} = |o_{iq+1} - \bar{o}|$

então  $|(\theta_{iq+1} - \bar{\theta})(\theta_{iq+1} - \bar{\theta})| \leq (\theta_{iq+1} - \bar{\theta})^2$

Portanto

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 \leq (\theta_{iq+1} - \bar{\theta}_{q+1})^2 + (\theta_{i'q+1} - \bar{\theta}_{q+1})^2 + 2(\theta_{iq+1} - \bar{\theta})^2$$

sendo

$$2(\theta_{iq+1} - \bar{\theta})^2 \leq 2 p \text{ var } (\theta_{q+1})$$

Pode-se escrever

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 \leq p \text{ var } (\theta_{q+1}) + 2 p \text{ var } (\theta_{q+1})$$

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 \leq 3 p \text{ var } (\theta_{q+1}) \quad (\text{pior caso})$$

Portanto de um modo geral pode-se escrever

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 \leq 3 p \text{ var } (\theta_{q+1}) \leq 3 p \left( \frac{A_{q+1}}{T} + \frac{(T-1)}{pT^2} \right)$$

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 \leq 3 p \frac{A_{q+1}}{T} + \frac{3(T-1)}{T^2}$$

A equação (IV-1) fornece como condição necessária para que não haja interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$  no  $\mathbb{R}^{q+1}$  a desigualdade:

$$(\theta_{iq+1} - \theta_{i'q+1})^2 > A_q \in \mathbb{R}^q$$

Assim, se

$$(o_{iq+1} - o_{i'q+1})^2 < \frac{3p\Lambda_{q+1}}{T} + \frac{3(T-1)}{T^2} < \Lambda_q \rightarrow$$

$\rightarrow$  existe interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$  no  $R^{q+1}$ .

Dessa forma é possível garantir se a interseção entre  $E_i$  e  $E_{i'}$  permanece no espaço  $R^{q+1}$  em função da variância na direção  $q+1$  ( $\Lambda_{q+1}$ ) e do parâmetro de interseção calculado em  $R^q$ .

## CAPÍTULO V

### APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE NA PREVISÃO DA MATRIZ DO BALANÇO ENERGÉTICO

Nesse capítulo, será apresentada uma aplicação de alguns critérios de estabilidade desenvolvidos no Capítulo III para a previsão da matriz do Balanço Energético Nacional para o ano de 1981, a partir das matrizes de 1976, 1977, 1978, 1979 e 1980.

#### V.1 - O Balanço Energético Nacional

A matriz do Balanço Energético Nacional descreve a relação entre as diversas fontes de energia (primária e secundária) e os diversos setores (produtores e consumidores) da economia. Dessa forma, os elementos da matriz fornecem a quantidade de energia (em  $10^3$ tEP - mil toneladas equivalente em petróleo) relativa a cada fonte, produzida ou consumida por cada setor econômico. Isto é, o fluxo de energia relativa a cada fonte e a cada setor. Abaixo estão relacionadas as fontes de energia (colunas) e os setores (linhas) da matriz.

#### Fontes de Energia Primária

$X_1$  - Petróleo

$X_2$  - Gás Natural

$X_3$  - Carvão Vapor

$X_4$  - Carvão Metalúrgico

X5 - Energia Hidráulica

X6 - Lenha

X7 - Cana de Açúcar

X8 - Outras fontes

#### Fontes de Energia Secundária

X9 - Óleo Diesel

X10 - Óleo Combustível

X11 - Gasolinhas Automotivas

X12 - Gás Liquefeito de Petróleo

X13 - Nafta

X14 - Querozene

X15 - Querozene de Aviação

X16 - Gás Canalizado

X17 - Coque de Carvão Mineral

X18 - Eletricidade

X19 - Carvão Vegetal

X20 - Álcool Etílico

X21 - Bagaço de Cana

X22 - Outras Fontes Secundárias

X23 - Produtos não Energéticos

Os setores são subdivididos em setor de oferta e centros de transformação, e setor de consumo final. No primeiro grupo são consideradas as seguintes atividades:

Y1 - Produção

Y2 - Importação

Y3 - Exportação

- Y<sub>4</sub> - Oferta Interna Bruta
- Y<sub>5</sub> - Refinaria de Petróleo
- Y<sub>6</sub> - Plantas de Gás Natural
- Y<sub>7</sub> - Usinas de Gaseificação
- Y<sub>8</sub> - Coquerias
- Y<sub>9</sub> - Centrais Elétricas de Serviços Públicos
- Y<sub>10</sub> - Centrais Elétricas Auto Produtoras
- Y<sub>11</sub> - Carvoarias
- Y<sub>12</sub> - Destilarias
- Y<sub>13</sub> - Outras Transformações
- Y<sub>14</sub> - Perdas na Distribuição e Armazenagem

O setor de consumo final é subdividido em:

- Y<sub>15</sub> - Setor Energético
- Y<sub>16</sub> - Residencial
- Y<sub>17</sub> - Comercial
- Y<sub>18</sub> - PÚblico
- Y<sub>19</sub> - Agropecuária
- Y<sub>20</sub> - Transporte Rodoviário
- Y<sub>21</sub> - Transporte Ferroviário
- Y<sub>22</sub> - Transporte Aéreo
- Y<sub>23</sub> - Transporte Hidroviário
- Y<sub>24</sub> - Indústria de Cimento
- Y<sub>25</sub> - Ferro Gusa e Aço
- Y<sub>26</sub> - Ferro-Ligas
- Y<sub>27</sub> - Pelotização
- Y<sub>28</sub> - Mineração
- Y<sub>29</sub> - Não Ferrosos/outros Metalúrgicos

Y30 - Química

Y31 - Alimentos e Bebidas

Y32 - Textil

Y33 - Papel e Celulose

Y34 - Cerâmica

Y35 - Outros

O procedimento adotado para realizar a previsão e verificar a estabilidade da série de matrizes foi o seguinte:

A partir de cada uma das matrizes relativas aos anos 1976 à 1980, foram obtidas as agregações das colunas (fontes de energia) fornecendo as componentes  $C_i^t$ , e das linhas (setores econômicos), fornecendo as componentes  $F_i^t$ . A seguir foi realizada a segunda agregação, para os dois conjuntos de componentes, e a partir desse resultado foram construídas as esferas  $E_i$  que permitiram realizar o teste de estabilidade para a série de matrizes. Em seguida foi efetuada a previsão da estrutura básica da matriz para 1981, isto é,  $C_i^{81}$  e  $F_i^{81}$ , a partir da qual a matriz  $A^{81}$  pode ser aproximadamente obtida. Esse procedimento pode ser esquematizado conforme o diagrama mostrado na figura (V.1).

## V.2 - Os Resultados

Os resultados apresentados nesse trabalho foram obtidos com a utilização de um programa desenvolvido por Miriam Sônia Rosenvald, que está no momento desenvolvendo sua tese de mestrado cujo tema é a avaliação dos critérios de estabilidade no problema de previsão de matrizes.

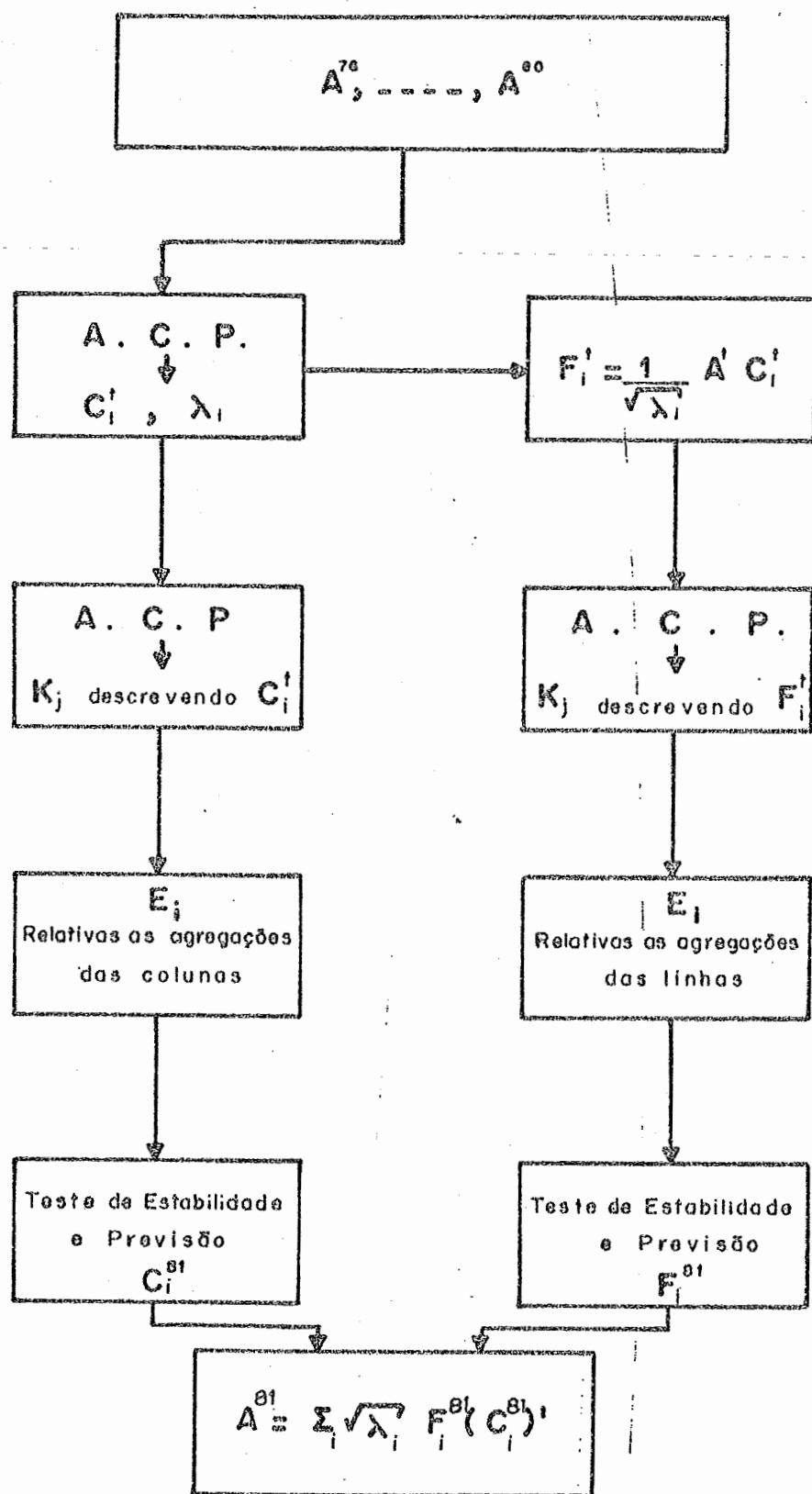


Figura V.1 - Diagrama do Procedimento para a Previsão.

Na primeira etapa, foram extraídas as componentes principais das matrizes  $A^{76}$  à  $A^{80}$  a fim de se obter suas estruturas básicas. Para formar essas estruturas foram mantidas as cinco primeiras componentes principais as quais correspondem a um mínimo de 83.3% da variância total, conforme pode ser visto na tabela (V.1).

As componentes principais relativas as agregações das colunas ( $C_i^t$ ) e das linhas ( $F_i^t$ ) estão nas tabelas 1 à 10 do anexo. Observando-se os coeficientes dessas componentes, nota-se imediatamente que as componentes  $C_1$  e  $C_2$  apresentam uma grande homogeneidade nos anos analisados. As componentes  $C_3$  e  $C_4$  apresentam claramente mudanças significativas nos coeficientes ao longo do tempo. O mesmo tipo de observação vale para as componentes  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ ,  $F_4$ .

