

METODOLOGIA DE EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE FONTE
EM SISTEMAS INTERLIGADOS DE GERAÇÃO HIDROTERMOELÉTRICA

Gerson Couto de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA
DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



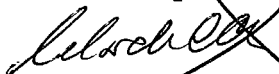
Prof. Sérgio Granville
(Presidente)



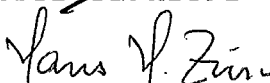
Prof. Nelson Maculan Filho



Dr. Mário Veiga Ferraz Pereira



Prof. Celso Carneiro Ribeiro



Prof. Hans H. Zurn

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1987

OLIVEIRA, GERSON COUTO DE

Metodologia de Expansão da Capacidade de Ponta em Sistemas Interligados de Geração Hidrotermoelétrica (Rio de Janeiro) 1987.

VII, 110 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1987)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

I. Assunto: Planejamento da Expansão de Sistemas de Geração Hidrotermoelétrica.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) pelo apoio e suporte material necessário à realização deste trabalho.

Aos professores Sérgio Granville e Nelson Maculan Filho pela orientação, incentivo e apoio ao meu programa de doutorado.

Aos colegas e amigos Mário Veiga F. Pereira e Sérgio Henrique F. da Cunha pela grande colaboração e participação no desenvolvimento da metodologia.

Ao Departamento de Geração da ELETROBRÁS pela contribuição no estabelecimento das aplicações da metodologia e no financiamento do projeto de desenvolvimento deste trabalho pelo CEPEL.

À Maria Olívia Vasconcelos Luzio por sua paciência e eficiente datilografia.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

METODOLOGIA DE EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE PONTA EM SISTEMAS INTERLIGADOS DE GERAÇÃO HIDROTERMOELÉTRICA

Gerson Couto de Oliveira

Dezembro de 1987

Orientador: Sérgio Granville

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

O planejamento da expansão da capacidade de ponta em sistemas interligados tem por objetivo estabelecer quando e onde deverão ser instalados novos equipamentos de geração e de interligação de forma a garantir um atendimento econômico e confiável dos crescentes requisitos de potência do mercado consumidor. Estes objetivos são em geral conflitantes visto que uma maior confiabilidade só é obtida a custa de investimentos adicionais. Este trabalho apresenta uma metodologia de expansão adequada à sistemas hidrotermoelétricos interligados que incorpora explicitamente restrições probabilísticas de confiabilidade. O trabalho consistiu em elaborar uma extensão de técnicas de decomposição a um contexto probabilístico e no desenvolvimento de algoritmos especializados de solução do problema de expansão probabilística. Exemplos e casos teste com um sistema brasileiro são apresentados e descritos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PEACK CAPACITY EXPANSION METHODOLOGY FOR INTERCONNECTED
HYDROTHERMAL GENERATING SYSTEMS

Gerson Couto de Oliveira

December, 1987

Chairman : Sérgio Granville

Department: Computation and Systems Engineering

Peak capacity expansion planning of interconnected systems aims to establish when and where new generation and interconnection equipments will be installed in order to guarantee the economic and reliable supply of the increasing power needs of the demand. These objectives are in general conflicting, since a greater reliability is only obtained with additional investments. This work presents a methodology for capacity expansion of hydrothermal systems which explicitly incorporates probabilistic reliability constraints. It consisted in the extension of decomposition techniques to a probabilistic environment and the development of specialized algorithms to solve the probabilistic expansion problem. Examples and case studies with a Brazilian system are presented and discussed.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO	1
II.	PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS	4
	II.1 EXPANSÃO PARA ATENDIMENTO DA DEMANDA DE ENERGIA E DA DEMANDA DE PONTA	4
	II.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
III.	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROGRAMA DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE DE PONTA	10
	III.1 EXPANSÃO ESTÁTICA	10
	III.2 EXPANSÃO MULTI-ESTÁGIO (DINÂMICA)	13
IV.	APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA	15
	IV.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS	15
	IV.2 EXTENSÃO PROBABILÍSTICA	25
	IV.3 EXEMPLO	29
V.	APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO AO PROBLEMA DE EXPANSÃO	37
	V.1 SUBPROBLEMA DE OPERAÇÃO-CONFIABILIDADE DE SISTEMAS INTERLIGADOS	38
	V.2 SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO	40
VI.	ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS	42
	VI.1 MODOS DE FALHA DO SISTEMA INTERLIGADO	42
	VI.2 ÍNDICES DE CONFIABILIDADE E SENSIBILIDADES	46
	VI.3 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA	51
	VI.4 MÉTODO DE MONTE CARLO	57
	VI.5 COMPARAÇÕES E CASOS EXEMPLO	72

VI.6	EXTENSÃO DO CÁLCULO DE SENSIBILIDADES PARA OBTENÇÃO DE CORTES DE BENDERS	81
VII.	ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DE SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO	87
VII.1	CASO ESTÁTICO	87
VII.2	CASO DINÂMICO	91
VII.3	HEURÍSTICAS	93
VIII.	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	94
VIII.1	EXPANSÃO ESTÁTICA	95
VIII.2	EXPANSÃO DINÂMICA	96
IX.	CONCLUSÕES	100
	APÊNDICE	103
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA E ADAPTAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA.	
	REFERÊNCIAS	108

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O parque gerador brasileiro é predominantemente hidroelétrico, sendo caracterizado por grandes reservatórios plurianuais existentes nas principais bacias hidrográficas situadas nas regiões norte, nordeste, sudeste e sul do país. O parque térmico tem um peso pequeno na geração média do sistema (13% da geração em 1984), basicamente concentrado nas regiões sul (usinas a carvão) e sudeste (usinas nucleares e óleo). Os sistemas regionais de geração, inicialmente concebidos para atender aos mercados locais, vêm sofrendo um processo de interligação (Sul-Sudeste, Norte-Nordeste), possibilitando a transmissão da potência de aproveitamentos distantes dos centros de cargas regionais (Norte para Nordeste) e também possibilitando tirar partido da complementaridade (ou independência) de regimes hidrológicos entre regiões (Sul e Sudeste).

A expansão do sistema hidrotermoelétrico interligado brasileiro se depara com uma nova realidade: o pequeno potencial hidroelétrico remanescente nas regiões de maior participação na carga total (sudeste, um pouco mais no sul e nordeste), enquanto que há um grande potencial hidroelétrico pouco explorado no norte que, entretanto, está distante dos principais centros de carga. Deste modo, há que se pesar as vantagens das alternativas de construção de usinas mais caras próximas dos centros de carga (térmicas, algumas hidráulicas) contra as vantagens das alternativas de aproveitamento de usinas distantes mais baratas e a transmissão da potência nelas geradas por longas distâncias até os centros de carga.

O planejamento da expansão do sistema interligado é usualmente dividido em duas etapas: expansão de energia (usinas e interligações necessárias ao atendimento da demanda de energia prevista) e expansão de ponta (motorizações adicionais nas usinas e reforços de interligações necessárias ao atendimento da demanda de ponta prevista).

Esta divisão é utilizada para simplificar a abordagem do problema de expansão cuja complexidade é devido às seguintes características:

- i) grande porte: o número de alternativas é expressivo, sendo necessário determinar a sequência em que os investimentos devem ser efetuado ao longo do período de planejamento e as datas de entrada correspondentes;
- ii) não separável: a política de operação das usinas hidroelétricas em um dado estágio é função do custo esperado de operação futura do sistema interligado, visto que o único custo associado à geração hidráulica decorre do custo da geração do parque térmico utilizada no atendimento das demandas previstas no período. Deste modo, a decisão de investimento está condicionada à operação futura das usinas do sistema interligado que, por sua vez, é função das decisões de investimento até o horizonte de planejamento;
- iii) estocástico: a capacidade de produção das usinas hidroelétricas é função do nível de armazenamento dos seus reservatórios que, por sua vez, depende das afluências a cada usina ao longo do período de planejamento. As afluências futuras a cada reservatório não podem ser previstas para intervalos longos, de modo que devem ser tratadas como variáveis aleatórias. Outras aleatoriedades se devem a flutuações nas cargas e a quebras nas unidades geradoras.

O planejamento da expansão da capacidade de ponta em sistemas interligados brasileiros tem sido feito por ajuste de tentativas: cada alternativa de expansão considerada é analisada por um modelo de confiabilidade para verificar os níveis de risco resultantes. Entretanto, o modelo de confiabilidade atualmente utilizado (OLIVEIRA, CUNHA, GOMES (1)) só é capaz de tratar até dois sistemas interligados, não sendo possível considerar simultaneamente as interligações Sul-Sudeste, Sudeste-Norte e Norte-Nordeste. Ademais, o custo

computacional do modelo de confiabilidade impede a análise de um grande número de alternativas, de modo que a obtenção da alternativa de mínimo custo por este procedimento é impraticável.

Neste trabalho, propõe-se formular o problema de expansão da capacidade de ponta (descrito em detalhe no Capítulo II) como um problema de programação estocástica. A formulação é apresentada no Capítulo III, inicialmente no caso de expansão estática e em seguida generalizada para o caso de expansão multi-estágio (dinâmica). No Capítulo IV mostra-se como o método de decomposição de Benders generalizado para o caso estocástico pode ser usado para resolução de problemas de programação estocástica. Em seguida (Capítulo V), apresenta-se a aplicação do método de decomposição ao problema de expansão de ponta, desenvolvendo-se os subproblemas de operação e de investimento resultantes da decomposição. No Capítulo VI, descrevem-se dois métodos de solução do subproblema de operação (análise de confiabilidade) e a derivação do corte de Benders a partir da análise de confiabilidade. Estratégias de solução do subproblemas de investimento são discutidas no Capítulo VII, tanto no caso de expansão estática quanto no de expansão dinâmica.

Experiências computacionais com um programa computacional desenvolvido para implementar os algoritmos propostos são relatados no Capítulo VIII com exemplos de expansão estática e dinâmica para o sistema Sul-Sudeste composto de 5 áreas (regiões). O resultado da aplicação da metodologia proposta aos casos estudados possibilita tirar algumas conclusões que são relatadas no Capítulo IX. Apresenta-se ainda em Apêndice uma alternativa à formulação proposta e o tratamento a ser-lhe dado.

