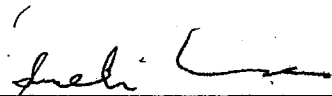


# SÍNTESE DE REDES NEURONAIS COM APLICAÇÕES À REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO E À OTIMIZAÇÃO

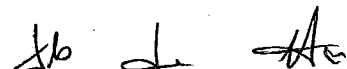
*Luís Alfredo Vidal de Carvalho*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Sueli Bandeira Teixeira Mendes, Ph.D.  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Luiz Bevilacqua, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doris Ferraz de Aragon, L.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1989

**CARVALHO, LUÍS ALFREDO VIDAL DE**

**Síntese de Redes Neurais com Aplicações à Representação do Conhecimento e à Otimização [ Rio de Janeiro ] 1989**

**IX, 132 p. 29,7 cm ( COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1989 )**

**Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE**

**1 . Neurocomputação 2 . Conexionismo 3 . Redes Neurais I . COPPE/UFRJ II . Título ( Série ).**



## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas, por sua amizade e profissionalismo, contribuíram, em diferentes épocas, para a realização deste trabalho, sendo um prazer expressar por elas meu sentimento de agradecimento.

Inicialmente, é preciso agradecer ao **Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ** pelo apoio integral fornecido ao longo dos quatro anos de realização de meu curso de doutoramento, especialmente aos amigos e professores **Luís Carlos Martins** e **José Herskovits Norman**, que lançaram os alicerces desta obra, e **Antônio MacDowell de Figueiredo**, que garantiu seu prosseguimento mesmo diante de grandes obstáculos.

É impossível esquecer o carinho e orientação dos professores **Carlos Eduardo Guinle Rocha Miranda** e **Ricardo Gattass**, coordenadores do **Programa Avançado em Neurociências (PAN - UFRJ)**, que merecem meu sincero agradecimento e admiração.

O paciente trabalho de revisão ortográfica realizado por meu pai, **Dr. Alfredo Fernandes de Carvalho**, e o auxílio na utilização dos recursos computacionais do **Laboratório de Computação do Programa de Engenharia Mecânica**, fornecido pelo engenheiro **Carlos Araken Bonifácio Coelho**, também devem ser lembrados e agradecidos.

Finalmente, o agradecimento aos meus orientadores **Sueli Bandeira Teixeira Mendes** e **Valmir Carneiro Barbosa** está implícito em nosso relacionamento diário, significando que o final desta tese é o início de novas etapas de trabalho conjunto.



Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.).

SÍNTESE DE REDES NEURONAIS COM APLICAÇÕES  
À REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO  
E À OTIMIZAÇÃO

*Luís Alfredo Vidal de Carvalho*

Março de 1989

Orientadores: Sueli Bandeira Teixeira Mendes

Valmir Carneiro Barbosa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O cérebro humano é composto de uma densa e extensa rede de neurônios capaz de executar complexas tarefas computacionais, muitas das quais impossíveis de simulação eficiente nos computadores atualmente utilizados. Através da modelagem matemática das funções do neurônio é possível a análise das propriedades das redes neuronais, onde interessantes fenômenos, ausentes na célula nervosa individualmente, surgem do comportamento coletivo destes elementos. O estudo deste sistema, inicialmente dirigido às questões da Neurobiologia, logo despertou a atenção dos cientistas da Computação, cujo interesse é definir um novo modelo computacional com desempenho superior às máquinas conhecidas, ou seja, mais um esforço no projeto das "máquinas inteligentes".

Nesta tese são apresentados alguns novos e interessantes resultados, basicamente relacionados a um tipo específico de sistema neuronal conhecido como rede neuronal de Hopfield. Inicialmente, são estabelecidas certas propriedades do comportamento dinâmico desta rede neuronal que têm íntima relação com a representação do conhecimento humano nestes sistemas, esboçando-se, assim, uma teoria para tal fim.

O processo de projeto, ou síntese, de redes neuronais para a execução de tarefas pré-determinadas — uma das maneiras de promover o aprendizado — é visualizado como um problema de otimização, onde os critérios de síntese definidos permitem a escolha de redes neuronais mais adaptadas às situações desejadas pelo projetista. O método do Resfriamento Simulado (“Simulated Annealing”) é utilizado na solução do problema da síntese e vários exemplos são apresentados. Finalmente, é sintetizada uma rede neuronal capaz de determinar soluções viáveis para o importante Problema do Caixeiro Viajante e, proposta uma heurística de simulação probabilística, o sistema neuronal determina boas soluções para o referido problema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

NEURAL NETWORK SYNTHESIS WITH APPLICATIONS  
TO KNOWLEDGE REPRESENTATION  
AND TO OPTIMIZATION

*Luís Alfredo Vidal de Carvalho*

March 1989

Thesis Supervisors: Sueli Bandeira Teixeira Mendes

Valmir Carneiro Barbosa

Department: Systems Engineering and Computer Science

Brains are composed of billions of neurons tied together in a network that can execute interesting computational tasks and which normally are not efficiently simulated in our electronic computers. Modeling the functions of a neuron gives us insight to the analysis of neural networks whose properties, not necessarily present in the nervous cell alone, emerge from the collective behavior of the population. At the beginning, neural networks were a central question in Neurobiology, but soon the subject called the attention of computer scientists, whose goal is to design a high performance "intelligent machine".

This work brings new results related to a type of neural systems known as Hopfield's Neural Networks. Initially, its dynamic characteristics are extracted and their relation to Knowledge Representation is observed. Then, the design, or synthesis, of neural networks that perform pre-defined tasks ( one type of learning ) is defined as a minimization problem where synthesis criteria allow us to choose neural systems better adapted to specific situations. The Simulated Annealing method is used to solve the synthesis problem and many examples are shown.

Finally, a neural network that finds feasible solutions to the Traveling Salesman Problem is synthesized and, with the help of a probabilistic simulation procedure, the neural system finds good solutions to this problem.

## ÍNDICE

### Capítulo I Introdução

§I.1 – <i>Uma Visão Histórica</i> .....	1
§I.2 – <i>As Contribuições Desta Tese</i> .....	3
§I.3 – <i>A Organização do Texto</i> .....	5

### Capítulo II Redes Neurais

§II.1 – <i>O Sistema Nervoso</i> .....	7
§II.2 – <i>Neurocomputação</i> .....	11
§II.3 – <i>O Modelo de Hopfield</i> .....	18

### Capítulo III Aprendizado em Redes Neurais

§III.1 – <i>O Conceito de Aprendizado</i> .....	23
§III.2 – <i>Regras de Aprendizado</i> .....	24
§III.3 – <i>Métodos de Síntese</i> .....	29

### Capítulo IV Critérios de Síntese

§IV.1 – <i>Conceitos e Definições</i> .....	35
§IV.2 – <i>Critérios Operacionais</i> .....	63
§IV.3 – <i>Critérios Sintáticos</i> .....	65
§IV.4 – <i>Critérios Semânticos</i> .....	67

## Capítulo V

### O Método Estocástico de Síntese

§V.1 – <i>A Simulação de Sistemas Termodinâmicos</i> .....	71
§V.2 – <i>O Resfriamento Simulado na Síntese de Redes Neurais</i> ..	76
§V.3 – <i>Aplicação do Método de Síntese</i> .....	80

## Capítulo VI

### Redes Neurais e Otimização

§VI.1 – <i>O Problema do Caixeiro Viajante</i> .....	110
§VI.2 – <i>A Heurística de Simulação Probabilística</i> .....	118

## Capítulo VII

### Análise dos Resultados

§VII.1 – <i>Conclusões e Trabalhos Futuros</i> .....	124
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	126

# Capítulo I

## Introdução

### § I.1 - *Uma Visão Histórica*

Muitos são os mistérios que ao longo dos milênios merecem a meditação e preocupação da humanidade por intermédio de seus pesquisadores e filósofos. Do cosmos, infinitamente grande, às partículas elementares, infinitamente pequenas, talvez a questão mais intrigante com que o ser pensante se depara em seu mundo físico palpável esteja dentro de si próprio, e seja o cérebro humano; origem única da curiosidade científica e capaz de desvendar muitas verdades ocultas, mostra-se, porém, pouco eficiente na sua auto-explicação.

Na busca por uma resposta, Anaxágoras estabeleceu a dualidade cérebro-mente, afirmando que os pensamentos, sentimentos e desejos não têm origem em qualquer órgão humano, mas sim em uma entidade não-física inexplicável. Posteriormente, Platão, confirmando esta teoria, manteve aberta a possibilidade de sobrevivência da personalidade humana após a morte corporal. Aristóteles, preocupado com as relações funcionais entre o corpo e a mente, afirmou que apenas o intelecto tem origem metafísica, sendo todos os outros produtos da mente gerados no corpo físico e utilizados para o seu controle. As teorias do dualismo Grego resistiram às muitas investidas de estudiosos até a Idade Moderna, quando Descartes, paradoxalmente, estabeleceu que a natureza é um sistema físico fechado onde todos os fenômenos são plenamente explicáveis por leis mecanicistas, com exceção da mente humana cuja substância é imaterial. Surgiram, então, os Fenomenologistas, que questionavam Descartes pois, um elemento imaterial, atuando e controlando o corpo físico, quebraria o Princípio da Conservação da Energia deste mundo material. Diante desta insolúvel questão, os Behavioristas negaram a existência de processos mentais, pois em sua teoria, todo comportamento humano é o resultado direto e determinado de estímulos do meio-ambiente. Com o desenvolvimento tecnológico posterior à Revolução Industrial, biólogos passaram a ter acesso a instrumentos e técnicas mais precisas de experimentação, culminando na localização de áreas do cérebro responsáveis por funções controladoras, motoras e sensoriais, o que, aliada à Teoria Psicanalítica de Freud, enfraqueceu o pensamento

## Behaviorista e o dualismo Grego.

Em meados do nosso século surgiram os primeiros trabalhos que relacionavam os fenômenos mentais à Eletro-química, na tentativa de reduzir a Psicologia à Física. McCULLOCH [1], em 1943, modelou matematicamente o comportamento de um neurônio e demonstrou que, mesmo este simplificado modelo, era capaz de executar complexas ações quando conectado com outros elementos semelhantes. Anos mais tarde, em 1947, PITTS [2] criou redes com os neurônios de McCulloch capazes de realizar pequenas tarefas cognitivas de reconhecimento de padrões visuais e auditivos; enquanto HEBB [3] definiu uma Teoria Neurofisiológica do Comportamento, cuja grande contribuição foi uma afirmação especulativa sobre a maneira como o aprendizado se processa a nível celular. LASHLEY [4], em 1950, buscou explicações sobre os registros da memória humana, ou engramas, defendendo a tese de que o conhecimento é armazenado no córtex cerebral de maneira distribuída, ou seja, que não existem neurônios responsáveis pela memorização de fatos específicos.

Um dos mais importantes trabalhos já publicados sobre o comportamento das redes neuronais é devido a ROSENBLATT [5] que em seu modelo neuronal reconhecedor de padrões visuais, Perceptrons, estabeleceu um procedimento através do qual o aprendizado pode ser obtido. SELFRIDGE [6], logo após Rosenblatt, demonstrou a importância do paralelismo temporal no reconhecimento de padrões; enquanto MINSKY [7] estudando as limitações dos Perceptrons provocou forte redução das pesquisas na área, felizmente retomadas em meados dos anos setenta com vigor e interesse fortalecidos. Tal renascimento se deveu às decepções de cientistas da Computação e psicólogos na simulação da inteligência através dos computadores eletrônicos, pois, apesar da enorme velocidade de cálculo destas máquinas, simples tarefas cognitivas não são passíveis de simulação e as poucas simuláveis consomem tempo muito superior ao dispendido pelo ser humano.

Foram GROSSBERG [8] e ANDERSON [9] os primeiros a notar este fato e propor um novo modelo computacional onde, ao invés do processamento seqüencial e centralizado dos computadores eletrônicos, uma população de neurônios conectados entre si, funcionando simultaneamente e sem a presença de elementos centralizadores seria mais competente na simulação dos fenômenos mentais. Para

tal sistema, é grande a importância das conexões entre os neurônios, pois representam sua “memória” ou “inteligência”, sendo, então, chamados modelos conexionistas [10]. Muitos são os pesquisadores que, a partir do início desta década, se dedicam ao desenvolvimento das Teorias Conexionistas e, entre eles, destacamos HOPFIELD [11–16] e HINTON [17–20] cujas contribuições são de grande importância.

Cinquenta anos após a primeira modelagem matemática de um neurônio, quase nada sabemos a respeito desta complexa rede neuronal que é o cérebro humano e, ao que parece, permaneceremos ainda por algum tempo desconhecendo a origem e localização dos pensamentos, dos sentimentos e da personalidade humana. Anaxágoras continua, hoje, tão certo ou tão errado quanto há dois mil e quinhentos anos atrás.

### § I.2 - *As Contribuições Desta Tese*

Estudaremos detalhadamente no Capítulo III que as redes neuronais são capazes de executar pequenas tarefas de associação entre entidades, desde que as conexões entre os neurônios sejam ajustadas para tal fim. Este procedimento de ajuste, denominado aprendizado, pode ser realizado através de um método de síntese que, a grosso modo, é uma seqüência de projeto de uma rede neuronal diante de um conjunto de restrições e especificações. Métodos formais de síntese apenas existem para modelos neuronais simples, cuja aplicação é praticamente nenhuma; sendo, inicialmente, o objetivo deste trabalho a determinação de um método geral de síntese para redes neuronais. Ao longo de nossa pesquisa, encontramos obstáculos que nos impediram de atingir a meta desejada mas, em contrapartida, forneceram subsídios para o estabelecimento dos interessantes resultados descritos a seguir.

#### i) *Caracterização do comportamento das redes neuronais de Hopfield e esboço de uma teoria de representação do conhecimento:*

O estudo de um modelo conexionista específico, conhecido como rede neuronal de Hopfield, possibilitou a determinação de propriedades do seu comportamento dinâmico com estreitas relações com os conceitos usuais das teorias de representação do conhecimento. Desta forma, foi possível a construção de um



arcabouço para uma teoria de representação do conhecimento em redes neuronais.

ii) *Determinação de um método de síntese para as redes neuronais de Hopfield:*

Definindo e equacionando matematicamente o problema da síntese de redes neuronais de Hopfield, percebemos que é possível a existência de várias redes neuronais equivalentes, capazes de executar a mesma tarefa de aprendizado. Sendo assim, torna-se interessante procurar critérios através dos quais seja possível a determinação de redes neuronais mais adaptadas a situações pré-determinadas pelo projetista do sistema neuronal. A síntese de redes neuronais de Hopfield é, então, definida como um problema de minimização onde os critérios de síntese têm importante papel, sendo o Método do Resfriamento Simulado, revisado neste texto, utilizado para sua solução.

iii) *Síntese de uma rede neuronal de Hopfield capaz de gerar soluções viáveis para o Problema do Caixeiro Viajante:*

Qualquer rede neuronal de Hopfield, ao ser excitada, evolui dinamicamente por um período de tempo finito até alcançar uma posição estável na qual permanece enquanto não é novamente ativada. Nesta evolução, o sistema neuronal diminui o valor de uma certa função, denominada energia computacional, até atingir um de seus mínimos locais.

Ao associarmos as posições estáveis da rede neuronal com soluções viáveis de um problema de minimização e sua energia computacional ao objetivo do problema, sintetizamos um sistema neuronal que determina soluções para o referido problema de minimização.

A síntese de uma rede neuronal de Hopfield capaz de determinar soluções viáveis para o importante Problema do Caixeiro Viajante é um dos resultados apresentados neste trabalho.

iv) *Proposição de uma heurística de simulação das redes neuronais de Hopfield para a determinação do mínimo global de sua energia computacional e posterior aplicação à solução do Problema do Caixeiro Viajante:*

Em analogia com um tipo de rede neuronal, conhecida como Máquina de Boltzmann, capaz de determinar o mínimo global de sua função de energia computacional, propomos uma heurística de simulação para as redes neuronais de

Hopfield aqui tratadas de forma que tal mínimo seja atingido. No modelo definido não é imposto qualquer tipo de restrição ao comportamento simultâneo dos neurônios da rede neuronal.

Esta heurística é, então, aplicada à rede neuronal de Hopfield capaz de determinar soluções viáveis para o Problema do Caixeiro Viajante e boas soluções para este problema são encontradas.

### § 1.3 - *A Organização do Texto*

Este trabalho está dividido em sete capítulos dos quais três são de introdução e revisão teórica, com o objetivo de definir a nomenclatura e a terminologia utilizadas nos quatro capítulos restantes, onde os resultados anteriormente comentados são apresentados.

O Capítulo II introduz o leitor ao estudo das redes neuronais, iniciando com uma breve visão da Neurofisiologia e das características do sistema nervoso. Em seguida, uma importante seção apresenta os formalismos relacionados às redes neuronais artificiais, definindo conceitos que são amplamente utilizados no restante do trabalho como, por exemplo, as equações gerais do comportamento dos neurônios e modelos neuronais específicos. Finalmente, a terceira seção é totalmente dedicada a uma revisão das duas variantes do modelo neuronal de Hopfield, utilizadas nos capítulos seguintes e nos quais os resultados desta tese se baseiam.

A determinação das conexões entre os neurônios de uma rede neuronal com o objetivo de promover seu aprendizado para a execução de uma dada tarefa é motivo do Capítulo III. Estabelece-se o conceito de aprendizado segundo a Psicologia e seu análogo nos sistemas neuronais artificiais, distinguindo-se as duas metodologias de aprendizado destes sistemas. Várias "Regras de Aprendizado", promotoras de um aprendizado lento e gradual nas redes neuronais artificiais e, possivelmente, no cérebro humano, são expostas, sendo também definido o "Método de Síntese", capaz de projetar, diretamente, redes neuronais especialmente para a execução de uma tarefa determinada.

É no Capítulo IV que se inicia a apresentação dos resultados originais da tese. Em sua primeira seção é estabelecida a dificuldade da síntese das redes neuronais com especial observação sobre a possibilidade de existência de inúmeras redes neuronais para a execução de uma única tarefa. Desta forma, o "Problema da

Síntese de Redes Neurais” é definido como um processo de otimização onde os “Critérios de Síntese” funcionam como filtros na escolha das melhores redes neurais que conseguem determinar. Através do equacionamento do comportamento dinâmico das redes neurais de Hopfield, várias propriedades são determinadas e suas utilizações na “Representação do Conhecimento em Redes Neurais” são apresentadas, esboçando-se uma teoria para tal fim. Finalmente, considerando suas funções de representação do conhecimento, os critérios de síntese são apresentados divididos em “Operacionais”, “Sintáticos” e “Semânticos”.

O completo estabelecimento do método de síntese ocorre no Capítulo V, onde é apresentado um método estocástico utilizado, inicialmente, para a simulação de sistemas termodinâmicos e cuja evolução resultou no método do Resfriamento Simulado (“Simulated Annealing”), passando a ser utilizado na solução de problemas de otimização combinatória. Uma vez que o problema da síntese de redes neurais foi definido anteriormente como um processo de minimização, o Resfriamento Simulado, devido às suas características, é utilizado na sua solução. São, então, apresentadas várias redes neurais sintetizadas por este método, utilizando-se os critérios de síntese definidos no Capítulo IV.

No Capítulo VI é sintetizada uma interessante rede neuronal de Hopfield cuja característica é ter posições estáveis plenamente associáveis às soluções viáveis do Problema do Caixeiro Viajante. É também proposta neste capítulo uma heurística probabilística de simulação da rede neuronal de Hopfield que permite a minimização global da sua função de energia computacional e, quando aplicada à rede neuronal associada ao Problema do Caixeiro Viajante, fornece boas soluções para este problema. Resultados numéricos da aplicação da referida heurística a várias instâncias do Problema do Caixeiro Viajante, geradas aleatoriamente, são, finalmente, apresentados.

O Capítulo VII estabelece algumas conclusões sobre o trabalho aqui realizado e, também, temas para pesquisas futuras.

## Capítulo II

### Redes Neurônais

#### § II.1 - O Sistema Nervoso

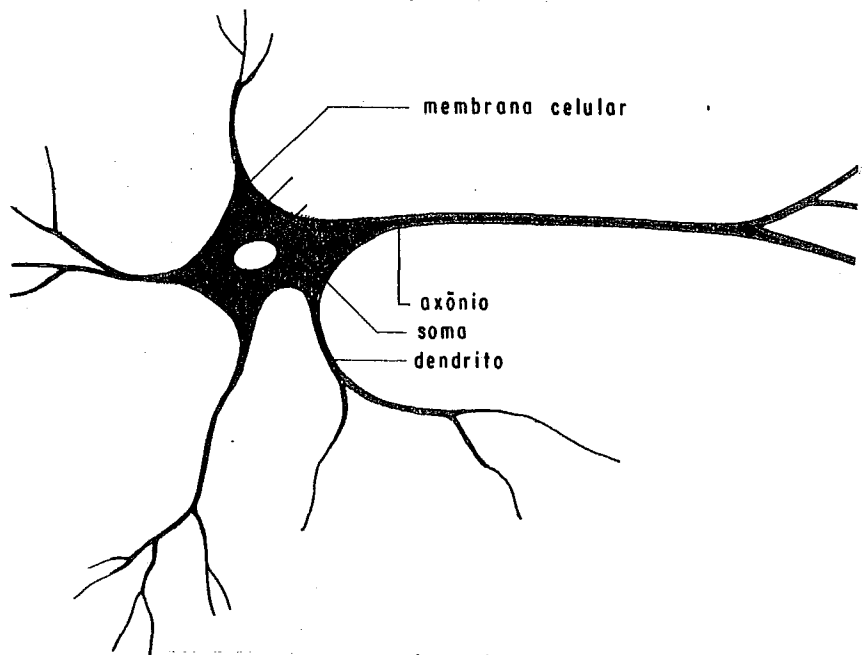
Existem importantes razões para acreditar que a unidade vital básica dos organismos é a célula, e já há algum tempo os estudiosos têm registrado este fato como irrefutável. Ao visualizar tecidos orgânicos em um microscópio, distinguem-se unidades estruturalmente idênticas cobertas por uma membrana protetora que nos fornece a idéia de individualidade [21]. Devido à extrema complexidade do sistema nervoso central, foram impostos longos anos de resistência ao conceito de composição celular de sua massa cinzenta. Atualmente a *doutrina do neurônio* afirma que o sistema nervoso central, assim como os outros órgãos dos seres vivos, é formado por um grande agregado de células das mais variadas formas e tipos [22]. As células especializadas em gerar e transmitir sinais elétricos foram denominadas *neurônios* e sua população no cérebro humano é da ordem de vinte e cinco bilhões [23].

Ainda que não existam dois neurônios iguais, estas células possuem uma série de características comuns importantes no seu estudo. Da mesma forma que outras células, o neurônio possui uma *membrana celular* que o reveste e separa do meio externo, além de um *corpo celular* ou *soma* dentro do qual se encontra a maioria dos orgânulos responsáveis pela manutenção da vida da célula. Do soma partem inúmeros prolongamentos que, devido ao seu aspecto funcional, são classificados em *dendrito* e *axônio*. O axônio, geralmente único, liga o soma de sua célula a outros neurônios, enquanto os dendritos, que podem ser milhares, recebem as terminações dos axônios de outras células. O axônio, apesar de único, ramifica-se em *colaterais* de comprimentos variados, permitindo assim a união de sua célula a um grande número de neurônios dispostos em diferentes regiões do sistema nervoso (Figura II.1).

O ponto de contato entre uma terminação axônica e o dendrito ou soma de outra célula é denominado *sinapse*. As sinapses são muito importantes, pois além de permitirem a união de várias células nervosas formando redes neuronais, funcionam como "válvulas" regulando o fluxo da informação transmitida entre

os neurônios. Acredita-se que o processo de aprendizado dos seres vivos resulte na alteração da capacidade de transmissão de informação através das sinapses, ou seja, na regulação das *eficiências sinápticas*. A fixação das eficiências sinápticas em determinados valores constituiria assim a memória de longo prazo dos organismos inteligentes [24].

---



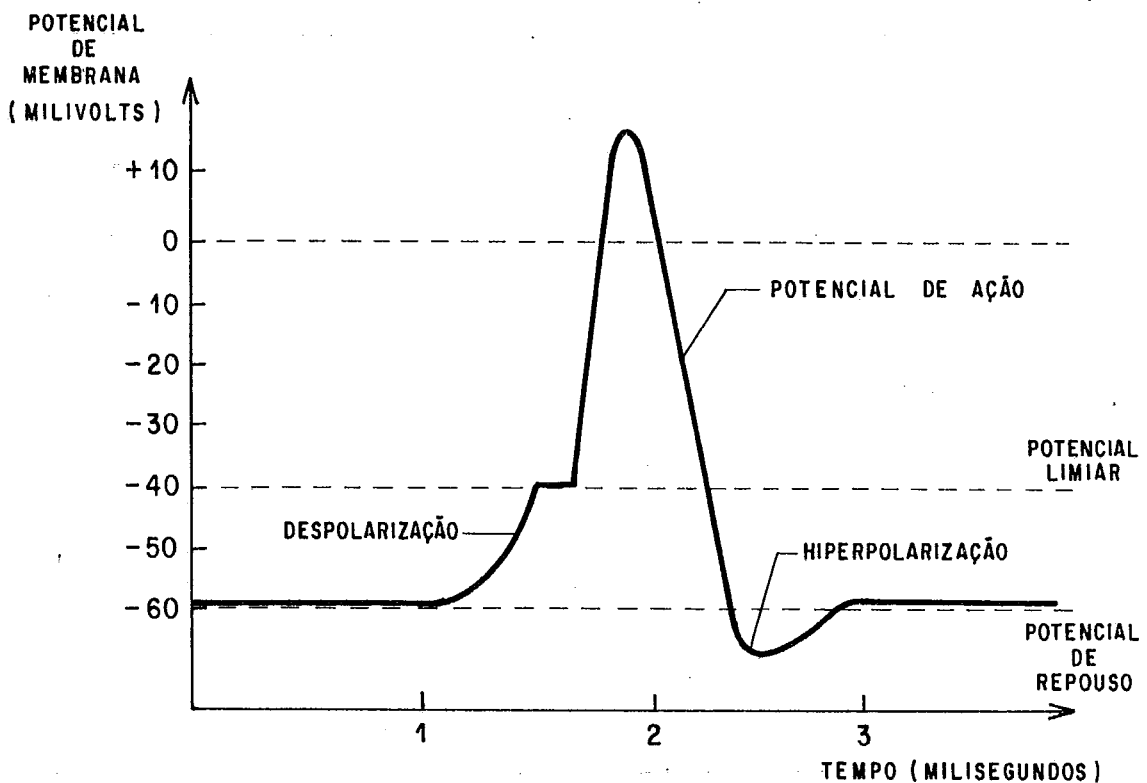
---

**Figura II.1** - Esquema simplificado de um neurônio.

O neurônio é uma célula especializada em receber informações na forma de impulsos elétricos e, através de seus dendritos, integrar de alguma forma estes *impulsos nervosos* para finalmente transmitir uma resposta ao longo do seu axônio para outras células nervosas. Na realização destas tarefas é preciso que soma, dendrito e axônio possuam estruturas e características específicas em relação à geração e conservação de potenciais elétricos. Denomina-se *potencial de membrana* a diferença de potencial existente entre o interior e o exterior do neurônio, sendo então o impulso nervoso registrado no axônio quando há uma rápida variação deste potencial. Quando não há impulso nervoso, o potencial de membrana encontra-se em um valor constante negativo de aproximadamente -60 mV, chamado *potencial*

*de repouso*, que é utilizado como referência na medição de todos os potenciais elétricos da célula. *Despolarização* é a ação de levar o potencial de membrana a um valor maior do que seu potencial de repouso, enquanto a ação inversa é dita *hiperpolarização*.

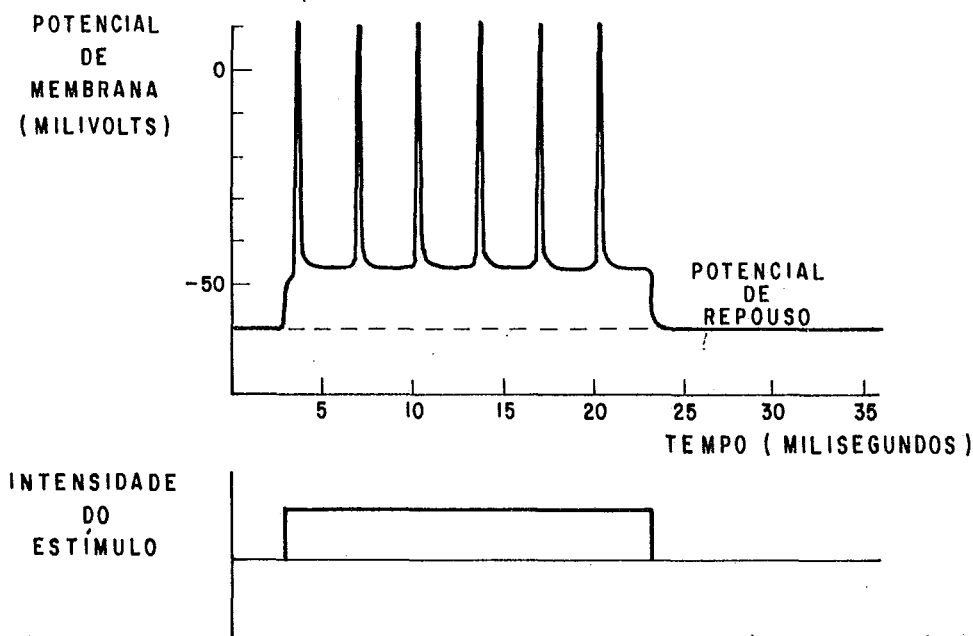
A membrana celular do neurônio é tal que, ao ser despolarizada a um certo valor denominado *potencial limiar*, sofre um processo físico-químico capaz de levar seu potencial de membrana a valores positivos por curtos períodos de tempo e, posteriormente, retornar ao potencial de repouso original. Este processo é o que chamamos de *potencial de ação*, que é uma das características elétricas mais importantes do impulso nervoso (Figura II.2).



**Figura II.2** - Fases do potencial de ação.

Após a ocorrência de um potencial de ação, há uma fase de recuperação das propriedades físicas e químicas originais da membrana celular, na qual nenhum outro impulso nervoso pode ser deflagrado. Devido a este *período refratário*, ao ser o neurônio estimulado prolongadamente com um potencial despolarizante acima

do limiar, gera-se em seu axônio uma série de potenciais de ação cuja frequência de ocorrência é determinada pela duração da fase refratária da célula. Dessa forma, percebemos que a informação transmitida nas redes neuronais do sistema nervoso central é codificada na frequência do chamado *trem de impulsos*, como representa a Figura (II.3).



**Figura II.3** - Geração de trem de impulsos por estimulação prolongada.

Finalmente, é preciso notar que a transmissão do impulso nervoso ao longo do axônio não é passiva, pois cada trecho de sua membrana é capaz de gerar seu próprio potencial de ação, consumindo energia metabólica localizada, em consequência de despolarizações causadas por potenciais de ação atuantes nas regiões vizinhas. O transporte ativo dos potenciais de ação impede a ocorrência de problemas de *fan-out* †, que limitariam o número de colaterais do axônio e também seus comprimentos.

† Número máximo de componentes eletrônicos de um mesmo tipo que podem ser conectados à saída de um circuito sem degradar o funcionamento do mesmo.

Assim como os axônios codificam informação em frequência, os dendritos são especializados no processo inverso de decodificação. A chegada de um potencial de ação à sinapse provoca uma alteração suave no *potencial pós-sináptico*, pois nesta estrutura não há potencial limiar. Sendo assim, axônios das mais distantes células podem convergir para um único neurônio onde seus potenciais de ação serão somados, gerando um potencial pós-sináptico resultante que é mantido pela membrana celular por um período de tempo consideravelmente maior que o de um potencial de ação. A *capacitância elétrica* da membrana celular, responsável pelo lento decaimento do potencial pós-sináptico, permite que a rede neuronal funcione sem a necessidade de mecanismos de sincronia, pois potenciais de ação deflagrados em tempos diferentes podem, ainda assim, ser somados pelos dendritos.

Ao realizar o processo de integração dos impulsos nervosos, os dendritos consideram ainda que existem sinapses cujo efeito é despolarizar o potencial pós-sináptico ( *sinapses excitatórias* ) e sinapses cujo efeito é o inverso, ou seja, o de hiperpolarizar este potencial ( *sinapses inibitórias* ). Sinapses excitatórias fornecem um sentido de cooperação entre os neurônios aferentes e eferentes, enquanto as sinapses inibitórias sugerem uma idéia de competição entre estas mesmas células. Essa conjunção de estruturas e fatores permitem ao sistema nervoso central controlar e receber ou fornecer informação, ou seja, realizar operações de cômputo das mais complexas e diversas. Um simples exemplo de como as redes neuronais realizam tais tarefas pode ser visto na Figura (II.4), onde dois neurônios recebem impulsos de regiões distantes e controlam a ação de músculos flexores e extensores de uma mesma articulação óssea, e não podem assim atuar simultaneamente. O primeiro neurônio a ser excitado por um impulso de comando, inibe seu vizinho, através da sinapse inibitória, evitando que haja ação de músculos antagonistas ao mesmo tempo.