A segunda agregação e a construção das esferas  $E_i$  possibilitam verificar a homogeneidade na evolução das componentes. Como foi visto no Capítulo III, a segunda agregação fornece um sistema de coordenadas onde são descritas as componentes  $C_i^t$  (ou  $F_i^t$ ). A construção das esferas  $E_i$  possibilitam verificar se as componentes de mesma ordem  $i$  estão próximas entre si, e afastadas das componentes de ordem  $i' \neq i$ . Nas agregações das componentes  $C_i^t$  e  $F_i^t$  foram mantidas as cinco primeiras componentes  $K_j$ , correspondendo a 96.3% e 97.4% da variância total respectivamente. Analisando primeiramente as componentes  $C_i^t$ , as esferas  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) construídas tem as seguintes características:

TABELA V.1 - Variância das componentes e percentual da variância total para cada ano

	$\lambda_1$ (%)	$\lambda_2$ (%)	$\lambda_3$ (%)	$\lambda_4$ (%)	$\lambda_5$ (%)	% ACUMULADO
1976	11.14 (48.43)	3.59 (15.60)	1.72 ( 7.48)	1.62 ( 7.05)	1.09 ( 4.72)	83.3
1977	11.17 (48.54)	3.69 (16.02)	1.64 ( 7.13)	1.59 ( 6.89)	1.09 ( 4.72)	83.3
1978	11.29 (49.10)	3.79 (16.49)	1.72 ( 7.49)	1.45 ( 6.28)	.98 ( 4.25)	83.6
1979	11.63 (50.60)	3.97 (17.30)	1.69 ( 7.34)	1.25 ( 5.45)	.92 ( 4.00)	84.7
1980	11.04 (47.99)	3.82 (16.59)	1.97 ( 8.55)	1.36 ( 5.89)	1.01 ( 4.38)	83.4

$$E_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_1 = (-.937, -.051, -.018, -.028, .311) \\ \text{Raio } R_1 = .057 \end{array} \right.$$

$$E_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_2 = (.847, -.303, -.017, -.289, .287) \\ \text{Raio } R_2 = .220 \end{array} \right.$$

$$E_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_3 = (.107, -.091, .550, .199, -.019) \\ \text{Raio } R_3 = 1.703 \end{array} \right.$$

$$E_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_4 = (.092, .556, .107, -.207, .064) \\ \text{Raio } R_4 = 1.739 \end{array} \right.$$

$$E_5 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_5 = (.308, .474, -.263, .672, .139) \\ \text{Raio } R_5 = .571 \end{array} \right.$$

A interseção entre as esferas pode ser verificada através da relação entre as distâncias entre os centros de cada par de esferas e a soma dos raios, conforme é mostrado na tabela (V.2).

TABELA V.2 - Interseção entre os pares de esferas ( $E_i, E_{i+1}$ ) relativas as componentes  $C_i^t$

$(E_i, E_{i+1})$	$d(O_i, O_{i+1})$	$d(O_i, O_{i+1})/r_i + r_{i+1}$
$(E_1, E_2)$	1.820	4.866
$(E_1, E_3)$	1.255	.676
$(E_1, E_4)$	1.239	.655
$(E_1, E_5)$	1.551	2.140
$(E_2, E_3)$	1.116	.580
$(E_2, E_4)$	1.174	.600
$(E_2, E_5)$	1.379	1.743
$(E_3, E_4)$	.886	.258
$(E_3, E_5)$	1.127	.496
$(E_4, E_5)$	.984	.426

As figuras (V.2) à (V.5) mostram as projeções dos pontos  $C_i^t$  ( $i = 1, \dots, 5$ ,  $t = 1976, \dots, 1980$ ) nos planos  $(K_1 \times K_2)$ ,  $(K_1 \times K_3)$ ,  $(K_1 \times K_4)$ ,  $(K_1 \times K_5)$ . Pode-se observar que as esferas  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_5$  não se interceptam sendo que  $E_1$  e  $E_2$ , apresentam raios bastante reduzidos, indicando pequena dispersão dos pontos  $C_1^t$  e  $C_2^t$  ( $t = 1976, \dots, 1980$ ). As esferas  $E_3$  e  $E_4$ , apresentam uma grande região de interseção, como pode ser visto nas projeções nos diversos planos, indicando que as componentes  $C_3^t$  e  $C_4^t$  se confundem ao longo do tempo. Essa conclusão confirma a

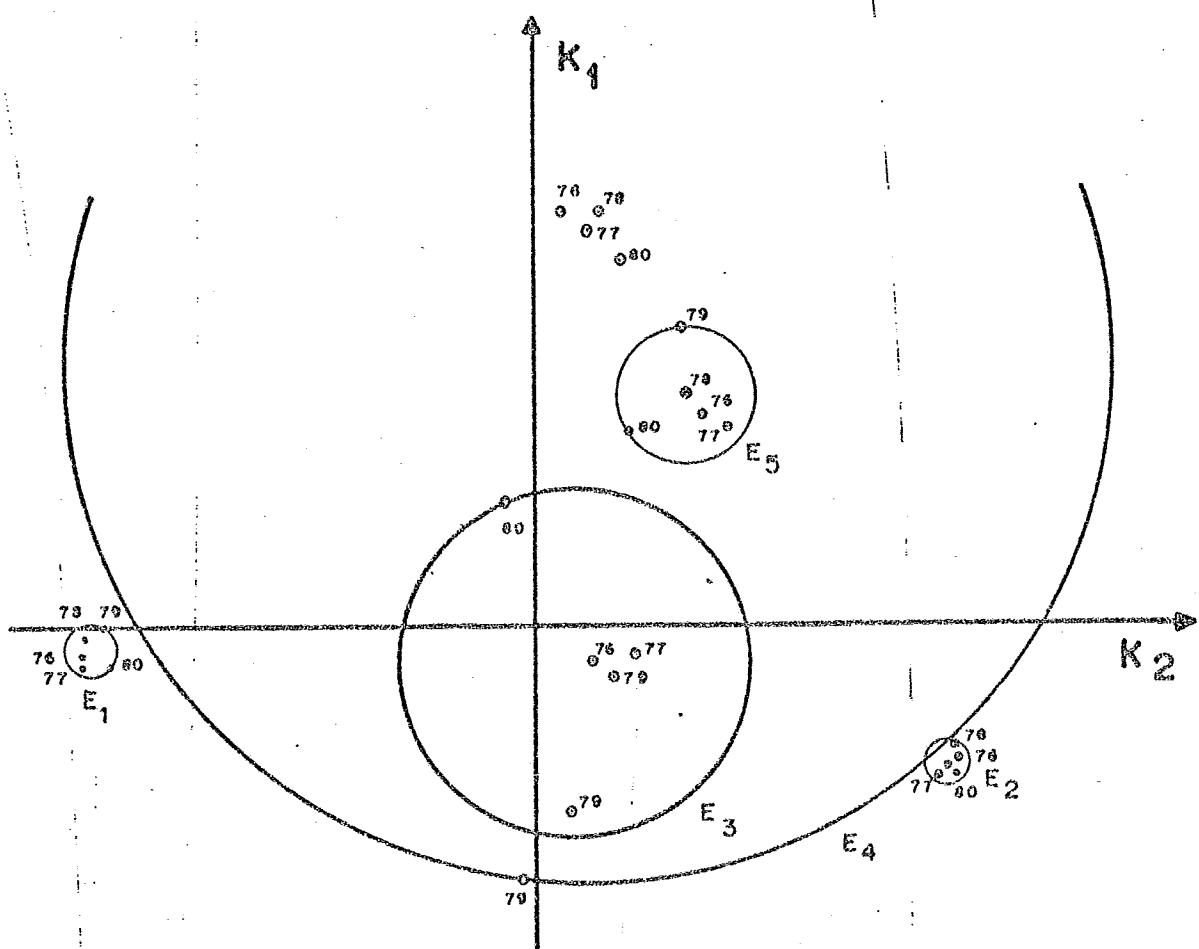


Figura V.2 - As Esferas  $E_i$  no plano  $(K_1 \times K_2)$  - Agregação das componentes  $c_i^t$ .

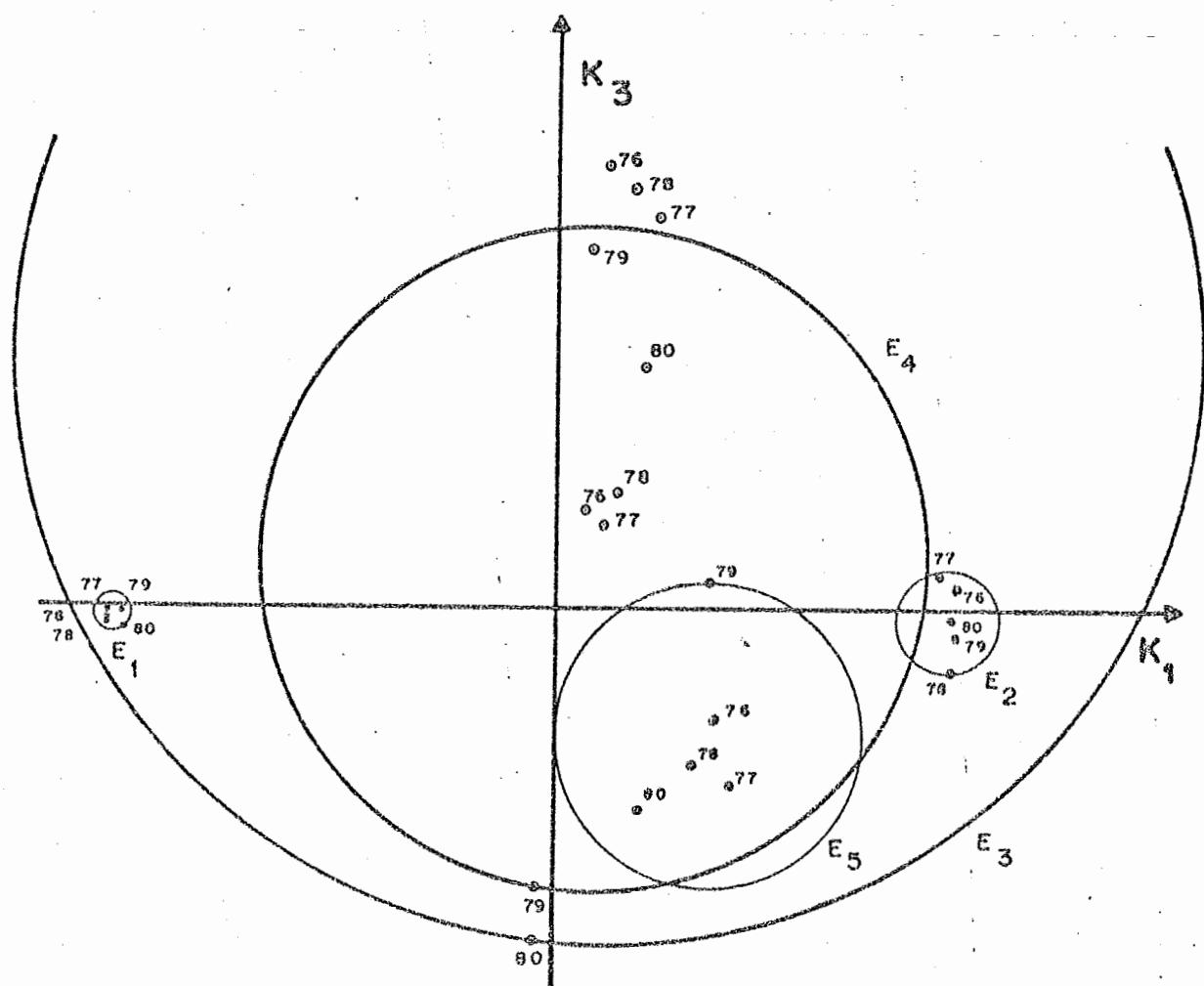


Figura V.3 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_3)$  - Agregação das componentes  $C_i^t$ .