CAPÍTULO II

PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS
HIDROTERMOÉLETRICOS INTERLIGADOSII.1 EXPANSÃO PARA ATENDIMENTO DA DEMANDA DE ENERGIA E
DA DEMANDA DE PONTA

O planejamento da expansão da energia em sistemas interligados visa determinar quais usinas (hidráulicas e térmicas) e quais interligações devem ser construídas a cada estágio do período de estudo com custo atualizado mínimo, atendendo às demandas regionais de energia a um nível de garantia de suprimento pré-fixado. Neste caso, o não atendimento dos mercados previstos decorre da possibilidade de ocorrência de déficits de energia, causados por falta d'água nos reservatórios decorrentes de longos períodos de estiagem e/ou limites de intercâmbio de energia entre regiões. O planejamento da expansão de ponta tem como objetivo determinar quais usinas hidroelétricas devem receber motorizações adicionais e quais interligações devem ser reforçadas a cada estágio do período de estudo com custo atualizado mínimo de modo a atender às demandas regionais de ponta a um nível de garantia de suprimento pré-fixado. A falha no atendimento da ponta não é causada por déficits de energia (previsíveis, que podem durar meses), mas por déficits de potência (redução da disponibilidade de ponta nas usinas), devidos a: perda de queda nos reservatórios por deplecionamento, falhas nas unidades geradoras e limites de intercâmbio de potência entre regiões. As interrupções resultantes destes efeitos são imprevisíveis, de curta duração e, em sua maioria, ocorrem durante as horas de maior demanda.

O desacoplamento do planejamento da expansão nestas duas etapas é justificado pelos efeitos distintos dos fenômenos causadores de déficits de demanda de energia e ponta. Deste modo, o problema de expansão de energia pode ser resolvido primeiramente, decidindo-se os investimentos nas usinas e interligações necessárias ao atendimento das

demandas de energia para os níveis de garantia fixados. Dadas estas decisões, o problema de expansão de ponta é então resolvido de modo a atender os mercados de ponta para os níveis de garantia de ponta fixados.

Tanto o problema de expansão de energia quanto o de ponta são estocásticos, visto que se deseja garantir o atendimento das demandas previstas com um determinado nível de garantia de suprimento. Dadas as incertezas envolvidas (afluências futuras aos reservatórios do sistema, falhas nos equipamentos e flutuações nas cargas), o critério de garantia de suprimento visa criar um compromisso entre o nível de investimento e a qualidade do atendimento das demandas previstas.

O risco de não atendimento da demanda de energia em sistemas hidrotermoelétricos é estimado pela simulação da operação do sistema para diversas hipóteses de sequências de afluências futuras aos reservatórios. Modelos de simulação da operação como o MSSSE/ELETOBRÁS (2) são capazes de avaliar os riscos ao longo do período de estudo para uma alternativa de expansão do sistema.

O método de cálculo do risco de não atendimento da demanda de ponta se vale da simulação energética efetuada para cada condição hidrológica para obter uma amostra de potências unitárias disponíveis nas usinas hidroelétricas em cada estágio do período de estudo (a potência unitária em uma usina hidroelétrica é função do nível de armazenamento do seu reservatório). Um modelo de confiabilidade (CUNHA, OLIVEIRA, GOMES E PEREIRA (3)) é utilizado para calcular o risco para cada evento desta amostra, e o risco global é finalmente calculado tomando-se a média dos riscos calculados da amostra. Este enfoque é utilizado devido ao desacoplamento existente entre operação para energia e ponta: estudos realizados em diversos sistemas (CUNHA, OLIVEIRA, GOMES E PEREIRA (3)) mostram que as falhas em unidades geradoras não são suficientes para alterar a operação de sistemas brasileiros para o atendimento da demanda de energia, de modo que o efeito das falhas na capacidade de atendimento da demanda de ponta pode ser avaliado para cada sequência hidrológica simulada.

A restrição de garantia de suprimento da ponta em

cada estágio é expressa em termos do índice de confiabilidade ser inferior a um critério de planejamento. Os índices mais utilizados em estudos de confiabilidade de ponta são a probabilidade de perda de carga (LOLP) e o valor esperado da demanda não suprida (EUD) do sistema. A restrição de garantia de suprimento também pode ser exigida para o sistema interligado como um todo ou então estabelecer-se uma restrição para cada sistema regional (área).

As demais restrições do problema de expansão de capacidade de ponta incluem datas mínimas de motorizações adicionais e intervalos mínimos entre motorizações adicionais de usinas hidroelétricas: uma usina só pode ser supermotorizada a partir do estágio em que se completou sua motorização definida na etapa de expansão para atendimento das demandas de energia; os intervalos mínimos se devem ao tempo de instalação e testes de uma unidade na usina. Esta classe de restrições também é válida para reforços em interligações: datas mínimas de instalação de incrementos de capacidade face ao cronograma de construção de interligações na etapa de expansão de energia e intervalo mínimo entre instalações de incrementos sucessivos de capacidade de uma interligação.

O plano de expansão da capacidade de ponta deve ter um custo atualizado de investimento mínimo. Os custos esperados de operação térmica precisam ser considerados na expansão para energia, em que a política de operação das térmicas dadas as disponibilidades de geração hidráulica é decidida em função das restrições de garantia de suprimento e dos custos de geração térmica. Como em geral as térmicas do sistema brasileiro são operadas na base e a decisão de ligar térmicas é feita na etapa de operação do sistema para energia, neste trabalho o custo esperado de operação não será incluído na função objetivo do problema de expansão da capacidade de ponta.

II.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os métodos desenvolvidos para expansão da capacidade de ponta de sistemas elétricos são de origem recente, com a característica de terem sido desenvolvidos para sistemas com parque térmico, e considerando geração e carga concentrados em um único sistema. O uso de técnicas de decomposição de Benders na solução do problema de expansão de geração de sistemas térmicos surgiu com NOONAM e GIGLIO (4), que utilizaram uma aproximação determinística para modelar o subproblema de operação e resolvê-lo por programação linear. Uma restrição de confiabilidade foi incluída no subproblema mestre, através de uma aproximação não-linear gaussiana da LOLP. Anteriormente, SCHWEPPE et al (5), e BEGLARI, LAUGHTON (6) já haviam introduzido técnicas de decomposição na solução do problema, utilizando entretanto heurísticas ao invés de cortes de Benders e não havendo portando garantia de convergência. COTÉ (7) apresentou em 1979 um método baseado em decomposição de Benders com subproblema estocástico resolvido por simulação probabilística, e com subproblema de investimento com restrição de confiabilidade que era modelada por uma função não linear ajustada a priori para o sistema em estudo, sem ser atualizada ao longo das iterações de Benders.

Mais recentemente, BLOOM (8) apresentou uma metodologia similar à de COTÉ mas capaz de gerar os coeficientes dos cortes de Benders a partir do modelo de simulação probabilística de BOOTH (9). A versão inicial sofreu diversos aperfeiçoamentos visando torná-la capaz de analisar sistemas térmicos de grande porte e visando também uma modelagem mais realista da variável de decisão (adição de capacidade) por tipo de usina (nuclear, gás, carvão, óleo). Esta modelagem das decisões de investimento em termos de capacidade (variáveis contínuas) visava tornar o subproblema de investimento linear; entretanto a aproximação da restrição de confiabilidade (expressa em termos da EUD do sistema) gerada pelos cortes de Benders resulta em situações de não convexidade. A não convexidade decorre do fato da confiabilidade de uma unidade de 500 MW, por exemplo, ser bastante distinta da confiabilidade de 5 unidades de 100 MW. Embora a economia de escala em termos de custo favoreça a

unidade de 500 MW, a confiabilidade de 5 unidades de 100 MW é maior, sendo essencial que o modelo de confiabilidade utilizado no subproblema de operação represente este efeito e explicitamente o ganho (ou perda) da confiabilidade devido a adição/retirada de unidades geradoras no corte de Benders gerado para cada alternativa de expansão. Este problema foi minorado pela substituição do modelo de simulação probabilística do subproblema de operação por uma modelagem baseada em aproximação de Gram-Charlier (BLOOM, CARAMAMIS e CHARNY, (10)), sem entretanto eliminá-lo totalmente. Isto só se torna possível modelando-se as variáveis de decisão como variáveis 0/1 como apresentado e discutido neste trabalho.

A busca de métodos de menor custo computacional levou PARK, LEE e YOUN (11) a propor simplificações na modelagem de falhas nas unidades geradoras e nas flutuações nas cargas. Usando a hipótese de distribuições gaussianas para ambos, e modelando as decisões de investimento como variáveis contínuas para cada tipo de usina eles elaboraram uma metodologia baseada também em decomposição, em que o subproblema de operação tem solução analítica. O subproblema mestre é modelado como um problema de controle ótimo em que cada restrição de confiabilidade é linearizada e tratada como um corte de Benders, sendo o problema resolvido por algoritmos de programação não linear. Este método resulta ser bem mais eficiente que o de BLOOM, embora a hipótese gaussiana não encontre justificativa para grande número de sistemas, e apresente os mesmos problemas decorrentes de modelar variáveis de adição de capacidade como variáveis contínuas.

Neste trabalho será utilizada uma modelagem mais precisa do subproblema de investimento para o caso de sistemas hidrotermoelétricos com preponderância hidráulica. O subproblema de operação também contempla as especificidades deste tipo de sistema, considerando ainda que o sistema é interligado com limites de intercâmbio de potência entre áreas. As decisões de investimento envolvem não só motorizações adicionais de usinas hidráulicas candidatas à expansão de ponta nas diversas áreas mas também eventuais

reforços de interligações para possibilitar a transmissão de potência de uma área para outra quando isto resultar em uma expansão econômica e confiável. Esta proposta visa a aplicação da metodologia no planejamento da expansão da capacidade de ponta do sistema interligado brasileiro, em que há alternativas de supermotorização de usinas junto aos principais centros de carga conjuntamente com várias opções de supermotorização de usinas distantes dos centros de carga definidas pelo planejamento de expansão de energia do sistema interligado.

CAPITULO III

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE
EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE PONTA

A formulação do problema será inicialmente feita considerando-se uma expansão para um estágio (estático), o que simplifica a notação e facilita o entendimento. Em seguida a formulação é estendida para o caso multi-estágio.

Será utilizada a seguinte notação:

- N - Número de áreas (regiões, subsistemas)
- M - Número de interligações entre áreas
- S - Matriz $N \times M$ de incidência
- I - Conjunto de usinas candidatas à motorização de ponta
- n_i - Número máximo de unidades que podem ser adicionadas na usina $i \in I$
- c_i - Custo de adição de uma unidade na usina $i \in I$
- J - Conjunto de interligações candidatas a reforço
- m_j - Número máximo de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$
- q_j - Custo de um incremento de capacidade na interligação $j \in J$
- U - Critério (nível) de garantia de suprimento aceitável da demanda de ponta
- x_i - Número de adições de unidades na usina $i \in I$
- y_j - Número de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$

III.1 EXPANSÃO ESTÁTICA

Seja $\bar{u}(x,y)$ a função valor esperado da demanda não suprida (EUD) do sistema para a decisão (x,y) , resultado da avaliação de confiabilidade do sistema com as adições (x,y) .