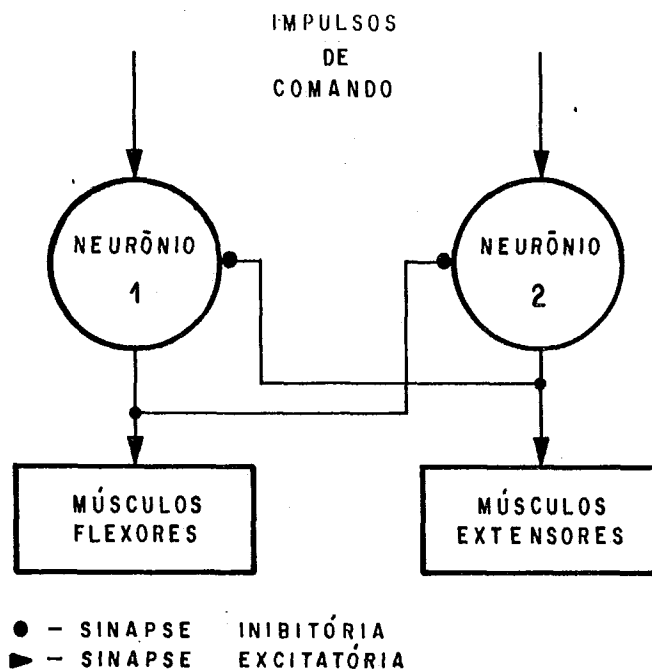
A breve visão de Neurofisiologia fornecida nesta seção permitirá uma melhor compreensão das formalizações existentes no sentido de entender e aplicar as redes neuronais à Ciência da Computação.

## § II.2 - Neurocomputação

A construção de máquinas capazes de executar com perfeição as tarefas realizadas pelos seres humanos — esta é a própria definição do termo máquina — é uma



idéia antiga que atinge seu auge quando nos prestamos a emular o mais complexo dos órgãos que conhecemos, ou seja, o cérebro humano. Neste empreendimento, passamos a visualizar o sistema nervoso central humano como um complexo computador, surgindo então interessantes questões acerca de sua arquitetura, que nos levam a crer que aquilo que atualmente chamamos de *Computação* está longe de ser o que o cérebro humano executa [17].



**Figura II.4 - Circuito neuronal inibidor dos antagonistas.**

Na tentativa de criar um sistema artificial inteligente, os *cognitivistas* afirmam que o cérebro humano pode ser simulado através de um computador com uma única *unidade central de processamento* — realizando operações seqüenciais e centralizadas milhões de vezes mais rápidas que o neurônio biológico — que possua a capacidade de criar, destruir e combinar símbolos. Para essa corrente de pesquisadores, a inteligência se materializa em um conjunto de regras, adquiridas ao longo da existência do indivíduo, que representa a forma estereotipada como os seres vivos entendem e reagem ao universo que os rodeia [25-32].

O fato é que o modelo cognitivista de inteligência não é eficiente em tarefas

que o ser humano realiza rápida e facilmente, tais como o reconhecimento visual ou auditivo, a recuperação de informação ( memória ) e a adaptação a novas situações ( aprendizado ). O sistema nervoso central com o seu incontestável paralelismo temporal de processamento da informação — compensando assim a baixa velocidade de resposta dos neurônios — adicionado à sua capacidade de tolerar falhas de funcionamento — implicando em pequena ou nenhuma degradação de desempenho por morte celular — e ainda a inexistência, até aqui comprovada, de elementos de controle centralizados, levaram à formação de uma linha alternativa de pensamento. Os *conexionistas* [10], como se auto-denominam, afirmam que a informação inteligente é processada paralelamente por uma população de elementos computacionais simples, chamados neurônios, que, distribuídos no espaço e ligados através de conexões ( sinapses ), trocam sinais inibitórios ou excitatórios, competindo ou cooperando entre si [18]. A inteligência conexionista estaria então armazenada nas conexões entre os neurônios, e o comportamento inteligente *emergiria*, sem a necessidade de elementos centralizadores, da ação simultânea desta coletividade. Ao estudo dos processos computacionais realizáveis por sistemas dinâmicos obedientes ao paradigma conexionista anteriormente exposto, denominamos, neste texto, *Neurocomputação*. Cabe notar que o referido paradigma é suficientemente amplo para permitir completas abstrações em relação à estrutura e características dos sistemas neuronais biológicos, como veremos adiante.

Muitos modelos conexionistas já foram propostos e estudados, sendo ainda outros formulados a cada dia para as mais variadas aplicações. Apesar de suas diferenças, uma estrutura geral básica que lhes é comum pode ser detectada, fornecendo-nos uma melhor compreensão, não apenas do modelo em si, mas também do processo de modelagem em Neurocomputação [33,34,19]. Inicialmente, uma teoria conexionista precisa definir cada uma de suas  $n$  unidades computacionais identificadas por  $N_i$ , onde  $1 \leq i \leq n$ , ditas neurônios. Esta tarefa compreende o estabelecimento de uma nomenclatura coerente além de um conjunto de expressões matemáticas representantes das características funcionais dos neurônios do modelo.

É imprescindível o conceito de *estado de ativação*  $a_i(t)$  do neurônio  $N_i$  no instante  $t$ , que, sendo um número inteiro ou real dentro de determinados limites,

fornece o valor de uma propriedade pré-estabelecida qualquer do neurônio  $N_i$  no instante  $t$ . Normalmente o estado de ativação é o representante do grau de excitação ou inibição do neurônio. O conjunto de estados de ativação dos  $n$  neurônios pode ser agrupado em um vetor  $a(t)$  que representa o estado da rede neuronal no instante  $t$  ou o seu *padrão de atividade* naquele tempo. Cada célula  $N_i$  possui uma *resposta* ou *saída*  $o_i(t)$  no tempo  $t$  (correspondente ao trem de impulsos do neurônio real) em função de seu estado de ativação  $a_i(t)$ , ou seja, uma *regra de saída*  $f_i$  dada por

$$o_i(t) = f_i(a_i(t)). \quad (\text{II.1})$$

Em notação vetorial,  $o(t)$  é o *vetor de saída* que representa o conjunto de respostas de todos os neurônios da rede neuronal no instante  $t$ .

São as conexões entre os neurônios que determinam as características da rede neuronal, incluindo o que os conexionistas chamam de inteligência. Dessa forma, a especificação do *padrão de conexão* é essencial e pode ser realizada através do estabelecimento dos valores  $w_{ij}$  das eficiências sinápticas existentes entre o axônio do neurônio  $N_j$  e um dendrito do neurônio  $N_i$ . As eficiências sinápticas podem ser positivas, negativas ou nulas, representando correspondentemente sinapses excitatórias, inibitórias, ou a sua inexistência. O conjunto de valores  $w_{ij}$  pode ser coletivamente denotado por uma *matriz de conexão*  $W$ , cuja linha  $i = 1, \dots, n$  representa o dendrito do neurônio  $N_i$  e cuja coluna  $j = 1, \dots, n$  representa o axônio do neurônio  $N_j$ .

Também é preciso definir uma *regra de propagação*  $g_i$ , cuja tarefa é integrar os impulsos recebidos pelo neurônio  $N_i$  em um *impulso total de entrada*  $u_i(t)$ , que corresponderia ao potencial pós-sináptico do neurônio biológico. Geralmente a função  $g_i$  depende do vetor de saída  $o(t)$  e da matriz de conexão  $W$ :

$$u_i(t) = g_i(o(t), W). \quad (\text{II.2})$$

Finalmente, o modelo conexionista necessita de uma *regra de ativação*  $h_i$  capaz de fornecer o novo estado de ativação  $a_i(t + \Delta t)$  no instante de tempo futuro  $t + \Delta t$ :

$$a_i(t + \Delta t) = h_i(a_i(t), u_i(t)). \quad (\text{II.3})$$

Além desses elementos básicos, alguns modelos de redes neuronais possuem ainda uma *regra de aprendizado* que fornece os meios necessários para que as eficiências sinápticas sejam alteradas e a rede neuronal modifique sua “inteligência”, ou seja, aprenda ou se adapte à novas situações. O Capítulo III examinará em detalhes a determinação das eficiências sinápticas em alguns modelos neuronais.

Através dessa estrutura geral básica é possível definir uma infinidade de modelos de redes neuronais desde os mais simples, estabelecidos antes mesmo que se tivesse conhecimento dessa estrutura, até complexos sistemas neuronais estocásticos, como veremos adiante. O modelo neuronal mais simples que podemos imaginar é conhecido como *neurônio linear* [5,7,35–37], onde o estado de ativação, impulso de entrada e resposta são escalares reais irrestritos e as regras de ativação, propagação e saída são funções lineares. Em uma rede neuronal com  $n$  neurônios lineares, a regra de propagação combina impulsos  $o_j(t)$  recebidos pelo neurônio  $N_i$  através de uma soma algébrica ponderada pelas eficiências sinápticas  $w_{ij}$ :

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} o_j(t). \quad (\text{II.4})$$

A regra de ativação independe do estado de ativação anterior do neurônio  $N_i$ , sendo linear em relação ao impulso total de entrada  $u_i(t)$ :

$$a_i(t) = \alpha u_i(t); \quad \alpha \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{II.5})$$

A resposta do neurônio linear  $o_i(t)$  se confunde com o seu estado de ativação, ou seja, a regra de saída é a identidade:

$$o_i(t) = a_i(t). \quad (\text{II.6})$$

Combinando as expressões (II.4), (II.5) e (II.6) obtemos a equação que descreve o comportamento do neurônio linear:

$$o_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha w_{ij} o_j(t); \quad \alpha \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{II.7})$$

Devido à sua simplicidade, os modelos conexionistas com neurônios lineares têm uma capacidade de aprendizado muito reduzida, sendo então superados pelos

neurônios não-lineares mais capazes de modelar os processos neurocomputacionais.

Em 1943, McCULLOCH [1] desenvolveu um modelo neuronal não-linear que ficou conhecido como o *neurônio lógico* [38]. Trata-se de uma célula com apenas dois estados de ativação representantes dos conceitos de *excitação* ( estado de ativação unitário ) e *inibição* ( estado de ativação nulo ). Suas regras de propagação e saída são idênticas às do neurônio linear, dadas pelas equações (II.4) e (II.6), porém a regra de ativação não-linear decide o estado de ativação  $a_i(t)$  da célula  $N_i$  comparando o impulso de entrada  $u_i(t)$  com o potencial limiar  $\theta_i \geq 0$  do neurônio (Figura II.5):

$$a_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i(t) > \theta_i; \\ 0, & \text{se } u_i(t) \leq \theta_i. \end{cases}$$

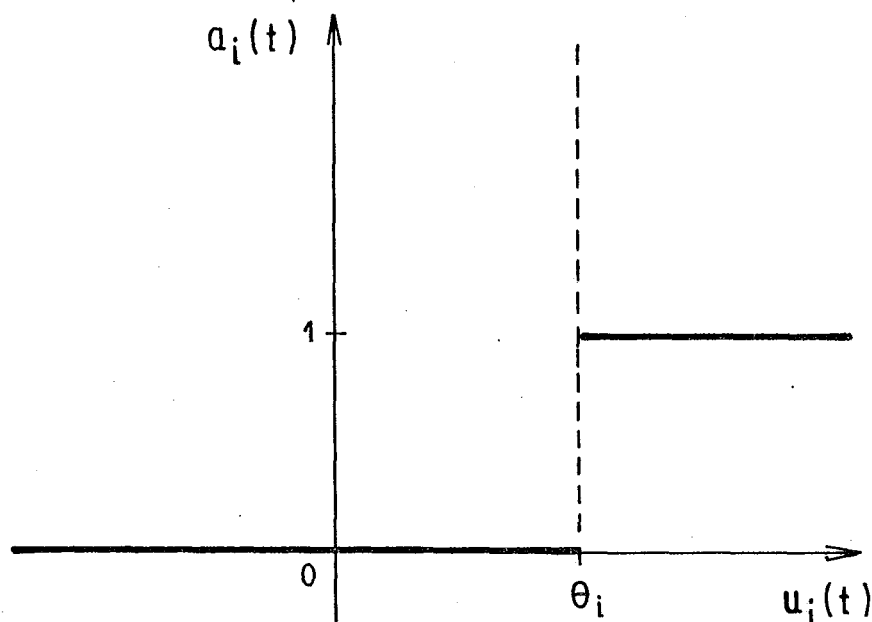


Figura II.5 - Regra de ativação do neurônio lógico.

As regras de ativação, propagação e saída levam à equação do neurônio lógico:

$$o_i(t) = T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} o_j(t) - \theta_i \right), \quad (\text{II.8})$$

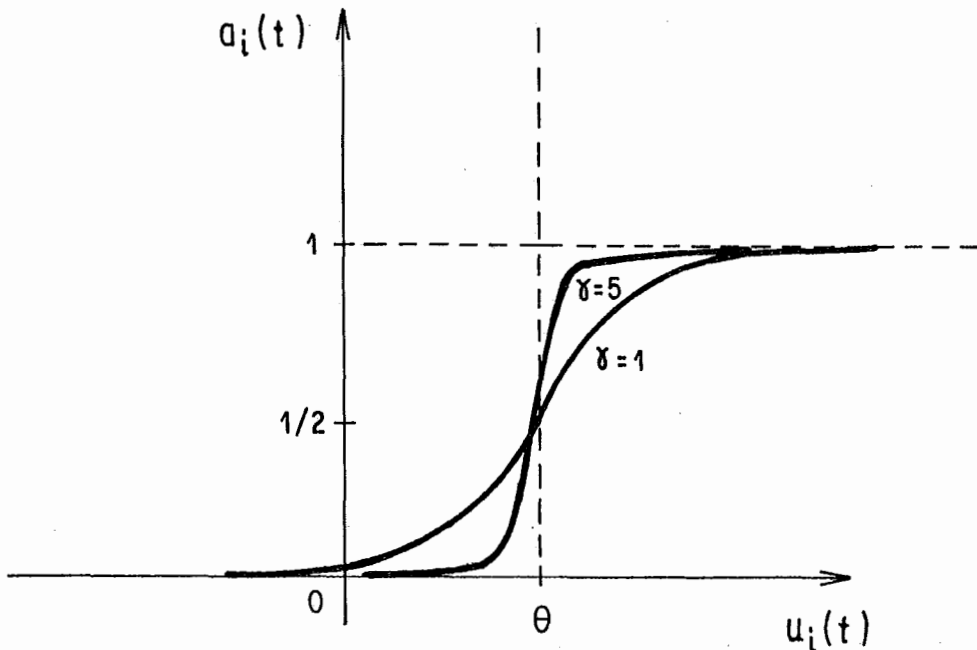
onde a *função limiar*  $T(x)$  é dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

A introdução do parâmetro  $\theta_i$ , com função idêntica ao potencial limiar do neurônio biológico, torna este modelo mais plausível para o estudo dos mecanismos de computação do sistema nervoso.

O neurônio lógico, apesar de sua não-linearidade desejável, ainda não é um modelo sofisticado pois possui uma regra de ativação descontínua que permite apenas a existência de dois estados de ativação. O *neurônio semi-linear* [39] é uma idealização que substitui a descontínua regra de ativação do neurônio lógico por uma função contínua em forma de "S" dita *sigmóide* (Figura II.6):

$$a_i(t) = \left[ 1 + e^{-\gamma(u_i(t) - \theta_i)} \right]^{-1}; \quad \gamma \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{II.10})$$



**Figura II.6** - Regra de ativação do neurônio semi-linear.

Dessa forma, este neurônio possui infinitos estados de ativação contidos no intervalo real existente entre zero e a unidade.

Poderíamos citar muitos outros modelos neuronais, com diferentes níveis de complexidade e características, porém nosso objetivo é apenas fornecer uma idéia geral e definir uma terminologia e nomenclatura necessárias para a apresentação do trabalho. Na próxima seção faremos um estudo detalhado de um dos mais interessantes modelos de redes neuronais e que será fundamental para o desenvolvimento desta tese.

### § II.3 - O Modelo de Hopfield

Ainda que o comportamento de um neurônio seja completamente conhecido, ao se conectar um grupo destas células em rede, surgem novas características não previstas pelas equações estabelecidas para o modelo neuronal. É exatamente a emergência de propriedades coletivas, inexistentes no comportamento individual, que torna um modelo conexionista interessante e, ao mesmo tempo, complexo para o estudo.

Definido um modelo neuronal, podemos perceber que ao ser a célula excitada com algum impulso de entrada, ocorre uma fase *transiente* ao fim da qual o neurônio fornece uma resposta, prevista nas equações do modelo, e que representa a operação de cômputo realizada por ele. Porém, em uma rede neuronal composta de um certo número destas células, a excitação de alguns neurônios inicia uma fase transiente cujo término é imprevisível a partir do comportamento neuronal individual. Dessa forma é possível que certas redes neuronais, uma vez excitadas, oscilem indefinidamente sem fornecer uma resposta à excitação inicial. Mesmo em uma rede neuronal cuja fase transiente é finita, torna-se difícil caracterizar, ao contrário do que ocorre no neurônio isoladamente, que espécie de processo computacional foi desenvolvido.

Em 1982, HOPFIELD [11-15] estabeleceu um modelo conexionista com importantes características computacionais e de estabilidade, esclarecendo grande parte das dúvidas existentes até então. O físico e biólogo mostrou que a evolução dinâmica dessa rede neuronal se faz no sentido de diminuir, ou pelo menos não aumentar, o valor de uma função característica do sistema, denominada de *energia computacional* †. Ao atingir um ponto de mínimo da referida função, a rede

---

† A energia computacional é uma função de Liapunov [40] do sistema dinâmico conhecido por rede neuronal de Hopfield.

neuronal interrompe seu processo transiente devido à impossibilidade de reduzir, além deste ponto, sua energia computacional. A primeira rede neuronal definida por Hopfield é obtida conectando-se simetricamente, ou seja, com  $w_{ij} = w_{ji}$  um conjunto de neurônios lógicos, já analisados anteriormente, supondo-se que a comunicação entre células seja instantânea e que a cada instante apenas um neurônio mude seu estado de ativação. Lembrando que a regra de ativação do neurônio lógico  $N_i$  é dada por

$$a_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i(t) > \theta_i; \\ 0, & \text{se } u_i(t) \leq \theta_i, \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

e denotando  $[a_i(t + \Delta t) - a_i(t)]$  por  $\Delta a_i$ , podemos escrever o produto  $p$ :

$$p = -\Delta a_i [u_i(t) - \theta_i], \quad (\text{II.12})$$

ou

$$p = -\Delta a_i \left[ \sum_{j=1}^n w_{ij} a_j(t) - \theta_i \right]. \quad (\text{II.13})$$

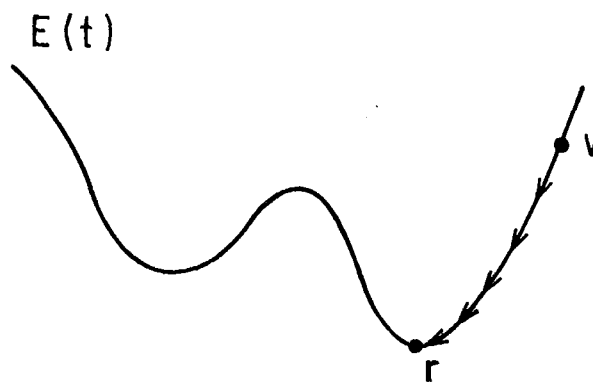
Note-se que, qualquer que seja a variação no estado de ativação do neurônio  $N_i$ , o produto  $p$  é sempre negativo, podendo então ser representativo da redução  $\Delta E(t)$  de alguma função  $E(t)$  característica da rede neuronal. Não esquecendo a simetria das eficiências sinápticas, podemos determinar a função  $E(t)$ , dita energia computacional, cuja variação  $\Delta E(t)$ , devida à mudança do estado de ativação do neurônio  $N_i$ , é dada pela expressão (II.13):

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} a_i(t) a_j(t) + \sum_{i=1}^n \theta_i a_i(t). \quad (\text{II.14})$$

Definindo o *espaço de estado* de uma rede neuronal como o espaço vetorial onde a dimensão  $i$  registra o estado de ativação  $a_i(t)$  do neurônio  $N_i$ , associamos a cada rede neuronal uma *superfície de energia* neste espaço. Ao se excitar a rede neuronal com um padrão de atividade inicial  $v$ , representado por um ponto no espaço de estado, a mesma evolui dinamicamente em uma trajetória que reduz a cada instante o valor da energia computacional, tendendo a pontos mais baixos da superfície de energia. Esta trajetória é finalizada quando a rede neuronal atinge um padrão de atividade  $r$ , dito *padrão estável*, que é um ponto de mínimo da superfície de energia (Figura II.7).



Certamente as redes neuronais de Hopfield possuem tantos padrões estáveis quanto pontos de mínimo da superfície de energia  $e$ , assim, partindo de diferentes padrões de atividade iniciais, a rede neuronal convergirá ao padrão estável correspondente ao mínimo de energia mais próximo de seu ponto de partida. Dessa maneira, a cada ponto do espaço de estado da rede neuronal, ou seja, a cada padrão de atividade, está associada uma trajetória neste mesmo espaço, cujo final é um padrão estável, formando o que chamamos de *campo de trajetórias* (Figura II.8).

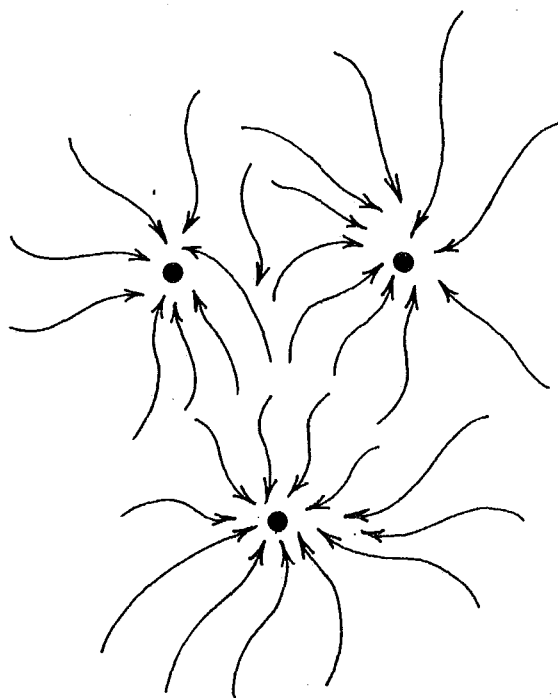


**Figura II.7** - Perfil de uma superfície de energia com dois pontos de mínimo.

Imaginando que cada padrão estável represente um item de informação armazenado na rede neuronal, visualizamos os padrões de atividade não-estáveis como itens de informação não armazenados, e que, dependendo de sua semelhança com os padrões estáveis, podem representar partes significativas da informação armazenada. Neste contexto, ao se excitar uma rede neuronal com um padrão de atividade inicial, ou seja, um item de informação, a mesma seguirá uma trajetória que terminará em um padrão estável próximo da excitação inicial, ou melhor, no item de informação armazenado mais próximo da informação inicialmente fornecida. Caracterizamos, então, o processo computacional realizado por uma rede neuronal de Hopfield como a recuperação da informação total a partir da informação parcial, ou seja, uma *memória de acesso pelo conteúdo*. A “construção” da informação

total partindo da informação parcial e o acesso à informação armazenada através de seu conteúdo, e não pelo seu endereço, são propriedades típicas da memória humana que estão presentes nas redes neuronais de Hopfield.

---



● - PONTO DE MÍNIMO DA SUPERFÍCIE DE ENERGIA.

---

**Figura II.8** - Campo de trajetórias no espaço de estado.

Em um segundo modelo, Hopfield utilizou um neurônio semi-linear, com as regras de ativação e saída dadas pelas equações (II.10) e (II.6), e modificou a regra de propagação com o objetivo de considerar a característica capacitiva da membrana celular. Assim, os impulsos de entrada fornecem a variação do potencial pós-sináptico  $u_i(t)$  do neurônio  $N_i$ , observando-se a capacitância  $C_i$  da membrana celular, enquanto as perdas por fuga de corrente elétrica são representadas por uma resistência elétrica  $R_i$ :

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} a_j(t) - \frac{u_i(t)}{R_i}. \quad (\text{II.15})$$

Mantido o padrão de conexão simétrico ( $w_{ij} = w_{ji}$ ) e relaxada a restrição quanto à mudança no estado de ativação dos neurônios, pode-se mostrar que este modelo possui uma função de energia computacional dada por:

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} a_i(t) a_j(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \int_0^{a_i(t)} q(a) da, \quad (\text{II.16})$$

onde  $q(a)$  é a função inversa da regra de ativação:

$$q(a) = -\frac{1}{\gamma} \ln(1/a - 1) + \theta_i; \quad \gamma \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{II.17})$$

Através desses modelos, Hopfield conseguiu estabelecer um novo conceito de computação e estabilidade em redes neuronais, além de mostrar que interessantes propriedades surgem do comportamento coletivo de uma população de neurônios. Neste trabalho todas as redes neuronais consideradas seguem o modelo de Hopfield, a não ser em poucas situações, quando há informação em contrário.

## Capítulo III

### Aprendizado em Redes Neurais

#### § III.1 - O Conceito de Aprendizado

Na abrangência das atividades cognitivas humanas notamos um elemento, quase sempre presente, responsável pela aquisição, armazenamento e manuseio de informações novas, capazes de modificar o comportamento do indivíduo. Esse elemento, que costumamos denominar *aprendizado*, ainda não foi totalmente observado e compreendido, impedindo, assim, que haja uma teoria capaz de definir com perfeição o termo. Devido às suas inúmeras faces, o aprendizado tem sido objeto de variados modelos, desde o simples *associacionismo*, citado originalmente por Aristóteles e desenvolvido por THORNDIKE [41] entre outros, até os complexos *esquemas* de PIAGET [42-43]. Todavia, a sofisticação das teorias de aprendizado não ultrapassa a consideração de apenas uma tarefa cognitiva específica, normalmente isolada de um universo real de fatores. Sem nos esforçarmos para fornecer uma idéia precisa do termo, pois esse não é o nosso objetivo, aceitamos que o aprendizado é uma transformação qualitativa no sentido de aumentar a eficiência de alguma capacidade do indivíduo, excluindo-se, assim, processos que representam perda da competência já estabelecida [44].

Ao estender essa idéia para os modelos conexionistas, precisamos verificar quais as capacidades possuídas por uma rede neuronal e, posteriormente, entender como aumentar a eficiência na execução de suas atividades. Do que foi exposto no capítulo anterior, percebemos que a única atividade realizada por uma rede neuronal é a *associação de padrões*, pois ao ser excitada por um padrão de atividade inicial  $s$  (*estímulo*), ocorre uma evolução no tempo que resulta em atingir o equilíbrio em um padrão de atividade final (*resposta*) [45]. Por este ponto-de-vista, o mecanismo de memória de acesso pelo conteúdo resume-se em um processo de *auto-associação*, onde o item a ser armazenado (*resposta*) é associado a si próprio (*estímulo*) [20]. Sendo assim, ao ser a rede neuronal excitada com parte do padrão de atividade armazenado, a mesma converge para o padrão de atividade completo correspondente à associação. Também o *reconhecimento de padrões* é uma aplicação particular da capacidade associativa das redes neurais, uma vez que

este processo pode ser visto como uma associação do padrão de atividade a ser reconhecido (estímulo) a um padrão de atividade representativo do sucesso da tarefa de reconhecimento (resposta). É indiscutível a semelhança do processo de auto-associação com a memória humana, enquanto a associação e o reconhecimento de padrões, considerados informalmente, são análogos do aprendizado conceitual e do aprendizado discriminativo, respectivamente [46].

Visto que uma rede neuronal só adquire competência na associação de padrões, e lembrando que, segundo o paradigma conexionista, a inteligência se materializa nas conexões, podemos definir o aprendizado nesse sistema dinâmico como sendo a determinação de suas eficiências sinápticas de forma que padrões de atividade, ditos estímulos, sejam associados a padrões de atividade, denominados respostas. Certamente que a escolha dos estímulos, das respostas e suas associações é devida a um elemento externo à rede neuronal que, neste texto, denominamos genericamente *projetista* † do sistema.

A maneira primitiva de promover o aprendizado em redes neuronais é por um processo de *tentativas*. O projetista submete o sistema a *sessões de aprendizado* (aplicações sucessivas de estímulos e verificação das respostas), cujo resultado observado é utilizado para a modificação das eficiências sinápticas, na tentativa de que o desempenho da rede neuronal na execução das associações aumente até um nível considerado satisfatório. Apesar de semelhante processo de tentativas ocorrer no aprendizado humano [49], a total dependência do projetista, aliada ao seu aspecto informal, impede que este método mereça maiores considerações. Nas próximas seções do presente capítulo, dois métodos de aprendizado mais sofisticados serão abordados, sendo um deles o tema central deste trabalho.

### § III.2 - Regras de Aprendizado

Em 1949, DONALD HEBB [3] lançou, em sua teoria especulativa sobre as bases neurofisiológicas do comportamento, o seguinte postulado acerca das mudanças celulares ocorridas durante o processo de aprendizado:

“ Quando o axônio de uma célula *A* está próximo o bastante de uma célula *B*, de forma a excitá-la, e o faz repetidamente, algum processo de

---

† O termo *professor* é comumente usado na literatura cognitivista [47,48].

crescimento sináptico, ou mudança metabólica, ocorre em uma ou ambas as células no sentido de aumentar a capacidade da célula *A* excitar a célula *B* ”.

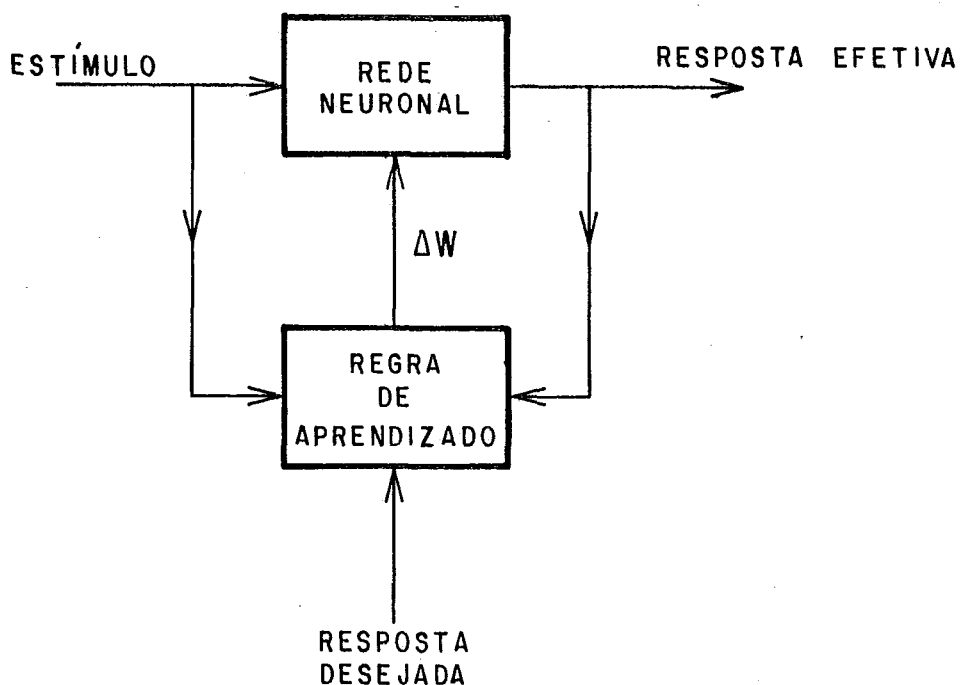
Devido à falta de evidências, o trabalho de Hebb foi desprezado pelos psicólogos da época, e posteriormente ele próprio abandonou suas idéias, não imaginando, porém, que seu postulado influenciaria fortemente as futuras teorias conexionistas. Aproximadamente uma década após a apresentação de sua teoria, neurobiólogos passaram a crer na ocorrência de modificações estruturais e metabólicas nas células do sistema nervoso central durante o processo de aprendizado [50–55]. Houve, então, um renascimento das idéias de Hebb e seu postulado começou a ser visualizado, por alguns estudiosos, como uma descrição do processo de aprendizado a nível celular.