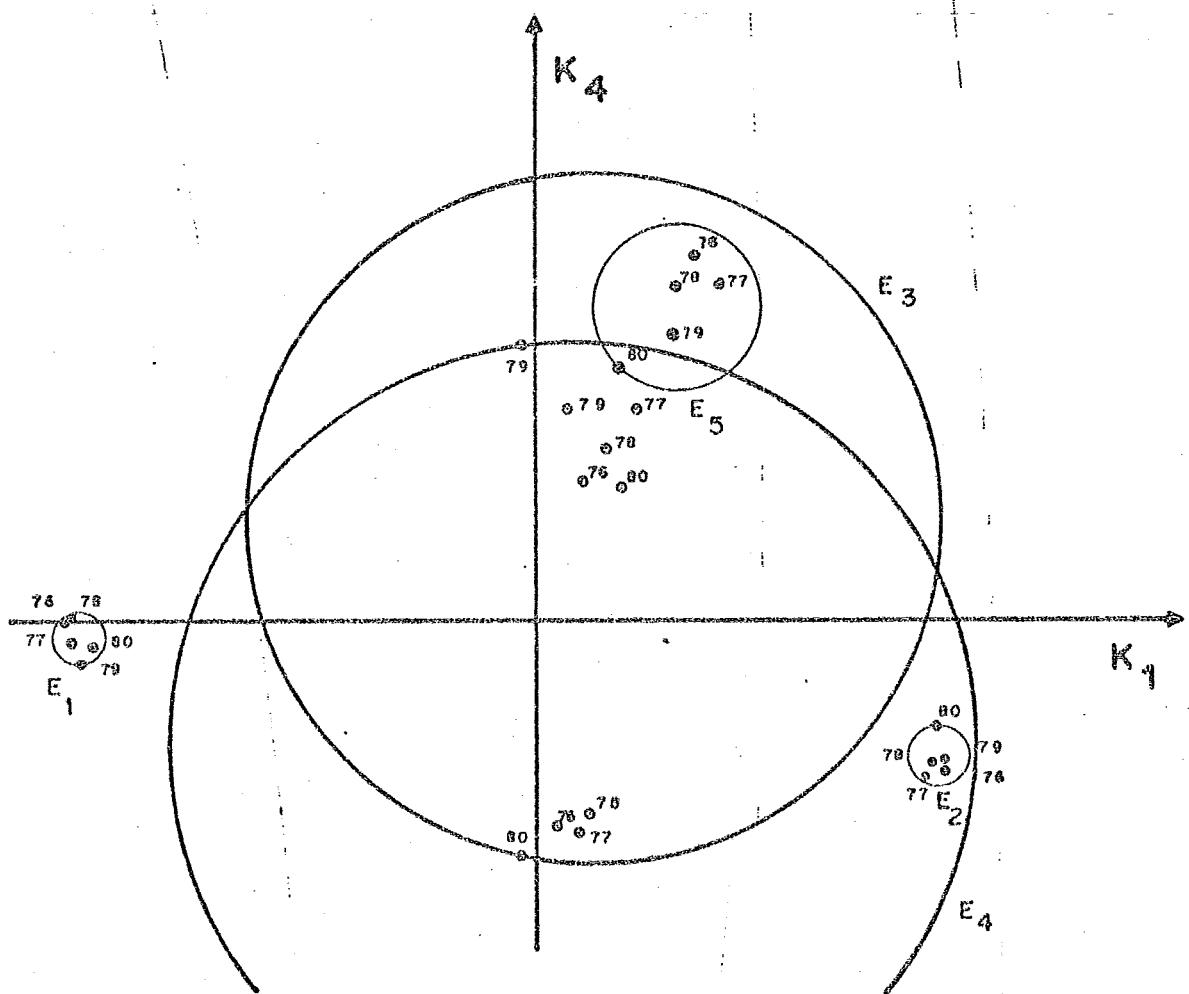


Figura V.4 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_4)$  - Agregação das componentes  $C_i^t$ .

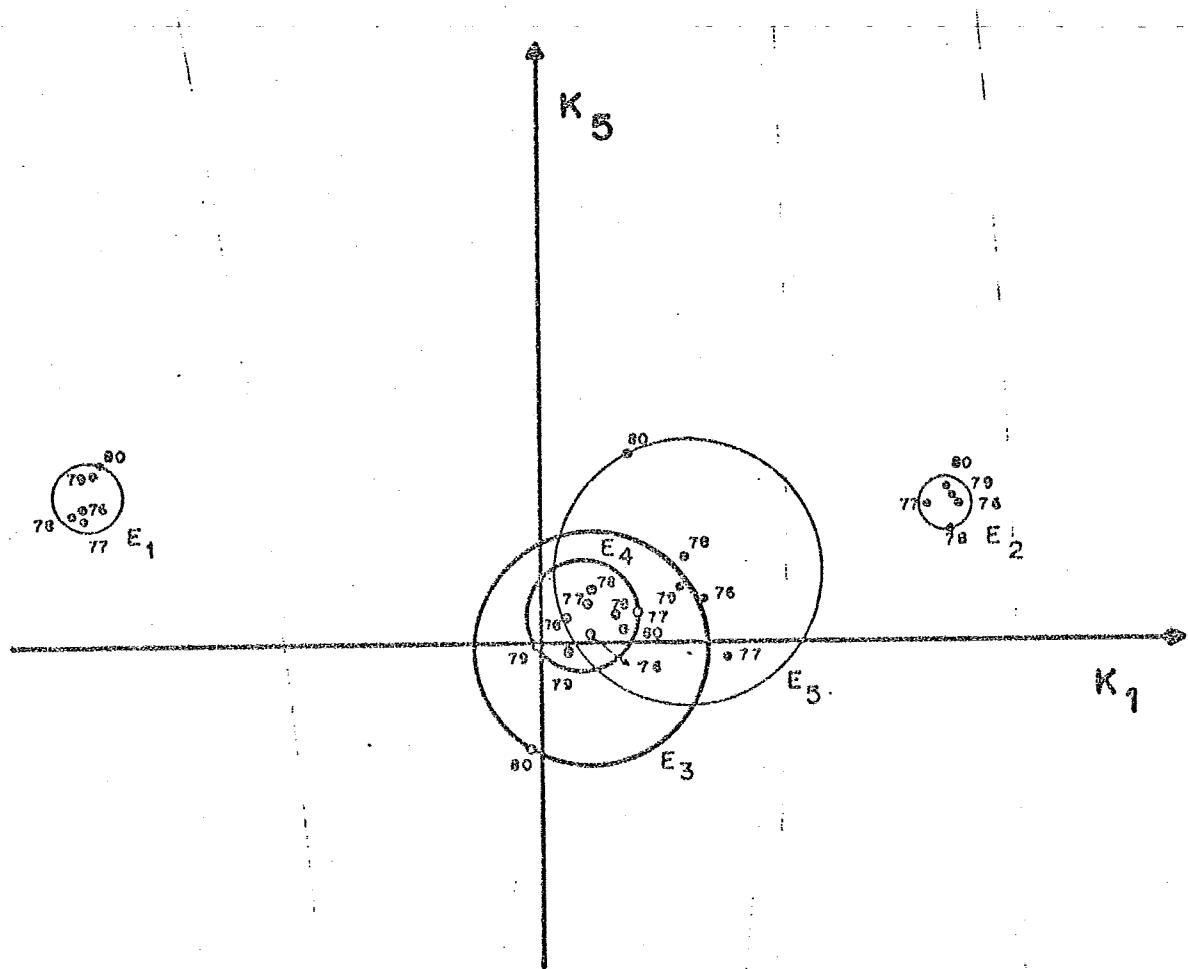


Figura V.5 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_5)$  - Agregação das componentes  $c_i^t$ .

observação feita anteriormente com relação aos coeficientes das componentes  $C_i^t$  (primeira agregação - tabelas 1 à 5 do anexo). A partir dessa análise, é possível obter a previsão para as componentes  $C_1^{81}$ ,  $C_2^{81}$  e  $C_5^{81}$  diretamente pela média das componentes ao longo do tempo. Ou seja, as pequenas esferas formadas para essas componentes permitem concluir que seus coeficientes sofrem pequenas variações que não comprometem a estabilidade da série de matrizes.

Segundo o estudo dos erros feito no Capítulo IV, o erro de previsão para as componentes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  pode ser avaliado por:

$$\text{Erro max} = \frac{r_i}{||\mathbf{o}_i||}$$

que fornece os seguintes valores para as três componentes em questão:

i) Componente  $C_1$

$$\text{Erro max} = \frac{.057}{.989} = .057$$

ii) Componente  $C_2$

$$\text{Erro max} = \frac{.220}{.988} = .223$$

iii) Componente  $C_3$

$$\text{Erro max} = \frac{.571}{.927} = .616$$

É importante observar que o erro na previsão da componente se "distribui" entre as variáveis que a compõe, proporcionalmente as suas contribuições. Isto é, sendo

$$C_i = \sum_{k=1}^m c_{ik} X_k \text{ e } e_i \text{ o erro correspondente}$$

a previsão da componente  $C_i$ , o erro na variável  $X_k$  devido a previsão de  $C_i$  será dado por:

$$e_k = e_i (c_{ik})^2$$

pois dessa forma, a soma dos erros das variáveis, será o erro na previsão de  $C_i$ , isto é:

$$\sum_k e_k = \sum_k e_i (c_{ik})^2 = e_i \sum_k (c_{ik})^2 = e_i$$

As componentes  $C_3^{81}$  e  $C_4^{81}$  por apresentarem interseção entre suas esferas, precisam ser examinadas com mais detalhe. É necessário voltar ao primeiro nível de agregação, no qual as componentes  $C_i^t$  são descritas pelos coeficientes  $c_{ik}$  relativos as variáveis  $X_k$ . Pelas tabelas (3 e 4) do anexo verifica-se que a contribuição das variáveis  $X_{21}$  para a componente  $C_3$  sofre um decréscimo considerável, enquanto que a contribuição dessa mesma variável para a componente  $C_4$  tende a aumentar no tempo. Um movimento semelhante é observado para os coeficientes da variável  $X_{23}$ , que cresce (em valor absoluto) na componente  $C_3$ , e decresce na componente  $C_4$  ao longo do tempo. Essa "troca" de variáveis entre as componentes pode explicar a não distinção entre elas mos-

trada pela interseção das esferas  $E_3$  e  $E_4$ . Não é possível nesse caso decidir sobre a previsão de  $C_3^{81}$  e  $C_4^{81}$  dentro das suas respectivas esferas. A previsão dessas duas componentes deve ser feita examinando-se cada coeficiente  $c_{3k}^t$  e  $c_{4k}^t$  relativo a cada variável  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 23$ ). As previsões das componentes  $C_i^{81}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) estão na tabela 13 do anexo.