O problema de expansão estática pode ser formulado como:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{j \in J} q_j y_j \quad (\text{III.1})$$

s/a

$$\bar{u}(x,y) \leq U \quad (\text{III.2})$$

$$x_i \in \{0, 1, \dots, n_i\} \quad (\text{III.3})$$

$$y_j \in \{0, 1, \dots, m_j\} \quad (\text{III.4})$$

Restrições adicionais de investimento (por exemplo, restrições financeiras) da forma $Ax + By \geq b$ podem ser também incluídas na formulação (III.1)-(III.4).

A função $\bar{u}(x,y)$ pode ser caracterizada a partir do seguinte problema de programação linear (minimização de déficit no sistema interligado para a condição hidrológica h e nível de demanda ℓ):

$$u^{h\ell}(x,y) = \text{Min} \quad \sum_{i=1}^N r_i \quad (\text{III.5})$$

s/a

$$\sum_{j=1}^M s_{ij} f_j + \sum_{k \in A_i} g_k + r_i = d_i^\ell, \quad i = 1, N \quad (\text{III.6})$$

$$|f_j| \leq F_j(y), \quad j = 1, M \quad (\text{III.7})$$

$$g_k \leq G_k^h(x), \quad k \in A_i, \quad i = 1, N \quad (\text{III.8})$$

$$r_i \leq d_i^\ell, \quad i = 1, N \quad (\text{III.9})$$

onde:

- d_i^{ℓ} - Demanda na área i no nível ℓ
 A_i - Conjunto de usinas na área i
 $F_j(y)$ - Capacidade da interligação j dada a decisão y (suposta sem perda de generalidade não sujeita a falhas)
 $G_k^h(x)$ - Potência disponível na usina k na hidrologia h dada a decisão x (variável aleatória binomial supondo-se um modelo de falhas para unidades geradoras a dois estados)
 f_j - Fluxo na interligação j
 g_k - Geração na usina k
 r_i - Déficit (corte de carga) na área i

A equação (III.5) representa a conservação de potência na área i , e as restrições (III.6) - (III.8) definem os limites nas variáveis do problema. Note-se que sendo $u^{h\ell}(x,y)$ função da variável aleatória $G_k^h(x)$, é também uma v.a.. Denotando por E o operador valor esperado, $E\{u^{h\ell}(x,y)\}$ é a função EUD do sistema para a decisão (x,y) condicionada à hidrologia h e ao nível de carga ℓ . Supondo-se H condições hidrológicas equiprováveis (eventos de uma amostra de potências disponíveis obtida por um modelo de simulação) e representando-se as curvas de carga das áreas com L níveis (cada um com probabilidade α_{ℓ}) pode-se então exprimir a função EUD do sistema para a decisão (x,y) como a média de $E\{u^{h\ell}(x,y)\}$ nas hidrologias e níveis de carga:

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} E\{u^{h\ell}(x,y)\} \quad (\text{III.10})$$

A função $\bar{u}(x,y)$ definida por (III.10) pode ser interpretada como o resultado de um modelo de confiabilidade de sistemas interligados calculado no ponto (x,y) (vide Capítulo VI).

O problema de expansão estática (III.1) - (III.4) é um problema de programação estocástica inteira, que pode ser representado por um processo de decisão em dois estágios: no primeiro obtém-se uma decisão de investimento (x,y) que satisfaz (III.3) - (III.4) (subproblema de investimento); no segundo, avalia-se $\bar{u}(x,y)$ com um modelo de confiabilidade (subproblema de operação) que permite avaliar as consequências da decisão (x,y) em termos da confiabilidade do sistema.

III.2 EXPANSÃO MULTI-ESTÁGIO (DINÂMICA)

Supondo-se que o período de estudo seja dividido em T estágios, a notação anterior é estendida da seguinte forma:

- $c_i(t)$ - Custo atualizado ao estágio inicial de uma unidade da usina $i \in I$
- $q_j(t)$ - Custo atualizado ao estágio inicial de um incremento de capacidade na interligação $j \in J$
- $U(t)$ - Critério de garantia de suprimento para estágio t
- a_i - Data mínima (estágio) para usina $i \in I$
- b_j - Data mínima (estágio) para interligação $j \in J$
- Δa_i - Intervalo mínimo entre adições na usina $i \in I$
- Δb_j - Intervalo mínimo entre incrementos de capacidade na interligação $j \in J$
- $x_i(t)$ - Número de adições de unidades na usina $i \in I$ até o estágio t
- $y_j(t)$ - Número de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$ até o estágio t

A função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$, "valor esperado da demanda não suprida no estágio t para a decisão $(x(t), y(t))$ " é análoga à definida em III.1.

O problema de expansão dinâmica pode ser formulado como:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} c_i(t)(x_i(t) - x_i(t-1)) + \sum_{j \in J} q_j(t)(y_j(t) - y_j(t-1)) \right) \quad (\text{III.11})$$

$$\text{s/a} \quad \bar{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t), \quad t=1, T \quad (\text{III.12})$$

$$x_i(t + \Delta a_i) - x_i(t) \leq 1, \quad i \in I; t = a_i, T \quad (\text{III.13})$$

$$y_j(t + \Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, \quad j \in J; t = b_j, T \quad (\text{III.14})$$

$$x_i(t-1) - x_i(t) \leq 0, \quad i \in I; t = a_i + 1, T \quad (\text{III.15})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, \quad j \in J; t = b_j + 1, T \quad (\text{III.16})$$

$$x_i(t) \in \{0, \dots, n_i\}, \quad i \in I; t = a_i, T \quad (\text{III.17})$$

$$y_j(t) \in \{0, \dots, m_j\}, \quad j \in J; t = b_j, T \quad (\text{III.18})$$

As restrições (III.13)-(III.14) representam os intervalos mínimos para instalação de unidades geradoras e reforços de interligações. As restrições (III.15)-(III.16) garantem que as decisões de investimentos são crescentes no tempo.

O programa (III.11) - (III.18) de programação estocástica inteira também pode ser representado por um processo de decisão em dois estágios: no primeiro (subproblema de investimento), escolhe-se uma solução $(x(t), y(t))$, $t=1, T$ que satisfaz (III.13)-(III.18); no segundo (subproblema de operação) avalia-se as consequências da decisão $(x(t), y(t))$, $t=1, T$ em termos da confiabilidade do sistema em cada estágio. Nota-se que o subproblema de operação corresponderá a T análises independentes de confiabilidade.

CAPITULO IV

APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA

Técnicas de decomposição são usualmente empregadas em problemas de programação matemática de grande porte para tirar partido da estrutura do problema, que é simplificada quando se fixam determinadas variáveis ou se relaxam algumas restrições. Os subproblemas resultantes podem então ser resolvidos por algoritmos específicos, tornando a obtenção da solução mais eficiente. Uma destas técnicas é a Decomposição de Benders (BENDERS (21)), que será inicialmente apresentada em sua forma linear determinística. Em seguida, será feita uma extensão para o caso em que o subproblema resultante da decomposição é estocástico, e o corte de Benders para este caso será derivado. Um exemplo é apresentado para ilustrar o uso da Decomposição de Benders em um problema estocástico simples.

IV.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Seja o problema linear da forma

$$\text{Min } cx + dy \quad (\text{IV.1})$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.2})$$

$$Ex + Fy \geq g \quad (\text{IV.3})$$

Pode-se associar às variáveis x as decisões do tipo investimento, sendo cx o custo de investimento e as restrições (IV.2) aquelas que só envolvem variáveis de investimento tais como restrições financeiras, período de construção, etc. As variáveis y se referem a decisões de operação, com custo dy , sendo que (IV.3) representa as restrições nas variáveis x e y .

O problema (IV.1) - (IV.3) pode ser representado como um processo de decisão em dois estágios:

- i) no primeiro estágio, escolhe-se uma decisão de investimento x^* viável, isto é, tal que $Ax^* \geq b$.
- ii) no segundo estágio, dada a decisão x^* , escolhe-se a decisão de operação mais eficiente, isto é, resolve-se o subproblema

$$\text{Min } dy \quad (IV.4)$$

s/a

$$Fy \geq g - Ex^* \quad (IV.5)$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de investimento e operação. A figura IV.1 abaixo ilustra o processo de decisão.

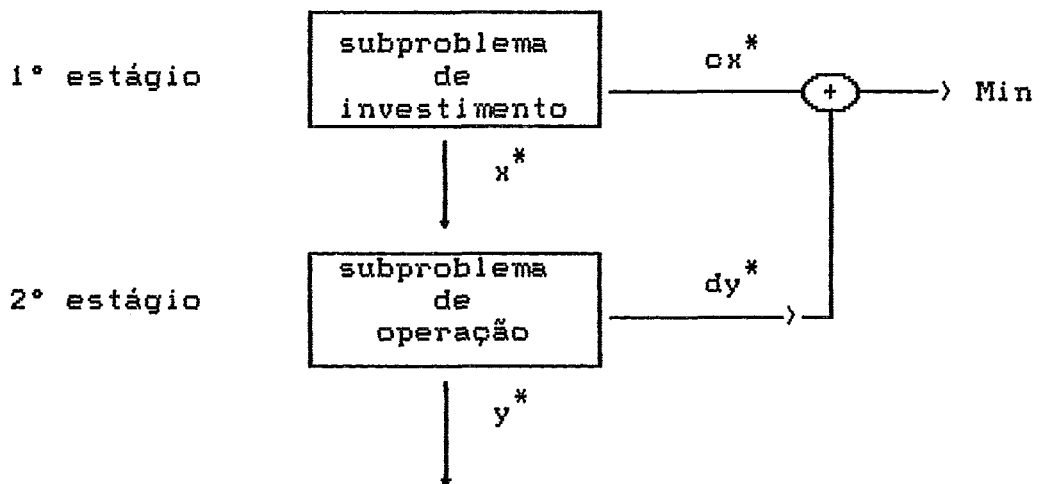


FIGURA IV.1 - PROCESSO DE DECISÕES EM DOIS ESTÁGIOS

A decomposição é baseada nas seguintes observações:

- o custo de operação dy^* , onde y^* é a solução de (IV.4) - (IV.5), pode ser visto como uma função $u(x)$ da decisão de investimento x , isto é,

$$u(x) = \text{Min } dy \quad (\text{IV.6})$$

$$\begin{aligned} & \text{s/a} \\ & Fy \geq g - Ex \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

- o problema (IV.1) - (IV.3) pode ser então reescrito em função das variáveis de investimento:

$$\text{Min } cx + u(x) \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{aligned} & \text{s/a} \\ & Ax \geq b \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

onde $u(x)$ é a solução de (IV.6) - (IV.7) para qualquer x .

A função $u(x)$ informa as consequências da decisão x em termos do custo de operação. Se for disponível, o problema original pode ser resolvido sem representar explicitamente o subproblema de segundo estágio.