Na adaptação do postulado de Hebb às teorias conexionistas, o crescimento sináptico, ou a mudança metabólica, ocorrida nos neurônios é representado por uma variação  $\Delta W$  nas eficiências sinápticas, e a relação que fornece esta variação na dependência do estímulo *s*, da *resposta efetiva* da rede neuronal *o* e da *resposta desejada* pelo projetista *p*, é chamada de regra de aprendizado [56–60]:

$$\Delta W = \mathcal{L}(s, o, p). \quad (\text{III.1})$$

O caráter de paralelismo temporal e distribuição espacial de um modelo conexionista exige que uma regra de aprendizado eficiente não necessite de informações sobre estados passados ou futuros da rede neuronal (*propriedade de instantaneidade*) e ainda mais, que quaisquer dados utilizados pela referida regra sejam obtidos de um grupo de neurônios espacialmente próximos (*propriedade de localidade*).

De posse de uma regra de aprendizado, o processo de aprendizado consiste em, partindo-se de uma rede neuronal qualquer, promover inúmeras sessões de aprendizado de onde são extraídas as respostas efetiva e desejada para a determinação das variações das eficiências sinápticas (Figura III.1). Espera-se, a princípio, que as eficiências sinápticas assumam valores estáveis após um razoável e finito número de aplicações da regra de aprendizado, porém não é sempre que este fato ocorre, e algumas destas regras geram problemas de oscilação ou indefinição no padrão de conexão da rede neuronal.



**Figura III.1** - Aplicação da regra de aprendizagem a uma rede neuronal.

É interessante notar que o aumento gradual da competência da rede neuronal na execução de sua tarefa, conforme a regra de aprendizagem é repetidamente aplicada, assemelha-se à aquisição cumulativa de experiência pelo ser humano em suas atividades cognitivas.

A grande limitação das regras de aprendizagem reside no fato de que, à medida que o número de padrões de atividade a serem associados aumenta, há uma degradação de desempenho da rede neuronal em relação às associações anteriormente aprendidas (*interferência*), pois a alteração das eficiências sinápticas com vistas ao novo aprendizado altera a configuração existente, ideal para o aprendizado já estabelecido.

Baseando-se no postulado de Hebb, foi ECCLES [61] quem pela primeira vez definiu uma regra de aprendizagem na qual a variação da eficiência sináptica  $\Delta w_{ij}$  entre os neurônios  $N_i$  e  $N_j$  é proporcional ao produto dos estados de ativação destas células no dado padrão de atividade:

$$\Delta w_{ij} = \eta a_i(t) a_j(t); \quad 0 < \eta \ll 1. \quad (\text{III.2})$$

Desta forma, considerando-se uma rede neuronal com neurônios lógicos, só existe alteração nas eficiências sinápticas se as duas células estão simultaneamente excitadas. Uma outra regra de aprendizado, onde as variações das eficiências sinápticas são positivas quando os neurônios têm o mesmo estado de ativação e negativas em contrário, é dada por

$$\Delta w_{ij} = \eta(2a_i(t) - 1)(2a_j(t) - 1); \quad 0 < \eta \ll 1. \quad (\text{III.3})$$

Observamos então que muitas das regras de aprendizado são propostas de forma intuitiva e heurística, tomando-se como base o postulado de Hebb.

A primeira regra de aprendizado matematicamente estabelecida foi resultado do trabalho de WIDROW [62]. Considerando uma rede neuronal com neurônios lineares, composta apenas de uma camada de  $n$  neurônios de entrada e uma camada de  $n$  neurônios de saída †, e onde as conexões só transmitem impulsos da camada de entrada para a de saída (Figura III.2), Widrow definiu o erro entre a resposta efetiva  $o$  e a resposta desejada  $p$  da rede neuronal como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i - o_i)^2; \quad p \in \mathcal{R}^n, o \in \mathcal{R}^n. \quad (\text{III.4})$$

Percebendo que o erro  $\varepsilon$  é dependente das eficiências sinápticas, Widrow minimizou-o utilizando o Método do Gradiente [63]. Derivando  $\varepsilon$  com respeito a  $w_{ij}$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial o_i} \frac{\partial o_i}{\partial w_{ij}}. \quad (\text{III.5})$$

Da equação (III.4), temos

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial o_i} = -(p_i - o_i), \quad (\text{III.6})$$

enquanto da expressão (II.7), que descreve o comportamento do neurônio linear, obtemos:

$$\frac{\partial o_i}{\partial w_{ij}} = \alpha s_j; \quad \alpha \in \mathcal{R}_+ \quad (\text{III.7})$$

onde  $s \in \mathcal{R}^n$  é o estímulo fornecido à camada de neurônios de entrada. Desta forma, o gradiente do erro  $\varepsilon$  é:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w_{ij}} = -\alpha(p_i - o_i)s_j; \quad \alpha \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{III.8})$$

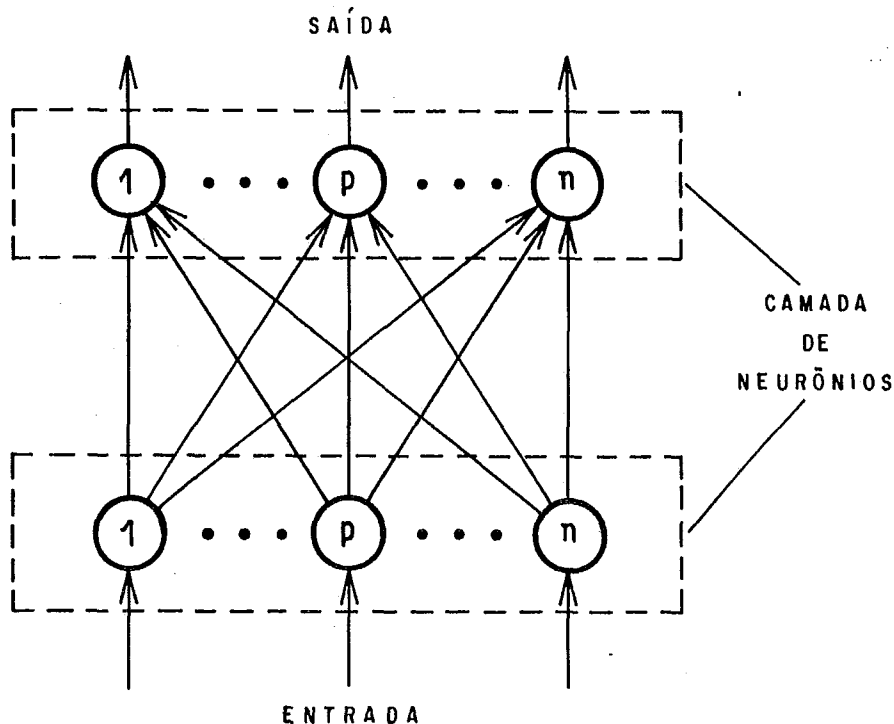
---

† Qualquer rede neuronal com neurônios lineares pode ser substituída por uma equivalente com apenas duas camadas [7].



Tomando-se a variação da eficiência sináptica proporcional ao recíproco do gradiente do erro  $\varepsilon$ , conforme o Método do Gradiente, estabelece-se a regra de aprendizado:

$$\Delta w_{ij} = \eta(p_i - o_i)s_j; \quad 0 < \eta \ll 1. \quad (\text{III.9})$$



**Figura III.2** - Esquema de um rede neuronal com neurônios lineares.

Percebemos que quando as respostas efetiva e desejada da rede neuronal são iguais, a variação da eficiência sináptica é nula, ou seja, a regra de aprendizado de Widrow estabelece um padrão de conexão bem determinado e estável. Uma generalização desta regra para redes neuronais com neurônios semi-lineares foi desenvolvida por RUMELHART [64] e denomina-se *aprendizado por propagação de erros*. Apesar da sofisticação do modelo de Rumelhart, sua regra de aprendizado não resolve o problema da interferência entre padrões de atividade associados, por ser esta uma questão complexa, como veremos na próxima seção.

### § III.3 - Métodos de Síntese

Do que foi analisado na seção anterior, podemos concluir que, devido ao seu caráter informal, heurístico e muitas vezes impreciso, as regras de aprendizado não são instrumentos eficientes na promoção do aprendizado em redes neuronais. Em contraste com este processo de aprendizado dinâmico — onde, partindo-se de uma rede neuronal qualquer, incapaz de executar a tarefa desejada, modifica-se gradualmente o padrão de conexão, através de sucessivas aplicações da regra de aprendizado, de forma a adaptar a referida rede neuronal à sua nova função — a idéia dos *métodos de síntese* é gerar, de uma única vez, uma rede neuronal competente na execução das associações de padrões de atividade desejadas pelo projetista, dispensando a lenta e laboriosa mecânica do aprendizado por regras (Figura III.3). Sendo assim, um método de síntese  $\mathcal{M}$  é um procedimento matemático potente em determinar de forma completa, direta e precisa, o padrão de conexão  $W$  de uma rede neuronal capaz de associar o estímulo  $s$  à resposta  $p$ , conforme determinado pelo projetista:

$$W = \mathcal{M}(s, p). \quad (\text{III.10})$$



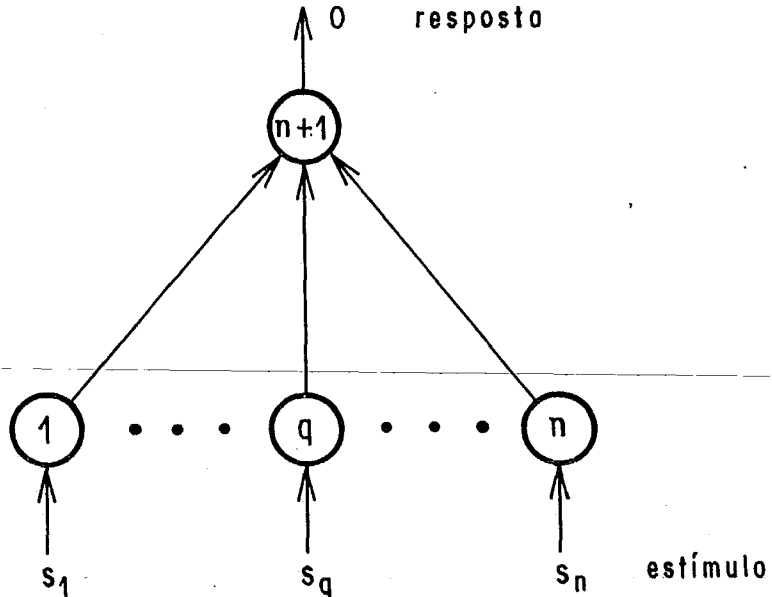
**Figura III.3** - Aplicação do método de síntese.

Da mesma forma que as regras de aprendizado, métodos de síntese não são facilmente determinados e, até o momento, apenas modelos conexionistas simplificados podem ser projetados por estes processos.

Redes neuronais com neurônios lineares são sistemas dinâmicos para os quais existem métodos de síntese, pois a linearidade de suas equações possibilita tratar

matematicamente o problema da determinação de suas eficiências sinápticas.

Seja, por exemplo, um classificador de padrões cuja função é fornecer a resposta  $o \in \mathcal{R}^1$ , representante de uma classe, quando excitado por um estímulo  $s \in \mathcal{R}^n$ , integrante desta classe Figura(III.4).



**Figura III.4** - Classificador neuronal de padrões.

A equação do comportamento do neurônio  $N_{n+1}$ , que fornece a resposta  $o$ , é

$$o = \sum_{j=1}^n w_j s_j, \quad (\text{III.11})$$

onde  $w_j$  é a eficiência da sinapse entre os neurônios  $N_j$  e  $N_{n+1}$ , ou seja, a resposta do classificador pode ser escrita como um produto escalar entre o estímulo  $s$  e o padrão de conexão  $w \in \mathcal{R}^n$ , que é um vetor contendo as eficiências sinápticas  $w_j$ :

$$o = w^T s. \quad (\text{III.12})$$

Supondo que  $\|s\|^2 = s^T s$  seja unitário, podemos resolver a equação (III.12) em relação ao padrão de conexão  $w$ , e obter

$$w = os. \quad (\text{III.13})$$

O método de síntese para o classificador de padrões é, então:

$$w = os, \quad \|s\| = 1. \quad (\text{III.14})$$

Considere, agora, um associador de padrões capaz de associar o estímulo  $s \in \mathcal{R}^n$  a uma resposta  $o \in \mathcal{R}^m$ . Podemos visualizar esta rede neuronal como um conjunto de  $m$  classificadores de padrão  $C_j; 1 \leq j \leq m$  de forma que cada componente  $o_j$  do padrão de atividade  $o$  represente uma classe onde o estímulo  $s$  é classificado, conforme indicado na Figura (III.5). Sendo  $w_j \in \mathcal{R}^n$  o conjunto ordenado das eficiências sinápticas existentes entre os neurônios  $N_i; 1 \leq i \leq n$  da camada de entrada e um neurônio  $N_j$  da camada de saída, de acordo com a equação (III.14), podemos escrever:

$$w_j = o_j s; \quad 1 \leq j \leq m, \quad \|s\| = 1. \quad (\text{III.15})$$

Considerando  $w_j; 1 \leq j \leq m$  como linhas da matriz de conexão  $W$  da rede neuronal, representamos matricialmente o conjunto de equações (III.15) por:

$$W = os^T; \quad \|s\| = 1, \quad (\text{III.16})$$

estabelecendo-se, assim, um método de síntese para este associador de padrões.

Imaginemos que, ao contrário dos modelos apresentados anteriormente, seja necessário associar vários estímulos  $s^k; 1 \leq k \leq p$  a diferentes padrões de resposta  $o^k; 1 \leq k \leq p$ . Sabemos que para cada associação  $s^k/o^k$  há um padrão de conexão dado pela equação (III.16):

$$W^k = o^k (s^k)^T; \quad \|s^k\| = 1, \quad 1 \leq k \leq p. \quad (\text{III.17})$$

É preciso, porém, determinar um padrão de conexão  $W$  único que, sendo uma função  $\mathcal{F}$  dos padrões de conexão  $W^k$  para cada associação  $s^k/o^k$ , forneça a resposta  $o^k$  relacionada ao estímulo  $s^k$ , ou seja,

$$W = \mathcal{F}(W^k); \quad 1 \leq k \leq p, \quad (\text{III.18})$$

e ainda

$$W s^k = o^k; \quad 1 \leq k \leq p. \quad (\text{III.19})$$

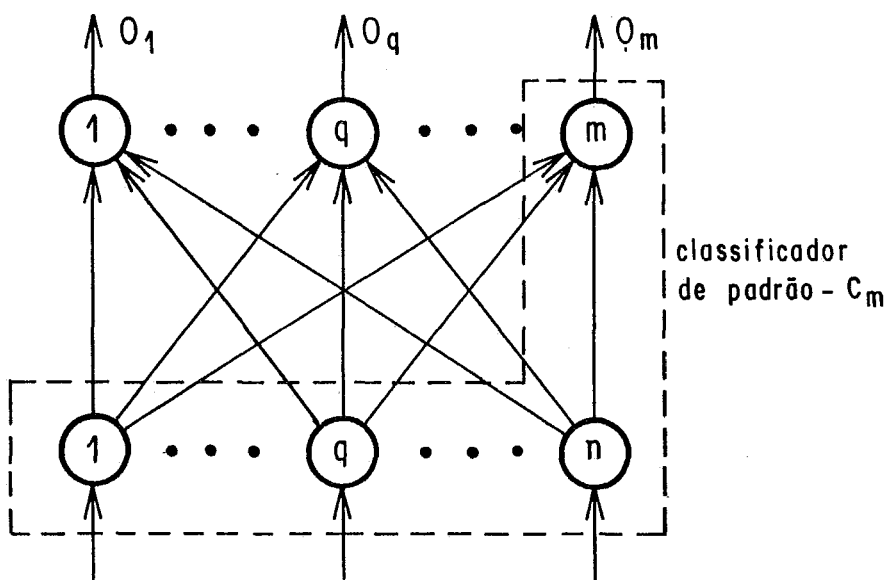


Figura III.5 - Associador neuronal de padrões.

Supondo que os estímulos  $s^l$ ;  $1 \leq l \leq p$  sejam mutuamente ortogonais, o que quer dizer  $(s^k)^T s^l = 0$ ;  $k \neq l$ , e, utilizando a expressão (III.17), o padrão de conexão único é dado por:

$$W = \sum_{k=1}^p W^k = \sum_{k=1}^p o^k (s^k)^T; \quad \|s^k\| = 1, \quad 1 \leq k \leq p, \quad (\text{III.20})$$

pois, devido à mútua ortogonalidade entre os estímulos,

$$W s^l = \sum_{k=1}^p o^k (s^k)^T s^l = o^l (s^l)^T s^l = o^l. \quad (\text{III.21})$$

É interessante observar que este associador de padrões não oferece resposta a um estímulo  $s^l$  não ensinado à rede neuronal e, simultaneamente, ortogonal aos  $p$  estímulos  $s^k$ ;  $1 \leq k \leq p$  já aprendidos, uma vez que

$$W s^l = \sum_{k=1}^p o^k (s^k)^T s^l = 0. \quad (\text{III.22})$$

Contudo, no caso em que o estímulo  $s^l$  não é ortogonal aos estímulos  $s^k$ ;  $1 \leq k \leq p$  aprendidos pelo modelo conexionista, ocorre o fenômeno de interferência, pois

a resposta  $o^l$  associada a este estímulo é uma combinação linear das respostas  $o^k$ ;  $1 \leq k \leq p$  anteriormente aprendidas, ou seja:

$$W s^l = \sum_{k=1}^p o^k (s^k)^T s^l = \sum_{k=1}^p \alpha_k o^k, \quad (\text{III.23})$$

onde  $\alpha_k = (s^k)^T s^l$  representa o grau de superposição (semelhança) entre o estímulo não aprendido e os estímulos conhecidos pela rede neuronal.

A exigência de ortogonalidade entre estímulos, além de restringir severamente a representação do conhecimento no modelo conexionista, limita a capacidade de aprendizado do sistema a um número máximo de associações igual à quantidade de neurônios na camada de entrada da rede neuronal. Uma vez que em um espaço de dimensão  $n$ , o projetista só pode obter  $n$  vetores mutuamente ortogonais, ao tentar ensinar à rede neuronal qualquer associação além destas, haverá interferência entre os padrões de atividade, de forma que as respostas aos estímulos não aprendidos estarão previamente determinadas pelo aprendizado já estabelecido.

Observando o problema da síntese de associadores de múltiplos padrões por um diferente prisma, consideremos as matrizes  $S \in \mathcal{R}^{np}$ , cuja  $k$ -ésima coluna contém o estímulo  $s^k$ , e  $O \in \mathcal{R}^{mp}$ , cuja coluna  $k$  contém a resposta  $o^k$ . O comportamento do referido associador pode, então, ser expresso por

$$WS = O. \quad (\text{III.24})$$

Lembrando que a matriz  $S$  não é necessariamente quadrada, e supondo que os estímulos  $s^k$ ;  $1 \leq k \leq p$  sejam linearmente independentes [65], a solução do sistema matricial dado em (III.24) é:

$$W = OS^+, \quad (\text{III.25})$$

onde  $S^+$  é a matriz *pseudo-inversa* [66] de  $S$ . Este método de síntese, apesar de não exigir ortogonalidade entre os estímulos a serem aprendidos, requer um grande volume de cálculo, além de não evitar a interferência e a limitação de aprendizado antes comentadas, devido à exigência de independência linear entre os padrões de atividade ditos estímulos.

Finalmente, é interessante comentar que, na impossibilidade de resolver de maneira exata o sistema matricial (III.24), devido ao relaxamento das restrições

nos estímulos ou ainda ao aumento do número de associações, pode-se utilizar processos aproximativos, definindo-se um erro  $\varepsilon$  e minimizando-o, como fez Widrow em sua regra de aprendizado:

$$\varepsilon = \|WS - O\|_M; \quad \text{onde} \quad \|A\|_M = \text{traço}(A^T A). \quad (\text{III.26})$$

O método de síntese é, então [67]:

$$\min_W [\varepsilon], \quad (\text{III.27})$$

e sua eficiência é inversamente proporcional à diferença entre o número  $p$  de associações a serem aprendidas e a quantidade  $n$  de neurônios na camada de entrada da rede neuronal.

Esta análise dos métodos de síntese para redes neuronais com neurônios lineares será muito útil nos próximos capítulos, quando se estabelecerá um método de síntese para redes neuronais de Hopfield.

## Capítulo IV

### Critérios de Síntese

#### § IV.1 - Conceitos e Definições

Como examinamos no capítulo anterior, uma das maneiras de promover o aprendizado em redes neuronais é através dos métodos de síntese. Ocorre, porém, que métodos formais desse tipo apenas existem para redes neuronais com neurônios lineares, justificando, assim, que neste trabalho estejamos interessados no desenvolvimento de um método para a síntese de redes neuronais com neurônios mais sofisticados, como os das redes neuronais de Hopfield.

Do que sabemos do modelo de Hopfield, podemos concluir que a definição de método de síntese apresentada anteriormente — procedimento matemático capaz de determinar de forma completa, direta e precisa, o padrão de conexão  $W$  de uma rede neuronal capaz de associar o estímulo  $s$  à resposta  $p$  — é mais ampla do que necessitamos, pois redes neuronais de Hopfield são memórias de acesso pelo conteúdo, ou seja, associam padrões de atividade a si mesmos criando pontos de mínimo na sua superfície de energia. Percebemos, então, que sintetizar uma rede neuronal de Hopfield é conformar a sua superfície de energia de tal modo que esta possua mínimos nos pontos do espaço de estado desejados pelo projetista; pontos estes representantes dos padrões de atividade a serem armazenados nessa memória de acesso pelo conteúdo. Sendo o *conjunto estável*  $S(W)$  definido pelo agrupamento de todos os pontos de mínimo da superfície de energia da rede neuronal cujo padrão de conexão é dado por  $W$ , o *problema da síntese de redes neuronais de Hopfield* é determinar o padrão de conexão  $W$  de forma que os  $m$  padrões de atividade  $s^i; 1 \leq i \leq m$ , dados pelo projetista, sejam elementos do conjunto estável  $S(W)$ :

$$\text{Determinar } W \text{ tal que } s^i \in S(W); \quad 1 \leq i \leq m. \quad (\text{IV.1})$$

É interessante notar que o conjunto  $S(W)$  pode conter outros elementos além dos padrões de atividade  $s^i; 1 \leq i \leq m$  e, de fato, torna-se necessário que avaliemos o número  $n_0$  mínimo de neurônios da rede neuronal tal que a cardinalidade de  $S(W)$ , denotada por  $|S(W)|$ , tenha a possibilidade de superar o número  $m$  de padrões de atividade escolhidos pelo projetista, pois se isto não ocorre, é impossível que



$$s^i \in S(W); 1 \leq i \leq m:$$

$$\text{Determinar } n_0 \text{ tal que } |S(W)| \geq m. \quad (\text{IV.2})$$

Supondo superada a avaliação de  $n_0$ , partimos para a efetiva determinação das  $n(n-1)/2$  eficiências sinápticas que integram a matriz simétrica de conexão  $W$ , contando para isto, com um grupo de  $n$  equações, dadas pelas regras de ativação dos  $n \geq n_0$  neurônios lógicos da rede neuronal. De fato, mesmo em pequenas redes neuronais, o número  $n$  de equações disponíveis é muito inferior ao número  $n(n-1)/2$  de eficiências sinápticas incógnitas, nos levando a imaginar que, ainda que não esquecendo a não-linearidade do problema, devem existir vários padrões de conexão  $W$ , e conseqüentemente várias redes neuronais de Hopfield, para a solução de um único problema de síntese. Em outras palavras, é muito provável, tão mais provável quanto maior o número de neurônios da rede neuronal, que exista um conjunto não-vazio  $\mathcal{W}^*$  de *sínteses viáveis*.

Não sabemos como avaliar o número mínimo  $n_0$  de neurônios da rede neuronal necessário ao armazenamento de  $m$  padrões de atividade  $s^i; 1 \leq i \leq m$ , e também ignoramos um processo capaz de decidir sobre a existência de um conjunto  $\mathcal{W}^*$  de sínteses viáveis, porém sabemos que é altamente provável que as duas questões acima expostas sejam superadas quando  $n$  é muito maior do que  $m$ , ou seja, assumiremos por hipótese básica que:

$$\text{Para } n \gg m, \text{ existe } \mathcal{W}^* \text{ tal que } s^i \in S(W); 1 \leq i \leq m \text{ para todo } W \in \mathcal{W}^*. \quad (\text{IV.3})$$

Sempre que um problema apresenta várias soluções, é normal se pensar em descobrir a melhor delas segundo algum critério ou objetivo pré-determinado, o que por definição é a *solução ótima* do critério. Como, por hipótese, o problema da síntese de redes neuronais de Hopfield apresenta múltiplas respostas, nada mais razoável que definirmos *critérios de síntese* através dos quais estabeleceremos soluções ditas *sínteses ótimas*. A Figura (IV.1) é o esquema do conjunto de sínteses viáveis  $\mathcal{W}^*$  e duas curvas de nível representantes de dois critérios de síntese através dos quais as sínteses ótimas são determinadas.

Nessa nova visão, o método de síntese  $\mathcal{M}$  é um processo de escolha de um padrão de conexão  $W$ , dependente, não somente dos padrões de atividade dados

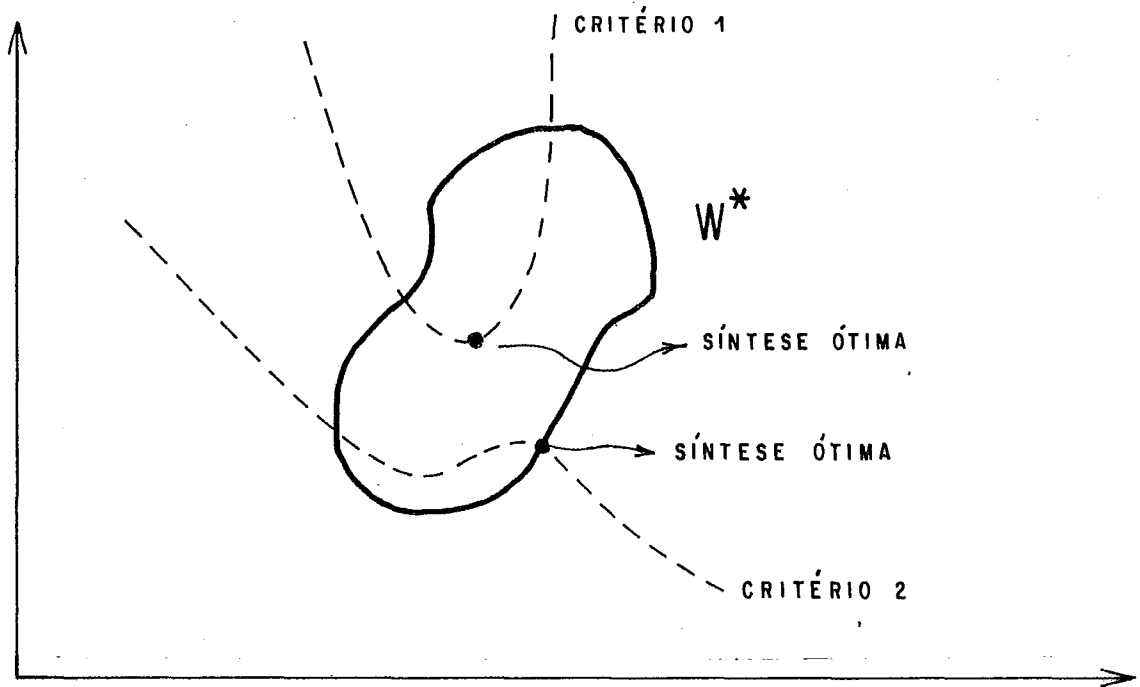


Figura IV.1 - Sínteses ótimas.

$s^i$ ;  $1 \leq i \leq m$  a serem armazenados na rede neuronal de Hopfield, mas também do critério de síntese  $C$ , que é um parâmetro de controle ajustado pelo projetista de acordo com seus objetivos:

$$W = M(s^i, C) \text{ tal que } s^i \in S(W); \quad 1 \leq i \leq m. \quad (\text{IV.4})$$

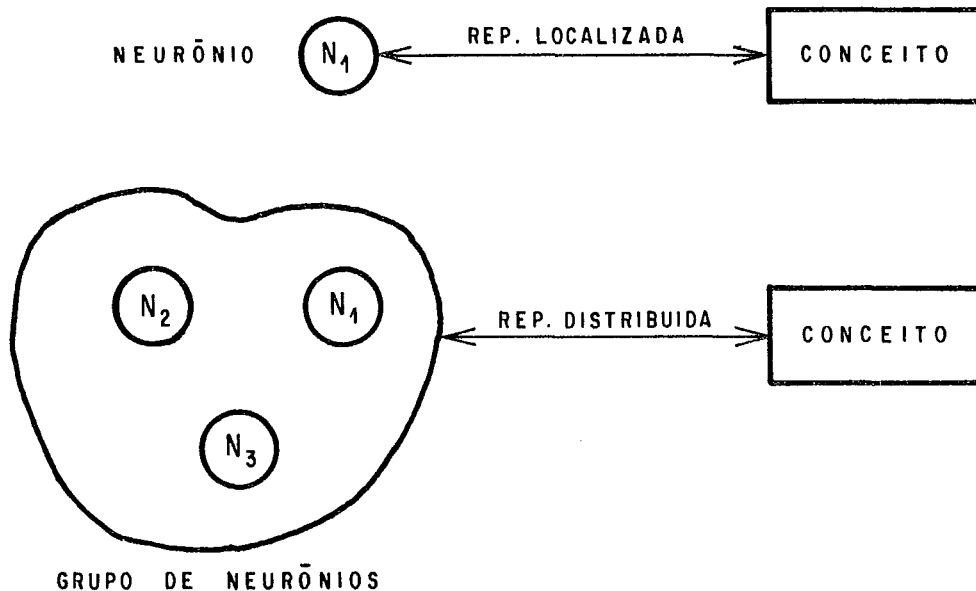
O propósito central deste capítulo é definir alguns critérios de síntese cujo controle é exercido sobre a qualidade da síntese obtida, ou de outra forma, sobre a capacidade seletiva do método de síntese na filtragem de soluções indesejáveis.

Continuando nossas definições, precisamos observar que padrões de atividade são apenas estados de ativação dos neurônios da rede neuronal em certos instantes de tempo, não tendo significado algum a não ser que o projetista lhes atribua responsabilidades específicas como representantes de objetos ou conceitos externos ao sistema neuronal. Esta construção de associações entre entidades conceituais e padrões de atividade, que é parte do processo denominado *representação do conhecimento em redes neuronais* [68], pode ser realizada de maneira localizada ou

distribuída. A *representação localizada do conhecimento* [69] consiste em atribuir a responsabilidade de representação de um conceito a um único neurônio, estando assim o conceito presente na rede neuronal quando o correspondente neurônio estiver excitado; enquanto que na *representação distribuída do conhecimento* [70,71], é a ativação simultânea de um grupo de neurônios que representa a entidade associada (Figura IV.2). Representações localizadas, ainda que usadas em alguns modelos neuronais, são pouco plausíveis do ponto-de-vista biológico (é difícil crer que a morte de um único neurônio seja capaz de destruir o conhecimento humano acerca de um conceito), além de atacarem frontalmente o paradigma conexionista, se prestando mais intensamente aos modelos computacionais seqüenciais. Já nas representações distribuídas, onde um neurônio pode fazer parte de vários grupos representantes, surgem questões de difícil resposta como o acesso à representação espacialmente distribuída, a escolha dos grupos de neurônios para cada associação e a representação simultânea de conceitos. Percebemos, também, que a associação de cada conceito a um padrão de atividade completamente determinado pelo projetista, é tarefa árdua e, muitas vezes, desnecessária, pois a rede neuronal pode possuir um número de neurônios muito maior do que o projetista precisa para representar seus conceitos. Além disto, quando o projetista define completamente o padrão de atividade representante de um conceito, impõe à rede neuronal que aprenda uma *representação externa*, nem sempre compatível com suas características particulares, impedindo assim, que o sistema crie suas próprias *representações internas*, responsáveis pela compatibilização entre seus vários padrões estáveis.

Desta forma, com o objetivo de facilitar o projetista e o processo de síntese, é interessante que apenas parte do padrão de atividade represente o conceito, liberando o restante dos neurônios para assumirem o estado de ativação que for mais útil ao método de síntese. Este enfoque permite enxergar o processo de síntese como sendo, em última instância, a criação de representações internas de um mundo exterior.

Dada uma rede neuronal com  $n$  neurônios lógicos, com estados de ativação  $a_i(t) \in \mathcal{X}$ ;  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ , e um padrão de atividade  $v \in \mathcal{X}^n$  representante de um conceito, definimos  $K(v)$  como o conjunto de neurônios cujo estado de ativação é



**Figura IV.2** - Representação do conhecimento em redes neuronais.

determinado pelo projetista antes do processo de síntese (representação externa) e  $K(v)$  como o conjunto de neurônios cujo estado de ativação é desconhecido pelo projetista, pois será determinado pelo método de síntese (representação interna) (Figura IV.3). Finalmente, uma vez que em uma rede neuronal existem muitos padrões de atividade que não são estáveis, as entidades a estes associadas só podem ser representadas instantaneamente, e por isto dizemos que uma rede neuronal *reconhece* um conceito  $A$ , se, e somente se, o padrão de atividade que o representa é estável.