Considerando-se agora a agregação das componentes  $F_i^t$  (relativa as agregações das linhas) foram extraídas as componentes  $K_j$ , (veja tabela 12 do anexo) e mantidas as cinco primeiras, responsáveis por 97.39% da variância total. As esferas  $E_i$  construídas no espaço definido pelas componentes  $K_j$  tem as seguintes características:

$$E_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_1 = (.971, -.212, .055, -.086, .004) \\ \text{Raio } R_1 = .056 \end{array} \right.$$

$$E_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_2 = (.216, .890, -.389, -.050, -.052) \\ \text{Raio } R_2 = .104 \end{array} \right.$$

$$E_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_3 = (.023, .093, .159, .097, -.008) \\ \text{Raio } R_3 = 1.196 \end{array} \right.$$

$$E_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_4 = (.014, .002, -.061, .175, .024) \\ \text{Raio } R_4 = 1.154 \end{array} \right.$$

$$E_5 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } O_5 = (.017, .061, .054, .029, .915) \\ \text{Raio } R_5 = .288 \end{array} \right.$$

Pela tabela (V.3) é possível verificar quais as esferas que apresentam interseção:

TABELA V.3 - Interseção entre os pares de esferas  $(E_i, E_{i'})$  relativas as componentes  $F_i^t$

$(E_i, E_{i'})$	$d(O_i, O_{i'})$	$d(O_i, O_{i'})/r_i + r_{i'}$
$(E_1, E_2)$	1.411	8.763
$(E_1, E_3)$	1.018	.814
$(E_1, E_4)$	1.022	.843
$(E_1, E_5)$	1.352	3.923
$(E_2, E_3)$	.998	.768
$(E_2, E_4)$	.996	.782
$(E_2, E_5)$	1.366	3.483
$(E_3, E_4)$	.254	.108
$(E_3, E_5)$	.932	.628
$(E_4, E_5)$	.912	.633

As figuras (V.6) à (V.9) mostram as projeções dos pontos  $F_i^t$  nos planos  $(K_1 \times K_2)$ ,  $(K_1 \times K_3)$ ,  $(K_1 \times K_4)$ ,  $(K_1 \times K_5)$ . A situação é análoga a das componentes  $C_i^t$  analisadas anteriormente. Da mesma forma  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_5$  são previstas diretamente pela média dessas componentes ao longo do tempo, enquanto que  $F_3$  e  $F_4$  são examinadas através dos seus coeficientes  $f_{3\ell}^t$  e  $f_{4\ell}^t$  ( $\ell=1, 2, \dots, 41$ ) obtendo-se a previsão para  $F_i^{81}$

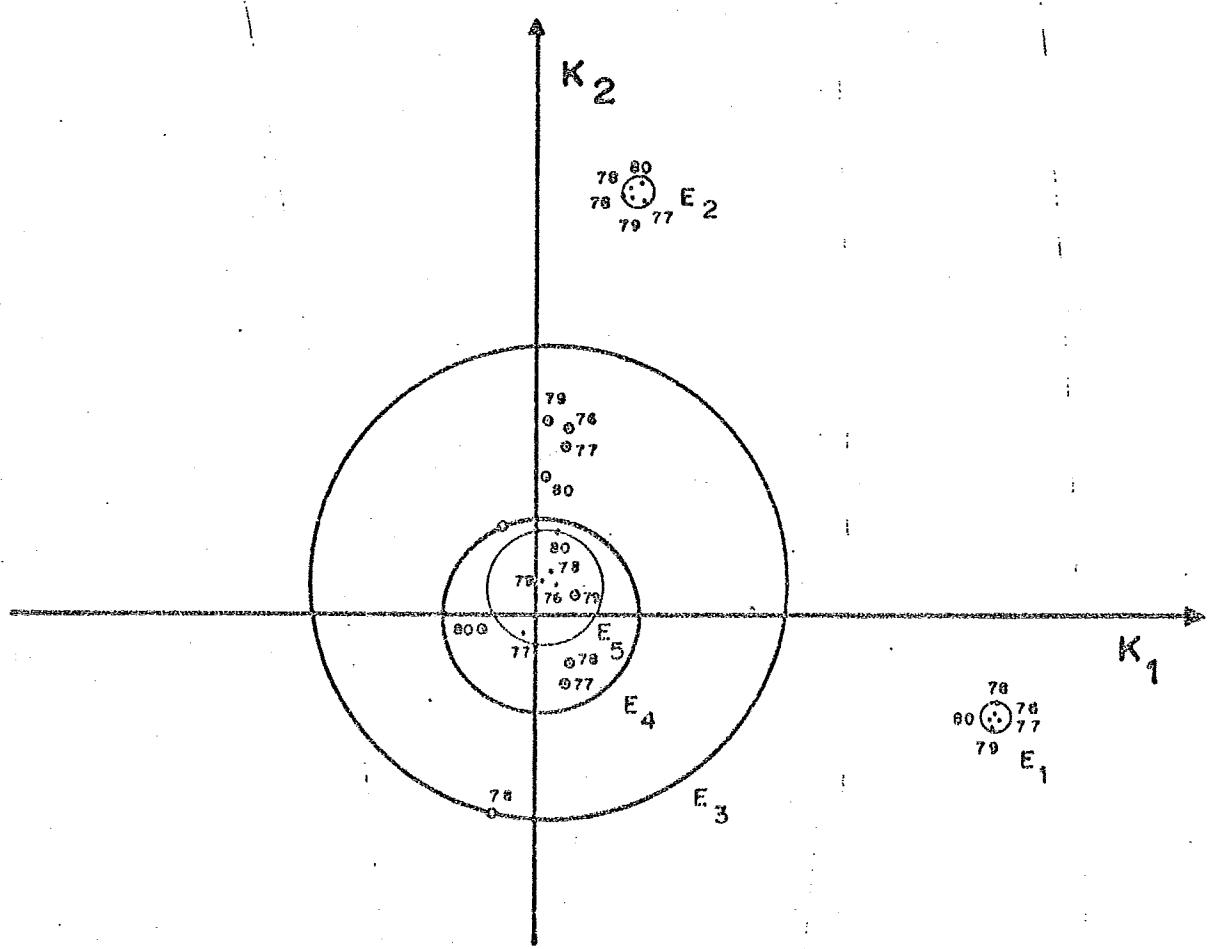


Figura V.6 - As esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_2)$  - Agregação das componentes  $F_i^t$ .

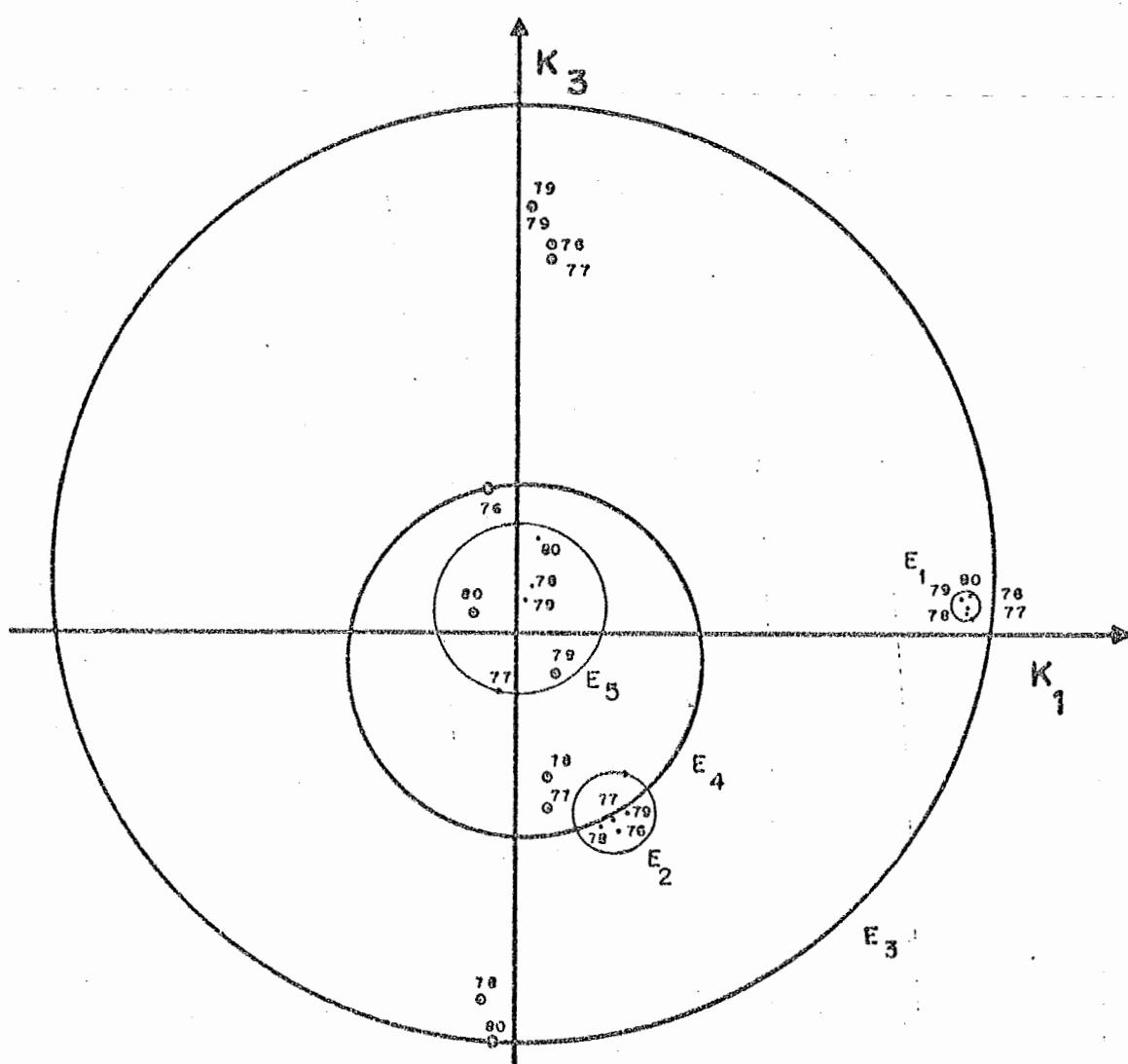


Figura V.7 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_3)$  - Agregação das componentes  $F_i^t$ .