A Decomposição de Benders é uma técnica para construir a função $u(x)$ com a precisão desejada a partir da solução do subproblema do segundo estágio conforme o esquema da Figura IV.2.

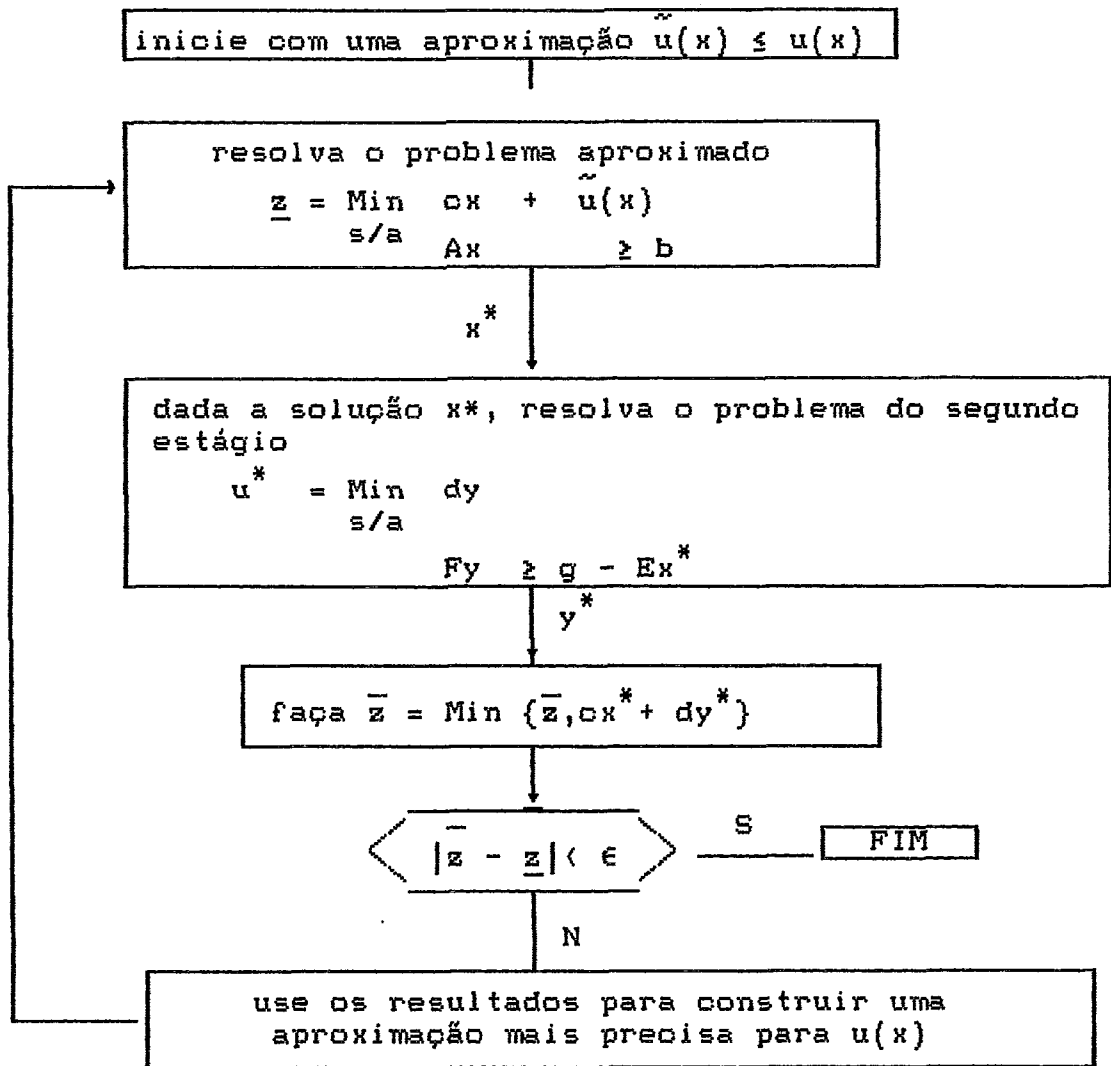


FIGURA IV.2 - ESQUEMA DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

A aproximação $\tilde{u}(x)$ pode ser construída da seguinte forma. O problema dual de (IV.6) - (IV.7) pode ser escrito como

$$\max_{s/a} \quad \pi \quad (g - Ex) \quad (IV.10)$$

$$\pi \quad F = d \quad (IV.11)$$

onde π é um vetor linha de multiplicadores simplex associados à restrição (IV.7). Sem perda de generalidade, pode-se supor que (IV.10) - (IV.11) sempre tem solução. Note-se que a região viável de (IV.11) independe da variável de decisão do

primeiro estágio x . Esta região é um poliedro convexo, podendo ser caracterizada pelos seus vértices, ou seja, pelo conjunto $\Pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$. O problema (IV.10) - (IV.11) poderia então ser resolvido por enumeração:

$$\max \quad \pi(g - Ex) \quad (IV.12)$$

s/a

$$\pi \in \Pi \quad (IV.13)$$

Alternativamente, pode-se reescrever o problema acima como

$$\min \quad \alpha \quad (IV.14)$$

s/a

$$\alpha \geq \pi^i (g - Ex), \quad i=1, \dots, p \quad (IV.15)$$

onde α é uma variável escalar. Sendo α maior que cada valor de $\pi^i (g - Ex)$, será então maior que o seu máximo. Como a função objetivo é minimizar, a restrição será atendida na igualdade. Pelo teorema da dualidade, as soluções de (IV.6) - (IV.7) e (IV.10) - (IV.11) são iguais no ótimo e pode-se concluir que as restrições $\alpha \geq \pi^i (g - Ex)$ definem a função $u(x)$, que será uma função convexa definida por restrições lineares. No caso em que x é um escalar, $u(x)$ teria a forma apresentada na Figura IV.3.

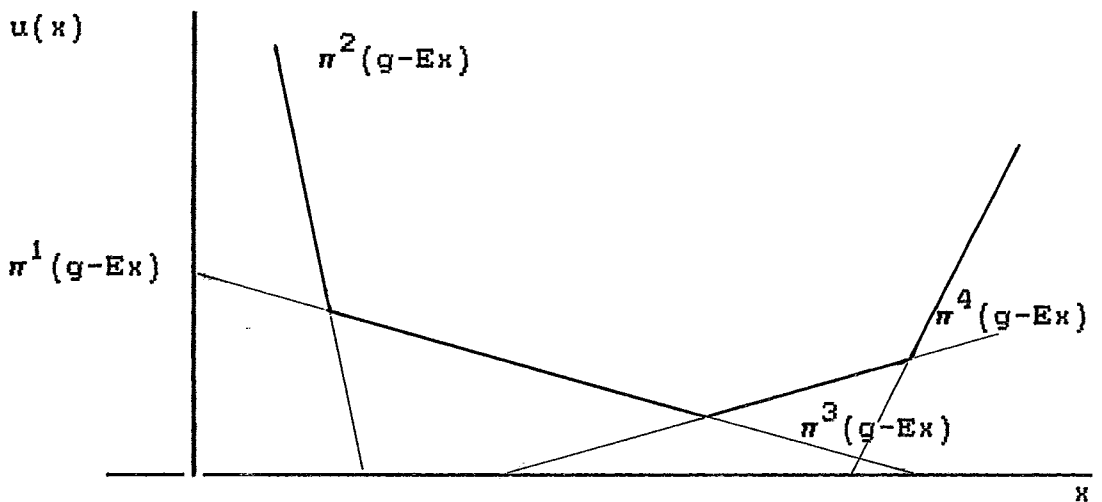


FIGURA IV.3 - FUNÇÃO $u(x)$ PARA x ESCALAR

Pode-se agora reescrever o problema (IV.1) - (IV.3) como

$$\text{Min } cx + \alpha \quad (IV.16)$$

$$\text{s/a } Ax \geq b \quad (IV.17)$$

$$\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0, \quad i=1, \dots, p \quad (IV.18)$$

O problema acima é escrito em termos das variáveis x e α , e embora possa ter um número muito grande de restrições, só poucas delas estarão ativas na solução ótima. Isto sugere o uso de relaxação, onde restrições do tipo $\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0$ são sucessivamente incluídas no problema relaxado à medida que novos vértices são obtidos.

O algoritmo de decomposição de Benders é apresentado a seguir.

Passo 0

Inicialize $k=1$, defina $S=\emptyset$, $\bar{Z} = \infty$, $\epsilon =$ tolerância para convergência.

Passo 1

Resolva o problema relaxado (problema do 1º estágio)

$$\text{Min } cx + \alpha \quad (IV.19)$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (IV.20)$$

$$\alpha \in S \quad (IV.21)$$

Passo 2

Seja (x^k, α^k) a solução ótima do problema (IV.19) - (IV.21).

Note-se que $\underline{Z} = cx^k + \alpha^k$ é um limite inferior da solução ótima, já que o problema é uma relaxação de (IV.1) - (IV.3).

Passo 3

Resolva o problema do 2º estágio dada a solução x^k .

$$u^k = \text{Min} \quad dy \quad (\text{IV.22})$$

s/a

$$Fy \geq g - Ex^k \quad (\text{IV.23})$$

Passo 4

Seja y^k a solução ótima de (IV.22) - (IV.23). O par (x^k, y^k) é uma solução viável de (IV.1) - (IV.3), embora não necessariamente ótima. Faça $\bar{Z} = \text{Min} (\bar{Z}, cx^k + dy^k)$.

Passo 5

Se $|\bar{Z} - \underline{Z}| < \epsilon$, a solução ótima é o par (x, y) associado ao limite superior \bar{Z} . Caso contrário, atualize a estimativa de $u(x)$, adicionando a restrição $\pi^k(g - Ex) - \alpha \leq 0$ ao conjunto S , onde π^k é o vetor de multiplicadores ótimos associados a restrição (IV.23) na solução ótima de (IV.22) - (IV.23).

Passo 6

Faça $k=k+1$, vá para o passo 1.

O algoritmo converge em um número finito de passos já que o limite inferior entre duas iterações sucessivas deve aumentar (o problema (IV.19) - (IV.21) é cada vez mais restrito), e o limite superior não aumenta por construção.