Como o neurônio lógico possui apenas dois estados de ativação (unitário ou nulo), um padrão de atividade  $v \in \mathcal{H}^n$  está plenamente determinado ao se conhecer os conjuntos que definimos por  $A(v)$ , de neurônios excitados (estado de ativação unitário), e  $\bar{A}(v)$ , de neurônios inibidos (estado de ativação nulo), no referido padrão de atividade. Afirmamos que dois padrões de atividade  $v \in \mathcal{H}^n$  e  $r \in \mathcal{H}^n$  são *independentes*, denotado por  $v \perp r$ , se, e somente se,  $A(v) \cap A(r) = \emptyset$ , o que

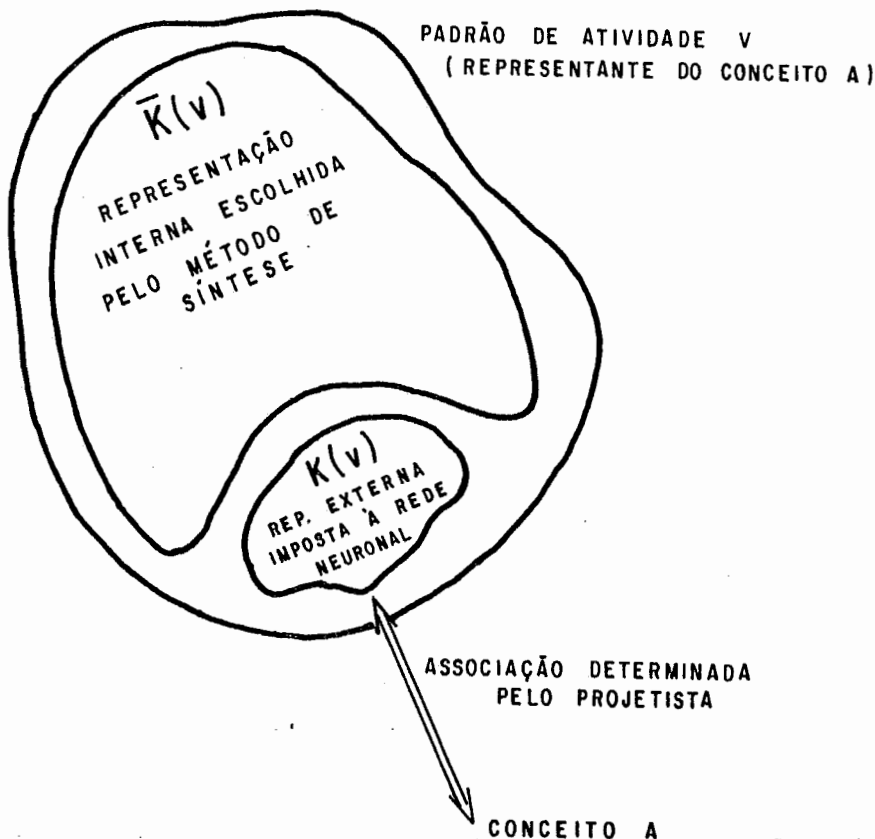


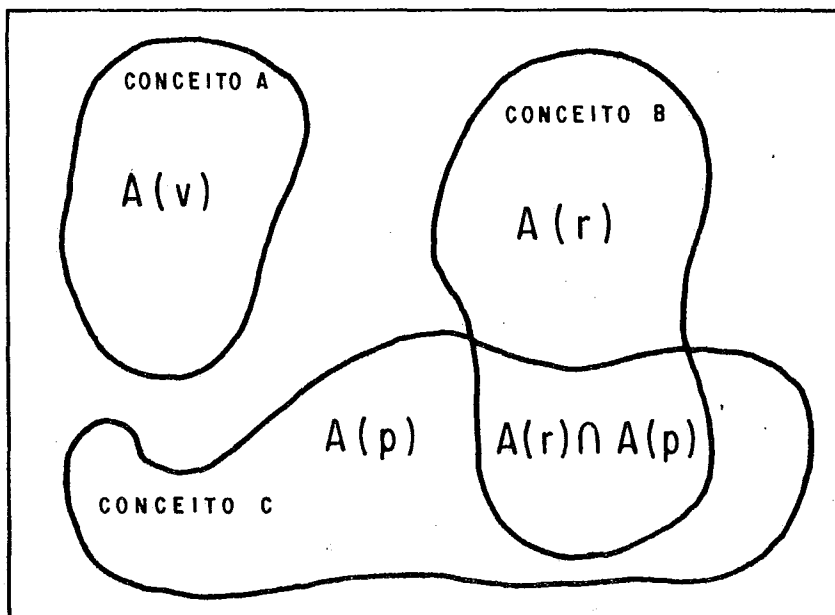
Figura IV.3 - Representações externa e interna.

equivale a:

$$v \perp r \leftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i r_i = 0. \quad (\text{IV.5})$$

A independência entre padrões de atividade implica que não existe nenhum neurônio da rede neuronal que esteja excitado, simultaneamente, nas duas representações, ou seja que padrões de atividade independentes são ideais para representar conceitos completamente diferentes ou opostos. Como consequência, conceitos com algum grau de semelhança podem, ou devem, ser representados por padrões de atividade não independentes ou, por definição, *dependentes*. A Figura (IV.4) é o esquema de uma rede neuronal onde três conceitos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão representados pelos padrões de atividade  $v$ ,  $r$  e  $p$ , correspondentemente. Os conceitos  $A$  e  $B$  expressam idéias diferentes, e por isto são representados pelos padrões de

atividade independentes  $v$  e  $r$ , enquanto o conceito  $C$ , por ter significado comum com o conceito  $B$ , é representado por um padrão de atividade  $p$ , dependente do padrão de atividade  $r$ .



**Figura IV.4** - Independência entre padrões de atividade.

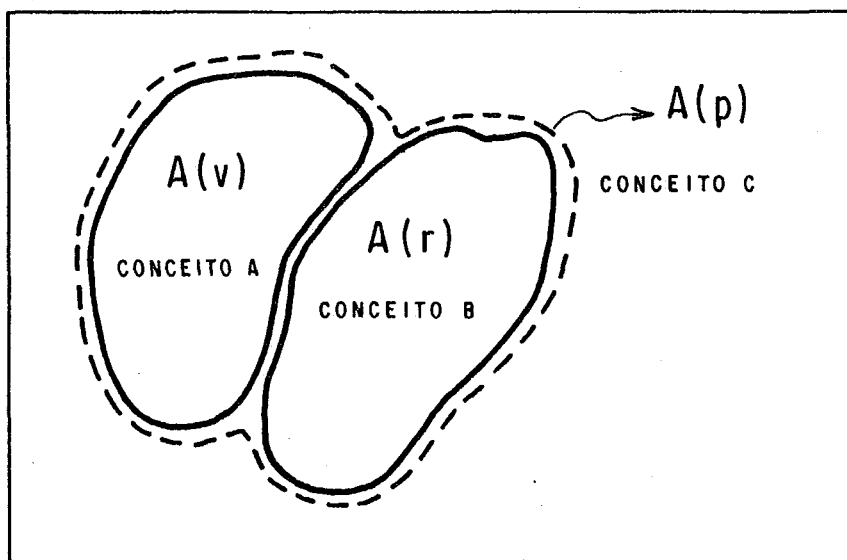
Definimos a *soma* de dois padrões de atividade independentes  $v \in \mathcal{X}^n$  e  $r \in \mathcal{X}^n$ , denotado por  $v + r$ , como o padrão de atividade  $p \in \mathcal{X}^n$  tal que:

$$p_i = v_i + r_i; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{IV.6})$$

Somar dois padrões de atividade independentes  $v$  e  $r$ , representantes de conceitos  $A$  e  $B$ , é gerar um novo conceito  $C$ , a partir de dois subconceitos  $A$  e  $B$ , ou ainda representar dois conceitos simultaneamente em uma rede neuronal (Figura IV.5).

Dizemos que o padrão de atividade  $v \in \mathcal{X}^n$  é *maior* que o padrão de atividade  $r \in \mathcal{X}^n$  se  $v$  possui um número maior de neurônios excitados do que  $r$  e, além disto, todos os neurônios excitados em  $r$  também estão excitados em  $v$ , ou seja que  $v > r$  se, e somente se:

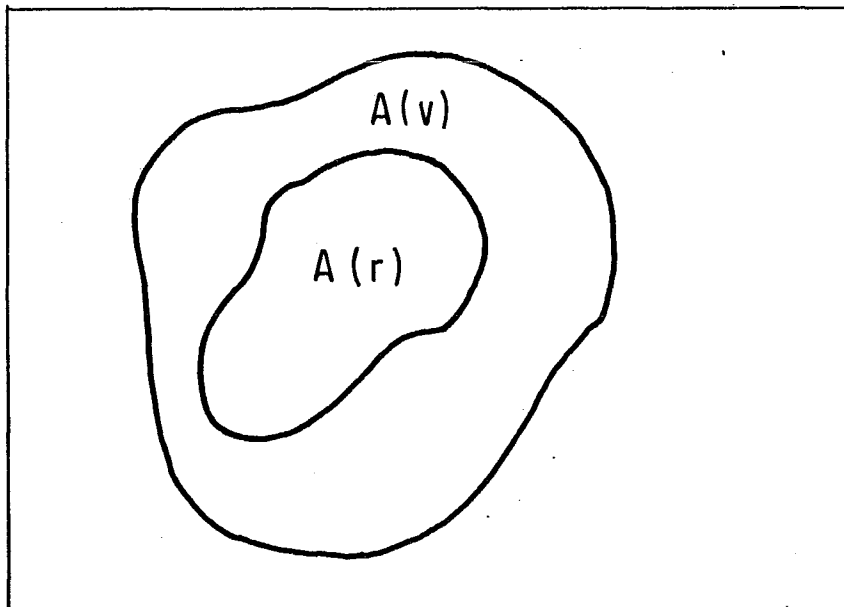
$$A(r) \subset A(v). \quad (\text{IV.7})$$



**Figura IV.5** - Soma de padrões de atividade.

A Figura (IV.6) mostra o esquema de uma rede neuronal onde estão representados dois padrões de atividade  $v$  e  $r$  de forma que  $v > r$ . Notamos que, como  $v > r$ , é conclusivo que  $v$  e  $r$  são dependentes pois  $A(v) \cap A(r) \neq \emptyset$ . Desta forma, a relação “ $>$ ” (maioridade), intuitivamente, expressa semelhança entre padrões de atividade, mas além disto nos fornece a idéia de que um dos padrões de atividade possui algo a mais do que o outro. Observamos ainda que, toda vez que  $v$  é representado na rede neuronal,  $r$  também se faz presente, significando uma primitiva capacidade de *generalização* de conceitos. Assim, se  $v$  representa um elemento de uma classe representada por  $r$ , toda vez que este elemento for reconhecido pela rede neuronal, sua classe também o será.

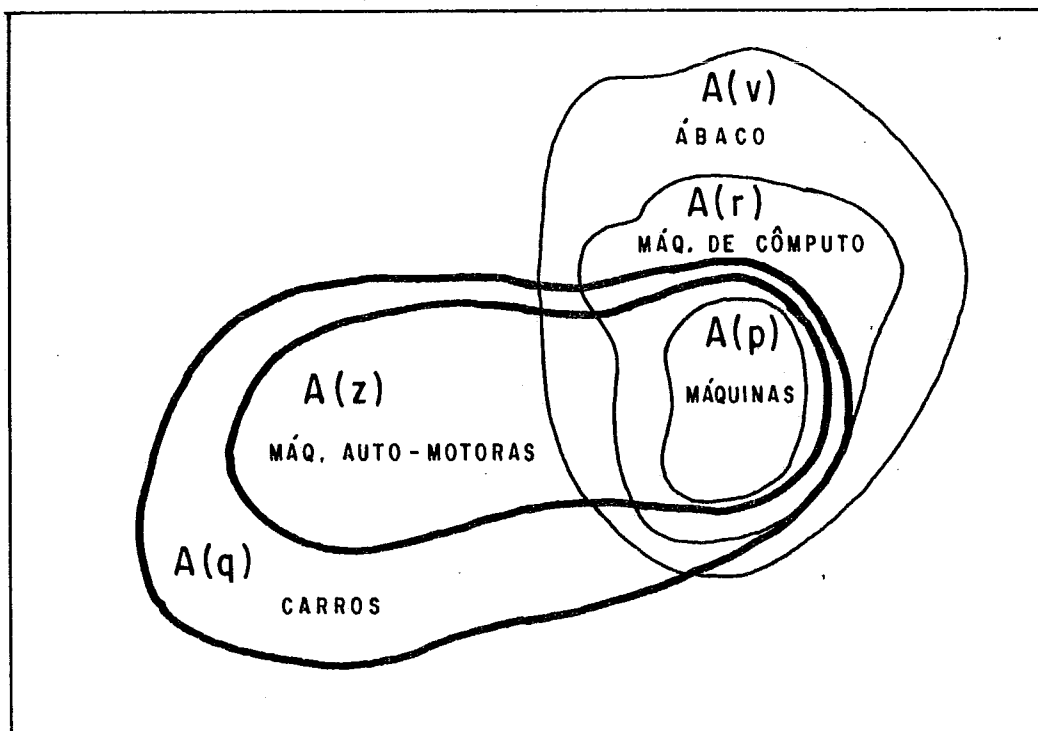
Seja, por exemplo, o “ábaco” um elemento da classe das “máquinas de cômputo” que, por sua vez, é uma subclasse da classe das “máquinas”; considere ainda o “carro” como um elemento da classe das “máquinas auto-motoras” que, certamente, é uma subclasse da já referida classe das “máquinas”. É interessante, então, que na *representação hierárquica* desta estrutura, sempre que



**Figura IV.6** - Maioridade do padrão de atividade  $v$  sobre o padrão de atividade  $r$ .

o padrão de atividade  $v$ , representante do objeto “ábaco”, for reconhecido pela rede neuronal, também estejam presentes os padrões de atividade  $r$  e  $p$ , representantes respectivamente da classe das “máquinas de cômputo” e da classe das “máquinas”. Ao mesmo tempo, quando o padrão de atividade  $q$ , representante do objeto “carro”, se fizer presente na rede neuronal, por generalização, devem ser visíveis os padrões de atividade  $z$  e  $p$ , que representam a classe das “máquinas automotoras” e a classe das “máquinas”, correspondentemente. Através da relação de maioria, podemos definir os padrões de atividade mencionados de forma a obter a hierarquia e a capacidade de generalização automática desejadas, bastando entender que quanto maior o nível hierárquico de uma classe, menor deve ser seu padrão de atividade representante, pois assim a ativação de um padrão de atividade que representa um elemento da classe, leva à simultânea ativação do padrão de atividade associado à classe. Escolhemos, então, os padrões de atividade  $v$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $q$  e  $z$  de tal forma que  $v > r > p$  e  $q > z > p$ , conforme ilustrado na Figura (IV.7).





**Figura IV.7 - Representação hierárquica.**

Dado que o padrão de atividade  $v$  é maior que o padrão de atividade  $r$ , definimos o *conjunto complementar* de  $r$  em relação a  $v$ , denotado por  $N(v, r)$ , como o conjunto de neurônios excitados em  $v$  e inibidos em  $r$ :

$$N(v, r) = A(v) - A(r), \quad (\text{IV.8})$$

e dizemos que a *distância* entre  $v$  e  $r$ ,  $d(v, r)$ , é:

$$d(v, r) = |N(v, r)|. \quad (\text{IV.9})$$

Uma  $\alpha$ -*extensão* de um padrão de atividade  $v$  é um padrão de atividade  $E_\alpha(v)$  tal que:

$$E_\alpha(v) > v \quad \text{e} \quad d(E_\alpha(v), v) = \alpha. \quad (\text{IV.10})$$

Sendo  $v$  um padrão de atividade representante de uma classe, os padrões de atividade  $E_\alpha(v)$ ,  $E_\alpha(E_\alpha(v))$ ,  $E_\alpha(E_\alpha(E_\alpha(v)))$ , ..., representam subclasses de  $v$ , formando uma estrutura hierárquica cuja diferença entre níveis hierárquicos contíguos

(distância entre padrões de atividade que mantêm uma relação de maioria imediata) é  $\alpha$  (Figura IV.8).

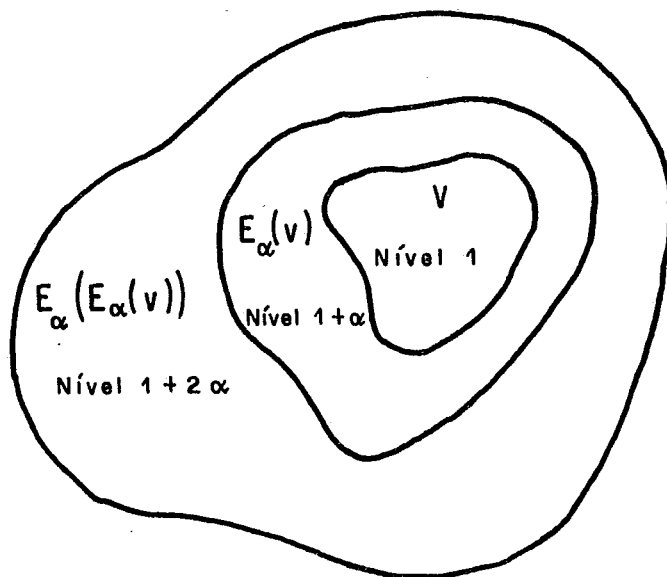


Figura IV.8 - Alfa-extensões de um padrão de atividade.

**Teorema IV.1.** *Seja  $v \in \mathcal{H}^n$  um padrão de atividade qualquer, então  $v$  e  $E_1(v)$  não podem ser estáveis na mesma rede neuronal.*

**Prova:**

Certamente o conjunto complementar de  $v$  em relação a  $E_1(v)$  possui um único elemento que denominamos  $k$ .

Supondo ambos os padrões de atividade estáveis, ocorre para o neurônio  $N_k$ :

$$v_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n w_{kj} v_j - \theta_k \leq 0, \quad (\text{IV.11})$$

e ainda

$$(E_1(v))_k = 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n w_{kj} (E_1(v))_j - \theta_k > 0. \quad (\text{IV.12})$$

Lembrando que  $E_1(v) > v$ , então:

$$v_j = (E_1(v))_j \quad ; \quad j \neq k, \quad (\text{IV.13})$$

e como  $w_{kk} = 0$  (pois nas redes neuronais de Hopfield não há auto-excitação) ocorre que:

$$w_{kk}v_k = w_{kk}(E_1(v))_k. \quad (\text{IV.14})$$

Das expressões (IV.13) e (IV.14) podemos escrever:

$$\sum_{j=1}^n w_{kj}v_j - \theta_k = \sum_{j=1}^n w_{kj}(E_1(v))_j - \theta_k, \quad (\text{IV.15})$$

o que contradiz a hipótese registrada nas equações (IV.11) e (IV.12).  $\square$

Do ponto-de-vista de representação do conhecimento em redes neuronais de Hopfield, o Teorema IV.1 significa que não se pode construir uma estrutura hierárquica cuja diferença entre os níveis de hierarquias vizinhas seja inferior a dois. Da mesma forma que o ser humano é limitado na diferenciação de tamanhos ou pesos muito próximos, as redes neuronais de Hopfield não distinguem entre padrões de atividade muito semelhantes.

**Corolário IV.2.** *Um padrão de atividade com um único neurônio excitado não pode ser estável em uma rede neuronal de Hopfield.*

**Prova:**

Seja  $v \in \mathcal{X}^n$  um padrão de atividade nulo, ou seja um padrão de atividade onde todos os neurônios são inibidos. Então  $v$  é estável, uma vez que para qualquer  $\theta_j \geq 0; 1 \leq j \leq n$ † ocorre:

$$\sum_{k=1}^n w_{jk}v_k - \theta_j < 0, \text{ pois } v_j = 0 \quad ; \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{IV.16})$$

Mas qualquer padrão de atividade com apenas um neurônio excitado pode ser considerado como a primeira extensão  $E_1(v)$  do padrão nulo  $v$ , e então, pelo Teorema IV.1, não pode ser estável.  $\square$

---

† Por definição estabelecida no Capítulo II, o potencial limiar é sempre não-negativo.

**Teorema IV.3.** *Em uma rede neuronal de Hopfield, dado um padrão estável  $v \in \mathcal{X}^n$  e uma de suas  $\alpha$ -extensões  $E_\alpha(v)$ , se ocorre que  $w_{ij} \leq 0$ ;  $i, j \in N(E_\alpha(v), v)$ , então cada extensão  $E_k(v)$ ;  $N(E_k(v), v) \subseteq N(E_\alpha(v), v)$ ,  $1 \leq k \leq \alpha$  não é estável.*

**Prova:**

a) Se  $k = 1$ , então  $E_k(v)$  não é estável em decorrência do Teorema IV.1.

b) Seja o neurônio  $N_l \in N(E_k(v), v)$ ;  $N(E_k(v), v) \subseteq N(E_\alpha(v), v)$ ,  $2 \leq k \leq \alpha$ , então seu impulso total de entrada é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj}(E_k(v))_j - \theta_l. \quad (\text{IV.17})$$

A equação acima pode ser escrita como:

$$\sum_{j \in A(v)} w_{lj}(E_k(v))_j + \sum_{j \in N(E_k(v), v)} w_{lj}(E_k(v))_j + \sum_{j \in \bar{A}(E_k(v))} w_{lj}(E_k(v))_j - \theta_l. \quad (\text{IV.18})$$

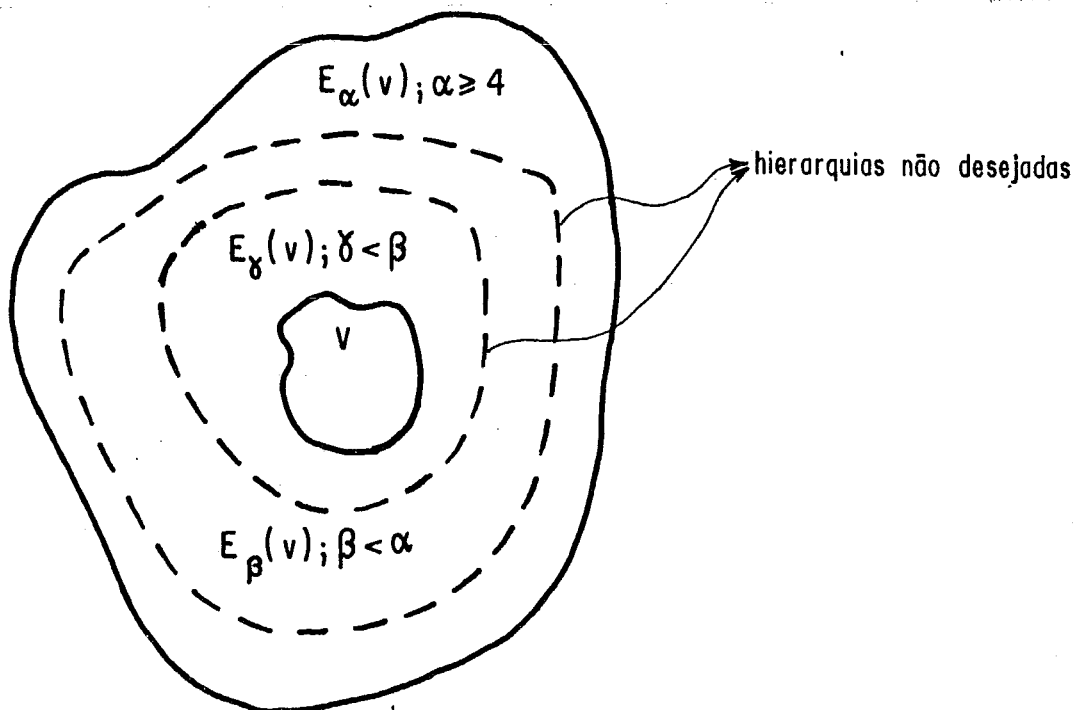
O terceiro somatório da equação (IV.18) é nulo pois  $(E_k(v))_j = 0$ ;  $j \in \bar{A}(E_k(v))$ . O segundo somatório, por sua vez, é não-positivo pois  $w_{lj} \leq 0$ ;  $l, j \in N(E_k(v), v)$ . Finalmente o restante da equação também é não-positivo pois  $(E_k(v))_j = v_j$ ;  $j \in A(v)$  e, além disto,  $v$  é estável implicando em  $v_l = 0$ , ou de outra maneira:

$$\sum_{j \in A(v)} w_{lj}v_j - \theta_l \leq 0, \quad (\text{IV.19})$$

sendo assim,  $E_k(v)$  não é estável.  $\square$

Em uma rede neuronal de Hopfield, estabelecido que os padrões de atividade  $v$  e  $E_\alpha(v)$  sejam estáveis e representantes de duas classes de uma hierarquia, existe a possibilidade de que algumas das extensões  $E_k(v)$ ;  $2 \leq k \leq \alpha$  sejam estáveis, fazendo o papel de hierarquias indesejáveis em níveis intermediários às classes definidas pelo projetista (Figura IV.9). O Teorema IV.3 nos demonstra como sintetizar redes neuronais de forma a evitar que padrões estáveis não previstos pelo projetista venham a interferir na representação hierárquica de entidades.

Em uma rede neuronal de Hopfield, um padrão de atividade estável é dito *padrão estável maximal* quando nenhum padrão estável da rede neuronal é maior do que ele. Uma vez que a relação de maioria entre padrões de atividade



**Figura IV.9** - Estruturas hierárquicas não projetadas.

é uma ordem parcial [72] sobre o conjunto estável da rede neuronal, é possível que este contenha vários padrões estáveis maximais. Como vimos anteriormente, dentro do conceito de representação hierárquica, quanto mais baixo o nível da hierarquia, maior deve ser o padrão estável representante, e desta forma, padrões estáveis maximais são fortes candidatos à representação das instâncias mais baixas de uma hierarquia. O Corolário IV.4 estabelece as condições de síntese de uma rede neuronal com um padrão estável maximal.

**Corolário IV.4.** *Se o padrão de atividade  $v$  é estável em uma rede neuronal de Hopfield onde  $w_{ij} \leq 0; i, j \in \bar{A}(v)$ , então  $v$  é um padrão estável maximal.*

**Prova:**

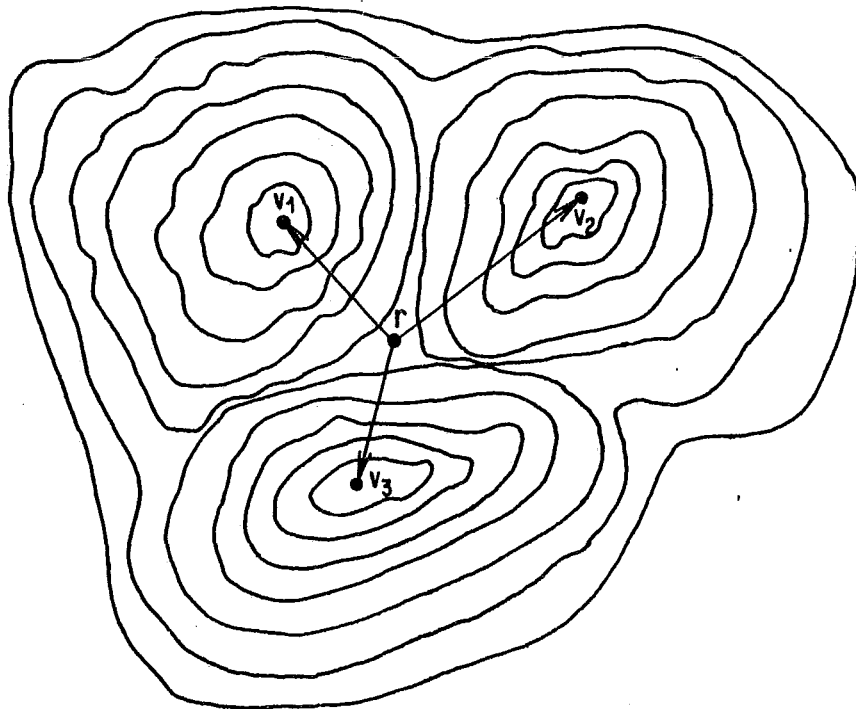
Imediata a partir do Teorema IV.3 com  $\alpha = |\bar{A}(v)|$ .  $\square$

Até aqui consideramos a criação de padrões de atividade estáveis, com deter-

minadas características de representação do conhecimento, sem nos preocuparmos, porém, com a evolução dinâmica da rede neuronal de um padrão de atividade qualquer a um dos referidos padrões de atividade estáveis. O fato é que só existem duas maneiras de uma rede neuronal de Hopfield atingir um padrão de atividade estável  $v$ ; na primeira delas, o projetista, tendo controle sobre o estado de ativação de cada neurônio da rede neuronal, excita os neurônios  $N_i \in A(v)$  e inibe os neurônios  $N_i \in \bar{A}(v)$ , fazendo, assim, com que o padrão de atividade inicial seja o próprio padrão estável  $v$ , e então não há evolução da rede neuronal no tempo. Na segunda das maneiras, o projetista representa na rede neuronal um padrão de atividade não-estável  $r$  e, após o processo de evolução dinâmica para a redução de sua energia computacional, o sistema conexionista atinge o padrão de atividade estável  $v$ . A princípio, a excitação direta de uma rede neuronal de Hopfield com um padrão estável  $v$  parece de pouca utilidade, mas é desta forma que ela pode operar como um reconhecedor de padrões, reconhecendo os padrões de atividade estáveis e rejeitando os padrões de atividade que impliquem em uma evolução dinâmica. Já a excitação de uma rede neuronal com um padrão de atividade não-estável  $r$ , resultando em sua posterior evolução no tempo, é fundamental para as aplicações nas memórias de acesso pelo conteúdo, como visto anteriormente.

Devido ao comportamento probabilístico das redes neuronais de Hopfield — lembremo-nos que, apenas um neurônio, escolhido aleatoriamente, muda de estado a cada instante — é natural que a sua excitação por um padrão de atividade não-estável resulte, ao final do processo dinâmico, em diferentes padrões de atividade estáveis em diferentes situações, representando as várias respostas, certamente próximas entre si, que uma memória de acesso pelo conteúdo pode fornecer a uma única chave de busca (Figura IV.10). Dizemos que o padrão de atividade não-estável  $r$  decai com probabilidade  $p$  para o padrão de atividade estável  $v$ ,  $(r \Rightarrow v)_p$ , se, para um número muito grande de experimentos, partindo do padrão de atividade inicial  $r$ , na sua evolução dinâmica, a rede neuronal atinge o padrão estável  $v$  em um percentual  $p$  de casos.

No que se refere à representação do conhecimento em redes neuronais, o decaimento com probabilidade  $p_i$ ;  $1 \leq i \leq k$  do padrão de atividade  $r$ , representante do conceito  $A$ , em  $k$  diferentes padrões estáveis  $v^i$ ;  $1 \leq i \leq k$ , representantes dos



**Figura IV.10** - Superfície de energia e decaimento do padrão de atividade  $r$ .

conceitos  $B_i; 1 \leq i \leq k$ , pode ser interpretado como o estabelecimento de uma regra de inferência de dedução probabilística [73,74], onde o conceito  $A$  implica no conceito  $B_i$  com probabilidade  $p_i$ , ou seja:

$$\text{Probabilidade } A \rightarrow B_i = p_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq k. \quad (\text{IV.20})$$

Experimentalmente, a determinação das probabilidades de decaimento é um trabalho árduo, pois requer um número muito grande de simulações da evolução da rede neuronal e, por outro lado, teoricamente não dispomos de meios para realizar esta avaliação. É, então, interessante investigarmos a existência de *decaimentos determinísticos*, ou seja decaimentos com probabilidade unitária. Em vista disto, dizemos que o padrão de atividade  $v$  é *auto-estável* em relação ao padrão de atividade  $t$ , denotado por  $\langle v/t \rangle$ , quando a rede neuronal se estabiliza no padrão de atividade  $v$  sempre que inicialmente excitada com o padrão de atividade  $t < v$ :

$$\langle v/t \rangle \leftrightarrow (t \Rightarrow v)_1; \quad t < v. \quad (\text{IV.21})$$

**Teorema IV.5.** *Em uma rede neuronal de Hopfield onde todos os  $n$  neurônios possuem o mesmo potencial limiar  $\theta$ , para que o padrão de atividade  $v$  seja auto-estável em relação a um padrão de atividade  $t$  tal que  $|A(t)| \geq 2$ , é suficiente que:*

- a)  $w_{ij} \leq -w$ ;  $i \in A(t)$ ,  $j \in \bar{A}(t)$ ,  $w > 0$ ,
- b)  $w_{ij} \leq \frac{w}{(|A(v)| - |A(t)|)}$ ;  $i \in \bar{A}(v)$ ,  $j \in \{A(v) - A(t)\}$ ,
- c)  $w_{ij} > \theta$ ;  $i \in A(t)$ ,  $j \in A(t)$ ,
- d)  $w_{ij} \geq -w'$ ;  $i, j \in \{A(v) - A(t)\}$ ,  $w' > 0$ ,
- e)  $w_{ij} \geq w'(|A(v)| - |A(t)|) + \theta$ ;  $i \in A(t)$ ,  $j \in \{A(v) - A(t)\}$ .