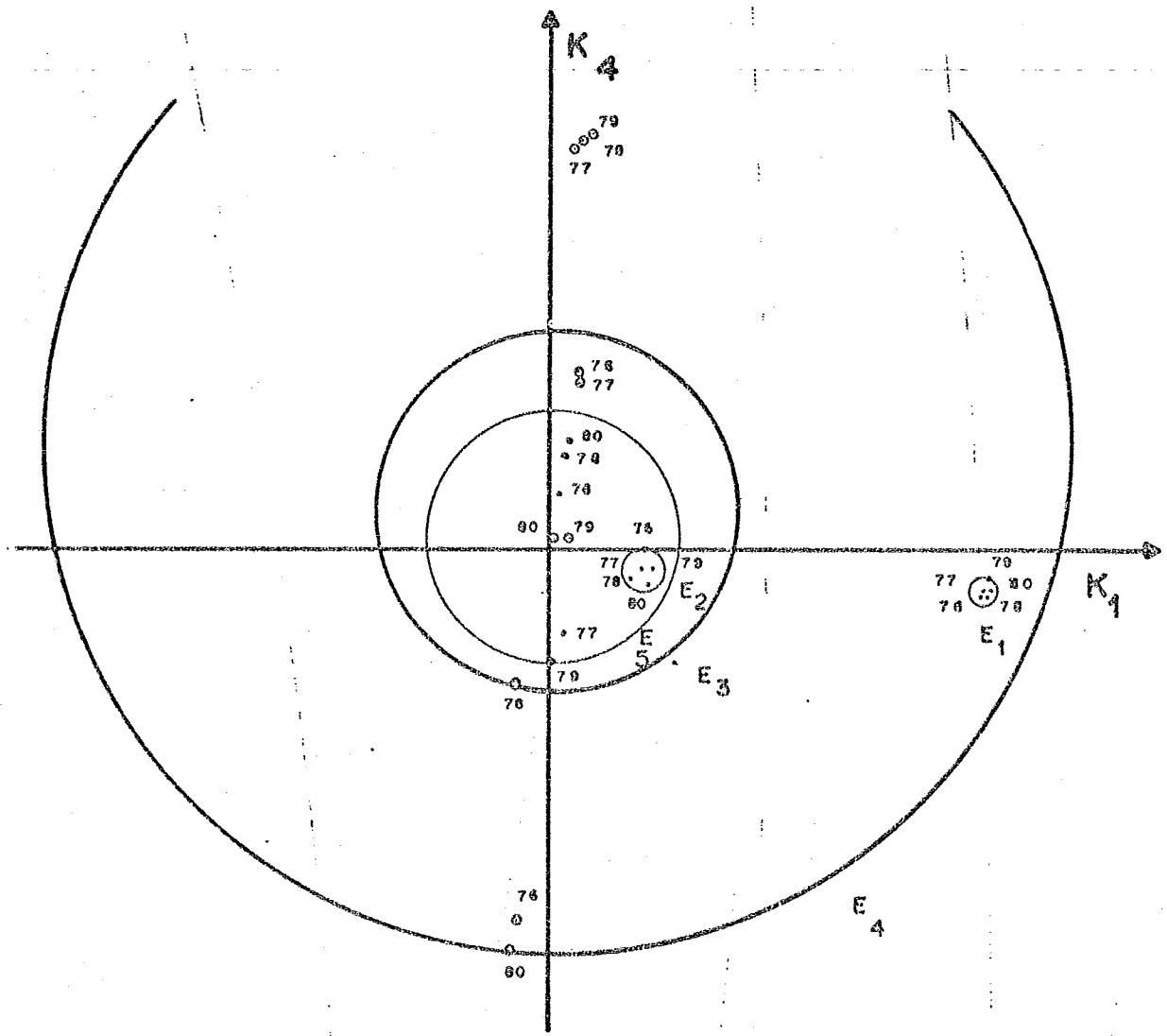


Figura V.8 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_4)$  - Agregação das componentes  $F_i^t$ .

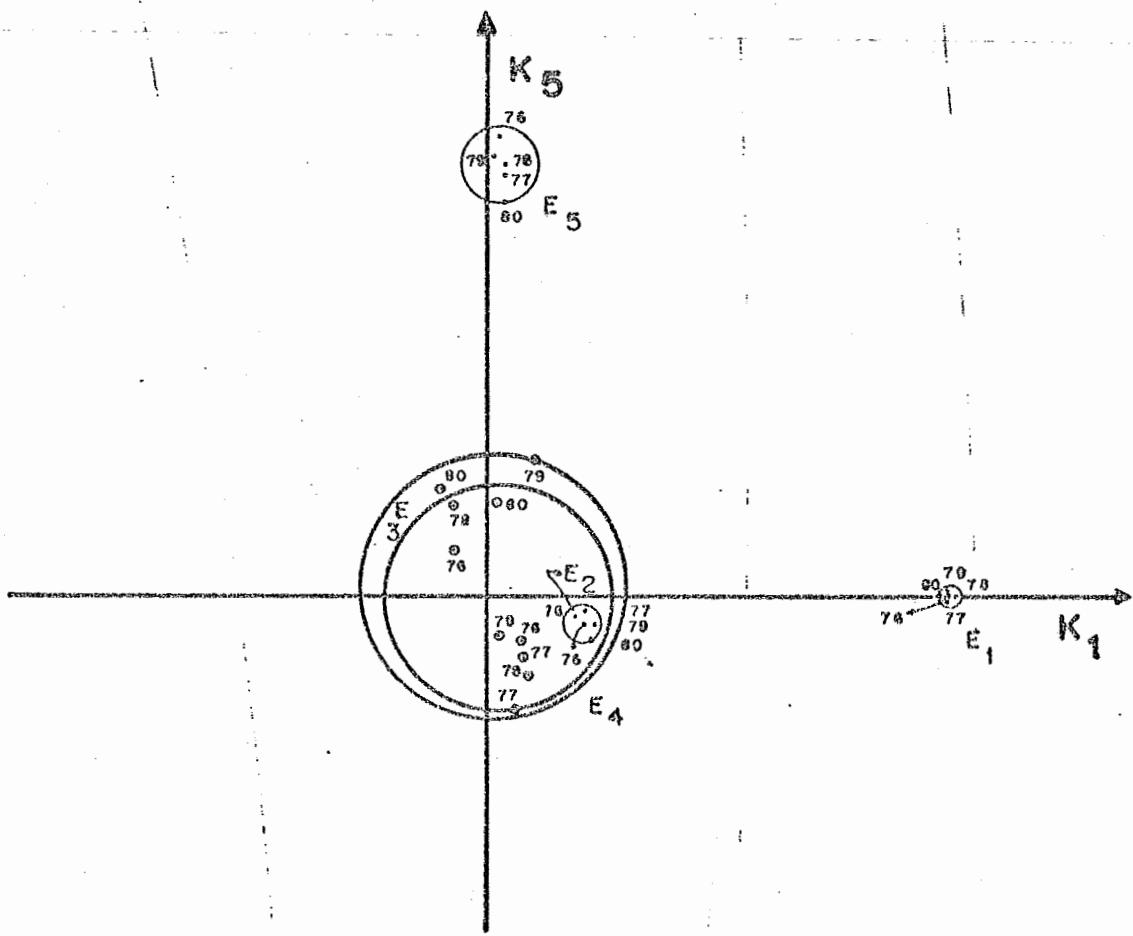


Figura V.9 - As Esferas  $E_i$  no Plano  $(K_1 \times K_5)$  - Agregação das componentes  $F_i^t$ .

( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) mostrada na tabela 14 do anexo. Os erros de previsão para  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_5$  são avaliados por:

i) Componente  $F_1$

$$\text{Erro max} = \frac{r_1}{\|o_1\|} = \frac{.057}{.999} = .057$$

ii) Componente  $F_2$

$$\text{Erro max} = \frac{r_2}{\|o_2\|} = \frac{.104}{.998} = .104$$

iii) Componente  $F_5$

$$\text{Erro max} = \frac{r_5}{\|o_5\|} = \frac{.288}{.919} = .313$$

A reconstrução da matriz  $A^{81}$  foi obtida a partir das previsões  $C^{81}$  e  $F^{81}$  das tabelas 13 e 14 do anexo, e ainda a previsão dos auto valores (variâncias das componentes) para o ano de 81. Pela tabela (V.1) pode-se observar que os auto valores das cinco componentes consideradas, sofreram muito pouca alteração ao longo do tempo, e a previsão para 1981 pode ser obtida pela média ao longo do tempo. A reconstrução da matriz é dada por:

$$\tilde{A}^{81} \approx \sum_{i=1}^5 \sqrt{\lambda_i^{81}} F_i^{81} \begin{pmatrix} C_i^{81} \end{pmatrix}'$$

A matriz assim obtida é na verdade a matriz norma-

lizada, porque as componentes  $C_i$  e  $F_i$  foram extraídas da matriz normalizada (A.C.P. da matriz de correlação). A matriz  $A^{81}$  pode ser obtida fazendo-se a transformação inversa da normalização isto é:

$$a_{\ell k}^{81} = \tilde{a}_{\ell k}^{81} s_k + \bar{x}_k$$

onde  $s_k$  é o desvio padrão da variável  $x_k$  e  $\bar{x}_k$  é a sua média. A matriz prevista para 1981 está na tabela 15 do anexo.

## CAPÍTULO VI

## CONCLUSÕES

Os resultados teóricos obtidos nesse trabalho com respeito à questão da estabilidade na série de matrizes, têm como objetivo verificar o ajuste da evolução observada em uma dada série a um modelo de evolução, considerado estável.

Dos quatro critérios apresentados no Capítulo III, o primeiro (modelo estacionário - definição III.2), através do exame da média dos elementos da matriz, verifica se existe ou não uma evolução ao longo do tempo. Trata-se de um teste de igualdade de médias para as matrizes que formam a série. Critérios desse tipo são recomendados para a análise da evolução de matrizes de coeficientes técnicos ou qualquer outra matriz cujos elementos são "normalizados".

O segundo critério também baseado nas médias dos elementos das matrizes (cadeia dos centros de gravidade :- definição III.3), procura identificar a ocorrência de mudanças muito bruscas ao longo do tempo. No entanto uma vez verificada a estabilidade por esse critério, não é possível saber qual o tipo de evolução que a série de matrizes obedece, mas apenas que determinados tipos de instabilidade não ocorrem no período analisado. A vantagem da utilização desse critério está principalmente na facilidade de aplicação, necessitando apenas de cálculo de médias e distâncias entre vetores.

Os outros dois critérios estão ligados a uma definição de estabilidade, dada pela proporcionalidade das colunas (ou linhas) da matriz. Esses critérios são aplicados as estruturas básicas, sendo necessário extrair-se as componentes principais de cada matriz da série. Essas estruturas, além de permitirem uma análise da estabilidade, são utilizadas na previsão como forma de redução da dimensão do problema. Os dois critérios baseados na mesma idéia de estabilidade procuram verificar a semelhança das estruturas básicas ao longo do tempo. Essa semelhança deve ser verificada através da correlação (semelhança) entre componentes de mesma ordem ao longo do tempo, e da independência (diferença) entre componentes de ordens distintas ao longo do tempo. O critério dos coeficientes (definição III.6) fornece uma indicação quanto à semelhança das componentes de mesma ordem.

O critério das esferas disjuntas (definição III.8) necessita de uma segunda análise das componentes principais, e quando satisfeito, indica a distinção entre as componentes de ordens diferentes. Mas a partir das esferas obtidas para verificação desse critério, a semelhança das componentes de mesma ordem pode ser verificada imediatamente pelo grau de estabilidade (definição III.10). Isto é, no segundo nível de agregação, é possível verificar quais as componentes semelhantes e quais as componentes distintas.

No Capítulo V destinado a aplicação dos critérios de estabilidade na previsão da matriz do Balanço Energético, o rápido exame das componentes relativas as agregações das linhas e colunas, forneceu a primeira indicação sobre o comportamento

das componentes, apontando possíveis instabilidades. A construção das esferas  $E_j$ , a partir do segundo nível de agregação, confirmou a análise feita inicialmente. Foram identificadas as componentes que causavam a instabilidade segundo o critério das esferas disjuntas, e posteriormente, examinando essas componentes como combinação linear das variáveis  $X_k$ , foi possível identificar quais as variáveis responsáveis pela instabilidade verificada. Isto é, quais as colunas (ou linhas) da matriz que não apresentavam proporcionalidade de um ano para o outro.

Assim, embora o critério de estabilidade aplicado possa ser considerado muito forte (exigindo mudanças proporcionais nas variáveis de um ano para o outro), este pode ser usado no sentido de apontar as variáveis (colunas ou linhas da matriz) que não obedecem a esse tipo de evolução, servindo como instrumento de análise, mesmo nos casos em que a estabilidade não for verificada. Nesses casos, um procedimento alternativo para a previsão pode ser obtido retirando-se as colunas (ou linhas) que causam a instabilidade, refazer as esferas que deverão ser disjuntas, proceder a previsão das componentes e refazer a matriz, a menos das linhas e ou colunas retiradas. Essas devem ser previstas diretamente pelos seus valores observados. No exemplo da matriz do Balanço Energético verifica-se que as variáveis que comprometem a estabilidade da série, apresentam uma evolução não homogênea por coluna, isto é, a evolução da variável para alguns setores é no sentido do crescimento enquanto que para outros setores é de decréscimo. Essa evolução evidentemente não apresenta a proporcionalidade exigida no critério de estabilidade, mas em muitos casos, é possível analisar-se a variável para os dois con-

juntos de setores separadamente. É importante lembrar no entanto, que a tentativa de utilizar outros modelos mais sofisticados para a previsão, está restrita pela pequena extensão da série (no exemplo apresentado, de apenas cinco matrizes).