A restrição $\pi^k (g - Ex^k) - \alpha \leq 0$ é chamada corte de Benders (de otimalidade). Ela pode ser reescrita da seguinte forma: da igualdade entre soluções ótimas primal e dual de (IV.22) - (IV.23), tem-se que

$$\begin{aligned} u^k &= \pi^k (g - Ex^k), \text{ ou seja} \\ \pi^k g &= u^k + \pi^k Ex^k \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Substituindo (IV.24) na expressão do corte, tem-se a forma alternativa do corte de otimalidade

$$u^k + \pi^k E(x^k - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.25})$$

Suponha agora que uma restrição do tipo

$$ry \leq h \quad (\text{IV.26})$$

foi incluída no problema (IV.1)-(IV.3) onde r é um vetor linha e h um escalar, e que dada uma decisão x^* do problema do 1° estágio a restrição acima torna o problema do segundo estágio inviável. Neste caso o custo dy não interessa e pode-se definir como função objetivo do problema do 2° estágio a minimização da violação da restrição (IV.21), resultando o novo subproblema

$$u' = \text{Min } ry \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{s/a } Fy \geq g - Ex^* \quad (\text{IV.28})$$

Pode-se ver que:

se $u' \leq h$ o subproblema do segundo estágio com a restrição (IV.26) é viável

se $u' > h$ o subproblema do segundo estágio com a restrição (IV.26) é inviável

No último caso, pode-se traduzir a inviabilidade para o problema do primeiro estágio em termos de um corte de viabilidade, qual seja

$$u' + \pi' E(x^* - x) \leq h, \quad (\text{IV.29})$$

onde π' é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.28). Note que neste caso h é uma constante e não uma variável.

O esquema da Decomposição de Benders para o caso de inviabilidades é apresentado na Figura IV.4.

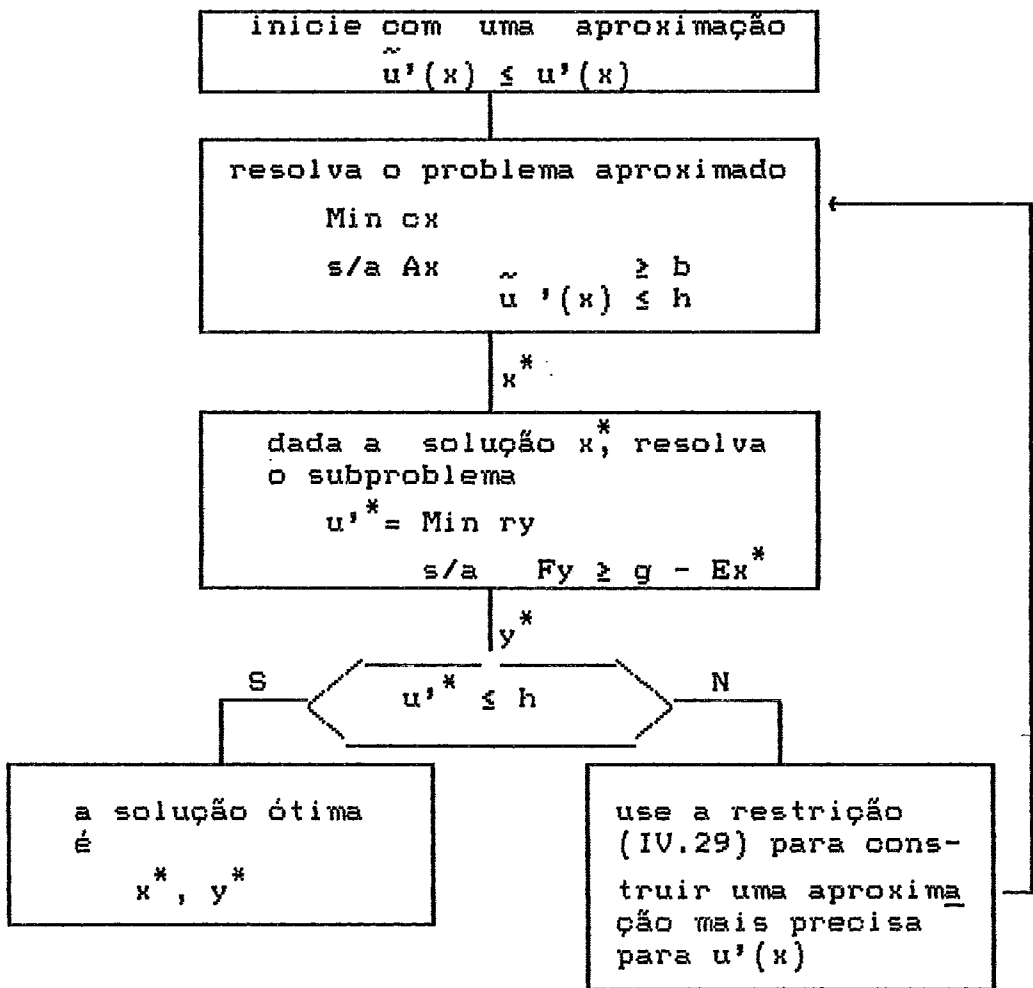


FIGURA IV.4 - ESQUEMA DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM CORTE DE VIABILIDADE

Note-se que neste caso a primeira solução viável encontrada será ótima, já que o objetivo é minimizar cx garantindo que o problema do segundo estágio é viável. É possível combinar os dois esquemas de decomposição apresentados, gerando-se um corte de otimalidade (IV.25) no caso do subproblema do 2º estágio ser viável ou um corte de viabilidade (IV.29) caso contrário.

IV.2 EXTENSÃO PROBABILÍSTICA

Suponha agora que o problema do segundo estágio envolva variáveis aleatórias discretas. Para ilustrar a extensão da decomposição de Benders para este caso, será apresentado um exemplo em que o vetor g e a matriz E podem assumir dois valores g_1, E_1 e g_2, E_2 , com probabilidades p_1 e p_2 . O problema do segundo estágio agora é de minimizar o custo esperado de operação $p_1 dy_1 + p_2 dy_2$. O problema (IV.1) - (IV.3) para este exemplo é

$$\text{Min } cx + p_1 dy_1 + p_2 dy_2 \quad (\text{IV.30})$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.31})$$

$$E_1 x + Fy_1 \geq g_1 \quad (\text{IV.32})$$

$$E_2 x + Fy_2 \geq g_2 \quad (\text{IV.33})$$

O problema do segundo estágio envolve agora dois cenários, e o processo de decisão associado ao problema acima pode ser ilustrado pelo esquema da Figura IV.5.

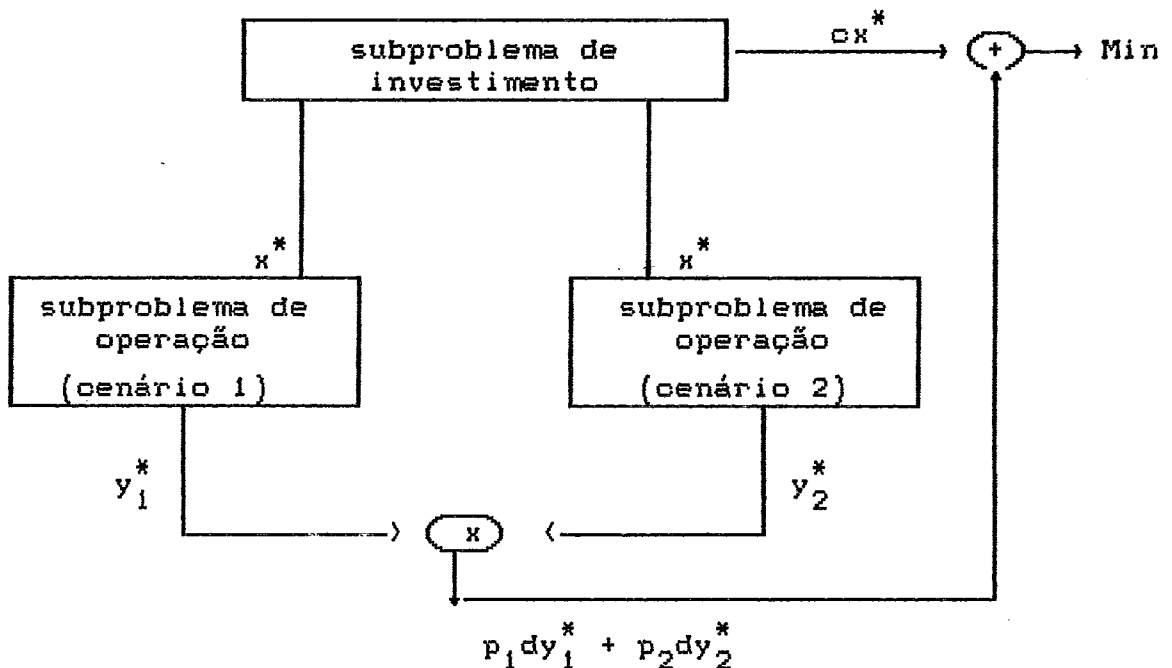


FIGURA IV.5 - PROCESSO DE DECISÃO EM DOIS ESTÁGIOS - EXTENSÃO PROBABILÍSTICA

Note que o subproblema do segundo estágio pode ser decomposto em problemas independentes para cada cenário $i = 1, 2$, dada a decisão x do primeiro estágio:

$$u_i(x) = \text{Min}_{s/a} \quad dy_i \quad (\text{IV.34})$$

$$Fy_i \geq g_i - E_i x \quad (\text{IV.35})$$

O problema original pode ser agora expresso em termos das variáveis de decisão x e da função $\bar{u}(x)$ definida como

$$\bar{u}(x) = \sum_i p_i u_i(x) \quad (\text{IV.36})$$

Analogamente ao caso determinístico, o problema de decisão estocástico pode ser reescrito como

$$\text{Min}_{s/a} \quad cx + \bar{u}(x) \quad (\text{IV.37})$$

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.38})$$

A derivação do corte de Benders para o caso estocástico segue a mesma argumentação usada na derivação do corte (IV.25). Se u_i é o valor da solução ótima do problema do segundo estágio no cenário i e π_i é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.35) (dada a decisão x^* do problema do primeiro estágio), o corte (IV.25) para este cenário seria

$$u_i + \pi_i E_i (x^* - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.39})$$

Tomando-se o valor esperado em u e πE para todos os cenários possíveis, obtém-se o corte de otimalidade no caso estocástico:

$$\bar{u} + \bar{w} (x^* - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.40})$$

onde

$$\bar{u} = \sum_i p_i u_i \quad (\text{V.41})$$

$$\bar{w} = \sum_i p_i (\pi E)_i \quad (\text{IV.42})$$

O algoritmo de Decomposição de Benders para o caso estocástico é similar ao caso determinístico, exceto que no passo 3 são calculados \bar{u} e \bar{w} que são usados para gerar o corte no passo 5. Cabe notar que não se deve necessariamente resolver o problema do segundo estágio para cada cenário para obter \bar{u} e \bar{w} . Dependendo da estrutura do problema do segundo estágio é possível calcular \bar{u} e \bar{w} diretamente.