**Prova:**

Seja  $p(\alpha)$  o padrão de atividade da rede neuronal no tempo  $\alpha$  decorrente entre a sua excitação inicial ( $\alpha = \alpha_0$ ), quando  $p(\alpha_0) = t$ , e sua estabilização final ( $\alpha = \alpha_\infty$ ). Para que  $v$  seja um padrão auto-estável em relação ao padrão de atividade  $t$ ,  $\langle v/t \rangle$ , é necessário que no tempo  $\alpha_\infty$  a rede neuronal esteja ativada com o padrão de atividade  $p(\alpha_\infty)$  dado por (Figura IV.11):

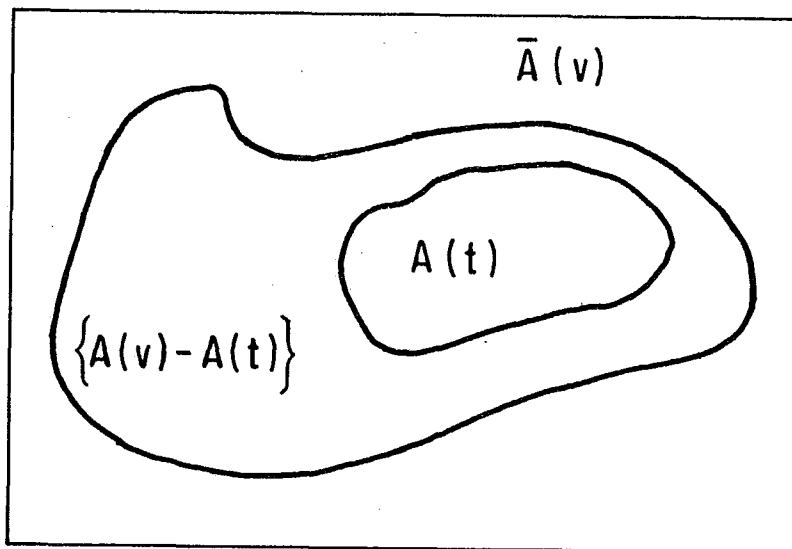
- i)  $p_i(\alpha_\infty) = 1$ ;  $i \in \{A(v) - A(t)\}$ ,
- ii)  $p_i(\alpha_\infty) = 1$ ;  $i \in A(t)$ ,
- iii)  $p_i(\alpha_\infty) = 0$ ;  $i \in \bar{A}(v)$ .

Seja no instante  $\alpha_k$  dada a primeira oportunidade de um neurônio  $N_i \in \bar{A}(v)$  mudar seu estado de ativação, então:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta = \sum_{j \in A(t)} w_{ij} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in \{A(v) - A(t)\}} w_{ij} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in \bar{A}(v)} w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta. \quad (\text{IV.22})$$

Da condição "a" do teorema concluímos que o primeiro somatório do lado direito da equação (IV.22) tem valor máximo de  $-2w$  enquanto da condição "b", o segundo somatório tem máximo em  $w$ . O terceiro termo é, porém, nulo, pois esta é a primeira vez que se dá aos neurônios do conjunto  $\bar{A}(v)$  a oportunidade de alteração de seu estado inibitório, sendo assim  $\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta < 0$ , ou seja que, dada uma oportunidade de mudança de estado de ativação, o neurônio  $N_i$  permanece inibido e, conseqüentemente, todos os neurônios do conjunto  $\bar{A}(v)$  continuam inibidos até  $\alpha_\infty$ , satisfazendo à condição "iii".





**Figura IV.11** - Classificação dos neurônios de um padrão auto-estável.

Seja, agora, um instante genérico  $\alpha$  onde consideramos o neurônio  $N_i \in A(t)$ , cujo impulso total de entrada é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(t)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in \{A(v) - A(t)\}} w_{lj} p_j(\alpha) - \theta. \quad (\text{IV.23})$$

As condições “c” e “e” do teorema, aliadas ao fato de que  $|A(t)| \geq 2$ , garantem que o menor valor de  $\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta$  é positivo, donde os neurônios do conjunto  $A(t)$ , uma vez inicialmente excitados, pois  $p(\alpha_0) = t$ , assim permanecem, satisfazendo à condição “ii”.

Verificando, então, o comportamento de um neurônio  $N_i \in \{A(v) - A(t)\}$  em um instante  $\alpha$  qualquer, obtemos:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(t)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in \{A(v) - A(t)\}} w_{lj} p_j(\alpha) - \theta, \quad (\text{IV.24})$$

e devido às condições “d” e “e” do teorema conclui-se que  $\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta > 0$ , ou seja que os neurônios do conjunto  $\{A(v) - A(t)\}$  se tornam excitados na primeira oportunidade que lhes é fornecida, conforme requerido pela condição “i”.  $\square$

Quando o padrão de atividade  $v$  é auto-estável em relação ao padrão de atividade  $t$ , do ponto-de-vista de uma memória de acesso pelo conteúdo, o padrão de atividade  $t$  pode ser interpretado como a quantidade mínima de informação suficiente para a determinação segura e completa da informação total, representada pelo padrão auto-estável  $v$ . Por outro lado, falando em representação do conhecimento, e supondo que os padrões de atividade  $t$  e  $v$  representem conceitos  $A$  e  $B$ , respectivamente, como toda vez que a rede neuronal é excitada pelo conceito  $A$ , conseqüentemente o conceito  $B$  se faz presente, podemos imaginar a propriedade de auto-estabilidade como uma implicação material [75]:†

$$A \rightarrow B. \quad (IV.25)$$

Um caso extremo de auto-estabilidade, denominado *estabilidade intrínseca*, ocorre quando um padrão de atividade  $v$  é gerado como conseqüência do decaimento determinístico de todo e qualquer padrão de atividade menor do que  $v$ , ou seja que definimos  $v$  como um *padrão intrinsecamente estável*, denotado por  $\langle v \rangle$ , se, e somente se:

$$(t \Rightarrow v)_1 \text{ para todo } t < v, |A(t)| \geq 2. \quad (IV.26)$$

Para uma memória de acesso pelo conteúdo, a recuperação de um padrão intrinsecamente estável armazenado é uma operação de extrema eficiência, exigindo apenas um mínimo de informação inicial. Quando associamos aos  $k$  padrões de atividade  $t^i < v; 1 \leq i \leq k$  os conceitos  $A_i; 1 \leq i \leq k$  e ao padrão intrinsecamente estável  $v$  o conceito  $B$ , mantendo a mesma interpretação dada à auto-estabilidade, podemos escrever:

$$A_1 \rightarrow B \text{ e } A_2 \rightarrow B \text{ e } A_3 \rightarrow B \dots, \text{ e } A_k \rightarrow B. \quad (IV.27)$$

**Teorema IV.6.** *Dada uma rede neuronal de Hopfield onde todos os  $n$  neurônios possuem o mesmo potencial limiar  $\theta$ , para que o padrão de atividade  $v$  seja intrinsecamente estável é suficiente que:*

$$a) w_{ij} \leq 0; \quad i \in A(v), \quad j \in \bar{A}(v),$$

---

† Como o projetista conhece seu universo de trabalho, pode estabelecer implicações materiais.

b)  $w_{ij} > \theta$ ;  $i \in A(v)$ ,  $j \in A(v)$ .

**Prova:**

Seja  $p(\alpha)$  o padrão de atividade da rede neuronal no tempo  $\alpha$  decorrente entre a sua excitação inicial ( $\alpha = \alpha_0$ ), quando  $p(\alpha_0) = t$ , e sua estabilização final ( $\alpha = \alpha_\infty$ ). Para que  $v$  seja intrinsecamente estável é necessário que no instante  $\alpha_\infty$  a rede neuronal esteja ativada com um padrão de atividade  $p(\alpha_\infty)$  dado por:

i)  $p_i(\alpha_\infty) = 0$ ;  $i \in \bar{A}(v)$ ,

ii)  $p_i(\alpha_\infty) = 1$ ;  $i \in A(v)$ .

Seja no instante  $\alpha_k$ , após a excitação da rede neuronal com o padrão de atividade inicial  $t < v$ ;  $|A(t)| \geq 2$ , dada a primeira oportunidade de um neurônio  $N_i \in \bar{A}(v)$  mudar seu estado de ativação, então:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta = \sum_{j \in A(v)} w_{ij} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in \bar{A}(v)} w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta. \quad (\text{IV.28})$$

Como esta é a primeira oportunidade de mudança de estado de ativação deste grupo de neurônios, o segundo termo do lado direito da equação (IV.28) é nulo pois  $p_j(\alpha_k) = 0$ ;  $j \in \bar{A}(v)$ , enquanto que, devido à condição "a" do teorema, o maior valor do primeiro termo do lado direito da referida equação é nulo. Desta forma, o neurônio  $N_i$  mantém seu estado inicial de inibição e, conseqüentemente todos os neurônios do conjunto  $\bar{A}(v)$  permanecem inibidos até o final da evolução da rede neuronal, satisfazendo à condição "i".

Devido à condição "b" e ao fato de que  $|A(t)| \geq 2$ , os neurônios  $N_i$  do conjunto  $A(v)$  se tornam excitados já na primeira oportunidade de mudança de estado de ativação que lhes é fornecida, mantendo-se assim até  $\alpha_\infty$  e obedecendo à condição "ii", pois:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(v)} w_{ij} p_j(\alpha) - \theta > 0. \quad \square \quad (\text{IV.29})$$

Notamos no conceito de auto-estabilidade um caráter construtivo, pois um padrão de atividade  $t$  dispara o processo de construção de um padrão de atividade  $v$  que é estável. Podemos também gerar um padrão de atividade com a característica oposta de destruir, ou impedir a presença de outro padrão de atividade, o que chamamos de *dominância* de um deles sobre o outro. Dizemos, então, que o padrão de atividade  $u$  domina sobre o padrão de atividade  $v$ ,  $u \gg v$ , sempre que

a presença simultânea de ambos em uma rede neuronal de Hopfield resultar em decaimento determinístico para o padrão de atividade estável  $u$ :

$$u \gg v \leftrightarrow (u + v \Rightarrow u)_1. \quad (\text{IV.30})$$

Seja o padrão de atividade  $u$  um item de informação armazenado na memória de acesso pelo conteúdo determinada por uma rede neuronal de Hopfield, e seja  $v$  um padrão de atividade dominado por  $u$ , e que representa informação não compatível ou diversa de  $u$ . Assim, podemos visualizar a dominância de  $u$  sobre  $v$  como um processo de filtragem ou eliminação de "ruído", pois, ao ser a rede neuronal ativada com a soma  $u + v$ , há um decaimento determinístico que elimina o padrão de atividade  $v$  (ruído) finalizando no reconhecimento do padrão de atividade  $u$ , que é efetivamente a informação armazenada na referida memória.

Por outro lado, se os padrões de atividade  $u$  e  $v$  representam para o projetista conceitos opostos e não representáveis simultaneamente, o fato de  $u$  dominar  $v$  implica em que a rede neuronal, em caso de ambigüidade ou incompatibilidade, assumirá a hipótese  $u$ , que representa o resultado de um processo de escolha pré-programado. Além disto, se os padrões de atividade  $u$  e  $v$  representam os conceitos  $A$  e  $B$ , seguindo o mesmo raciocínio já utilizado, podemos interpretar a dominância  $u \gg v$  como uma implicação material do tipo:

$$A \text{ e } B \rightarrow A, \quad (\text{IV.31})$$

o que estabelece  $B$  como uma verdade lógica embutida em  $A$ . Porém, se o padrão de atividade resultante da soma  $u + v$  representa um conceito  $C$  e o padrão de atividade  $u$ , isoladamente, representa o conceito  $D$ , então interpretamos a dominância  $u \gg v$  como uma implicação material  $C \rightarrow D$ , semelhante à já estabelecida no conceito de auto-estabilidade, mas diferindo desta, uma vez que, agora, o padrão de atividade representante do antecedente  $C$  é maior do que o representante do conseqüente  $D$ .

**Teorema IV.7.** *Em uma rede neuronal de Hopfield onde todos os  $n$  neurônios possuem o mesmo potencial limiar  $\theta$ , para que o padrão estável  $u$  domine sobre o padrão de atividade  $v$  é suficiente que:*

$$a) w_{min} \leq w_{ij} \leq \frac{-\theta}{|A(u)|}; \quad w_{min} < 0, \quad i \in A(u), \quad j \in A(v),$$

- b)  $w_{ij} > -w_{min}|A(v)| + \theta; \quad i, j \in A(u),$   
 c)  $w_{ij} \leq \frac{\theta}{|A(v)|}; \quad i, j \in A(v),$   
 d)  $w_{ij} \leq 0; \quad i \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\}, \quad j \in A(v).$

**Prova:**

Sendo  $p(\alpha)$  o padrão de atividade da rede neuronal no tempo  $\alpha$  decorrente entre a sua excitação inicial ( $\alpha = \alpha_0$ ), quando  $p(\alpha_0) = u + v$ , e a estabilização final ( $\alpha = \alpha_\infty$ ), para que  $u$  domine sobre  $v$  é necessário que no instante  $\alpha_\infty$  a rede neuronal esteja ativada com o padrão de atividade  $p(\alpha_\infty)$  dado por:

- i)  $p_i(\alpha_\infty) = 0; \quad i \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\},$   
 ii)  $p_i(\alpha_\infty) = 1; \quad i \in A(u),$   
 iii)  $p_i(\alpha_\infty) = 0; \quad i \in A(v).$

Considere um neurônio  $N_i \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\}$  ao qual é fornecida a oportunidade de mudança de estado de ativação em  $\alpha_k$ , então:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{ij} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in A(v)} w_{ij} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\}} w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta. \quad (IV.32)$$

Uma vez que esta é a primeira oportunidade de mudança de estado de ativação oferecida a um neurônio deste grupo, o terceiro termo do lado direito da equação (IV.32) é nulo. Como o padrão de atividade  $u$  é estável, devido ao fato de  $N_i \in \bar{A}(u)$ , seu impulso total de entrada  $\sum_{j \in A(u)} w_{ij} p_j(\alpha_k) - \theta$  é não-positivo. Finalmente, da condição "d" do teorema, o segundo somatório do lado direito da equação (IV.32) é também não-positivo implicando na permanência do neurônio  $N_i$  em seu estado inibitório inicial, satisfazendo à condição "i".

Sendo, agora, o neurônio  $N_i \in A(u)$ , a equação que fornece seu impulso total de entrada no tempo  $\alpha$  é:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{ij} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(v)} w_{ij} p_j(\alpha) - \theta. \quad (IV.33)$$

Das condições "a" e "b" do teorema, o menor valor da equação (IV.33) é:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha) - \theta > -w_{min}|A(v)| + \theta + w_{min}|A(v)| - \theta, \quad (IV.34)$$

ou seja que o impulso total de entrada é positivo, e os neurônios do conjunto  $A(u)$  estão sempre excitados ao longo do processo de decaimento, sendo, então, a condição "ii" obedecida.

Resta considerar os neurônios  $N_i \in A(v)$  com impulso total de entrada no instante  $\alpha$  dado por:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{ij} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(v)} w_{ij} p_j(\alpha) - \theta. \quad (\text{IV.35})$$

Das condições "a" e "c", o maior valor assumido pela equação (IV.35) é:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} p_j(\alpha) - \theta = -2\theta + \theta \leq 0,$$

e então os neurônios do conjunto  $A(v)$  se tornam inibidos na primeira oportunidade de mudança de estado, conforme requisitado pela condição "iii".  $\square$

Podemos imaginar um caso extremo de dominância onde o padrão de atividade  $u$  domina sobre todo e qualquer padrão de atividade  $v$  e, assim, dizemos que  $u$  é *absolutamente estável*,  $\ll u \gg$ , pois, uma vez presente na rede neuronal, não pode ser retirado pela ação de nenhum padrão de atividade adicionado pelo projetista:

$$\ll u \gg \leftrightarrow (u + v \Rightarrow u)_1, \text{ para todo } v. \quad (\text{IV.36})$$

Segundo a interpretação já apresentada, onde o padrão de atividade  $u$  é o item de informação armazenado em uma memória de acesso pelo conteúdo e o padrão de atividade  $v$  é o ruído adicionado a  $u$ , a estabilidade absoluta representa um processo de filtragem capaz de eliminar qualquer ruído que porventura esteja degradando a informação provida de significação pelo projetista (Figura IV.12).

**Teorema IV.8.** *Em uma rede neuronal de Hopfield onde todos os  $n$  neurônios possuem o mesmo potencial limiar  $\theta$ , para que o padrão de atividade  $u$ ;  $|A(u)| \geq 2$  seja absolutamente estável é suficiente que:*

- a)  $w_{min} \leq w_{ij} \leq \frac{-\theta}{|A(u)|}$ ;  $w_{min} < 0$ ,  $i \in A(u)$ ,  $j \in \bar{A}(u)$ ,
- b)  $w_{ij} > -w_{min}|A(u)| + \theta$ ;  $i, j \in A(u)$ ,
- c)  $w_{ij} \leq \frac{\theta}{|A(u)|}$ ;  $i, j \in \bar{A}(u)$ .

**Prova:**

Considere um padrão de atividade  $v$  qualquer tal que  $v \perp u$ , e seja  $p(\alpha)$  o padrão de atividade da rede neuronal no tempo  $\alpha$  decorrente entre a sua excitação inicial, quando  $p(\alpha_0) = u + v$ , e a estabilização final em  $\alpha_\infty$ . Para que  $u$  seja absolutamente estável é necessário que no instante  $\alpha_\infty$  a rede neuronal esteja ativada com um padrão de atividade  $p(\alpha_\infty)$  dado por:

$$\text{i) } p_i(\alpha_\infty) = 0; \quad i \in \bar{A}(u),$$

$$\text{ii) } p_i(\alpha_\infty) = 1; \quad i \in A(u).$$

Seja um neurônio  $N_i \in \bar{A}(u)$  no instante  $\alpha_k$  quando é dada a primeira oportunidade de alteração de seu estado de ativação. Sua equação do impulso total de entrada é:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha_k) - \theta &= \sum_{j \in A(u)} w_{lj} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in A(v)} w_{lj} p_j(\alpha_k) \\ &+ \sum_{j \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\}} w_{lj} p_j(\alpha_k) - \theta. \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Como, inicialmente, todos os neurônios do conjunto  $\{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v)\}$  estão inibidos, o último somatório da equação (IV.37) é nulo. Das condições "a" e "c" do teorema, concluímos que o maior valor da expressão (IV.37) é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j - \theta = -2\theta + \frac{\theta |A(v)|}{|\bar{A}(u)|}, \quad (\text{IV.38})$$

e, uma vez que  $|\bar{A}(u)| \geq |A(v)|$ , esta equação é sempre não-positiva. Sendo assim, qualquer neurônio deste conjunto se torna inibido a toda oportunidade de mudança de estado de ativação, e como  $\bar{A}(u) \supseteq A(v)$ , os neurônios de  $A(v)$  também serão inibidos ao longo da evolução dinâmica da rede neuronal, o que satisfaz à condição "i".

Considerando, agora, um neurônio  $N_i \in A(u)$ , vemos que o menor valor do seu impulso total de entrada é, devido às condições "a" e "b" do teorema e ao fato de que  $|A(u)| \geq 2$ , dado por:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta > w_{\min} |A(v)| - w_{\min} |\bar{A}(u)|, \quad (\text{IV.39})$$

o que é um número sempre positivo, sendo, então, satisfeita a condição "ii".  $\square$

**Corolário IV.9.** *Todo padrão de atividade absolutamente estável também é um padrão estável maximal.*

**Prova:**

Considere um padrão absolutamente estável  $v$ . Qualquer uma de suas  $\alpha$ -extensões  $E_\alpha(v)$  pode ser vista como  $E_\alpha(v) = u + v$  onde  $u \perp v$ . Como  $v$  é absolutamente estável, ocorre que:

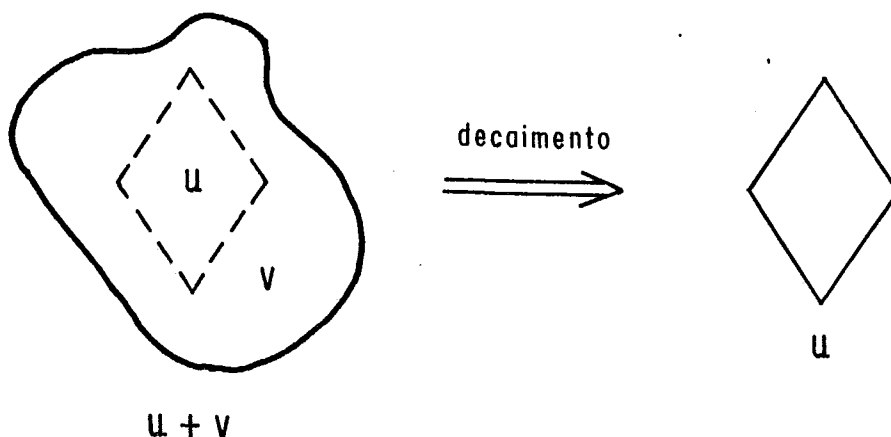
$$(v + u \Rightarrow v)_1,$$

ou

$$(E_\alpha(v) \Rightarrow v)_1.$$

Desta forma,  $E_\alpha(v)$  não é estável, ou seja que não há padrão estável maior que  $v$ .

□



**Figura IV.12** - Estabilidade absoluta de um padrão de atividade  $u$ .

Do que foi desenvolvido anteriormente, percebemos que o conceito de dominância entre dois padrões de atividade está relacionado à uma idéia de competição, onde um dos padrões de atividade prevalece sobre o outro e o aniquila,



expulsando-o da rede neuronal. Em contraste, podemos imaginar um processo cooperativo entre dois padrões de atividade que, *simultaneamente* presentes na rede neuronal, disparam a geração de um terceiro padrão de atividade como resultado da cooperação entre eles. Uma tal relação de ajuda mútua entre padrões de atividade pode ser útil na representação de processos deflagrados como consequência da ação conjunta de vários fatores causais. Dizemos que os padrões de atividade independentes  $u$  e  $v$  *cooperam* entre si na geração do padrão de atividade  $r$ , representado por  $\langle u, v/r \rangle$ , se a excitação inicial da rede neuronal com os padrões de atividade  $u$  e  $v$ , simultaneamente, provoca o decaimento determinístico para o padrão de atividade  $r$ :

$$\langle u, v/r \rangle \leftrightarrow (u + v \Rightarrow r)_1. \quad (\text{IV.40})$$

**Teorema IV.10.** *Em uma rede neuronal de Hopfield onde todos os  $n$  neurônios possuem o mesmo potencial limiar  $\theta$ , dados os padrões de atividade independentes  $u, v$  e  $r$ , definindo-se padrões de atividade  $t$  e  $t_1$  tais que  $v = t + t_1$ , para que o decaimento do padrão de atividade  $(u + v)$  no padrão de atividade  $(u + t + r)$  seja determinístico é suficiente que:*

- a)  $w_{ij} \geq 0; \quad i, j \in A(r)$ ,
- b)  $w_{min} \leq w_{ij} \leq 0; \quad i \in A(t_1), \quad j \in A(r), \quad w_{min} < 0$ ,
- c)  $w_{min} \leq w_{ij} \leq \frac{\theta}{|A(u)|}; \quad i \in A(u), \quad j \in \{A(r) \cup A(v)\}$ ,
- d)  $w_{ij} > -w_{min}|A(u)| + \theta; \quad i \in A(t), \quad j \in A(r)$ ,
- e)  $w_{ij} > -w_{min}(|A(v)| + |A(r)|) + \theta; \quad i, j \in A(u)$ ,
- f)  $w_{ij} > -w_{min}(|A(t_1)| + |A(u)|) + \theta; \quad i, j \in A(t)$ ,
- g)  $w_{min} \leq w_{ij} \leq \frac{\theta}{|A(v)|}; \quad i \in A(t_1), \quad j \in A(v)$ ,
- h)  $w_{ij} \leq 0; \quad i \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v) - A(r)\}, \quad j \in \{A(u) \cup A(v) \cup A(r)\}$ .

**Prova:**

Novamente, seja  $p(\alpha)$  o padrão de atividade da rede neuronal no instante  $\alpha$  decorrente entre a excitação inicial, quando  $p(\alpha_0) = u + v$  e a estabilização final em  $\alpha_\infty$ . Para que  $(u + v \Rightarrow u + t + r)_1$  é necessário que no instante  $\alpha_\infty$  a rede neuronal esteja excitada pelo padrão de atividade  $p(\alpha_\infty)$  dado por:

$$i) \quad p_i(\alpha_\infty) = 0; \quad i \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v) - A(r)\},$$

- ii)  $p_i(\alpha_\infty) = 1; \quad i \in A(u),$
- iii)  $p_i(\alpha_\infty) = 1; \quad i \in A(t),$
- iv)  $p_i(\alpha_\infty) = 0; \quad i \in A(t_1),$
- v)  $p_i(\alpha_\infty) = 1; \quad i \in A(r).$

Considere um neurônio  $N_l \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v) - A(r)\}$  cuja equação do impulso total de entrada no tempo  $\alpha_k$  é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha_k) - \theta = \sum_{j \in \{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v) - A(r)\}} w_{lj} p_j(\alpha_k) + \sum_{j \in \{A(u) \cup A(v) \cup A(r)\}} w_{lj} p_j(\alpha_k) - \theta. \quad (\text{IV.41})$$

Supondo que a primeira oportunidade de mudança de estado dos neurônios do conjunto  $\{\bar{A}(u) \cap \bar{A}(v) - A(r)\}$  seja oferecida no tempo  $\alpha_k$ , o primeiro termo do lado direito da equação (IV.41) é nulo, enquanto o segundo somatório é não-positivo, devido à condição "h" do teorema. Desta forma, os neurônios deste conjunto nunca se tornam excitados ao longo da evolução da rede neuronal, o que satisfaz à condição "i".

Seja, agora,  $N_l \in A(u)$ , então seu impulso total de entrada no instante  $\alpha$  é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in \{A(v) \cup A(r)\}} w_{lj} p_j(\alpha) - \theta, \quad (\text{IV.42})$$

e das condições "c" e "e" do teorema, chegamos a:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta > -w_{\min}(|A(v)| + |A(r)|) + \theta + w_{\min}|A(v)| + w_{\min}|A(r)| - \theta > 0, \quad (\text{IV.43})$$

donde os neurônios do conjunto  $A(u)$ , estando inicialmente excitados, assim permanecem até  $\alpha_\infty$ , obedecendo à condição "ii".

Para os neurônios do conjunto  $A(t)$ , a equação do impulso total de entrada é:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(v)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(r)} w_{lj} p_j(\alpha) - \theta, \quad (\text{IV.44})$$

e das condições "c", "g", "d" e "f", obtemos o menor valor da expressão (IV.44), como sendo:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta > -w_{\min}(|A(u)| + |A(t_1)|) + \theta + w_{\min}|A(u)| + w_{\min}|A(t_1)| - \theta > 0. \quad (\text{IV.45})$$

Então os neurônios do conjunto  $A(t)$  permanecem excitados ao longo de todo o processo de evolução da rede neuronal, como requerido pela condição "iii".

Já os neurônios do conjunto  $A(t_1)$ , apesar de regidos pela mesma equação (IV.44), se tornam inibidos a medida que o processo de decaimento ocorre, pois, devido às condições "b", "c" e "g", o valor máximo de seu impulso total de entrada é não-positivo, satisfazendo à condição "iv".

Finalmente, considerando o conjunto dos neurônios  $N_l \in A(r)$ , obtemos a equação:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta = \sum_{j \in A(u)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(t)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(r)} w_{lj} p_j(\alpha) + \sum_{j \in A(t_1)} w_{lj} p_j(\alpha) - \theta, \quad (\text{IV.46})$$

cujos valor mínimo pode ser obtido das condições "a", "c" e "d" como:

$$\sum_{j=1}^n w_{lj} p_j(\alpha) - \theta > w_{\min} |A(u)| - w_{\min} |A(u)| + \sum_{j \in A(t_1)} w_{lj} p_j(\alpha). \quad (\text{IV.47})$$

Seja, agora,  $\alpha_k$  um instante de tempo quando todos os neurônios do conjunto  $A(t_1)$  estão inibidos, pois, como vimos anteriormente, nenhum neurônio deste conjunto permanece excitado ao fim da evolução dinâmica da rede neuronal. Então podemos dizer que o último termo da equação (IV.47) é nulo para qualquer  $\alpha > \alpha_k$ , o que implica em que todos os neurônios do conjunto  $A(r)$  se tornam excitados deste instante em diante, obedecendo à condição "v".  $\square$

Supondo-se que os padrões de atividade  $u$ ,  $v$  e  $(u+t+r)$  representem conceitos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$  correspondentemente, a propriedade cooperativa definida pelo Teorema IV.10 nos permite expressar uma inferência lógica da forma:

$$A \text{ e } B \rightarrow C, \quad (\text{IV.48})$$

significando que a presença simultânea na rede neuronal dos fatores causais  $A$  e  $B$  implica, certamente, em  $C$  como consequência.

Após esta série de definições, retornamos ao tema central do presente capítulo, que é o estabelecimento dos chamados critérios de síntese.

## § IV.2 - Critérios Operacionais

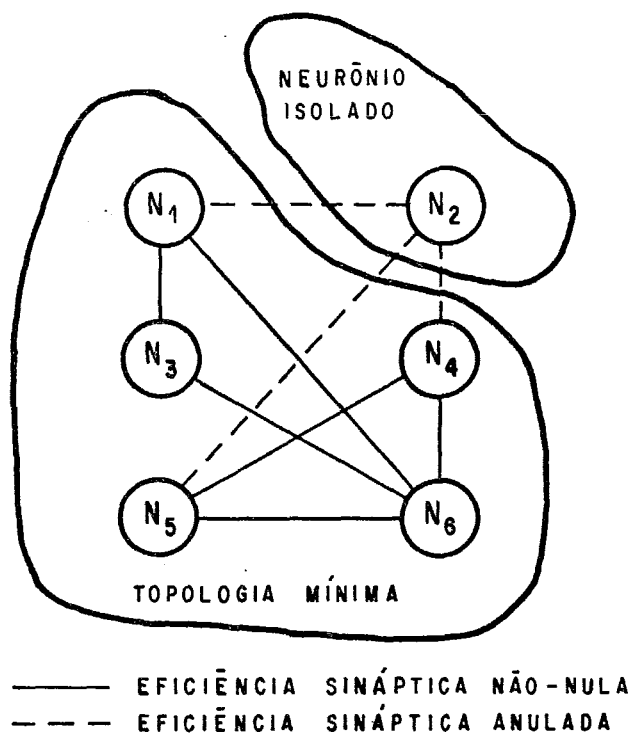
Dado o fato de que, para a execução de uma tarefa pré-determinada, quanto maior o número  $n$  de neurônios de uma rede neuronal, maior o conjunto de sínteses viáveis  $\mathcal{W}^*$  capazes de realizar a referida tarefa, os critérios de síntese tornam-se elementos fundamentais na determinação eficiente de boas soluções para o problema da síntese. Denominamos *critérios operacionais* os critérios de síntese cuja influência sobre a rede neuronal sintetizada é exercida no sentido de regular seu modo de operação ou funcionamento, ou seja, que tais critérios não determinam propriedades de representação do conhecimento na rede neuronal.

Anteriormente fizemos a hipótese de que o número  $n$  de neurônios de uma rede neuronal deve ser maior que um número mínimo  $n_0$ , para que haja a garantia de que o conjunto estável  $S(W)$  comporte os padrões estáveis  $s^i$ ;  $1 \leq i \leq m$  desejados pelo projetista. Pode parecer, a princípio, que o projetista precisa dimensionar uma rede neuronal maior do que o efetivamente necessário, compensando, assim, sua ignorância em relação ao sistema com o desperdício de uma rede neuronal com *topologia* não ideal. Definimos, então, o *critério da topologia mínima* como o critério de síntese capaz de buscar, no conjunto  $\mathcal{W}^*$ , sínteses viáveis que necessitam de uma quantidade pequena de neurônios, ou seja, redes neuronais com uma topologia reduzida. Tal critério pode ser expresso matematicamente por:

$$\min_W \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^2,$$

pois minimizando as eficiências sinápticas de forma que um grande número delas se anule, ou seja desapareça, alguns neurônios tornam-se isolados, uma vez que não existem sinapses que os unam a outras células, havendo, assim, uma redução da topologia da rede neuronal (Figura IV.13).