Ainda com relação aos critérios baseados nas componentes principais, é possível sua utilização em outros contextos que não a evolução no tempo de uma série de matrizes. Na verdade esses critérios procuram identificar estruturas básicas semelhantes para diferentes grupos de observações para um mesmo conjunto de variáveis. É possível portanto através desses mesmos critérios verificar semelhanças entre matrizes econômicas relativas à diferentes regiões ou países. Por exemplo verificar se as matrizes de insumo-produto de dois ou mais países são semelhantes. Seria uma maneira de verificar semelhanças na economia de diferentes países, no que se refere aos seus processos produtivos. Evidentemente outras matrizes podem ser comparadas da mesma maneira.

Outra situação em que se poderia aplicar esses critérios, seria a comparação de um conjunto qualquer de variáveis tomadas em populações distintas. Por exemplo, suponha um conjunto de variáveis sócio-econômicas, medidas em populações provenientes de várias regiões distintas do país. É possível identificar a partir da aplicação desses critérios quais as regiões que apresentam estruturas semelhantes com relação a esse conjunto de variáveis escolhidas. Seria nesse caso uma análise da semelhança de diversas populações, no que diz respeito a esse conjunto de variáveis.

**A N E X O**

Tabela 1 - Agregação das Colunas - 1<sup>a</sup> Componente

C1	1976	1977	1978	1979	1980
X1	-.037	-.040	-.069	-.027	-.024
X2	.787	.782	.840	.831	.831
X3	.713	.730	.653	.744	.758
X4	.184	.089	.188	.217	.221
X5	.567	.568	.556	.594	.582
X6	.774	.780	.764	.786	.785
X7	.514	.517	.503	.585	.540
X8	.571	.568	.558	.680	.593
X9	.858	.860	.871	.853	.852
X10	.898	.898	.904	.892	.892
X11	.805	.807	.819	.798	.799
X12	.844	.837	.848	.832	.833
X13	.712	.706	.710	.713	.714
X14	.891	.891	.894	.880	.878
X15	.797	.792	.801	.785	.793
X16	.689	.692	.694	.684	.686
X17	.634	.636	.636	.622	.629
X18	.686	.686	.686	.677	.682
X19	.663	.663	.659	.642	.646
X20	.607	.623	.654	.756	.526
X21	.649	.646	.670	.651	.699
X22	.833	.841	.848	.839	.839
X23	.580	.592	.593	.633	.631

Tabela 2 - Agregação das Colunas - 2<sup>a</sup> Componente

C2	1976	1977	1978	1979	1980
X1	.863	.880	.861	.873	.898
X2	.395	.499	.263	.438	.416
X3	.543	.563	.643	.569	.556
X4	.572	.521	.656	.644	.646
X5	.646	.640	.669	.626	.602
X6	.442	.447	.476	.444	.480
X7	.600	.617	.623	.581	.582
X8	.596	.594	.607	.666	.563
X9	-.339	-.348	-.330	-.364	-.356
X10	-.305	-.302	-.286	-.333	-.305
X11	-.331	-.329	-.329	-.364	-.332
X12	-.242	-.211	-.234	-.277	-.265
X13	-.172	-.165	-.170	-.217	-.307
X14	-.324	-.318	-.315	-.374	-.337
X15	-.323	-.312	-.336	-.382	-.379
X16	-.007	-.006	-.007	-.038	.000
X17	-.087	-.036	-.008	-.064	-.001
X18	-.111	-.112	-.114	-.131	-.089
X19	-.016	-.018	-.004	-.049	-.010
X20	-.052	-.164	-.155	-.005	-.092
X21	-.043	-.082	-.043	-.060	-.053
X22	-.297	-.292	-.248	-.291	-.256
X23	.055	-.000	.027	-.110	-.143

Tabela 3 - Agregação das Colunas - 3<sup>a</sup> Componente

C3	1976	1977	1978	1979	1980
X1	.267	.297	.318	.250	.186
X2	.062	-.020	.075	-.026	-.096
X3	-.097	-.096	-.148	-.100	-.031
X4	-.288	-.113	-.207	-.196	-.218
X5	-.216	-.224	-.224	-.227	-.256
X6	.115	.120	.131	.178	.125
X7	-.228	-.273	-.219	-.040	-.203
X8	-.082	-.119	-.083	-.110	-.165
X9	-.172	-.155	-.137	-.067	.000
X10	-.154	-.156	-.148	-.048	-.001
X11	-.162	-.132	-.121	-.066	-.027
X12	-.012	.002	-.020	.103	-.117
X13	-.488	-.518	-.540	-.577	-.576
X14	-.096	-.096	-.103	-.001	-.041
X15	-.164	-.162	-.167	-.083	-.144
X16	.361	.357	.351	.391	.367
X17	.491	.419	.460	.511	.454
X18	.417	.418	.433	.444	.411
X19	.401	.389	.392	.419	.384
X20	.235	.341	.334	.034	.244
X21	.395	.439	.361	-.174	.198
X22	-.155	-.147	-.118	-.023	-.023
X23	-.189	-.201	-.328	-.517	-.535

Tabela 4 - Agregação das Colunas - 4<sup>a</sup> Componente

C4	1976	1977	1978	1979	1980
X1	-.054	-.028	.013	-.049	.125
X2	.091	.125	.162	-.174	.120
X3	.093	.111	.067	-.055	-.011
X4	-.067	-.049	-.049	-.376	-.100
X5	.076	.118	.097	-.052	.040
X6	-.196	-.176	-.163	-.186	-.090
X7	.388	-.357	-.403	-.411	-.419
X8	.039	.046	.063	.052	.071
X9	-.100	-.080	-.084	-.207	-.143
X10	-.125	-.123	-.135	.117	-.183
X11	-.085	-.067	-.055	-.199	-.114
X12	-.220	-.044	-.227	-.255	-.230
X13	.306	.298	.237	.206	.055
X14	-.174	-.182	-.182	-.197	.221
X15	-.118	-.128	-.118	-.142	.084
X16	-.175	-.174	-.151	-.030	-.041
X17	-.092	-.143	-.123	-.183	.017
X18	-.143	-.163	-.145	.021	.007
X19	-.110	-.123	-.079	-.155	.027
X20	.714	.612	.548	.576	.605
X21	.424	.441	.520	.451	.601
X22	-.143	-.148	-.160	-.223	-.190
X23	.703	.658	.601	.437	.431

Tabela 5 - Agregação das Colunas - 5<sup>a</sup> Componente

C5	1976	1977	1978	1979	1980
X1	.223	.295	.182	.206	.066
X2	-.102	-.117	-.146	.006	-.152
X3	.234	-.164	-.172	-.177	-.008
X4	.668	.787	.587	.464	.514
X5	-.252	-.195	-.207	-.260	-.192
X6	.100	.023	.137	.072	.090
X7	-.219	-.198	-.174	-.304	-.215
X8	-.076	-.115	-.036	-.034	-.061
X9	.051	.098	.087	-.027	.196
X10	.033	.067	.027	-.020	.106
X11	.065	.110	.103	-.027	.235
X12	.137	.136	.135	.064	.111
X13	-.128	-.044	-.131	-.012	-.131
X14	.076	.083	.079	.015	.103
X15	.028	.071	.029	-.023	.172
X16	.122	.008	.086	.116	.019
X17	-.453	-.340	-.467	-.380	-.478
X18	.236	.104	.193	.293	-.052
X19	-.122	-.167	-.261	-.172	-.318
X20	.104	.091	.155	.044	.303
X21	.204	.114	.146	.396	.089
X22	.063	.106	.095	.039	.145
X23	-.010	-.007	-.083	.144	-.152

Tabela 6 - Agregação das Linhas - 1<sup>a</sup> Componente

E1	1976	1977	1978	1979	1980
Y1	.720	.756	.759	.790	.770
Y2	-.037	-.046	-.042	-.040	-.040
Y3	-.062	-.069	-.072	-.071	-.074
Y4	.118	.134	.109	.152	.163
Y5	.275	.289	.299	.288	.292
Y6	-.061	-.052	-.066	-.065	-.067
Y7	-.028	-.031	-.028	-.029	-.030
Y8	-.038	-.035	-.042	-.044	-.046
Y9	-.075	-.081	-.082	-.081	-.076
Y10	-.090	-.089	-.094	-.071	-.103
Y11	-.033	-.038	-.036	-.039	-.042
Y12	.001	.000	.000	-.035	-.011
Y13	-.061	-.066	-.063	-.063	-.067
Y14	-.072	-.078	-.076	-.074	-.079
Y15	-.016	-.020	-.016	-.014	-.014
Y16	.072	.052	.047	.043	.047
Y17	-.036	-.041	-.039	-.040	-.041
Y18	-.051	-.057	-.056	-.056	-.059
Y19	-.047	-.051	-.049	-.049	-.051
Y20	.015	.020	.026	.008	.021
Y21	-.054	-.060	-.058	-.058	-.061
Y22	-.021	-.024	-.026	-.026	-.038
Y23	-.051	-.058	-.056	-.055	-.058
Y24	-.049	-.050	-.049	-.047	-.041

Tabela 6 - Agregação das Linhas - 1<sup>a</sup> Componente (Continuação)

F1	1976	1977	1978	1979	1980
Y25	.006	.005	.007	.006	.005
Y26	-.054	-.061	-.058	-.058	-.060
Y27	-.056	-.062	-.059	-.059	-.062
Y28	-.054	-.059	-.058	-.057	-.060
Y29	-.040	-.050	-.047	-.047	-.055
Y30	-.046	-.047	-.046	-.044	-.044
Y31	-.020	-.024	-.026	-.029	-.020
Y32	-.051	-.056	-.055	-.055	-.058
Y33	-.049	-.053	-.054	-.053	-.056
Y34	-.051	-.056	-.055	-.053	-.056
Y35	-.032	-.036	-.033	-.039	.039

Tabela 7 - Agregação das Linhas - 2<sup>a</sup> Componente

F2	1976	1977	1978	1979	1980
Y1	-.220	-.208	-.207	-.175	-.143
Y2	-.212	-.247	-.201	-.196	-.203
Y3	-.013	-.013	-.023	-.021	.024
Y4	-.705	-.727	-.754	-.755	-.751
Y5	.483	.484	.466	.495	.053
Y6	-.000	-.020	.001	.002	.000
Y7	-.017	-.013	-.014	-.009	-.016
Y8	.105	.047	.097	.095	.089
Y9	.160	.161	.186	.152	.138
Y10	.083	.008	.086	.003	.075
Y11	.004	.008	.008	.012	.012
Y12	.091	.128	.115	.091	.108
Y13	-.017	-.012	-.011	-.013	-.017
Y14	-.013	-.011	-.007	-.010	-.009
Y15	.018	.018	.017	.017	.015
Y16	.008	.008	.002	.017	.014
Y17	.002	.005	.004	.005	.004
Y18	-.009	-.007	-.006	-.008	-.009
Y19	-.017	-.012	-.013	-.012	-.013
Y20	.070	.085	.081	.070	.078
Y21	-.013	-.009	-.009	-.010	-.011
Y22	.032	.035	.033	.036	.033
Y23	-.007	-.005	-.004	-.004	-.006
Y24	-.006	-.009	-.008	-.016	-.038

Tabela 7 - Agregação das Linhas - 2<sup>a</sup> Componente (Continuação)