A consideração de inviabilidades no caso estocástico corresponde a associar um valor esperado à restrição (IV.26) que é incluída no problema (IV.30)-(IV.33). O problema do segundo estágio neste caso também pode ser decomposto em problemas independentes para cada cenário, dada a decisão x^* do primeiro estágio:

$$u'_i = \text{Min}_{s/a} \quad ry \quad (\text{IV.43})$$

$$Fy \geq g_i - E_i x^* \quad (\text{IV.44})$$

Note-se que a função objetivo agora é minimizar a violação da restrição (IV.26) e pode-se mostrar que o corte de viabilidade no caso estocástico é dado por

$$\bar{u}' + \bar{w}' (x^* - x) \leq h \quad (\text{IV.45})$$

onde

$$\bar{u}' = \sum_i p_i u_i' , \quad (\text{IV.46})$$

$$\bar{w}' = \sum_i p_i (\pi' E)_i , \quad (\text{IV.47})$$

π_i' é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.44) no cenário i , p_i é a probabilidade de ocorrência de (g_i, E_i) e h agora corresponde ao termo independente da restrição (IV.26) ao tomar-se o valor esperado.

IV.3 EXEMPLO

Suponha dois tipos de unidade de produção com as seguintes características:

Tipo	Capacidade	Taxa de Falha	Custo Unitário	N° Máximo de Unidades
a	$c_a = 3$	$\lambda_a = 0.2$	3	2
b	$c_b = 2$	$\lambda_b = 0.1$	2	2

Deseja-se obter a solução de menor custo capaz de atender uma demanda de valor 4 e tal que o valor esperado do déficit no atendimento seja não superior a 0.2.

Define-se duas variáveis 0/1 para cada tipo, de modo que o número de adições de unidades de cada tipo seja expresso como

$$x_a = x_{a1} + x_{a2} \quad (\text{tipo a})$$

$$x_b = x_{b1} + x_{b2} \quad (\text{tipo b})$$

O vetor de decisões é dado então por

$$x = \begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \\ x_{b1} \\ x_{b2} \end{bmatrix}$$

O problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2} \\ \text{s/a} & \\ & -x_{a1} + x_{a2} \leq 0 \\ & \phantom{-x_{a1} + x_{a2}} -x_{b1} + x_{b2} \leq 0 \\ & \bar{u}(x) \leq 0.2 \\ & x \in \{0,1\} \end{array}$$

onde:

$$\bar{u}(x) = \sum_{\xi} p_{\xi} u_{\xi}(x),$$

p_{ξ} é a probabilidade de ocorrência do cenário ξ ,

$$\begin{array}{ll} u_{\xi}(x) = \min & s \\ \text{s/a} & \\ & y+s = 4 \\ & y \leq e_{\xi} x, \end{array}$$

$e_{\xi} = (e_{\xi}^1, e_{\xi}^2, e_{\xi}^3, e_{\xi}^4)$ é uma realização vetor aleatório de capacidades $e = (e^1, e^2, e^3, e^4)$.

As duas primeiras restrições do problema são do tipo $Ax \geq b$ e visam evitar a consideração de soluções idênticas para cada tipo de unidade. A última restrição é probabilística, sendo função de $u_{\xi}(x)$ (mínimo déficits \leq em cada cenário ξ de capacidade dada a decisão de investimento x).

As componentes do vetor aleatório \underline{e} são v.a. independentes entre si definidas abaixo:

$$(\forall i = 1, 2) \quad e^{a_i} = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda_a, \\ 3, & \text{com probabilidade } (1-\lambda_a) \end{cases}$$

$$(\forall j = 1, 2) \quad e^{b_j} = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda_b, \\ 2, & \text{com probabilidade } (1-\lambda_b) \end{cases}$$

Se para a solução x^* do problema do primeiro estágio, resultar que o valor esperado $\bar{u}(x^*)$ é superior a 0.2, gera-se o corte de viabilidade

$$\bar{u} + \bar{w} (x^* - x) \leq 0.2,$$

onde

$$\bar{u} = \bar{u}(x^*)$$

$$\bar{w} = \sum_{\xi} p_{\xi} \pi_{\xi} e_{\xi},$$

e π_{ξ} é o multiplicador ótimo da restrição de desigualdade do problema do segundo estágio no cenário ξ .

A aplicação da Decomposição de Benders para este exemplo é apresentada a seguir.

Iteração 0

i) problema do 1º estágio:

$$\begin{aligned} \text{Min } & 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2} \\ \text{s/a} & \\ & -x_{a1} + x_{a2} \leq 0 \\ & \phantom{-x_{a1} + x_{a2}} - x_{b1} + x_{b2} \leq 0 \\ & x_{a1}, x_{a2}, x_{b1}, x_{b2} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

solução: $x^* = (0,0,0,0)$, $cx^* = 0$

ii) problema do 2º estágio:

$$\begin{aligned} u_{\xi} = \text{Min } & s \\ \text{s/a} & \\ & y + s = 4 \\ & y \leq 0, \end{aligned}$$

cuja solução é $u_{\xi}^* = 4$, $\pi_{\xi}^* = 1$, $\forall \xi$.

Tomando-se o valor esperado, tem-se que:

$$\bar{u}^* = 4,$$

$$\bar{w}^* = (3(1-\lambda_a), 3(1-\lambda_a), 2(1-\lambda_b), 2(1-\lambda_b)) = (2.4, 2.4, 1.8, 1.8)$$

iii) corte de viabilidade:

$$4 + 2.4(0-x_{a1}) + 2.4(0-x_{a2}) + 1.8(0-x_{b1}) + 1.8(0-x_{b2}) \leq 0.2$$

ou

$$2.4x_{a1} + 2.4x_{a2} + 1.8x_{b1} + 1.8x_{b2} \geq 3.8$$

Iteração 1

i) Problema do 1º estágio

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min} & 3x_{a1} & + & 3x_{a2} & + & 2x_{b1} & + & 2x_{b2} & & \\
 \text{s/a} & & & & & & & & & \\
 & -x_{a1} & + & x_{a2} & & & & & & \leq 0 \\
 & & & & - & x_{b1} & + & x_{b2} & & \leq 0 \\
 & 2.4x_{a1} & + & 2.4x_{a2} & + & 1.8x_{b1} & + & 1.8x_{b2} & & \geq 3.8 \\
 & x_{a1} & , & x_{a2} & , & x_{b1} & , & x_{b2} & \in & (0,1)
 \end{array}$$

$$\text{solução: } x^1 = (1, 0, 1, 0) , \text{ } cx^1 = 5$$

ii) Problema do 2º estágio

$$\begin{array}{rcl}
 u_{\xi}(x^1) = \text{Min} & s \\
 \text{s/a} & \\
 y + s = 4 & \\
 y \leq e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} &
 \end{array}$$

solução para cada cenário:

e_{ξ}^{a1}	e_{ξ}^{b1}	$e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1}$	Prob.	u_{ξ}^1	π_{ξ}^1
0	0	0	$\lambda_a \lambda_b$	4	1
0	2	2	$\lambda_a (1-\lambda_b)$	2	1
3	0	3	$\lambda_b (1-\lambda_a)$	1	1
3	2	5	$(1-\lambda_a)(1-\lambda_b)$	0	0

Tomando-se o valor esperado obtém-se:

$$\bar{u}^{-1} = 4\lambda_a\lambda_b + 2\lambda_a(1-\lambda_b) + 1\lambda_b(1-\lambda_a) = \lambda_a\lambda_b + 2\lambda_a + \lambda_b = 0.52 > 0.2$$

$$\bar{w}_{a1}^{-1} = 3\lambda_b(1-\lambda_a)$$

$$= 0.24$$

$$\bar{w}_{a2}^{-1} = (\lambda_a\lambda_b + \lambda_a(1-\lambda_b) + \lambda_b(1-\lambda_a)) \cdot 3(1-\lambda_a)$$

$$= 0.67$$

$$\bar{w}_{b1}^{-1} = 2\lambda_a(1-\lambda_b)$$

$$= 0.36$$

$$\bar{w}_{b2}^{-1} = (\lambda_a\lambda_b + \lambda_a(1-\lambda_a) + \lambda_b(1-\lambda_a)) \cdot 2(1-\lambda_b)$$

$$= 0.50$$

iii) Corte de viabilidade

$$0.52 + 0.24(1-x_{a1}) + 0.67(0-x_{a2}) + 0.36(1-x_{b1}) + 0.50(0-x_{b2}) \leq 0.2$$

ou

$$0.24x_{a1} + 0.67x_{a2} + 0.36x_{b1} + 0.50x_{b2} \geq 0.92$$

Iteração 2

i) Problema do 1º estágio:

$$\text{Min} \quad 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2}$$

s/a

$$-x_{a1} + x_{a2} \leq 0$$

$$-x_{b1} + x_{b2} \leq 0$$

$$2.4x_{a1} + 2.4x_{a2} + 1.8x_{b1} + 1.8x_{b2} \geq 3.8$$

$$0.24x_{a1} + 0.67x_{a2} + 0.36x_{b1} + 0.50x_{b2} \geq 0.92$$

$$x_{a1}, x_{a2}, x_{b1}, x_{b2} \in \{0, 1\}$$

$$\text{solução } x^2 = (1, 0, 1, 1), \quad cx^2 = 7$$

ii) Problema do 2º estágio:

$$u_{\xi}(x^2) = \text{Min} \quad s$$

s/a

$$y + s = 4$$

$$y \leq e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} + e_{\xi}^{b2}$$

solução para cada cenário:

a_1 e_{ξ}^1	b_1 e_{ξ}^1	b_2 e_{ξ}^2	$e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} + e_{\xi}^{b2}$	Prob.	u_{ξ}^2	π_{ξ}^2
0	0	0	0	$\lambda_a \lambda_b^2$	4	1
0	0	2	2	$\lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b)$	2	1
0	2	0	2	$\lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b)$	2	1
0	2	2	4	$\lambda_a (1-\lambda_b)^2$	0	0
3	0	0	3	$(1-\lambda_a) \lambda_b^2$	1	1
3	0	2	5	$(1-\lambda_a) \lambda_b (1-\lambda_b)$	0	0
2	2	0	5	$(1-\lambda_a) \lambda_b (1-\lambda_b)$	0	0
3	2	2	7	$(1-\lambda_a) (1-\lambda_b)^2$	0	0

Tomando-se o valor esperado, obtém-se

$$\bar{u}^2 = 4\lambda_a \lambda_b^2 + \lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b) + 1\lambda_b^2 (1-\lambda_a) = \lambda_b (4\lambda_a + \lambda_b - \lambda_a \lambda_b) = 0.09 < 0.2$$

logo $x^2 = (1, 0, 1, 1)$ é a solução ótima do problema.

A tabela IV.1 apresenta a evolução do método de decomposição para o exemplo.