Alguns neurocientistas afirmam que morrem no cérebro humano milhares de neurônios diariamente sem que haja uma redução perceptível de sua eficiência, sendo esta capacidade de tolerância a falhas devida ao alto grau de redundância de suas redes neuronais e ao modelo distribuído de representação do conhecimento. Certamente, ao reduzir-se o número de neurônios de uma rede neuronal, aumenta-se a responsabilidade de cada neurônio na manutenção da estabilidade dos padrões de atividade e, assim, a falha no funcionamento de uma destas células pode resultar



**Figura IV.13** - Isolamento de um neurônio pelo critério da topologia mínima.

em uma degradação no desempenho do sistema neuronal como um todo. Em certas situações, o projetista pode desejar sintetizar sistemas conexionistas com grande capacidade de tolerância a falhas, por morte celular ou má operação, e, para isto, definimos o *critério da máxima tolerância a falhas*:

$$\max_{W, s_j \in K(s)} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - \theta_i \right|; \quad w_{min} \leq w_{ij} \leq w_{max},$$

onde  $w_{min}$  e  $w_{max}$  são, respectivamente, os limites inferior e superior das eficiências sinápticas da rede neuronal. Este critério maximiza o valor absoluto do impulso total de entrada  $u_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - \theta_i$  de todos os neurônios, fazendo com que na rede neuronal só existam neurônios fortemente excitados ou fortemente inibidos. Desta forma, a disfunção de um certo número de células não é suficiente para alterar significativamente o impulso total de entrada, cujo alto valor absoluto é garantido pelos neurônios restantes.

### § IV.3 - Critérios Sintáticos

Denominamos *critérios sintáticos* os critérios de síntese que, simultaneamente, selecionam uma síntese viável e determinam por completo a sintaxe dos padrões de atividade a serem reconhecidos pela rede neuronal, ou seja, os critérios sintáticos especificam a forma de representação dos padrões de atividade estáveis; o que é realizado definindo-se os neurônios excitados e inibidos nos referidos padrões. Muitas vezes, o projetista não determina completamente os padrões de atividade a serem aprendidos pela rede neuronal, seja porque existem mais neurônios do que o necessário para a representação do conhecimento, ou para proporcionar ao sistema neuronal a liberdade de escolher sua própria representação interna. Nestes casos, antes da aplicação do método de síntese para o aprendizado de um padrão de atividade  $s$ , apenas o estado de ativação dos neurônios do conjunto  $K(s)$  é conhecido, enquanto os neurônios restantes, pertencentes ao conjunto  $\bar{K}(s)$ , têm seus estados de ativação decididos pelo método de síntese; decisão esta que estabelece a sintaxe do padrão de atividade estável aprendido (Figura IV.14).

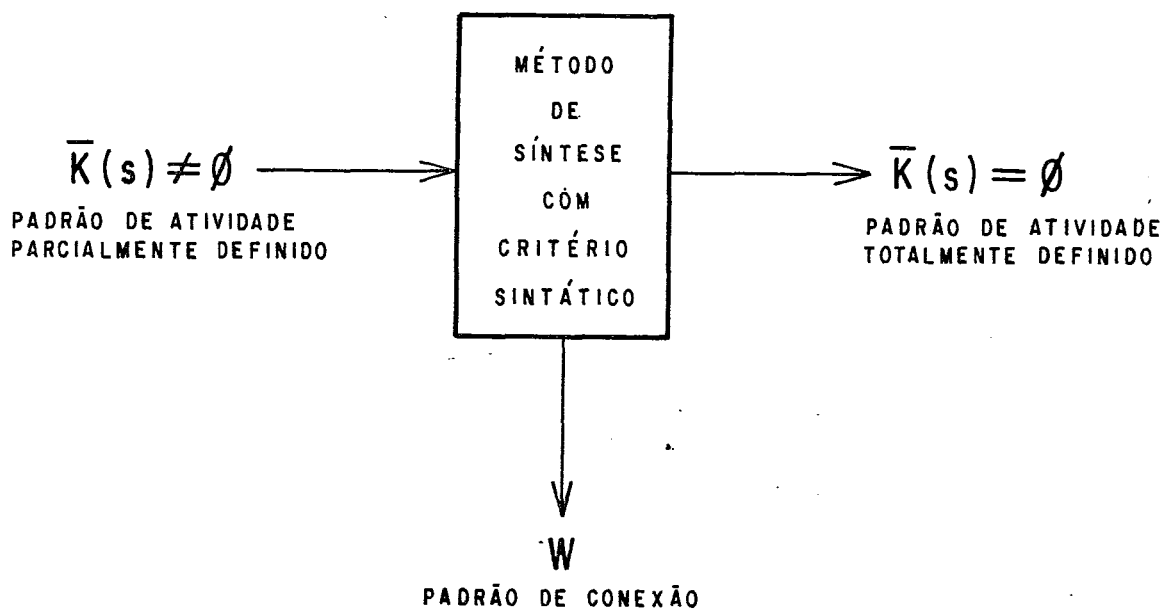


Figura IV.14 - Funções de um critério sintático.

Inicialmente, definimos o *critério da representação localizada*, que pode ser

utilizado pelo projetista quando este deseja representar seus conceitos pelo menor número possível de neurônios, certamente permitindo que a rede neuronal ajuste seu padrão de conexão através da escolha de uma cômoda representação interna:

$$\min_{s_i \in \bar{K}(s)} \sum_{i=1}^n s_i.$$

A minimização do somatório dos estados de ativação desconhecidos  $s_i \in \bar{K}(s)$  fornece a tendência de que estes neurônios estejam inibidos no padrão de atividade estável  $s$ , ou que o número de neurônios excitados seja pequeno, localizando, assim, a representação do conceito (Figura IV.15). A idéia oposta, porém, pode ser utilizada quando, ao maximizar a soma dos estados de ativação desconhecidos, provoca-se o aumento dos neurônios excitados no padrão de atividade, tornando a representação do conceito mais distribuída. Sendo assim, o *critério da representação distribuída* pode ser definido como:

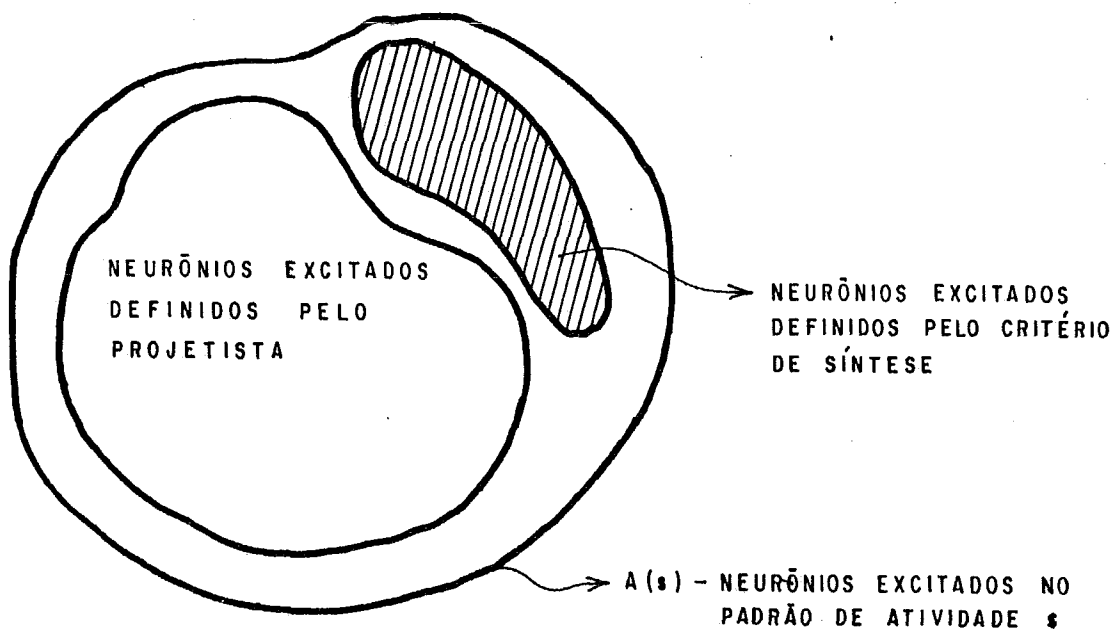
$$\max_{s_i \in \bar{K}(s)} \sum_{i=1}^n s_i.$$

Como visto anteriormente, conceitos com significados opostos podem ser representados por padrões de atividade independentes, enquanto entidades com semelhanças de significação devem, naturalmente, adotar uma representação com padrões de atividade dependentes. Contudo, ao se permitir que o método de síntese escolha livremente a sintaxe dos padrões estáveis aprendidos, a dependência ou independência desejadas pelo projetista estão ameaçadas e, a não ser que o critério de síntese utilizado seja explícito, a síntese determinada pode não preencher os requisitos do projetista. Definimos, então, o *critério da representação dependente* como a maximização do número de neurônios excitados em ambos os padrões de atividade  $s$  e  $r$  representantes dos conceitos semelhantes  $A$  e  $B$ , por exemplo:

$$\max_{s_i \in \bar{K}(s), r_i \in \bar{K}(r)} \sum_{i=1}^n s_i r_i,$$

enquanto o *critério da representação independente*, ao contrário do acima exposto, minimiza o número de neurônios que participam de ambas as representações conceituais:

$$\min_{s_i \in \bar{K}(s), r_i \in \bar{K}(r)} \sum_{i=1}^n s_i r_i.$$



**Figura IV.15** - Esquema de aplicação do critério da representação localizada.

Certamente os critérios da representação dependente e independente podem ser estendidos a um número qualquer de padrões de atividade determinados pelo projetista.

#### § IV.4 - *Crítérios Semânticos*

Os chamados *crítérios semânticos* são utilizados quando o projetista deseja que, no padrão de conexão  $W$  da rede neuronal, estejam registradas as relações de significado entre os padrões de atividade representantes de conceitos do mundo exterior. Desta forma, tais critérios de síntese são intimamente dependentes das associações de significado estabelecidas pelo projetista e, por sua própria natureza, conformam a superfície de energia da rede neuronal de modo a inviabilizar o aprendizado de tarefas divergentes de seus objetivos específicos.

Como já analisamos, é possível estabelecer uma relação de hierarquia entre um padrão de atividade  $s$ , representante de uma classe  $A$ , e outro padrão de atividade



$r$ , representante de uma subclasse  $B$  de  $A$ . Na síntese de uma rede neuronal com esta hierarquia, o projetista deve utilizar o *critério da representação hierárquica* definido por:

$$r > s; \quad r, s \in S(W),$$

sendo necessário que os padrões de atividade  $r$  e  $s$  estejam completamente determinados antes da aplicação do método de síntese, ou seja que  $K(r) = K(s) = \emptyset$ , pois permitir que a rede neuronal escolha a representação interna mais conveniente, pode resultar no não cumprimento da relação de maioria. Generalizando esta observação, afirmamos que, como a rede neuronal não conhece as relações de significado desejadas pelo projetista, é necessário que todos os critérios semânticos se utilizem de padrões de atividade totalmente definidos antes da aplicação do método de síntese, ou de outra maneira, os critérios sintáticos e semânticos não podem ser utilizados simultaneamente.

Exigir que a rede neuronal reconheça um conceito  $A$ , traduz-se na aplicação do método de síntese de forma que o padrão de atividade  $s$ , que o representa, seja estável; todavia, pode o projetista desejar exatamente o efeito contrário de garantir que a rede neuronal não reconheça o referido conceito, o que denotamos por  $\neg s$ , equivalendo a evitar que o padrão de atividade  $s$  seja estável. O *critério da representação negativa* nos permite sintetizar tal rede neuronal, utilizando o resultado do Teorema IV.1, ou seja exigir que a 1-extensão de  $s$  seja estável:

$$\neg s \leftrightarrow E_1(s) \in S(W).$$

É comum encontrarmos conceitos que, isoladamente, detêm significados bem determinados e diferentes mas, uma vez representados simultaneamente, passam a expressar uma nova idéia, geralmente resultante da soma de significações individuais. Em redes neuronais, esta propriedade de aditividade semântica pode ser estabelecida quando, considerando que os conceitos  $A$  e  $B$  são representados pelos padrões de atividade  $r$  e  $s$ , exigimos o reconhecimento, por parte do sistema conexionista, do conceito  $A$  e do conceito  $B$ , isoladamente apresentados, e também do conceito resultante da sua soma; definindo-se, então, o *critério da representação disjuntiva*,  $r \vee s$ , como:

$$r, s \in S(W); \quad (r + s) \in S(W), \quad r \perp s.$$

Já em outra situação, os dois conceitos  $A$  e  $B$  podem em conjunto apresentar um significado definido e, no entanto, isoladamente serem desprovidos de qualquer associação semântica, permitindo que se estabeleça o *critério da representação conjuntiva*,  $r \wedge s$ , como:

$$(r + s) \in S(W); \quad \neg r, \quad \neg s, \quad r \perp s.$$

O critério da representação negativa fornece, também, os meios necessários para a síntese de uma rede neuronal onde se deseja que os conceitos  $A$  e  $B$ , representados pelos padrões de atividade independentes  $r$  e  $s$ , possuindo significados determinados quando apresentados isoladamente, não sejam reconhecidos em conjunto, uma vez que seus significados são antogônicos; o *critério da representação exclusiva*,  $r \oplus s$ , é, então:

$$\neg(r + s); \quad r, s \in S(W), \quad r \perp s.$$

Os critérios semânticos expostos até o presente momento utilizam a propriedade estática de estabilidade de um padrão de atividade, porém outras relações de significado podem ser representadas através da propriedade de decaimento das redes neuronais de Hopfield. Como citado em seções anteriores, a implicação com probabilidade  $p$  de um conceito  $A$  em um conceito  $B$ , Probabilidade  $A \rightarrow B = p$ , representados pelos padrões de atividade independentes  $r$  e  $s$ , pode ser associada a um processo de decaimento probabilístico que nos permite definir o *critério da representação dedutiva*:

$$(r \Rightarrow s)_p, \quad s \in S(W).$$

Em casos onde a implicação de  $A$  em  $B$  deve ser determinística, podemos utilizar o resultado do Teorema IV.10 na definição do *critério da representação cooperativa*:

$$(r \Rightarrow s)_1, \quad s \in S(W).$$

Finalmente, através do Teorema IV.7, definimos o *critério da representação competitiva*, cuja aplicação é estabelecer uma relação de oposição ou antagonismo entre dois conceitos  $A$  e  $B$  de forma que um de seus padrões de atividade independentes representantes, por exemplo  $r$ , seja retirado da rede neuronal pelo seu opositor  $s$ :

$$s \gg r, \quad s \in S(W), \quad r \perp s.$$

É importante observarmos que a coletânea de critérios de síntese exposta neste capítulo, de forma alguma exaure as inúmeras possibilidades de representação do conhecimento em redes neuronais de Hopfield, resultantes tanto das necessidades do projetista quanto das várias propriedades deste complexo sistema dinâmico.

## Capítulo V

### O Método Estocástico de Síntese

#### § V.1 - A Simulação de Sistemas Termodinâmicos

Um dos procedimentos matemáticos mais utilizados nas últimas décadas é o *Método de Monte Carlo* [76], recebendo este nome pois sua operação de natureza probabilística muito se assemelha aos jogos de azar dos cassinos de Monte Carlo, uma das divisões do Principado de Mônaco. Suas bases teóricas são conhecidas há muito tempo, mas devido à dificuldade de aplicação, apenas após a construção dos primeiros computadores eletrônicos se pôde, efetivamente, aplicá-lo com todas as suas capacidades [77].

A idéia central do Método de Monte Carlo na solução de um problema com incógnita  $q$  é descobrir uma variável aleatória  $X$  cuja média  $\bar{X}$  seja igual ao valor da referida incógnita e, sendo assim, pode-se abstrair o problema em si e resolvê-lo, indiretamente, através do cálculo da média desta variável:

$$q = \bar{X}.$$

Certamente, a média  $\bar{X}$  pode ser aproximada, tanto quanto se deseja, pelo cálculo da média de um grande número de valores  $x_i$  que, após sorteados através de um mecanismo capaz de gerar a aleatoriedade da variável  $X$  e devidamente contados, se apresentam com freqüência  $f_i$ ;  $1 \leq i \leq k$ , ou seja:

$$\bar{X} \approx \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}. \quad (\text{V.1})$$

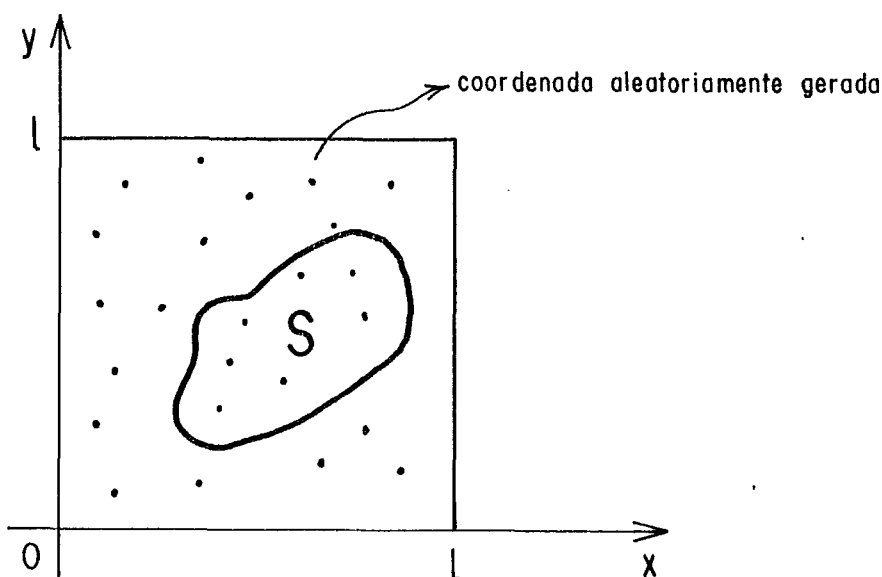
Naturalmente, sendo  $p_i$  a probabilidade de ocorrência do valor  $x_i$  na variável aleatória  $X$ , a equação (V.1) pode ser escrita como:

$$\bar{X} \approx \sum_{i=1}^k x_i p_i. \quad (\text{V.2})$$

Considere, por exemplo, o Método de Monte Carlo no cálculo da área de uma figura plana  $S$  que pode ser inscrita em um quadrado de lado  $l$ , como indicado na Figura (V.1). Tomando-se duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ , responsáveis, respectivamente, pela geração equiprovável de abcissas e ordenadas na plano da

figura  $S$  no intervalo entre zero e  $l$ , através do sorteio de um número  $k$  de seus valores, podemos contar o número  $N_s$  de pontos contidos no interior da figura  $S$  e, intuitivamente, perceber que a razão entre a sua área e a área do quadrado é proporcional à relação entre o número  $N_s$  e o total de pontos sorteados:

$$\frac{S}{l^2} = \frac{N_s}{k}. \quad (\text{V.3})$$



**Figura V.1** - O Método de Monte Carlo no cálculo da área  $S$ .

O Método de Monte Carlo também pode ser utilizado para o cálculo de propriedades de sistemas termodinâmicos como, por exemplo, um gás perfeito em equilíbrio à temperatura  $T$  e contido em um recipiente fechado. Para tal sistema, a densidade de probabilidade  $p$  relativa a uma energia  $E$  é dada pela *distribuição de Boltzmann*:

$$p = e^{-E/KT}, \quad (\text{V.4})$$

onde  $K$  é a constante de Boltzmann. A energia total  $E_t$  deste sistema estatístico é a soma das energias médias de suas  $N$  moléculas, o que em analogia com a

equação (V.2) é escrito, desprezando-se a constante de normalização, como:

$$\bar{E}_t = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} E e^{-E/KT} dE. \quad (\text{V.5})$$

Notamos da distribuição de Boltzmann que, para temperaturas muito altas, há uma probabilidade muito próxima da unidade de se encontrar moléculas com todos os níveis energéticos; enquanto que em temperaturas baixas, apenas moléculas com pequenos níveis de energia são detectadas com freqüência. Desta forma, para um gás em equilíbrio à temperatura  $T$ , não há a necessidade de considerarmos, para efeito do cálculo da energia média, todos os valores de energia possíveis, mas apenas aqueles que possuem uma probabilidade de ocorrência significativa. Baseado neste princípio, METROPOLIS [78], em 1953, estabeleceu um método resultante de uma modificação do Método de Monte Carlo, capaz de determinar propriedades termodinâmicas de sistemas mecânicos estatísticos, onde, ao invés da soma da energia de cada molécula ponderada pela sua probabilidade de ocorrência, considerou apenas a soma dos valores energéticos com ocorrência mais provável. Dada uma configuração inicial  $C_0$  do sistema e uma temperatura de equilíbrio  $T_0$ , o algoritmo de Metropolis escolhe aleatoriamente uma molécula  $M_i$ ;  $1 \leq i \leq N$  e valores  $\Delta x$  e  $\Delta y$  através dos quais movimentada a molécula  $M_i$  de sua posição atual, gerando uma diferente configuração  $C_k$  do sistema. A variação  $\Delta E_t$  da energia total do sistema entre as duas configurações é calculada por  $\Delta E_t = (E_t(C_k) - E_t(C_{k-1}))$  onde  $E_t(C_k)$  é a energia do sistema na configuração  $C_k$ . Sendo a variação energética  $\Delta E_t$  negativa, a configuração  $C_k$  é imediatamente aceita como a nova configuração do sistema; do contrário a aceitação da configuração recentemente gerada é decidida por sorteio com probabilidade  $p = e^{-\Delta E_t/KT}$  e, no caso de rejeição, a nova configuração é igual à anteriormente existente. Após a determinação da nova configuração, a energia média  $\bar{E}_t$  do sistema é calculada aproximadamente por:

$$\bar{E}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_t(C_i), \quad (\text{V.6})$$

onde  $n$  é o número de configurações aceitas segundo o processo descrito acima. Metropolis demonstrou que seu método escolhe configurações obedecendo à distribuição de Boltzmann, conforme esperado para sistemas estatísticos deste tipo.

É importante notar que, como o algoritmo de Metropolis permite o cálculo da energia de um gás em equilíbrio à temperatura  $T$ , pode-se simular o resfriamento

deste sistema até a mudança de fase para o estado líquido e, continuando a redução de temperatura, emular o processo de solidificação. Sabe-se da Cristalografia que, se esta diminuição de temperatura é suficientemente lenta, o sólido formado assume uma estrutura cristalina representante do estado mais organizado conhecido e cuja energia é a menor que tal sistema pode atingir [79]. Nos casos de formação cristalina a partir do vapor com decréscimo de temperatura mais rápido do que o necessário, forma-se uma estrutura sólida conhecida como o “vidro”, que é, a grosso modo, um cristal repleto de imperfeições de organização, e cuja energia é superior à mínima, atingida somente nos cristais.

Foi observando a semelhança existente entre a formação de cristais a partir do vapor e os processos de minimização global de funções matemáticas que KIRKPATRICK [80], em 1983, estabeleceu o método do *Resfriamento Simulado* (“Simulated Annealing”), que é basicamente a aplicação sucessiva do método de Metropolis para uma seqüência de temperaturas decrescentes, com o objetivo de gerar uma configuração de energia mínima. Certamente Kirkpatrick não estava interessado no estudo da formação de cristais, porém, associando cada configuração do sistema termodinâmico de Metropolis à uma solução de um problema de Otimização Combinatória e a energia total do gás à função objetivo do referido problema, percebeu que poderia minimizar globalmente o objetivo, desde que exercesse um correto controle sobre a taxa de resfriamento da simulação.

O Resfriamento Simulado, como consequência do método de Metropolis, se assemelha ao Método do Gradiente ao aceitar, imediatamente, uma solução viável que reduz o valor da função objetivo, porém não apresenta o problema de convergência a mínimos locais pois, para cada temperatura, existe uma probabilidade, dada pela distribuição de Boltzmann, de que a função objetivo aumente seu valor na próxima solução viável gerada (Figura V.2). Sendo  $D$  um conjunto finito,  $f$  uma função matemática dita função objetivo e  $D \subseteq D^n$  o conjunto das chamadas soluções viáveis, o problema de Otimização Combinatória é:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sujeito a } x \in D, \end{aligned}$$

e estabelecemos o método do Resfriamento Simulado por:

Seja  $x_0 \in \mathcal{D}$  uma solução viável inicial,

$T_0$  uma temperatura inicial

e  $r(k)$  uma seqüência decrescente de temperaturas.

$k := 0$  ;  $x_k := x_0$  ;  $T_k := T_0$  ;

**enquanto** o sistema não está *cristalizado* **faça**

**início**

**enquanto** o sistema não atinge o *equilíbrio térmico* em  $T_k$  **faça**

**início**

selecione aleatoriamente uma solução viável  $x' \in \mathcal{D}$ ;

$\Delta f := f(x') - f(x_k)$ ;

se  $\Delta f \leq 0$  então  $x_k := x'$ ;

do contrário  $x_k := x'$  com probabilidade  $p = e^{-\Delta f/T_k}$ ;

**fim**;

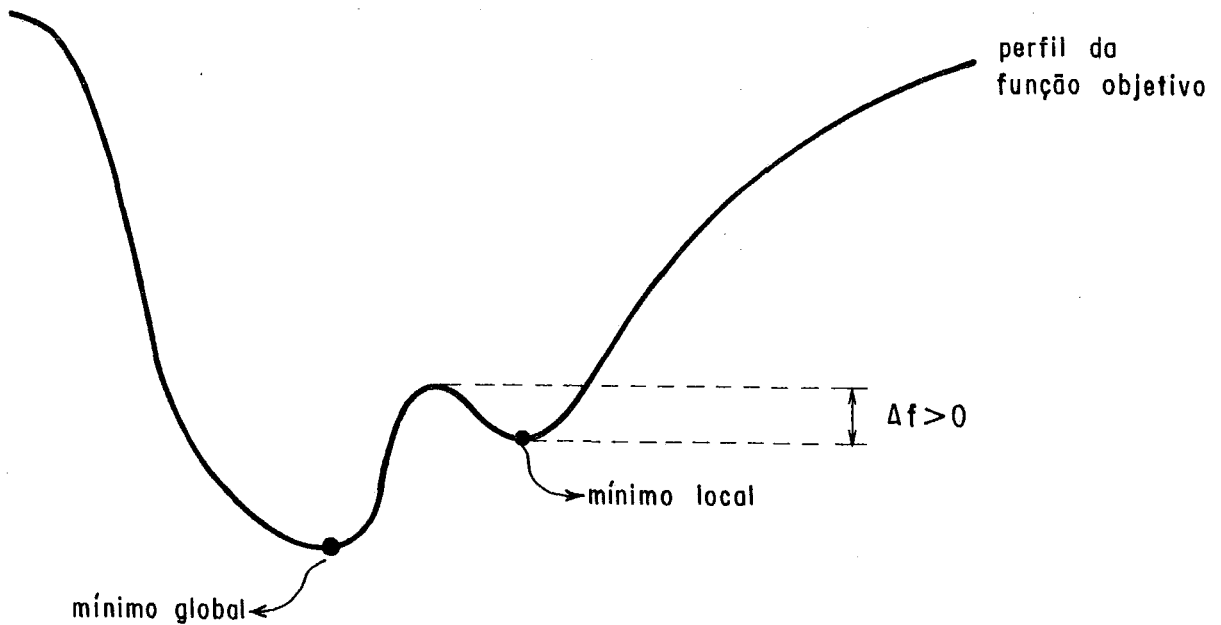
$T_{k+1} := r(k)$  ;  $x_{k+1} := x_k$  ;  $k := k + 1$ ;

**fim**;

a solução é  $x_k$ .

Para a determinação completa do algoritmo é preciso definir quando o sistema está “cristalizado” e atinge o “equilíbrio térmico”, duas características perfeitamente compreensíveis nos sistemas termodinâmicos, porém ausentes e sem análogos nos problemas de Otimização Combinatória. Semelhantemente ao método de Metropolis, no Resfriamento Simulado o sistema atinge o “equilíbrio térmico” quando a média aproximada da função objetivo para uma dada temperatura estabiliza-se, sofrendo apenas pequenas flutuações ao redor de seu valor médio exato e desconhecido. Já a “cristalização” do sistema ocorre quando, em analogia ao crescimento de cristais a partir do vapor, ao reduzir-se a temperatura, a média da função objetivo não diminui, significando, na melhor hipótese, que o sistema atingiu seu mínimo global, representante da estrutura cristalina do sistema termodinâmico (Figura V.3). A taxa de decréscimo da temperatura, também necessária ao método e dependente do problema de Otimização Combinatória considerado, deve ser suficientemente pequena para garantir a “cristalização” do sistema na configuração do mínimo global, porém não tão baixa que inviabilize a aplicação do método por requerer um número extremamente grande de configurações simu-





**Figura V.2** - Perfil de uma função objetivo com mínimo local.

ladas [81].

O Resfriamento Simulado foi utilizado por vários autores na solução de questões da Teoria dos Grafos [82], do Problema do Caixeiro Viajante [83,84], no projeto físico de computadores [80] e na filtragem de imagens por computador [85].

### § V.2 - O Resfriamento Simulado na Síntese de Redes Neurais

No Capítulo IV definimos que um método de síntese precisa determinar, não somente uma síntese viável, mas escolher a melhor delas segundo algum critério pré-estabelecido. Tivemos a oportunidade de estabelecer vários critérios de síntese com diferentes objetivos mas, até o momento, não definimos propriedades ou condições de uma síntese viável que nos permitam identificar matematicamente quando uma rede neuronal está sintetizada para a execução de uma dada tarefa. Com este objetivo, considere  $s \in \mathcal{X}^n$  um padrão de atividade que deve ser armazenado em uma rede neuronal de Hopfield com  $n$  neurônios. Sabemos que, em uma rede neuronal sintetizada para tal fim, a excitação com o padrão de atividade  $s$  não provoca nenhum processo de decaimento, pois  $s$  é, neste sistema conexionista, um

padrão estável. Sendo assim, qualquer neurônio da rede neuronal tem seu estado de ativação plenamente compatível com os impulsos que recebe de todos os outros neurônios, pois se alguma incompatibilidade existir, este neurônio modificará seu estado de ativação na primeira oportunidade que lhe for oferecida:

$$s_i = T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - \theta_i \right) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{V.7})$$

ou de outra forma:

$$s_i - T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j - \theta_i \right) = 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{V.8})$$

Sendo vários os padrões de atividade a serem armazenados na rede neuronal, podemos escrever a equação (V.8) como:

$$s_i^k - T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j^k - \theta_i \right) = 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq k \leq m, \quad (\text{V.9})$$

onde  $m$  é o número dos referidos padrões de atividade.

Definindo-se a função  $P(W, s^k; 1 \leq k \leq m)$  por:

$$P(W, s^k; 1 \leq k \leq m) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \left| s_i^k - T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j^k - \theta_i \right) \right|, \quad (\text{V.10})$$

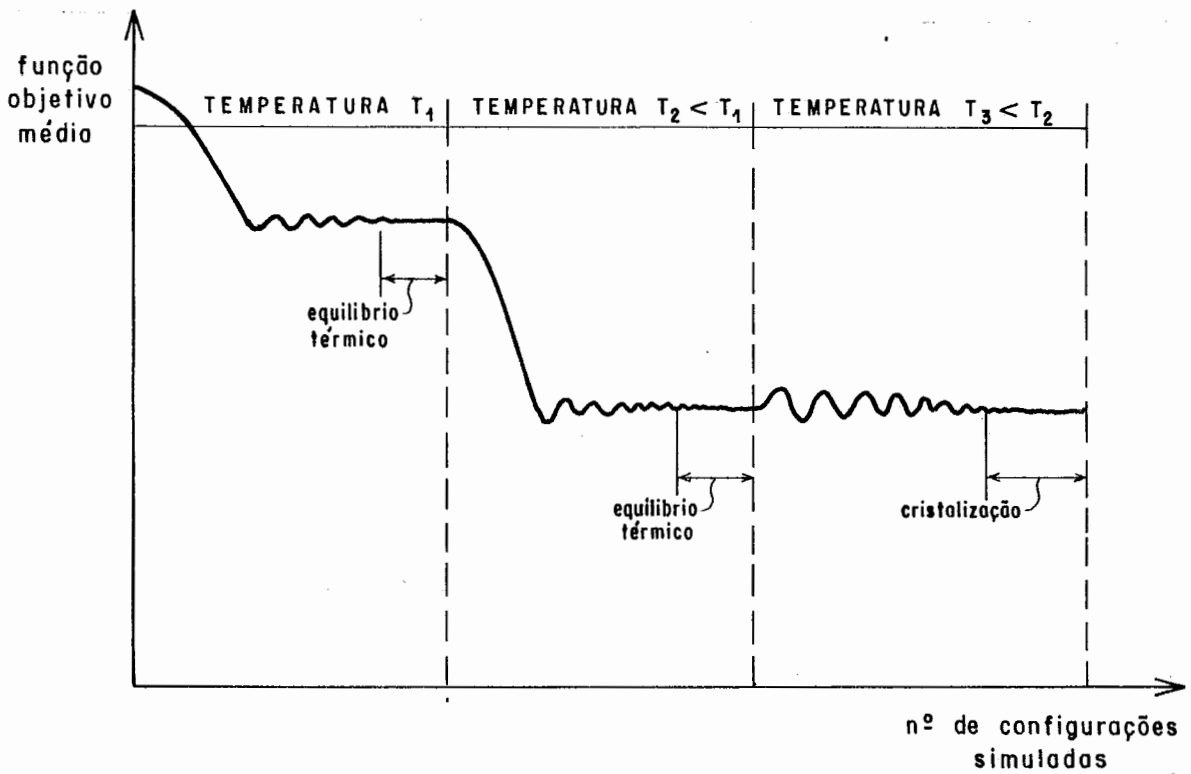
a condição de síntese para a tarefa  $s^k \in S(W); 1 \leq k \leq m$  é, então, dada por:

$$P(W, s^k; 1 \leq k \leq m) = 0. \quad (\text{V.11})$$

É fácil perceber que a função  $P(W, s^k; 1 \leq k \leq m)$  é não-negativa e que a condição de síntese dada pela equação (V.11) representa o seu ponto de mínimo global. Assim, dada uma tarefa de aprendizado  $s^k \in S(W); 1 \leq k \leq m$ , o problema da síntese de redes neuronais de Hopfield é determinar o padrão de conexão  $W$  que minimiza globalmente a função  $P(W, s^k; 1 \leq k \leq m)$ :

$$\min_W P(W, s^k; 1 \leq k \leq m), \quad (\text{V.12})$$

e, desta forma, apenas uma síntese viável é encontrada, pois nenhum critério de síntese foi utilizado para a seleção de uma síntese ótima.