F2	1976	1977	1978	1979	1980
Y25	-.002	-.004	-.006	.002	-.010
Y26	-.014	-.009	-.010	-.011	-.012
Y27	-.013	-.009	-.008	-.009	-.010
Y28	-.011	-.007	-.006	-.008	-.009
Y29	-.008	-.001	-.001	-.001	-.009
Y30	-.007	-.007	-.003	-.006	-.007
Y31	-.004	.005	-.001	-.002	.005
Y32	-.009	-.005	-.005	-.006	-.014
Y33	-.016	-.012	-.014	-.011	-.012
Y34	-.014	-.010	-.010	-.012	-.012
Y35	.007	.011	.009	.003	.008

Tabela 8 - Agregação das Linhas - 3<sup>a</sup> Componente

F3	1976	1977	1978	1979	1980
Y1	.060	-.035	.029	.021	-.092
Y2	.038	-.003	.019	.000	-.009
Y3	.030	.022	-.011	.016	-.004
Y4	.203	.193	-.173	.134	-.167
Y5	.668	.671	-.671	.588	-.459
Y6	.028	.027	-.029	.018	-.015
Y7	-.137	-.133	.123	-.139	.108
Y8	-.264	-.134	.188	-.210	.164
Y9	-.234	-.231	.246	-.240	.184
Y10	.000	-.048	.002	.013	.029
Y11	-.109	-.101	.097	-.107	.079
Y12	-.251	-.316	.238	-.013	.091
Y13	-.012	-.009	.008	-.018	.020
Y14	.079	.086	-.078	.076	-.066
Y15	.065	.056	-.035	.022	-.007
Y16	-.106	-.101	.075	-.128	.124
Y17	-.001	.001	.000	-.011	.011
Y18	.012	.014	-.011	.007	-.011
Y19	.024	.025	-.021	.016	-.014
Y20	.088	.042	-.010	.069	.003
Y21	.026	.027	-.024	.022	-.021
Y22	.077	.078	-.070	.052	-.146
Y23	.032	.031	-.031	.025	-.021
Y24	.029	.033	-.034	.026	.022

Tabela 8 - Agregação das Linhas - 3<sup>a</sup> Componente (Continuação)

F3	1976	1977	1978	1979	1980
Y25	-.228	-.205	.216	-.255	.189
Y26	.012	.021	-.013	.013	-.013
Y27	.024	.027	-.024	.022	-.021
Y28	.024	.026	-.023	.020	-.019
Y29	.003	.007	-.011	-.004	.004
Y30	.021	.026	-.021	.017	-.015
Y31	-.094	-.101	.060	-.023	.068
Y32	.021	.024	-.020	.016	-.015
Y33	.025	.027	-.023	.018	-.016
Y34	.021	.024	-.020	.017	-.017
Y35	.017	.018	-.009	-.010	.011

Tabela 9 - Agregação das Linhas - 4<sup>a</sup> Componente

F4	1976	1977	1978	1979	1980
Y1	.199	-.209	-.185	.377	.184
Y2	-.030	.036	.014	.164	-.024
Y3	-.012	-.003	-.005	-.001	-.040
Y4	.172	.134	.139	.308	-.153
Y5	-.072	.081	.143	.331	-.339
Y6	-.014	.001	.022	.015	-.031
Y7	-.081	.085	.079	.020	-.039
Y8	-.006	.039	.027	-.261	.033
Y9	-.097	.131	.123	.021	-.038
Y10	-.041	.005	.063	.030	-.092
Y11	-.025	.032	.021	-.099	.004
Y12	.697	-.694	-.734	-.444	.755
Y13	-.031	.030	.028	.025	-.035
Y14	.011	-.017	-.013	-.002	-.023
Y15	-.041	.035	.023	.027	-.032
Y16	-.184	.204	.204	.194	-.178
Y17	-.034	.037	.039	.022	-.047
Y18	-.011	.011	.012	-.004	-.019
Y19	-.017	.015	.018	.019	-.032
Y20	.028	-.073	-.106	.119	.063
Y21	-.005	.003	.006	-.002	-.020
Y22	-.040	.046	.067	.054	.005
Y23	.009	.006	.010	.006	-.026
Y24	-.011	.007	.010	.000	-.027

Tabela 9 - Agregação das Linhas - 4<sup>a</sup>. Componente (Continuação)

F4	1976	1977	1978	1979	1980
Y25	-.062	.089	.077	-.133	-.011
Y26	-.006	.004	.007	-.008	-.018
Y27	-.004	.003	.006	-.002	-.021
Y28	-.006	.006	.008	-.008	-.022
Y29	-.016	.208	.026	.008	-.009
Y30	-.013	.009	.012	.004	-.031
Y31	.095	-.106	-.114	-.010	.242
Y32	-.011	.011	.013	.003	-.027
Y33	.008	.006	.010	.000	-.025
Y34	-.011	.010	.013	.001	-.026
Y35	-.035	.039	.046	.019	-.036

Tabela 10 - Agregação das Linhas - 5<sup>a</sup> Componente

F5	1976	1977	1978	1979	1980
Y1	-.151	.171	-.171	-.015	-.229
Y2	.406	-.829	.334	.331	-.265
Y3	-.037	.046	-.028	-.024	-.014
Y4	.033	.001	.112	-.036	.139
Y5	.006	-.127	.068	-.092	.202
Y6	-.009	.039	.004	-.023	.009
Y7	.053	.024	.046	.051	-.010
Y8	-.672	-.517	-.629	-.541	-.554
Y9	.323	-.208	.305	.370	-.009
Y10	.014	.053	.004	-.046	.014
Y11	-.101	.136	-.189	-.144	-.203
Y12	.261	-.212	.249	.478	.281
Y13	-.004	.029	.004	-.020	.019
Y14	-.055	.041	.033	-.053	.006
Y15	-.002	-.009	.024	.039	.057
Y16	.144	-.074	.168	.108	.075
Y17	.011	.010	.016	.008	.009
Y18	-.011	.026	-.005	-.009	-.010
Y19	-.013	.024	.002	-.019	.014
Y20	.039	-.092	.131	-.046	.297
Y21	-.024	.032	-.016	-.026	-.003
Y22	-.009	-.008	.000	-.036	-.076
Y23	-.021	.028	-.013	-.027	.001
Y24	-.041	.033	-.019	-.036	-.007

Tabela 10 - Agregação das Linhas (Continuação)

F5	1976	1977	1978	1979	1980
Y25	-.267	.283	-.374	-.314	-.387
Y26	-.028	.035	-.025	-.028	-.018
Y27	-.024	.033	-.016	-.025	-.006
Y28	-.021	.030	-.013	-.022	-.004
Y29	-.016	.026	-.006	-.008	-.020
Y30	-.013	.028	-.012	-.014	-.005
Y31	.077	-.031	.057	.123	.189
Y32	-.016	.027	-.009	-.018	-.002
Y33	-.026	.034	-.015	-.024	-.003
Y34	-.018	.029	-.009	-.023	-.001
Y35	-.003	.007	.016	.000	.005

Tabela 11 - Agregação das Componentes  $C_i^t$

	K1	K2	K3	K4	K5
C761	-.952	-.070	-.032	.001	.277
C771	-.952	-.076	.006	-.039	.276
C781	-.954	-.021	-.015	.013	.273
C791	-.923	-.002	-.013	-.075	.351
C801	-.901	-.803	-.035	-.041	.376
C762	.857	-.271	.060	-.310	.283
C772	.820	-.330	.081	-.323	.298
C782	.842	-.317	-.136	-.294	.228
C792	.857	-.262	-.050	-.294	.304
C802	.853	-.335	-.039	-.221	.321
C763	.109	-.094	.940	.275	.019
C773	.215	-.070	.838	.423	.065
C783	.159	-.112	.904	.348	.051
C793	.071	-.419	.776	.426	.000
C803	-.019	.242	-.709	-.481	-.228
C764	.065	.855	.211	-.442	.059
C774	.102	.849	.168	-.469	.092
C784	.123	.854	.249	-.415	.111
C794	-.012	-.546	-.610	.556	.008
C804	.180	.764	.517	.264	.050
C765	.342	.438	-.233	.775	.085
C775	.389	.415	-.381	.710	-.036
C785	.307	.488	-.332	.711	.152
C795	.305	.613	.059	.615	.112
C805	.194	.414	-.428	.547	.382

Tabela 12 - Agregação das Componentes  $F_i^t$

	K1	K2	K3	K4	K5
F761	.973	-.206	.047	-.093	.000
F771	.973	-.209	.042	-.087	-.001
F781	.977	-.188	.039	-.092	.000
F791	.966	-.232	-.072	-.070	.021
F801	.967	-.225	.076	-.087	.000
F762	.206	.882	-.417	-.012	-.053
F772	.204	.889	-.399	-.043	-.024
F782	.182	.888	-.414	-.056	-.039
F792	.237	.879	.399	-.045	-.059
F802	.228	.912	.306	-.097	-.085
F763	.075	.377	.836	.372	-.094
F773	.075	.362	.816	.366	-.239
F783	-.069	-.393	-.847	-.287	.192
F793	.028	.403	.908	.017	-.091
F803	.008	-.283	-.920	.020	.194
F764	-.068	.172	.346	-.912	.097
F774	.067	-.145	-.382	.896	-.117
F784	.079	-.110	.308	.918	-.165
F794	.090	.040	-.010	.927	.282
F804	-.099	-.033	-.049	-.954	.214
F765	.026	.069	.026	.123	.971
F775	-.035	-.102	-.126	-.178	.886
F785	.035	.093	.099	.209	.954
F795	.012	.073	.067	-.242	.923
F805	.047	.175	.203	.231	.841

Tabela 13 - Previsão para C81

	C1	C2	C3	C4	C5
X1	-.039	.875	.263	.014	.194
X2	.814	.402	.005	.064	-.102
X3	.719	.575	-.094	.041	-.151
X4	.179	.607	.204	-.128	.604
X5	.573	.636	-.229	.054	-.221
X6	.777	.475	.133	-.161	.084
X7	.531	.600	-.192	.395	-.222
X8	.594	.605	-.111	.054	-.064
X9	.858	-.347	-.106	-.122	.081
X10	.896	-.306	-.101	-.077	.042
X11	.805	-.337	-.102	-.104	.097
X12	.838	-.245	-.004	-.195	.116
X13	.711	-.206	-.576	.220	-.089
X14	.886	-.333	-.067	-.191	.071
X15	.794	-.346	-.144	-.084	-.013
X16	.689	-.011	.365	-.114	.070
X17	.631	-.039	.467	-.031	-.423
X18	.683	-.111	.424	-.087	.154
X19	.654	-.019	.397	-.026	-.208
X20	.633	-.057	.237	.605	.139
X21	.666	-.056	.198	.601	.189
X22	.840	-.276	-.023	-.172	.089
X23	.606	-.034	-.539	.421	-.022

Tabela 14 - Previsão para F81

	F1	F2	F3	F4	F5
Y1	.759	-.162	-.003	.073	-.079
Y2	-.041	-.211	.009	.029	-.005
Y3	-.070	-.019	.011	-.012	-.011
Y4	.135	-.738	.038	.188	.050
Y5	.287	.396	.159	.121	.011
Y6	-.062	-.003	.006	-.001	.004
Y7	-.029	-.014	-.036	.013	.033
Y8	.041	.086	.051	-.034	-.583
Y9	-.079	.159	-.055	.028	.156
Y10	-.089	.051	-.001	-.007	.008
Y11	-.031	.009	-.028	-.013	-.100
Y12	-.009	.106	.091	-.084	.211
Y13	-.064	-.014	-.002	.003	.006
Y14	-.076	-.010	.019	-.009	-.006
Y15	-.016	.017	.020	.002	.022
Y16	.052	.010		.048	.084
Y17	-.039	.004	.000	.003	-.011
Y18	-.056	-.008	.002	-.002	-.002
Y19	.049	-.013	.006	.006	.002
Y20	.018	.077	.038	.006	.066
Y21	-.058	-.010	.006	-.004	-.007
Y22	-.023	.034	-.002	.026	-.026
Y23	-.055	-.005	.007	.019	-.006
Y24	-.047	-.015	.015	-.004	-.014