Decisões Possíveis				Custo	Corte de Viabilidade	
x_{a_1}	x_{a_2}	x_{b_1}	x_{b_2}		Iteração 1	Iteração 2
0	0	0	0	0	(0)	-
0	0	1	0	2	(1.8)	-
0	0	1	1	4	(3.6)	-
1	0	0	0	3	(2.4)	-
1	0	1	0	5	4.2*	(0.60)
1	0	1	1	7	6.0	1.10*
1	1	0	0	6	4.8	(0.91)
1	1	1	0	8	6.6	1.41
1	1	1	1	10	8.4	1.77
RHS do corte					3.8	0.92

TABELA IV.1 - MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO APLICADO AO CASO EXEMPLO

() indica decisão inviável no corte de viabilidade;
 * indica solução ótima do problema do 1º estágio na iteração.

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO AO PROBLEMA DE EXPANSÃO

A representação do problema de expansão como um processo de decisão em dois estágios como apresentado no Capítulo III aponta para a possibilidade do uso da decomposição de Benders (extendida para o caso probabilístico) para a solução do problema.

O algoritmo geral de decomposição de Benders aplicado ao problema de expansão de ponta dinâmico é dada pelos seguintes passos:

- i) sejam as aproximações $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$, $t=1, T$ tais que

$$\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq \bar{u}(t, x(t), y(t)), t=1, T;$$
- ii) resolva o problema (III.11) - (III.18) com as aproximações com $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$, $t=1, T$ nas restrições (III.12) (subproblema de investimento);
- iii) dada a solução $(x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ do subproblema de investimento, obtenha $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ (subproblema de operação)
- iv) se $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) > U(t)$ para algum $t=1, T$, vá para o passo (v); caso contrário, pare: $(x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ é a solução ótima;
- v) use a solução do subproblema de operação para obter novas aproximações (cortes de Benders) e volte ao passo (ii). Cada corte de Benders gerado no passo (v) é um corte de viabilidade, de modo que no passo (iv) a

primeira solução viável encontrada é a solução ótima (caso haja solução viável).

V.1 SUBPROBLEMA DE OPERAÇÃO-CONFIABILIDADE EM SISTEMA INTERLIGADOS

O subproblema de operação da decomposição do problema de expansão de ponta corresponde à avaliação da confiabilidade do sistema interligado para cada estágio t do período de estudo, expressa em termos do valor esperado da demanda não suprida no sistema para a decisão $(x^*(t), y^*(t))$ de investimento, $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$.

A solução do subproblema de operação (vide algoritmo no Capítulo VI) para cada estágio t deve ser testada contra o critério de confiabilidade $U(t)$, $t=1, T$. Caso em algum estágio t haja violação de critério, um corte de Benders da forma $\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t)$ deve ser gerado. Para a formulação (III.11) - (III.18), a aproximação $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x(t), y(t)) = & \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) + \sum_{i \in I} \bar{w}_i(t) (x_i^*(t) - x_i(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y_j^*(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (V.1)$$

A expressão (V.1) representa uma linearização da função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ em torno do valor $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ que é calculado pelo modelo de confiabilidade. Na seção VI.6 apresenta-se a extensão deste modelo para o cálculo dos coeficientes $\bar{w}_i(t)$, $i \in I$ e $\bar{v}_j(t)$, $j \in J$. O coeficiente $\bar{w}_i(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de capacidade de ponta na usina $i \in I$.

Similarmente, $\bar{v}_j(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de capacidade na interligação $j \in J$.

Os cortes da forma $\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t)$ que são gerados sucessivamente ao longo do método de Benders permitem construir aproximações cada vez mais precisas da função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$. Em geral, não é possível construir analiticamente $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ exceto para casos muito simples, como no exemplo do Capítulo IV.3.

Denotando por $u_{\xi}^{h\ell}(t, x(t), y(t))$ uma realização da v.a. $u^{h\ell}(t, x(t), y(t))$ definida por (III.5)-(III.9), pode-se ver que esta função é convexa com relação a $x(t)$ e $y(t)$ pois estas variáveis estão nos termos independentes de (III.5)-(III.9). Para que a probabilidade de cada cenário ξ seja bem definida, cada variável de decisão $x_i(t)$ é redefinida em termos de variáveis $x_{iK}(t) \in \{0, 1\}$ de modo similar ao exemplo do Capítulo IV.3:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} x_{iK}(t) \quad (V.2)$$

Deste modo, a função

$$\bar{u}(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} E \{ u^{h\ell}(t, x(t), y(t)) \} \quad (V.3)$$

também é convexa. A aproximação de (V.3) em torno do ponto $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$, dada por (V.1) é reescrita a seguir em termos das variáveis $x_{iK}(t)$ e $y_j(t)$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x(t), y(t)) = & \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{iK}(t) (x_{iK}^*(t) - x_{iK}(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y_j^*(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (V.4)$$

onde $\bar{w}_{ik}(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de uma unidade na usina $i \in I$. Note-se que a variável de decisão $\bar{y}_j(t)$ não precisa ser redefinida já que nas interligações não se consideram falhas.

V.2 SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO

O problema (III.11)-(III.18) com as aproximações (V.1) na restrição (III.12) será primeiramente reescrito em termos das variáveis de investimento (V.2), da seguinte forma

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j(t) \right) \quad (\text{V.5})$$

s/a

$$\begin{aligned} & \bar{u}(t, x^m(t), y^m(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{ik}^m(t) (x_{ik}^m(t) - x_{ik}(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j^m(t) (y_j^m(t) - y_j(t)) \leq U(t), \quad m = 1, M; \quad t = 1, T \quad (\text{V.6}) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t + \Delta a_i) - x_{ik}(t)) \leq 1, \quad i \in I; \quad t = a_i, T \quad (\text{V.7})$$

$$y_j(t + \Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, \quad j \in J; \quad t = b_j, T \quad (\text{V.8})$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t-1) - x_{ik}(t)) \leq 0, \quad i \in I; \quad t = a_i + 1, T \quad (\text{V.9})$$

$$x_{ik}(t) - x_{ik-1}(t) \leq 0, \quad i \in I; \quad k = 2, n_i; \quad t = a_i, T \quad (\text{V.10})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, \quad j \in J; \quad t = b_j + 1, T \quad (\text{V.11})$$

$$x_{ik}(t) \in \{0,1\}, i \in I; k=1, n_i; t=a_i, T \quad (V.12)$$

$$y_j(t) \in \{0,1, \dots, m_j\}; j \in J; t=b_j, T \quad (V.13)$$

onde M é o número de cortes de Benders já gerados, $\Delta c_i(t) = c_i(t) - c_i(t+1)$, $\Delta q_j(t) = q_j(t) - q_j(t+1)$, $t=1, \dots, T-1$ e $\Delta c_i(T) = c_i(T)$, $\Delta q_j(T) = q_j(T)$.

A restrição (V.10) foi acrescentada para garantir que as decisões de adição das unidades geradoras de um usina candidata sejam consideradas em uma mesma sequência, evitando a repetição de combinações idênticas de unidades.

O subproblema de investimento (V.5)-(V.13) é um problema de programação inteira de grande porte devido ao seu caráter dinâmico. Note-se que a relaxação contínua deste subproblema não faz sentido para o subproblema de operação visto que as capacidades de geração são v.a. e, portanto, suas distribuições de probabilidades só são definidas para um número inteiro de unidades geradoras por usina. O acoplamento entre estágios deve-se às restrições (V.7), (V.8) (intervalo mínimo entre adições de unidades e reforços de interligações) e (V.9), (V.11) (decisões de investimento não decrescentes no tempo). Outra característica importante é que a cada geração de um corte de Benders, a solução ótima do subproblema na iteração anterior se torna inviável na nova iteração, já que os cortes gerados são de viabilidade. Assim, a cada iteração de Benders a busca da solução do subproblema de investimento não pode tomar partido da solução do subproblema na iteração anterior. Em princípio, poderia-se utilizar um algoritmo do tipo "Branch and Bound" para resolver cada subproblema de investimento. No Capítulo VII discutem-se algumas estratégias de solução do subproblema de investimento que visam reduzir o esforço computacional. No Capítulo VIII são apresentados alguns resultados computacionais obtidos pela aplicação destas estratégias que foram testadas utilizando o programa XMIP de "Branch and Bound" (SINGHAL (19)).

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS
INTERLIGADOS

O sistema CONFGER de análise de confiabilidade de geração desenvolvido por CUNHA, OLIVEIRA, GOMES e PEREIRA (12) para sistemas hidrotermoelétricos representa o primeiro esforço de tratamento de sistema hidrotermoelétricos interligados (no máximo dois sistemas), onde técnicas de simulação foram combinadas com as tradicionais técnicas analíticas desenvolvidas para sistemas térmicos para calcular índices de confiabilidade. Posteriormente, a técnica de decomposição de espaço de estados para análise de confiabilidade de grafos com arcos de capacidade estocástica desenvolvida por DOULLIEZ e JAMOULLE (13) foi adaptada e combinada com técnicas de simulação por OLIVEIRA, CUNHA e PEREIRA (14), gerando o modelo MULTIAR de análise de sistemas hidrotermoelétricos interligados. Entretanto, a técnica de decomposição em espaço de estados necessita um esforço computacional muito alto para estimar com razoável precisão os índices, o que levou os autores citados a desenvolver um método de Monte Carlo (15) baseado na caracterização dos modos de falha do sistema (vide VI.1). Esta caracterização também motivou OLIVEIRA, CUNHA e PEREIRA (16) a desenvolverem um método misto analítico/simulação denominado de integração direta (vide VI.3). O método de Monte Carlo também foi adaptado e aperfeiçoado utilizando técnicas de redução de variância para aplicação no planejamento de expansão de ponta e está descrito em VI.4.

VI.1 MODOS DE FALHAS DO SISTEMA INTERLIGADO

A função $u^{h\ell}$ (mínimo corte de carga no sistema interligado para a condição hidrológica h e nível de demanda ℓ) foi definida em (III.1) como a solução do problema de

programação linear (III.5) - (III.9). A este problema está associado um grafo capacitado cujos nós são as N áreas mais um nó fonte \underline{S} e um nó destino \underline{D} . Os arcos do grafo são as M interligações entre áreas, mais um arco entre o nó \underline{S} e cada nó (área) com capacidade dada pela soma das capacidades de geração de suas usinas na hidrologia h , e mais um arco entre o nó \underline{D} e cada nó (área) com capacidade igual a sua carga para o nível ℓ de demanda.

A figura abaixo representa o grafo associado ao sistema interligado mais simples (2 áreas), com as capacidades associadas aos arcos.