**Figura V.3** - Equilíbrio térmico e cristalização no Resfriamento Simulado.

Além da classificação funcional dos critérios de síntese já abordada no Capítulo IV, podemos dividir tais critérios em dois grandes grupos, de acordo com a metodologia que impõem ao método de síntese, pois alguns deles, expressos por maximizações ou minimizações, representam objetivos a serem atingidos, sendo chamados de *critérios objetivos*; enquanto outros, por restringirem os valores das eficiências sinápticas, são denominados *critérios restritivos*. Os critérios objetivos  $C_f$  e restritivos  $C_r$ , juntamente com a equação (V.12), definem matematicamente uma das formas de visualizar e resolver o problema da síntese de redes neurais:

$$\min_W F[W, s^k] = C_f(W, s^k; 1 \leq k \leq m) + \mu P(W, s^k; 1 \leq k \leq m) \quad (V.13)$$

tal que  $C_r(W, s^k; 1 \leq k \leq m)$ ,

onde  $\mu \gg 1$  é um parâmetro de penalização que visa garantir a geração de soluções viáveis. Por exemplo, para sintetizarmos uma rede neuronal capaz de armazenar dois padrões de atividade  $s^1 \in \mathcal{X}^n$  e  $s^2 \in \mathcal{X}^n$  de forma que  $s^1$  domine sobre  $s^2$

e ainda que a topologia seja mínima, é preciso que se resolva um problema de Otimização Combinatória cuja função objetivo é dada pela soma da condição de síntese (V.10) e do critério da topologia mínima:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^2 + \mu \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \left| s_i^k - T \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} s_j^k - \theta_i \right) \right|.$$

Para garantir a dominância de  $s^1$  sobre  $s^2$  incorpora-se ao problema de Otimização as restrições dadas pelas condições "a", "b", "c" e "d" do Teorema IV.7 cujas variáveis  $w_{ij}$  são discretizadas pelo projetista.

Ao se considerar as eficiências sinápticas do padrão de conexão  $W$  e o estado de ativação dos neurônios  $N_i \in K(s^k); 1 \leq k \leq m$  como *variáveis generalizadas* do problema de síntese, e discretizando os valores das eficiências sinápticas que respeitam o critério restritivo  $C_r$  de forma a criar um conjunto finito  $D$  de *valores admissíveis*, dizemos que uma *configuração da rede neuronal*  $[W, s^k]$  é uma atribuição de valores admissíveis às variáveis generalizadas do problema. Desta forma, o Resfriamento Simulado pode ser utilizado na solução do problema definido na equação (V.13):

Seja  $[W, s^k]_0 \in D$  uma configuração inicial da rede neuronal,

$T_0$  uma temperatura inicial

e  $r(l)$  uma seqüência decrescente de temperaturas.

$l := 0$  ;  $[W, s^k]_l := [W, s^k]_0$  ;  $T_l := T_0$  ;

enquanto o sistema não está *cristalizado* faça

**início**

enquanto o sistema não atinge o *equilíbrio térmico* em  $T_l$  faça

**início**

selecione aleatoriamente uma configuração da rede neuronal  $[W, s^k]' \in D$ ;

$\Delta F := F[W, s^k]' - F[W, s^k]$ ;

se  $\Delta F \leq 0$  então  $[W, s^k]_l := [W, s^k]'$ ;

do contrário  $[W, s^k]_l := [W, s^k]'$  com probabilidade  $p = e^{-\Delta F/T_l}$ ;

**fim**;

$T_{l+1} := r(l)$  ;  $x_{l+1} := x_l$  ;  $l := l + 1$ ;

**fim**;

a solução é  $[W, s^k]_l$ .

### § V.3 - Aplicação do Método de Síntese

O objetivo desta seção é apresentar detalhes da implementação computacional do método de síntese e resultados de sua aplicação a vários problemas da síntese de redes neuronais de Hopfield. Na programação computacional do algoritmo de Resfriamento Simulado, apresentado na seção anterior, foi preciso definir alguns de seus parâmetros que, por dependerem fortemente do problema especificamente tratado, não são passíveis de formalização [82]. O primeiro destes parâmetros é a temperatura inicial  $T_0$  onde, considerando que configurações com altas energias devem ser aceitas com probabilidade  $p$ , escolhemos um número  $\nu \gg 1$  de configurações da rede neuronal e, comparando seus níveis energéticos com a energia da configuração inicial fornecida ao algoritmo, determinamos a variação média de energia  $\overline{\Delta F}$  que, com o auxílio da distribuição de Boltzmann, nos permite escrever:

$$T_0 = \frac{-\overline{\Delta F}}{\ln(p)}. \quad (\text{V.14})$$

Na  $k$ -ésima mudança de fase, ou na  $k$ -ésima vez que o sistema atinge o equilíbrio térmico, a temperatura  $T_k$  é calculada pela taxa de resfriamento dada por:

$$T_k = T_0 \alpha^k ; \quad 0 < \alpha < 1. \quad (\text{V.15})$$

O equilíbrio térmico, como definido anteriormente, é atingido quando não mais se percebem flutuações significativas no valor médio da energia  $F$  naquela fase, o que pode ser detectado verificando-se a diferença percentual existente entre a energia média da fase na configuração  $l$  da rede neuronal mais recentemente gerada,  $F[W, s^k]_l$ , e a energia média existente um número  $(1 - \beta n^2)$  de configurações anteriormente estabelecidas, por exemplo [78]:

$$\epsilon = \left| \frac{F[W, s^k]_l - F[W, s^k]_{l-\beta n^2}}{F[W, s^k]_l} \right|, \quad (\text{V.16})$$

onde  $\beta$  é um número positivo denominado *escala*. A cristalização do sistema é detectada quando, após um número  $\phi$  de mudanças de fase, não há diminuição da energia média  $F$ . Finalmente, o parâmetro de penalização  $\mu$  é ajustado de acordo com a maior variação do critério objetivo utilizado na síntese, pois desta forma, as variações energéticas devidas à busca de uma síntese viável têm maior

influência sobre o Resfriamento Simulado do que as variações de energia causadas pelo critério de síntese.

Definidos todos os parâmetros necessários à aplicação do Resfriamento Simulado à síntese de redes neurais de Hopfield, um programa de computador, escrito em linguagem FORTRAN-77, foi executado em uma máquina IBM-4341 para a determinação das várias sínteses apresentadas a seguir.

### Síntese - 1

Considere a função lógica **or**, capaz de receber dois argumentos  $a$  e  $b$  com valores zero ou um, e decidir sobre o valor ( $a$  **or**  $b$ ) segundo especificado abaixo:

- a) 1 **or** 1 = 1,
- b) 1 **or** 0 = 1,
- c) 0 **or** 1 = 1,
- d) 0 **or** 0 = 0.

Seja uma rede neuronal com cinco neurônios identificados por  $N_i; 1 \leq i \leq 5$  com potencial limiar  $\theta$  unitário, onde os estados de ativação dos neurônios  $N_1$  e  $N_2$  representam os argumentos  $a$  e  $b$  de entrada da função **or**, o estado de ativação do neurônio  $N_3$  fornece o valor ( $a$  **or**  $b$ ) da função lógica e os neurônios  $N_4$  e  $N_5$  têm seus estados de ativação inicialmente desconhecidos, cabendo ao método de síntese a sua determinação. Na Figura (V.4) mostramos tal rede neuronal ativada por um padrão de atividade representante do caso (1 **or** 0) = 1 dentro da convenção, que passamos a utilizar, onde círculos ou qualquer outra figura geométrica simbolizam neurônios e suas cores e contorno representam:

- i) cor escura - neurônio excitado,
- ii) cor clara - neurônio inibido,
- iii) contorno pontilhado - estado de ativação desconhecido.

Para conseguir computar a função **or**, esta rede neuronal precisa de quatro padrões estáveis  $s^k; 1 \leq k \leq 4$  correspondentes aos quatro casos de sua tabela-verdade, ou seja:

- a) 1 **or** 1 = 1:

$$s_1^1 = 1, s_2^1 = 1, s_3^1 = 1, s_4^1 \text{ e } s_5^1 \text{ desconhecidos.}$$

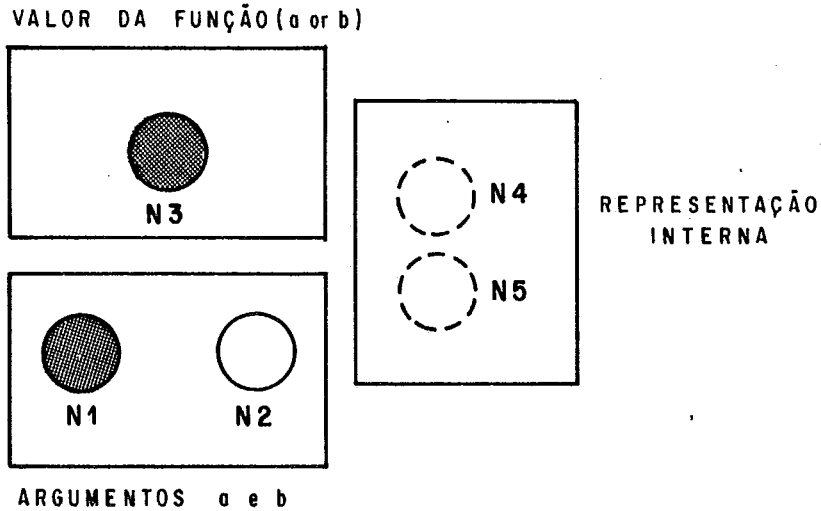


Figura V.4 - Convenção para representação gráfica de um padrão de atividade.

b) 1 or 0 = 1:

$s_1^2 = 1, s_2^2 = 0, s_3^2 = 1, s_4^2$  e  $s_5^2$  desconhecidos.

c) 0 or 1 = 1:

$s_1^3 = 0, s_2^3 = 1, s_3^3 = 1, s_4^3$  e  $s_5^3$  desconhecidos.

d) 0 or 0 = 0:

$s_1^4 = 0, s_2^4 = 0, s_3^4 = 0, s_4^4$  e  $s_5^4$  desconhecidos.

Os parâmetros da síntese são:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 326$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.2$ ,

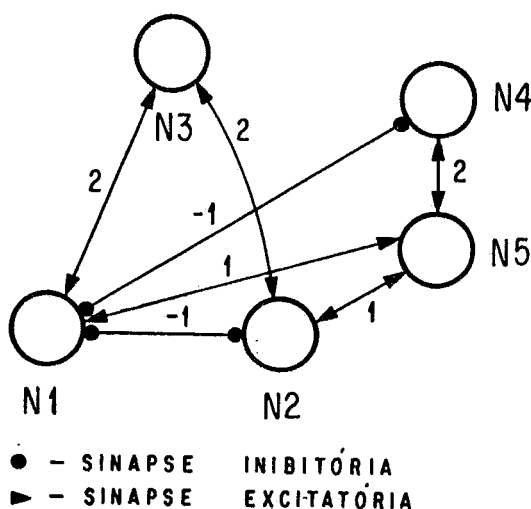
escala -  $\beta = 5$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 250$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

O Resfriamento Simulado determinou a síntese ótima indicada na Figura (V.5) após doze mudanças de fase e 7280 configurações simuladas. Esta rede neuronal de cinco neurônios tem valores mínimos para suas eficiências sinápticas e, uma vez excitada corretamente com os argumentos da função lógica or, evolui para um padrão de atividade estável representante do valor da referida função para os dados argumentos.



**Figura V.5** - Síntese ótima para uma rede neuronal que computa a função or.

### Síntese - 2

Considerando a rede neuronal da Síntese - 1, desejamos, agora, determinar a síntese ótima que possibilita a computação da função lógica and pela tabela-verdade:

a) 1 and 1 = 1,



b) 1 and 0 = 0,

c) 0 and 1 = 0,

d) 0 and 0 = 0.

Os parâmetros da síntese são:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 326$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.2$ ,

escala -  $\beta = 5$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 250$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

Após a simulação de 7700 configurações em seis fases, a síntese ótima esquematizada na Figura (V.6) foi determinada.

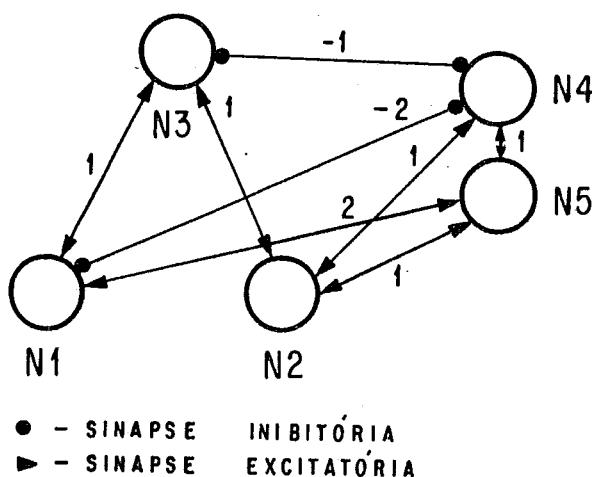


Figura V.6 - Síntese ótima para uma rede neuronal que computa a função and.

### Síntese - 3

Novamente, considerando a rede neuronal da **Síntese - 1**, especificar a síntese ótima para a computação da função lógica **exclusive-or** que também decide seu valor ( $a$  **exclusive-or**  $b$ ) a partir dos argumentos  $a$  e  $b$  segundo a tabela abaixo:

- a) 1 **exclusive-or** 1 = 0,
- b) 1 **exclusive-or** 0 = 1,
- c) 0 **exclusive-or** 1 = 1,
- d) 0 **exclusive-or** 0 = 0.

Foram utilizados os seguintes parâmetros de síntese:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 326$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.2$ ,

escala -  $\beta = 5$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 250$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

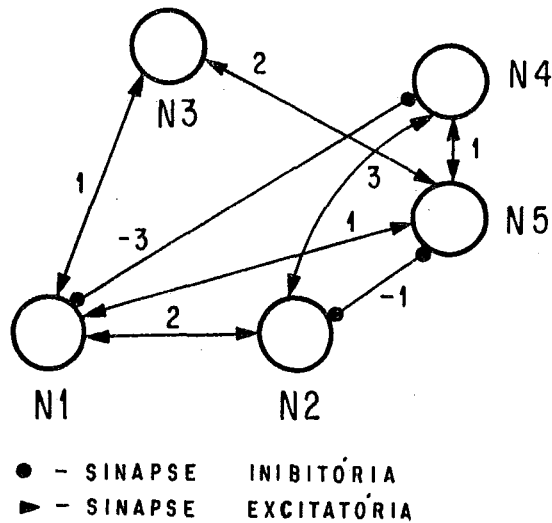
Na Figura (V.7) apresentamos o resultado do Resfriamento Simulado após 14 mudanças de fase e 10780 configurações geradas.

### Síntese - 4

Neste experimento estamos interessados em verificar a já mencionada capacidade do critério da topologia mínima em isolar neurônios não necessários à rede neuronal. Para isto, utilizamos uma rede neuronal, inicialmente, com 30 neurônios cujo potencial de ativação é nulo e que deve ser capaz de armazenar o padrão de atividade indicado na Figura (V.8). Como o padrão de atividade possui apenas quatro neurônios excitados, os restantes 26 neurônios têm seus estados de ativação desconhecidos, e que serão determinados pelo método de síntese; sendo esperado que muitos deles, por não apresentarem função, sejam retirados da rede neuronal. Os parâmetros da síntese foram:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.6$ ,



**Figura V.7** - Síntese de uma rede neuronal que computa a função **exclusive-or**.

temperatura inicial -  $T_0 = 1703$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.08$ ,

escala -  $\beta = 3$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

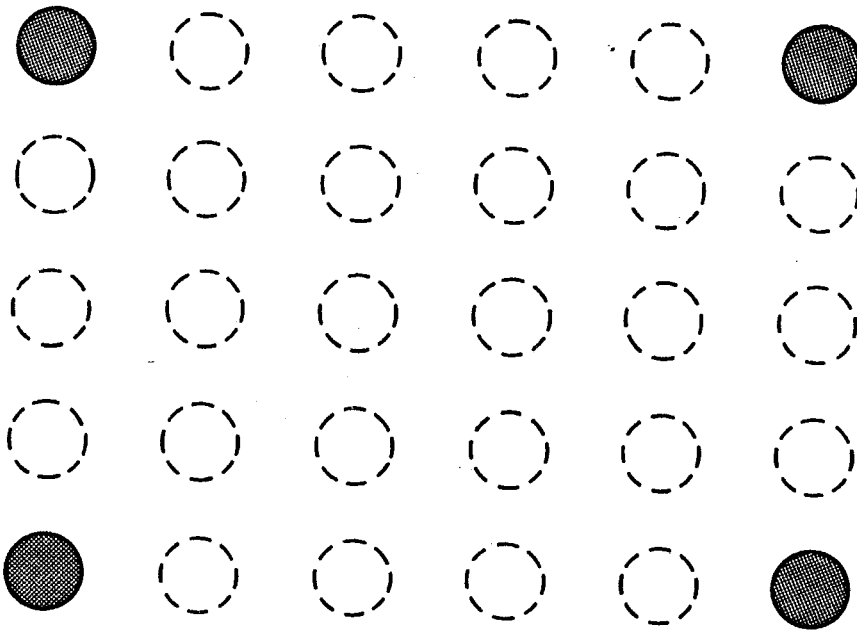
parâmetro de penalização -  $\mu = 870$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

A Figura (V.9), onde os círculos riscados com uma cruz representam os neurônios isolados, indica o que o método de síntese foi capaz de determinar após 16 mudanças de fase e 268800 configurações simuladas. Certamente, a síntese não é ótima pois há um neurônio sem responsabilidade de representação que está excitado no padrão de atividade estável; porém fica caracterizada a eficiência do critério da topologia mínima.

### Síntese - 5

Aqui, o critério da topologia mínima é utilizado para determinar a menor rede neuronal capaz de reconhecer o padrão de atividade dado pela Figura (V.10).



**Figura V.8 - Padrão de atividade para a rede neuronal da Síntese - 4.**

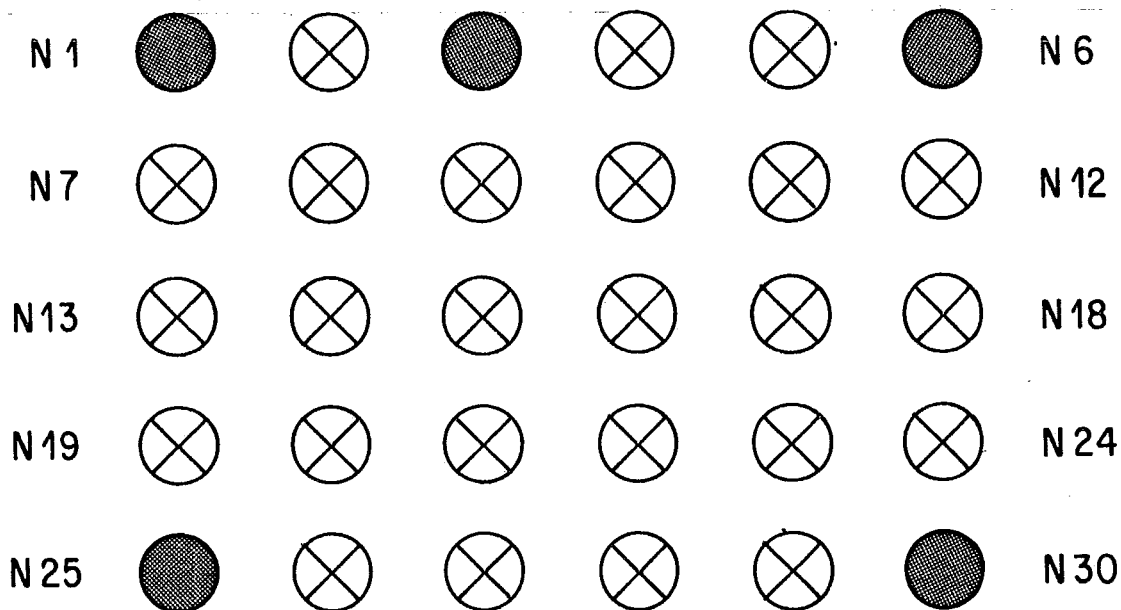
Espera-se que, dentre os 30 neurônios inicialmente considerados, vários sejam isolados. A síntese foi determinada com os parâmetros:

- critério objetivo - topologia mínima,
- probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,
- temperatura inicial -  $T_0 = 27200$ ,
- taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,
- escala -  $\beta = 3$ ,
- equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,
- parâmetro de penalização -  $\mu = 21315$ ,
- cristalização -  $\phi = 2$ .

Notamos, na Figura (V.11), que 14 neurônios foram isolados da rede neuronal, enquanto 4 destas células assumiram estados de excitação indesejáveis, porém resultantes da liberdade de escolha concedida pelo projetista ao método de síntese.

### Síntese - 6

Aqui, o critério da topologia mínima é utilizado na síntese de uma rede neuro-

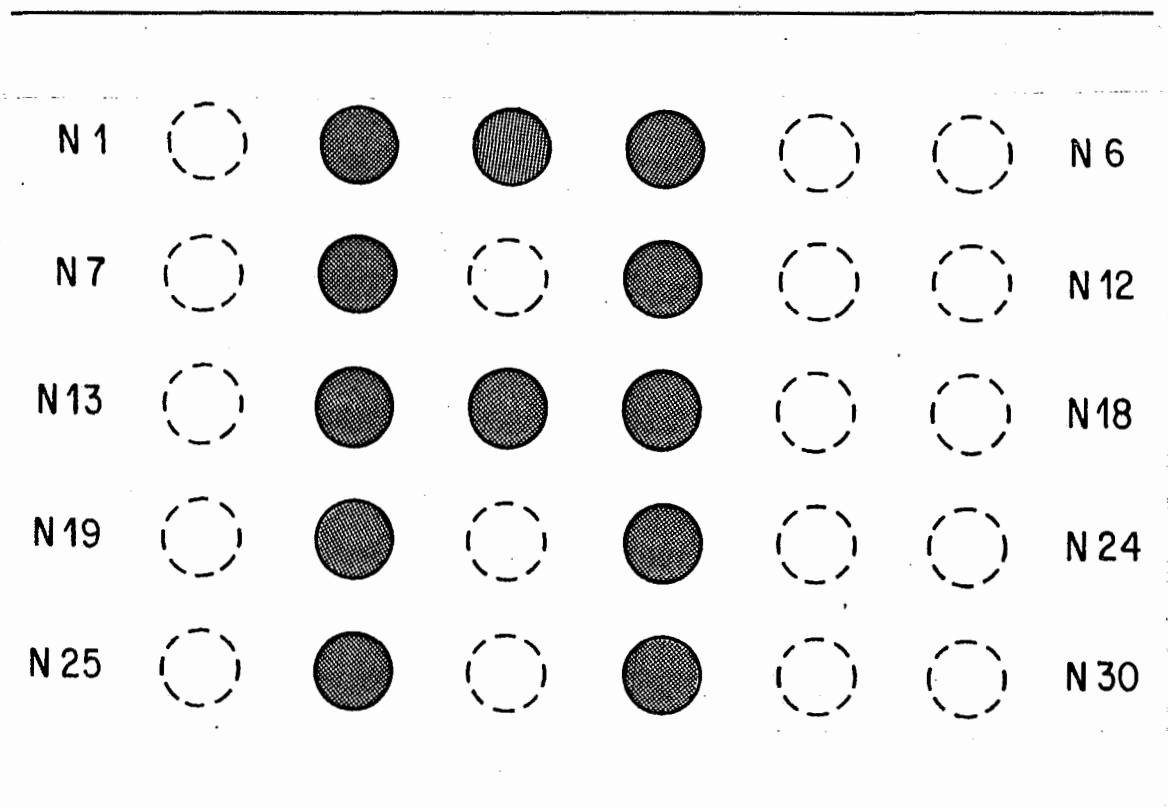


**Figura V.9** - Padrão de atividade estável determinado pela Síntese - 4.

nal capaz de reconhecer o padrão de atividade da Figura (V.12), que é semelhante ao da Síntese - 5, diferindo desta apenas porque não concede liberdade de escolha dos estados de ativação de seus neurônios. Com os parâmetros de síntese ajustados para:

- critério objetivo - topologia mínima,
- probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,
- temperatura inicial -  $T_0 = 25671$ ,
- taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,
- escala -  $\beta = 3$ ,
- equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,
- parâmetro de penalização -  $\mu = 21315$ ,
- cristalização -  $\phi = 2$ ,

obteve-se uma rede neuronal cuja soma dos valores das eficiências sinápticas é 114, portanto maior do que na Síntese - 5 onde esta soma é 104. Este fato é devido à liberdade de escolha de uma representação interna concedida à rede neuronal na



**Figura V.10 - Padrão de atividade para a Síntese - 5.**

**Síntese - 5.**

### Síntese - 7

Estamos, agora, interessados na avaliação dos efeitos do critério da máxima tolerância a falhas na síntese de redes neuronais. Para que possamos comparar sua influência com o critério da topologia mínima, utilizamos o mesmo padrão de atividade da Síntese - 5 (Figura V.10), onde vários neurônios têm seus estados de ativação desconhecidos inicialmente. Os parâmetros da síntese são:

critério objetivo - máxima tolerância a falhas,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 95517$ ,

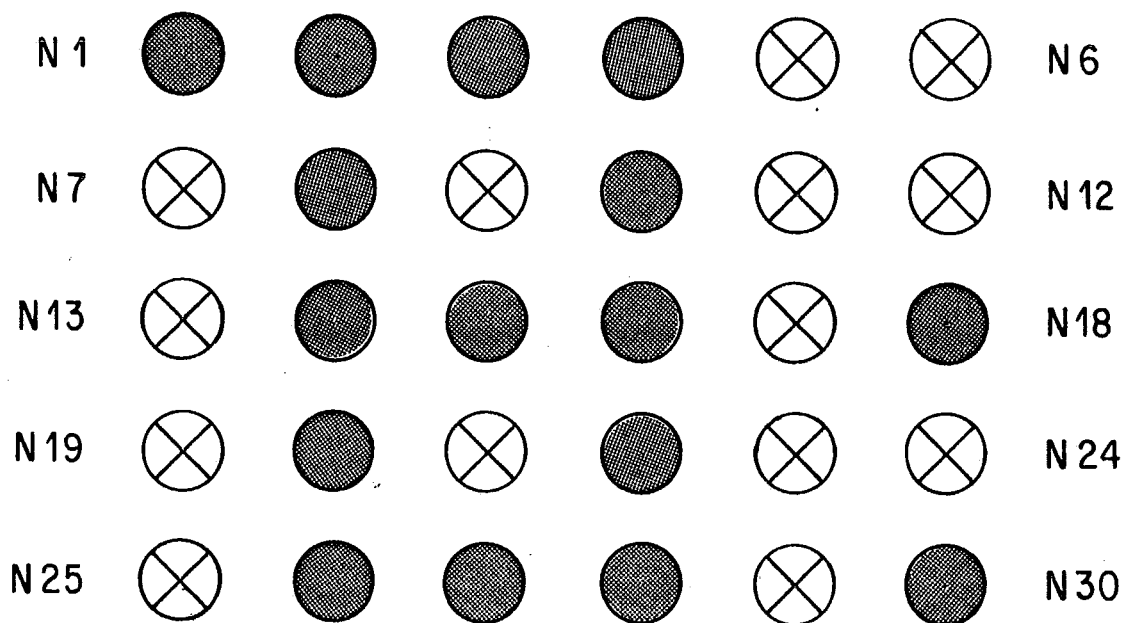
taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,

escala -  $\beta = 3$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 21315$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

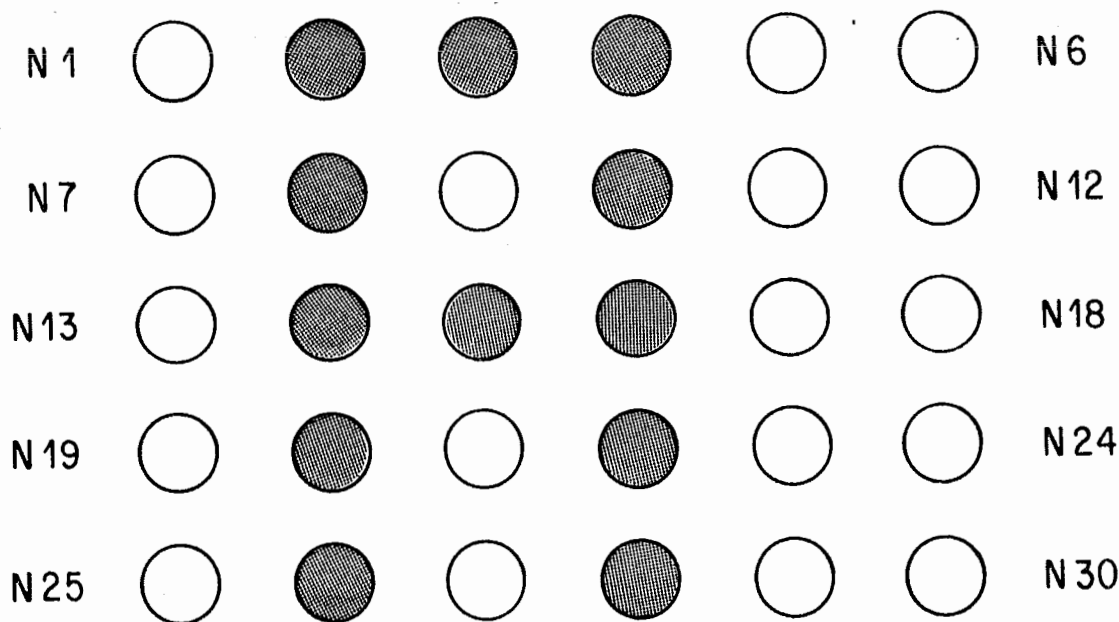


**Figura V.11** - Padrão de atividade estável para a **Síntese - 5**.

Na Figura (V.13) vemos o resultado da síntese onde, dos neurônios com estado de ativação ignorados, 10 estão excitados e 8 inibidos no padrão estável determinado pelo método de síntese. É interessante observar que, após o processo de Resfriamento Simulado com 10 mudanças de fase e 127872 configurações simuladas, o padrão de conexão da rede neuronal possui eficiências sinápticas com valores altos e a disfunção de vários grupos de neurônios, como, por exemplo, os neurônios  $N_1$  e  $N_{13}$ , não alteram a estabilidade do padrão de atividade.

### Síntese - 8

Recordando os padrões de atividade inicial e final na **Síntese - 4**, verificamos que um grande número de neurônios foi isolado da rede neuronal devido à utilização do critério da topologia mínima. Aplicando-se, agora, o critério da máxima tolerância a falhas ao mesmo padrão de atividade inicial (Figura V.8) é esperado que, ao contrário da **Síntese - 4**, muitos neurônios sejam incorporados à rede neuronal, de forma a dividir a responsabilidade da manutenção do padrão estável e garantir uma alta tolerância a falhas.