Tabela 14 - Previsão para F81 (Continuação)

	F1	F2	F3	F4	F5
Y25	.006	-.004	-.057	-.008	-.212
Y26	-.058	-.011	.004	-.018	-.013
Y27	-.060	-.010	.006	-.004	-.008
Y28	-.058	-.008	.006	-.002	-.006
Y29	-.048	-.004	.000	.002	-.005
Y30	-.045	-.006	.006	-.004	-.003
Y31	-.024	.002	-.018	.021	.083
Y32	-.055	-.008	.005	-.002	-.004
Y33	-.053	-.013	.006	.000	-.007
Y34	-.054	-.012	.005	-.002	-.004
Y35	-.035	.008	.005	.007	.005

TABELA 15 O BALANÇO ENERGÉTICO PREVISTO PARA 1981	PETRÓLEO	GÁS NATURAL	CARVÃO VAPOR	CARVÃO METALÚRGICO	ENERGIA HIDRÁULICA	LENHA	CANA AÇUCAR	OUTRAS FONTES	ÓLEO DIESEL	ÓLEO COMBUSTÍVEL	GASOLINAS AUTOMOTIVAS	G.L.P.
PRODUÇÃO	9131	2166	1593	1052	40430	29297	13631	289	17478	16227	8637	3195
IMPORTAÇÃO	44512	-	-	3522	-	-	-	-	654	1353	-	45
EXPORTAÇÃO	-120	-	-	-	-	-	-	-	-537	-280	-226	-18
OFERTA INT.BRUTA	56530	987	1513	4159	35112	28583	13285	298	-715	812	653	134
REFIN. PETRÓLEO	59312	-	-	-	-	-	-	-	15987	19120	9851	2763
PLANTAS GAS.NAT.	-	208	-	-	-	-	-	-	-	-	-	172
USINAS GASEIFIC.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
COQUERIAS	-	-	-	-4256	-	-	-	-	-	-	-	-
CENTR.ELÉTR.S.PÚBLICO	-	-	-820	-	-42536	-	-	-	-274	-651	-	-
C.ELÉTR.AUTOPRODUTORAS	-	-	-25	-	-806	-24	-	-	-25	-708	-	-
CARVOARIAS	-	-	-	-	-	-8211	-	-	-	-	-	-
DESTILARIAS	-	-	-	-	-	-	13631	-	-	-	-	-
OUTRAS TRANSFORMAÇÕES	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	272	342
PERDAS DISTR.ARMAZ.	-	-	-	-220	-	-	-	-	-	-	-	-
SETOR ENERGÉTICO	-	178	-	-	-	-	-	-	261	1889	-	-
RESIDENCIAL	-	-	-	-	-	13018	-	-	-	-	-	2893
COMERCIAL	-	-	-	-	-	133	-	-	181	305	-	118
PÚBLICO	-	-	-	-	-	32	-	-	112	-	-	-
AGROPECUÁRIO	-	-	-	-	-	3397	-	-	2253	119	-	-
TRANSP. RODOVIÁRIO	-	-	-	-	-	-	-	-	11059	-	8863	-
TRANSP. FERROVIÁRIO	-	-	-	-	-	-	-	-	603	10	-	-
TRANSP. ÁEREO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TRANSP. HIDROVIÁRIO	-	-	-	-	-	-	-	-	553	1218	-	-
IND.CIMENTO	-	46	398	-	-	-	-	-	-	2197	-	-
FERRO GUSA AÇO	-	-	31	-	-	-	-	-	111	1017	-	32
FERRO, LIGAS	-	-	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PELOTIZAÇÃO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	693	-
MINEIRADA	-	-	-	-	-	-	-	-	210	669	-	-
N FERR./OUT.METAL	-	-	-	-	-	-	-	-	-	261	-	-
QUÍMICA	-	185	20	-	-	-	-	-	305	3112	-	67
ALIMENTAÇÃO E BEBIDAS	-	-	32	-	-	1581	-	-	153	1504	-	17
TEXTIL	-	-	-	-	-	148	-	-	16	670	-	-
PAPEL CELULOSE	-	-	-	-	-	220	-	-	14	983	-	-
CERÂMICA	-	2	58	-	-	1198	-	-	-	751	-	25
OUTROS	-	-	27	-	-	471	-	-	931	1415	-	58

O BALANÇO ENERGÉTICO

PREVISTO PARA

TABELA 15		BALANÇO ENERGÉTICO									
O BALANÇO ENERGÉTICO		PREVISÃO PARA									
1981											
NAFTA		PRODUÇÃO									
3107		532	2343	273	3012	43527	4095	3243	8027	1610	5115
IMPORTAÇÃO		-	-	-	393	-	-	-	-	215	115
EXPORTAÇÃO		-	-	325	-	-	-	-315	-	-	-
OFERTA INT. BRUTA		15	-8	-582	-	418	-41	-	-212	-	210
REFIN. PETRÓLEO		3125	642	2213	-	-	-	-	-	16320	3286
PLANTAS GAS NAT.		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
USINAS GASEIFIC.		-271	-	-	273	-	-	-	-	-	-
COQUEIRIAS		-	-	-	3192	-	-	-	-	-	-
CENTR. ELÉTR. S. PÚBLICO		-	-	-	-	40230	-	-	-	-	-
C. ELÉTR. AUTOPRODUTORAS		-	-	-	-	2510	-	-	-1210	-	-
CARVOARIAS		-	-	-	-	-	4205	-	-	-	-
DESTILARIAS		-	-	-	-	-	-	32110	8283	-	2395
OUTRAS TRANSFORMAÇÕES		-653	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PERDAS DISTR. ARMAZ.		-	-	-	-	-153	-5012	-405	-121	-	-
SETOR ENERGÉTICO		-	-	1	-	534	-	-	1213	1153	-
RESIDENCIAL		-	263	-	135	-	7081	315	-	-	-
COMERCIAL		-	-	-	38	-	4302	2	-	-	-
PÚBLICO		-	-	28	3	-	3361	3	-	-	-
AGROPECUÁRIO		-	2	-	-	-	741	-	-	-	-
TRANSP. HIDROVIÁRIO		-	-	-	-	-	-	268	-	-	-
TRANSP. AÉREO		-	1701	-	-	-	-	-	-	81	-
IND. CIMENTO		-	-	-	-	-	-	881	-	-	-
FERRO GUSS. AÇO		-	-	-	-	-	3010	2798	2711	-	-
FERRO-LIGAS		-	32	-	-	58	958	119	-	-	-
PELOTIZAÇÃO		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MINEIRAÇÃO		-	-	-	-	-	801	-	-	-	-
N FERRO/OUT. METAL		-	-	14	151	3653	29	-	-	292	-
QUÍMICA		27	7	-	1	10	2901	-	-	-	-
ALIMENTAÇÃO E BEBIDAS		-	28	-	11	-	1895	-	-	3310	-
TEXTIL		-	27	-	2	-	1359	-	-	-	-
PAPEL CELULOSE		-	5	-	-	-	1562	-	-	-	-
CERÂMICA		-	12	-	4	-	445	-	-	-	-
OUTROS		-	75	-	31	91	4352	-	-	245	-

## BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, T.W. (1956) - "Asymptotic Theory of Principal Component Analysis", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 34, pp. 122-148.
- BACHARACH, M. (1965) - "Estimating non Negative Matrices from Marginal Data", *International Economic Review*, 6(3), pp. 249-310.
- BACHARACH, M. (1970) - "Biproportional Matrices & Input-Output Change" - Cambridge.
- BACHEM, KORTE (1980) - "Minimum Norm Problems over Transportation Polytopes". *Linear Algebra and Its Applications*, 31, pp. 103-118.
- BACHEM, KORTE (1981) - "Estimating Matrices", *Metrika*, Vol.28, pp. 273-286.
- Balanço Energético Nacional (1981) - Publicação do Ministério das Minas e Energia.
- BENZÉCRI, J.P. et Collaborateurs (1973) - "L'Analyse de Données, tome 2: L'Analyse de Correspondances". Dunod, Paris.
- BEZDEK, R.H. (1984) - "Tests of Three Hypotheses Relating to the Leontief Inpu-Out Model" *Journal of Royal Statistics Society A*, 147, part 3 pp. 449-509.

- BYRON, R.P. (1978) - "The Estimation of Large Social Account Matrices", Journal of Royal Statistics Society A, pp.359-367.
- FRIEDLANDER, D. (1961) - "A Technique for Estimating a Contingency Table, Given the Marginal Total and Some Supplementary Data" - Journal of the Royal Statistical Society A, 124 - pp.412-420.
- GOUVEA, V.H.C. - "Estudo da Estabilidade de Fatores em Análise Fatorial de Correspondencia para Previsão de Matrizes" - Tese para Prof. Titular de Estatística da Universidade Federal Fluminense.
- JOHNSON, NICHERN (1982) - "Applied Multivariate Statistical Analysis", Prentice-Hall.
- KRZANOWSKI, W.J. (1984) - "Principal Component Analysis in the Presence of Group Structure". Applied Statistics, (R.Stat. Soc.), 33 nº 2 - pp.164-168.
- LAWLEY, D.N. (1956) - "Tests of Significance for the Latent Roots of Covariance and Correlation Matrices". Biometrika vol. 43, pp. 128-136.
- LEBART et FENELON (1973) - "Statistique et Informatique Appliquées". Dunod, Paris.
- LE FOLL, Y. et BURTSCHY, B. (1983) - "Représentations Optimales des Matrices Imports - Exports". Revue de

Statistique Appliquée, vol. 31, n° 3, pp. 57-72.

- LEONTIEF, W. (1941) - "The Structure of American Economy - 1919 to 1929". New York.
- MATUSZEWSKI, PITTS, SAWYER (1964) - "Linear Programming Estimates of Changes in Input Coefficients". Canadian Journal of Economics and Political Science, Vol. 30, n° 2, pp. 203-210.
- NIJKAMP, P. e PAELINK, J.H.P. (1974) - "Some methods for Updating Input-Output Tables". Netherlands Economics Institute.
- PAELINCK e WAELBROECK (1963) - "Etude Empirique sur L'Evolution de Coefficients Input-Output". Economie Appliquée, tome 16, n° 1, pp. 81-111.
- SRIVASTAVA, M.S. e KHATRI, C.G. (1979) - "An Introduction to Multivariate Statistics". North Holland.
- STEMMELIN, E. (1977) - "Tableaux d'Echange: Description et Prévision". Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, n° 28.
- STONE, R. MEADE, J.E. e CHAMPERNOWNE D.G. (1942) - "The Precision of National Income Estimate". Rev. Econ. Studies 9 (12) pp. 111-125.

- STONE, R. e BROWN, J.A.C. (1962) - "A Long Term Growth Model for British Economy" in Europe's Future in Figures. North-Holland, London
- TEIXEIRA, J.R. e SILVA, D.C.M. (1978) - "Modernização da Matriz de Input-Output Utilizando Modelos Matemáticos" - Revista Brasileira de Economia 32(1) - pp.141-160.
- THEIL, H. (1961) - "Economic Forecasts and Policy". Amsterdam North-Holland.
- VAN DER PLOEG, F. (1982) - "Reliability and the Adjustment of Sequences of Large Economic Accounting Matrices" - Journal of the Royal Statistics Society A. pp.169-194.