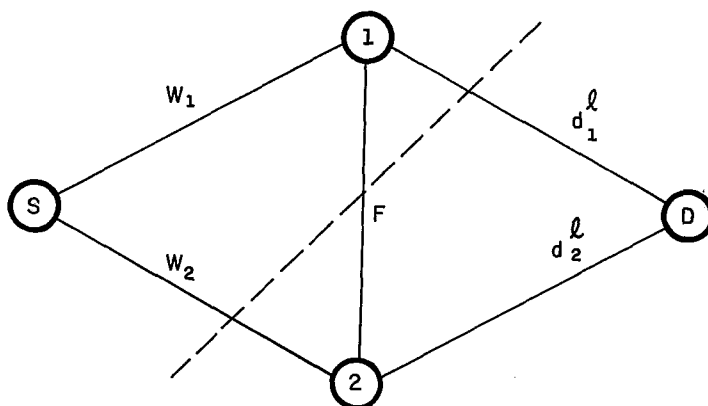


FIGURA VI.1 - GRAFO ASSOCIADO A UM SISTEMA INTERLIGADO DE 2 ÁREAS

É fácil verificar que $u^{h\ell}$ é dado pela diferença entre a demanda total $\sum_{i=1}^N d_i^{\ell}$ do sistema no nível ℓ e o fluxo máximo entre \underline{S} e \underline{D} . O problema do fluxo máximo é um problema linear cujo dual corresponde a determinar o corte de mínima capacidade entre \underline{S} e \underline{D} . Um corte entre \underline{S} e \underline{D} é uma partição do conjunto de nós em dois subconjuntos, um contendo o nó \underline{S} e o outro o nó \underline{D} . Sua capacidade é dada pela soma das capacidades dos arcos que ligam nós de um conjunto ao outro.

O arco (S,i) tem capacidade dada pela v.a.

$$W_i^h = \sum_{k \in A_i} G_k^h, \quad i = 1, N \quad (VI.1)$$

Supondo-se que um modelo a dois estados para cada unidade geradora (operação/falha) e que as falhas de geradores são independentes, a distribuição de probabilidades da v.a. W_i^h é dada pela convolução das distribuições de probabilidades das v.a. $G_k^h, k \in A_i$.

O teorema do fluxo máximo - corte mínimo (FORD, FULKERSON (17)) afirma que o valor do fluxo máximo de \underline{S} a \underline{D} é igual à capacidade do corte mínimo entre \underline{S} e \underline{D} . Este corte é o "gargalo" do grafo. O teorema garante também que os arcos do corte mínimo estão saturados, isto é, seus fluxos estão nos seus limites de capacidade. Consequentemente, qualquer área i "à esquerda" do corte mínimo tem sua demanda atendida (seu arco (i,D) está saturado), estando numa região "segura". Se "à direita" do corte só estiver o nó \underline{D} , o fluxo máximo é igual à demanda total e não há déficit. Caso contrário, os nós "à direita" do corte mínimo constituem a região insegura onde se concentra o corte de carga.

Denotando por ω_i^h uma realização de v.a. $W_i^h, i=1, N$; dados $\omega^h = (\omega_1^h, \dots, \omega_N^h), F = (F_1, \dots, F_M)$ e $d^\ell = (d_1^\ell, \dots, d_N^\ell)$ diz-se que o estado (ω^h, d^ℓ, F) é aceitável se não há déficit (o corte mínimo não tem nenhuma área "à direita") e inaceitável caso contrário. Pode-se ver então que cada estado inaceitável corresponderá a uma das $2^N - 1$ possíveis partições distintas do conjunto de nós que são chamadas de modos de falha do sistema interligado. Cada modo de falha corresponde a uma combinação diferente de áreas na região insegura.

Para se caracterizar uma partição de índice $k=1, \dots, 2^N$, seja a função indicadora

$$\phi_k(j) = \begin{cases} 0, & \text{se os nós terminais do arco } j \text{ estão no mesmo} \\ & \text{subconjunto da partição índice } k. \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

A capacidade do corte associado à partição de índice $k=1, \dots, 2^N$ para o estado (ω^h, d^e, F) pode ser expressa como

$$C_k(\omega^h, d^e, F) = \sum_{j=1}^N \omega_j^h \phi_k(j) + \sum_{j=1}^N d_j^e \phi_k(j) + \sum_{j=1}^M F_j \phi_k(j) \quad (\text{VI.3})$$

Por exemplo, o corte assinalado na Figura VI.1 tem capacidade $\omega_2^h + d_1^e + F$.

O corte de índice k será mínimo se

$$C_k(\omega^h, d^e, F) \leq C_i(\omega^h, d^e, F), \quad \forall i = 1, \dots, 2^N, \quad i \neq k \quad (\text{VI.4})$$

Dado \underline{F} e fixados o nível \underline{e} de demanda e a condição hidrológica \underline{h} , (VI.4) caracteriza os estados do modo de falha índice $k=1, \dots, 2^N-1$. Pode-se então particionar o espaço amostral Ω^h em subconjuntos disjuntos:

$$\Omega^h = \Omega_1^{he} \cup \dots \cup \Omega_{2^N}^{he} \quad (\text{VI.5})$$

onde

$$\Omega_k^{he} = \left\{ \omega^h \in \Omega^h \mid \begin{array}{l} C_k(\omega^h, d^e, F) \leq C_i(\omega^h, d^e, F), i=1, \dots, k-1 \\ C_k(\omega^h, d^e, F) < C_j(\omega^h, d^e, F), j=k+1, \dots, 2^N \end{array} \right\} \quad (VI.6)$$

Por convenção, define-se o conjunto $\Omega_{2^N}^{he}$ como aquele constituído de estados aceitáveis, e o conjunto Ω_k^{he} aquele constituído dos estados inaceitáveis no modo de falha de índice $k=1, \dots, 2^N-1$.

Cada subconjunto Ω_k^{he} é um poliedro convexo no espaço Ω^h . Esta caracterização possibilita exprimir os índices de confiabilidade a partir da análise probabilística destes subconjuntos, como será descrito a seguir.

IV.2 ÍNDICES DE CONFIABILIDADE E SENSIBILIDADES

Denotando por $p_i(\cdot)$ a distribuição de probabilidades de $W_i^h, i=1, N$ para uma dada condição hidrológica h , pela hipótese de independência das falhas de geradores resulta que

$$p(\omega^h) = \prod_{i=1}^N p_i(\omega_i^h) \quad (VI.7)$$

onde $p(\cdot)$ denota a distribuição de probabilidades do vetor aleatório W^h .

Como a partição (VI.7) é disjunta, tem-se que para qualquer nível de demanda $\underline{\ell}$

$$\sum_{k=1}^{2^N} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} = 1 \quad (\text{VI.8})$$

onde

$$\Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} = \sum_{\omega^h \in \Omega_k^{h\ell}} p(\omega^h) \quad (\text{VI.9})$$

Excluindo-se o conjunto $\Omega_{2^N}^{h\ell}$ de estados aceitáveis, tem-se que

$$\text{LOLP}^{h\ell} = \sum_{k=1}^{2^N-1} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} \quad (\text{VI.10})$$

Como as H condições hidrológicas são equiprováveis e cada nível $\underline{\ell}$ de demanda tem probabilidade α_ℓ , pode-se calcular a LOLP do sistema interligado como:

$$\text{LOLP} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \text{LOLP}^{h\ell} \quad (\text{VI.11})$$

O valor esperado do corte de carga para os estados inaceitáveis em todos os modos de falha é dado por

$$\text{EUD}^{h\ell} = \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \left\{ \sum_{i=1}^N d_i^\ell - C_k(\omega^h, d^\ell, F) \right\} \quad (\text{VI.12})$$

onde $E_k^{h\ell}$ denota o operador valor esperado restrito a $\omega^h \in \Omega_k^{h\ell}$.

A expressão (VI.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \text{EUD}^{h\ell} &= \left(\sum_{i=1}^N d_i^\ell \right) \sum_{k=1}^{2^N-1} \text{Pr}(\Omega_k^{h\ell}) - \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \{C_k(\omega^h, d^\ell, F)\} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N d_i^\ell \right) \text{LOLP}^{h\ell} - \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \{C_k(\omega^h, d^\ell, F)\} \quad (\text{VI.13}) \end{aligned}$$

Analogamente ao caso da LOLP, a EUD do sistema interligado é dada por

$$\text{EUD} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \text{EUD}^{h\ell} \quad (\text{VI.14})$$

Pelo teorema do fluxo máximo - corte mínimo, qualquer arco do corte mínimo está saturado de modo que para qualquer estado (ω^h, d^ℓ, F) e para qualquer subconjunto $\Omega_k^{h\ell}$,

$$- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} = -\phi_k(j) \quad , k=1, \dots, 2^N \quad (\text{VI.15})$$

onde a_j denota a capacidade do arco j do grafo e $\phi_k(j)$ é definido em (VI.2).

Aplicando-se o operador $E_k^{h\ell}$ a (VI.15), resulta que

$$E_k^{h\ell} \left(- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} \right) = -\phi_k(j) \text{Pr}(\Omega_k^{h\ell}) \quad (\text{VI.16})$$

Somando-se (VI.16) para todos os modos de falha, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \left(- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} \right) = - \sum_{k=1}^{2^N-1} \phi_k(j) \text{Pr}(\Omega_k^{h\ell}) \quad (\text{VI.17})$$

Usando-se (VI.13), a derivada parcial de $EUD^{h\ell}$ em relação a a_j é dada então por:

$$\frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j} = \begin{cases} LOLP^{h\ell} - \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \phi_k(j) Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}, & \text{se o arco } j \text{ é um} \\ & \text{"arco de demanda"}. \\ \\ - \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \phi_k(j) Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sensibilidade de EUD com relação a variações incrementais na capacidade do arco j do grafo é dada então por

$$\frac{\partial EUD}{\partial a_j} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} \frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j} \quad (VI.19)$$

Índices de risco (LOLP) por área podem ser também obtidos se for definido o protocolo de corte de carga do sistema interligado para estados inaceitáveis. Os protocolos mais conhecidos são: prioridades, repartição de riscos e repartição de reservas. O primeiro define a sequência de áreas em que deve-se obrigatoriamente efetuar o mínimo de carga de cada estado inaceitável. O protocolo de repartição de riscos assume que as áreas "à direita" do corte mínimo devem sofrer corte de carga visto que estão na "região insegura", mesmo que eventualmente uma destas áreas tenha reserva (geração menos carga) positiva. O protocolo repartição de reservas só considera como áreas em corte de carga aquelas áreas na região insegura com reserva negativa. Pode-se notar que na política de repartição de reservas uma área só se beneficia com sua interligação ao sistema, enquanto que isto já não é válido para a política de repartição de riscos. A política de prioridades é muito dependente da política adotada em cada sistema não sendo possível tirar conclusões gerais. Cabe lembrar entretanto que