**Figura V.12 - Padrão de atividade para a Síntese - 6.**

Utilizando os parâmetros:

critério objetivo - máxima tolerância a falhas,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.6$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 2064$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.08$ ,

escala -  $\beta = 3$ ,

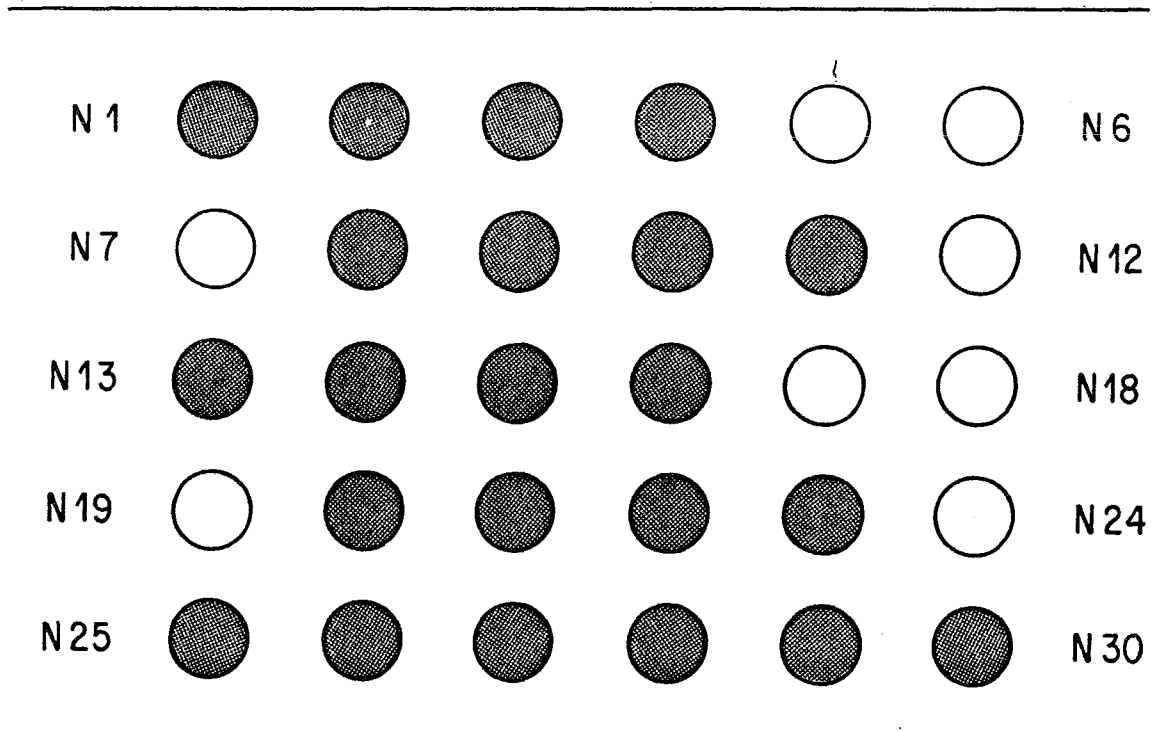
equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 1740$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ ,

e, após 6 mudanças de fase com 40320 configurações simuladas, 26 neurônios foram incorporados à rede neuronal assumindo o estado de excitação. A tolerância a falhas neste exemplo é tão alta que aproximadamente 80% dos neurônios podem apresentar mau funcionamento sem que haja prejuízo para o padrão de atividade definido pelo projetista (Figura V.14).





**Figura V.13 - Padrão estável da Síntese - 7.**

### Síntese - 9

Nas próximas sínteses analisaremos os critérios sintáticos, iniciando pelo critério da representação localizada, onde o projetista deseja que o padrão estável contenha o menor número possível de neurônios excitados. Na Figura (V.15) apresentamos um padrão de atividade inicial com 5 neurônios excitados e 4 neurônios inibidos, sendo os neurônios restantes livres para escolher seu estado de ativação.

Após 5 mudanças de fase e 109593 configurações simuladas, o Resfriamento Simulado do sistema definiu o padrão estável apresentado na Figura (V.16), utilizando os parâmetros:

critério objetivo - representação localizada,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.6$ ,

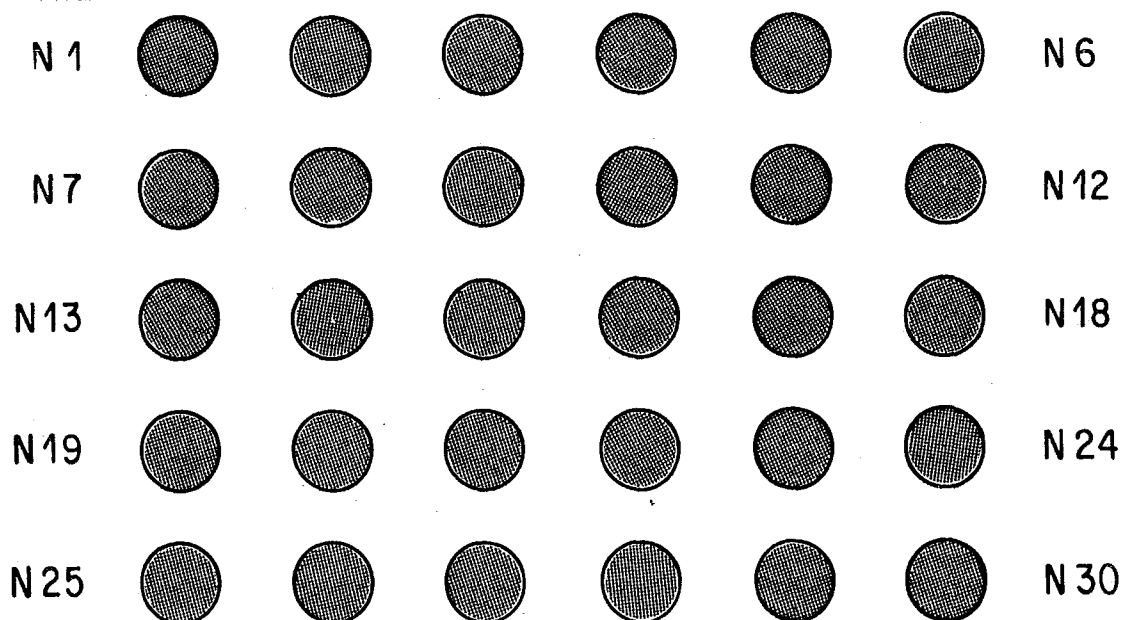
temperatura inicial -  $T_0 = 1705$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.08$ ,

escala -  $\beta = 3$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.03$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 870$ ,



**Figura V.14** - Alta tolerância a falhas no resultado da Síntese - 8.

cristalização -  $\phi = 2$ .

Podemos notar que a síntese é ótima pois gerou o padrão estável com o menor número de neurônios excitados possível, obedecendo às exigências iniciais do projetista.

### Síntese - 10

Ao contrário da Síntese - 9, nesta síntese utilizamos o critério da representação distribuída sobre o mesmo padrão de atividade da Figura (V.15), esperando obter um padrão estável com um máximo de neurônios excitados. Com os parâmetros da síntese ajustados para:

critério objetivo - representação distribuída,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 9747$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.08$ ,

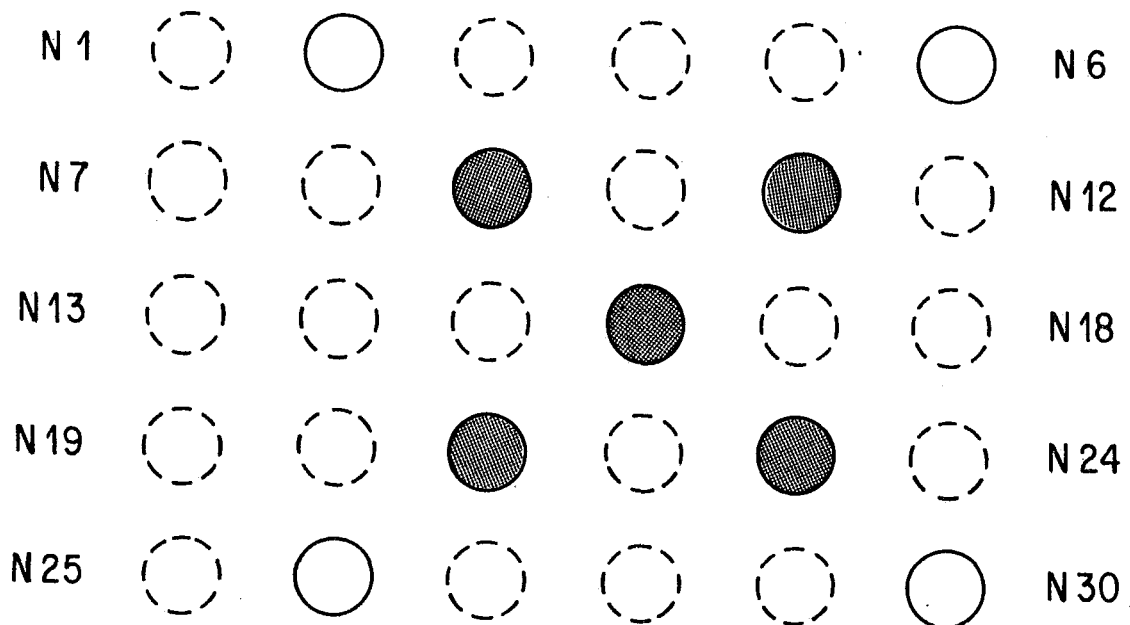
escala -  $\beta = 4$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 2175$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ ,

obtivemos o padrão estável indicado na Figura (V.17), o que comprova a eficiência deste critério de síntese, pois tornou a representação do conceito a mais distribuída possível dentro das condições impostas pelo projetista.



**Figura V.15** - Padrão de atividade inicial fornecido pelo projetista.

### Síntese - 11

Desejamos representar em uma rede neuronal dois conceitos semelhantes por dois padrões de atividade que, inicialmente, têm a forma básica indicada na Figura (V.18). Para sintetizar tal rede neuronal utilizamos o critério da representação dependente com os seguintes parâmetros:

critério objetivo - representação dependente,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 9747$ ,

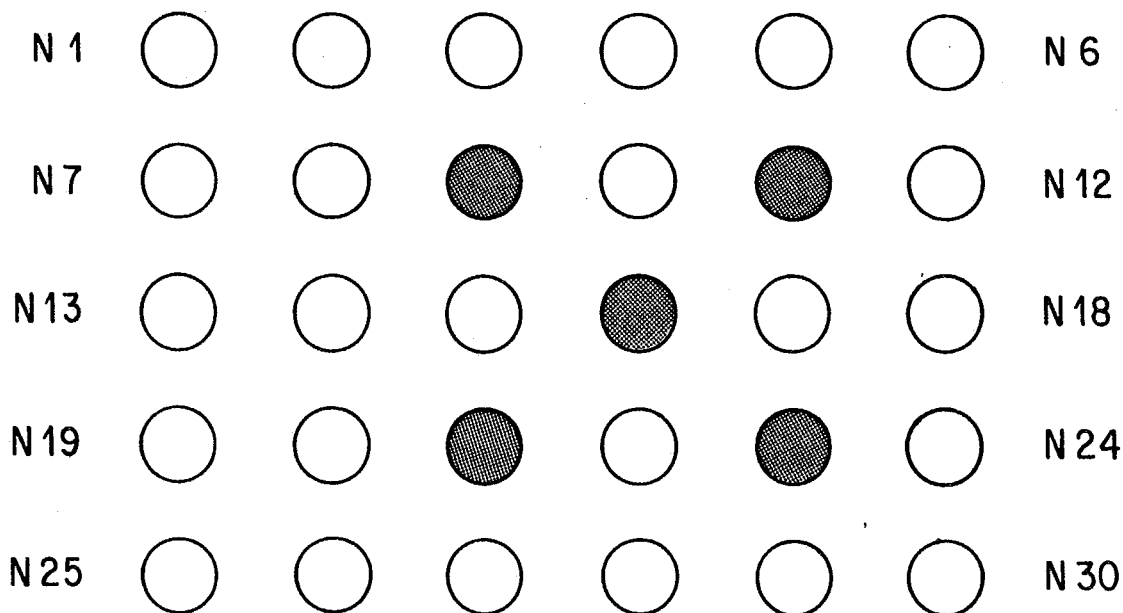
taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,

escala -  $\beta = 4$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 2175$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .



**Figura V.16 - Padrão de atividade final da Síntese - 9.**

A Figura (V.19) indica a sintaxe final dos padrões de atividade, onde notamos um caso extremo de dependência, pois os mesmos são exatamente iguais, representando uma falha do projetista na especificação inicial da sintaxe. O Resfriamento Simulado foi realizado com 6 mudanças de fase e 106604 configurações simuladas.

### Síntese - 12

Neste caso utilizamos os mesmos padrões de atividade iniciais da Síntese - 11, indicados na Figura (V.18), porém desejamos determinar uma sintaxe final que mantenha uma determinada independência mútua para a representação de entidades diferentes sobre a rede neuronal. O critério da representação independente, juntamente com o método do Resfriamento Simulado ajustado com os parâmetros

indicados abaixo, determinou a sintaxe final dos padrões de atividade apresentada na Figura (V.20):

critério objetivo - representação independente,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 9748$ ,

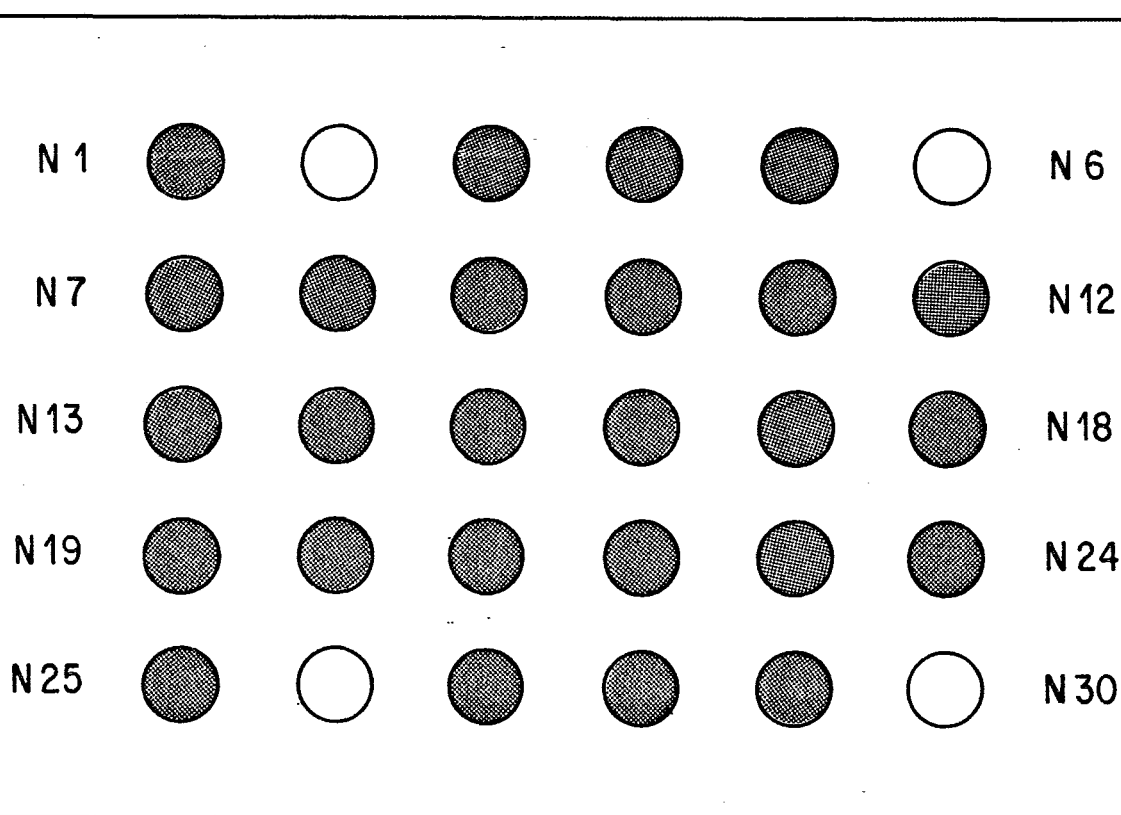
taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,

escala -  $\beta = 4$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 2175$ ,

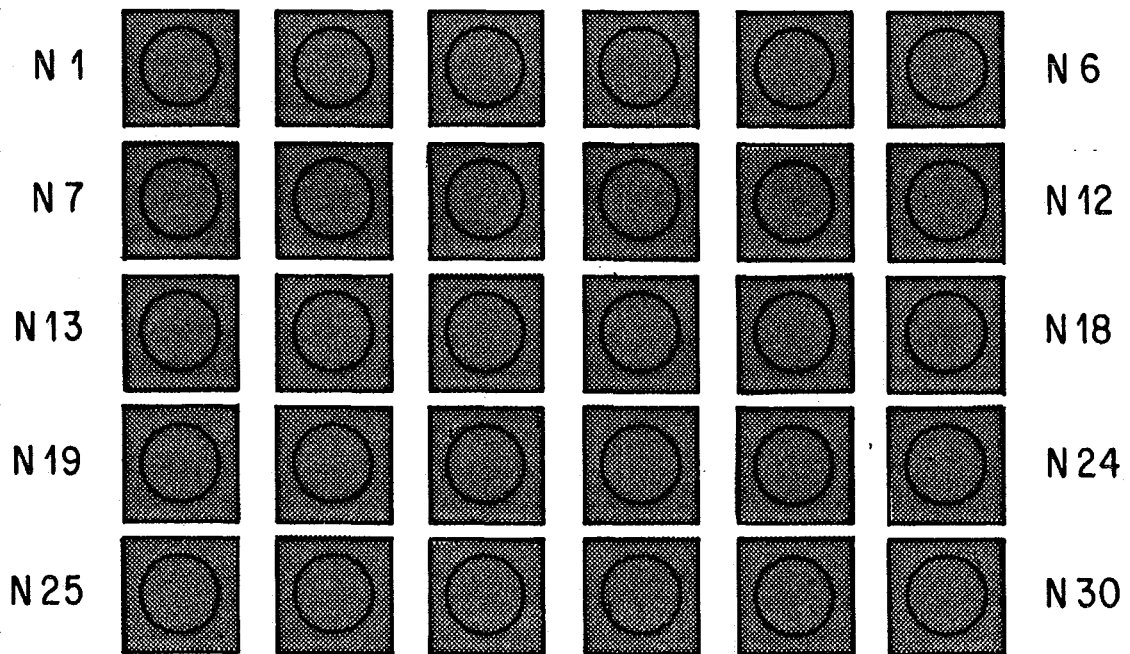
cristalização -  $\phi = 2$ .



**Figura V.17 - Representação distribuída como resultado da Síntese - 10.**

Mesmo 6 mudanças de fase e 169096 configurações simuladas não foram suficientes para a determinação de uma síntese ótima pois, na sintaxe final dos padrões de atividade existem 7 neurônios que participam de ambas as representações.





**Figura V.19 - Sintaxe final determinada pela Síntese - 11.**

cristalização -  $\phi = 2$ .

#### Síntese - 14

Nesta síntese desejamos gerar uma rede neuronal com o padrão estável maximal representado na Figura (V.22) e, para isto, utilizamos o critério objetivo da topologia mínima. Os parâmetros da síntese são:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 4481$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.3$ ,

escala -  $\beta = 4$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 870$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ ,

e, após 97124 configurações simuladas em 10 mudanças de fase, a síntese foi obtida. Notamos que, normalmente, os critérios restritivos diminuem o número de

configurações simuladas pelo método de síntese, aumentando sua eficiência em consequência da redução do conjunto de valores admissíveis  $\mathcal{D}$ .

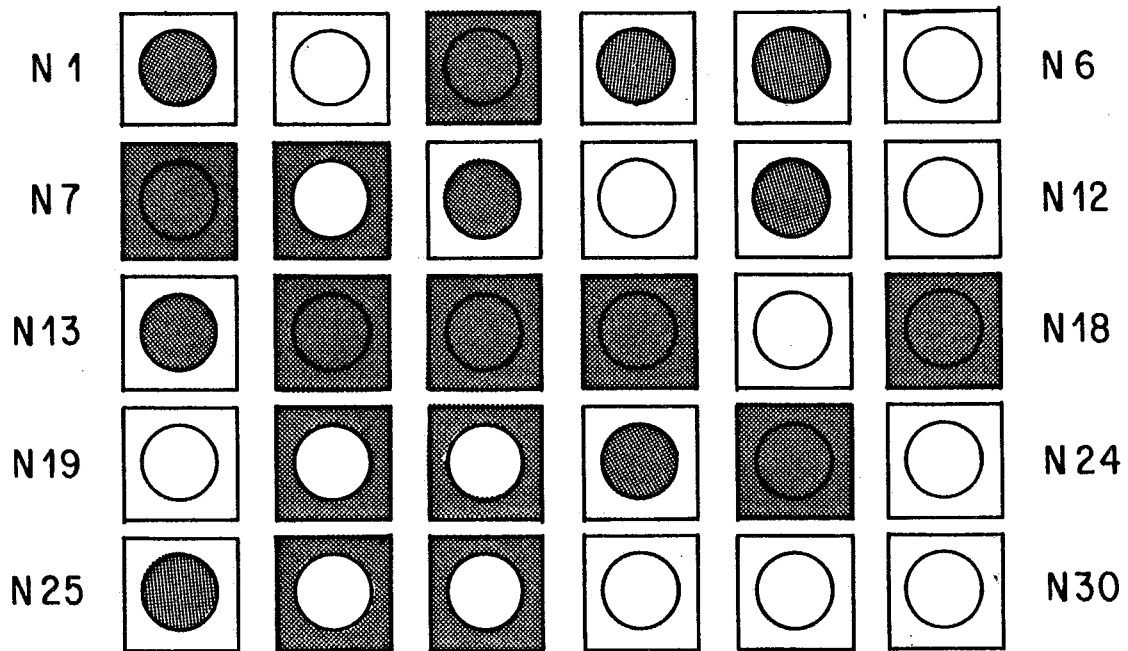


Figura V.20 - Sintaxe final determinada pela Síntese - 12.

### Síntese - 15

Dados os dois padrões de atividade indicados na Figura (V.23), desejamos sintetizar uma rede neuronal onde existe uma relação de conjunção entre os referidos padrões de atividade, conforme definido no Capítulo IV. Em adição ao critério da representação conjuntiva, utilizamos também o critério da topologia mínima com os parâmetros de síntese ajustados em:

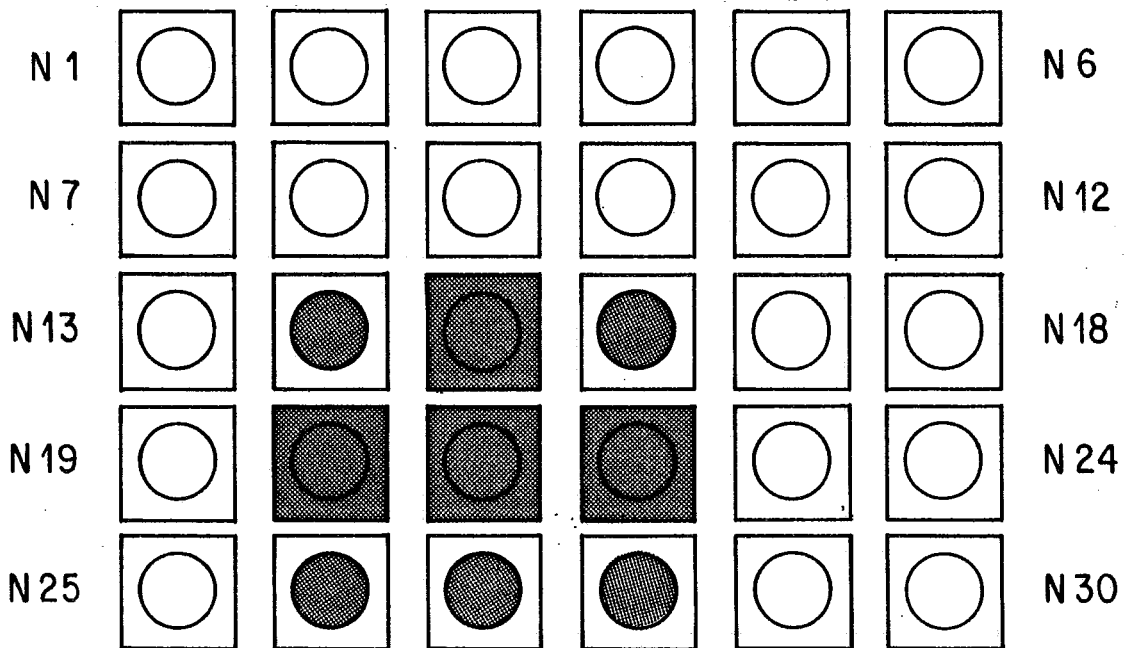
- critério objetivo - topologia mínima,
- critério restritivo - representação conjuntiva,
- probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,
- temperatura inicial -  $T_0 = 6200$ ,
- taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.1$ ,
- escala -  $\beta = 4$ ,



equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 2175$ ,

crystalização -  $\phi = 2$ .



**Figura V.21 - Hierarquia entre dois padrões de atividade.**

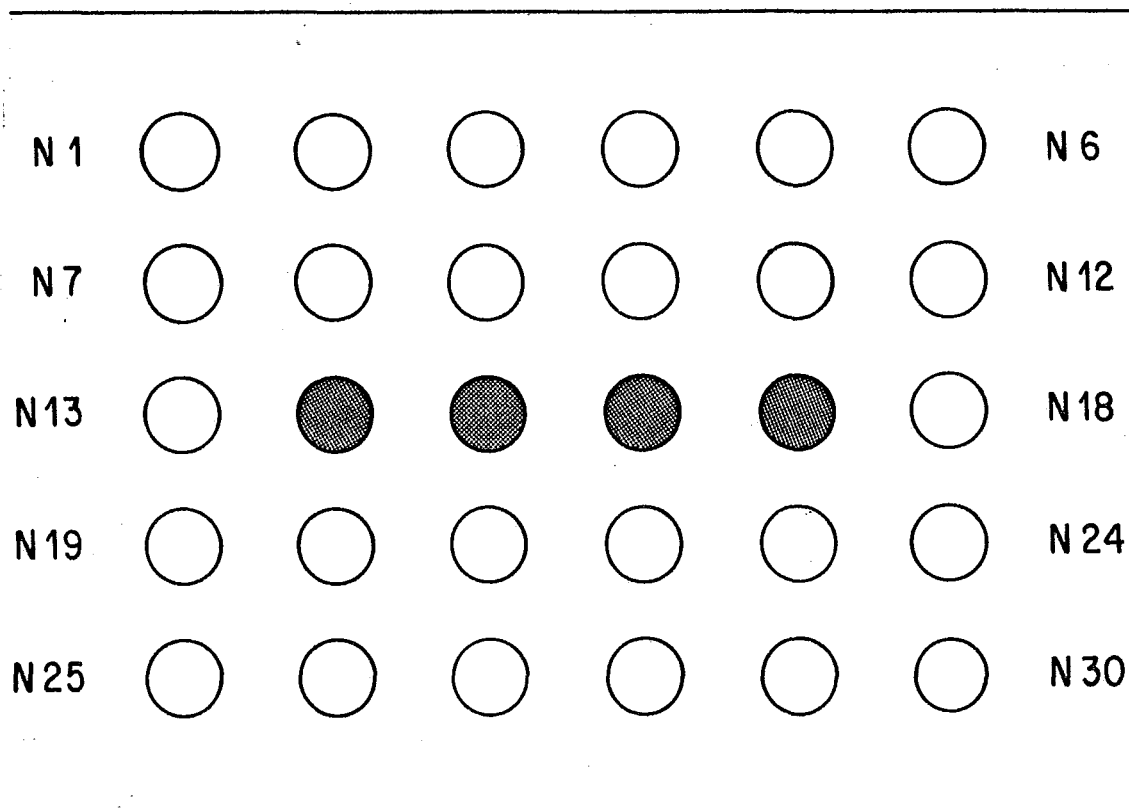
O Resfriamento Simulado determinou a síntese ótima após 219240 configurações simuladas em 10 mudanças de fase e isolou 12 neurônios desnecessários à representação do conhecimento desejada pelo projetista (Figura V.24).

### Síntese - 16

Aproveitando os mesmos padrões de atividade da Síntese - 15, indicados na Figura (V.23), desejamos sintetizar uma rede neuronal que garanta uma relação de disjunção entre as representações. Novamente, utilizando o critério da topologia mínima e os mesmos parâmetros da Síntese - 15, o Resfriamento Simulado, em 11 mudanças de fase e 229680 configurações simuladas, gerou uma síntese ótima com 12 neurônios isolados, semelhante ao da Figura (V.24).

### Síntese - 17

Os mesmos parâmetros da **Síntese - 15** também podem ser usados para um outro processo de síntese onde se deseja garantir uma relação de exclusividade entre os padrões de atividade da Figura (V.23). Desta vez, o Resfriamento Simulado, aliado ao critério da representação exclusiva, determinou a síntese ótima em 10 mudanças de fase e 219240 configurações simuladas, novamente isolando os neurônios indicados na Figura (V.24).

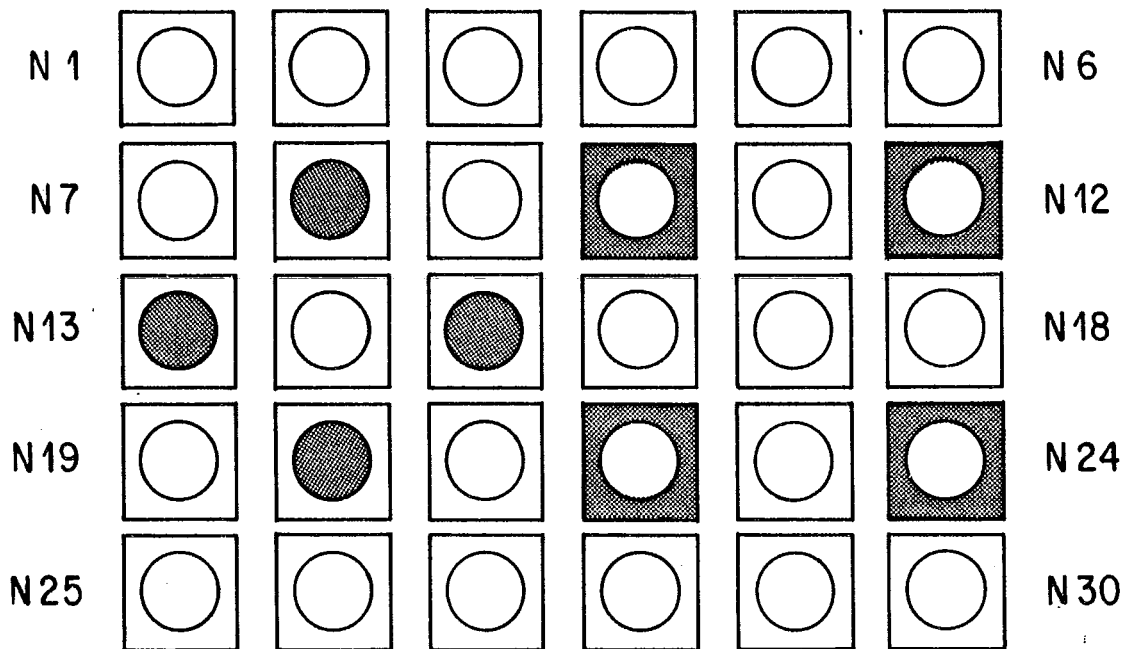


**Figura V.22** - Padrão estável maximal para a **Síntese - 14**.

### Síntese - 18

Esta síntese visa determinar uma rede neuronal que, excitada com os dois padrões de atividade representados na Figura (V.25) por círculos e quadrados, possa evoluir probabilisticamente para um padrão estável indicado por triângulos na mesma figura. O método de síntese com os critérios da representação dedutiva e topologia mínima, foi capaz de determinar tal síntese em 9 mudanças de fase e 73151 configurações simuladas utilizando os parâmetros:

critério objetivo - topologia mínima,  
 critério restritivo - representação dedutiva,  
 probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,  
 temperatura inicial -  $T_0 = 4441$ ,  
 taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.3$ ,  
 escala -  $\beta = 4$ ,  
 equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,  
 parâmetro de penalização -  $\mu = 2175$ ,  
 cristalização -  $\phi = 2$ .



**Figura V.23** - Conjunção de dois padrões de atividade.

Simulações da rede neuronal sintetizada mostraram que o decaimento probabilístico desejado pelo projetista ocorre em, aproximadamente, 25% dos casos.

## Síntese - 19

O objetivo desta síntese é determinar uma rede neuronal com o padrão de atividade auto-estável, indicado na Figura (V.26) por círculos, em relação ao padrão de atividade representado na mesma figura por quadrados. O Resfriamento Simulado, aliado ao critério da topologia mínima, determinou a síntese ótima em 10 mudanças de fase e 66135 configurações simuladas através dos seguintes parâmetros:

critério objetivo - topologia mínima,

probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,

temperatura inicial -  $T_0 = 4481$ ,

taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.3$ ,

escala -  $\beta = 4$ ,

equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,

parâmetro de penalização -  $\mu = 2610$ ,

cristalização -  $\phi = 2$ .

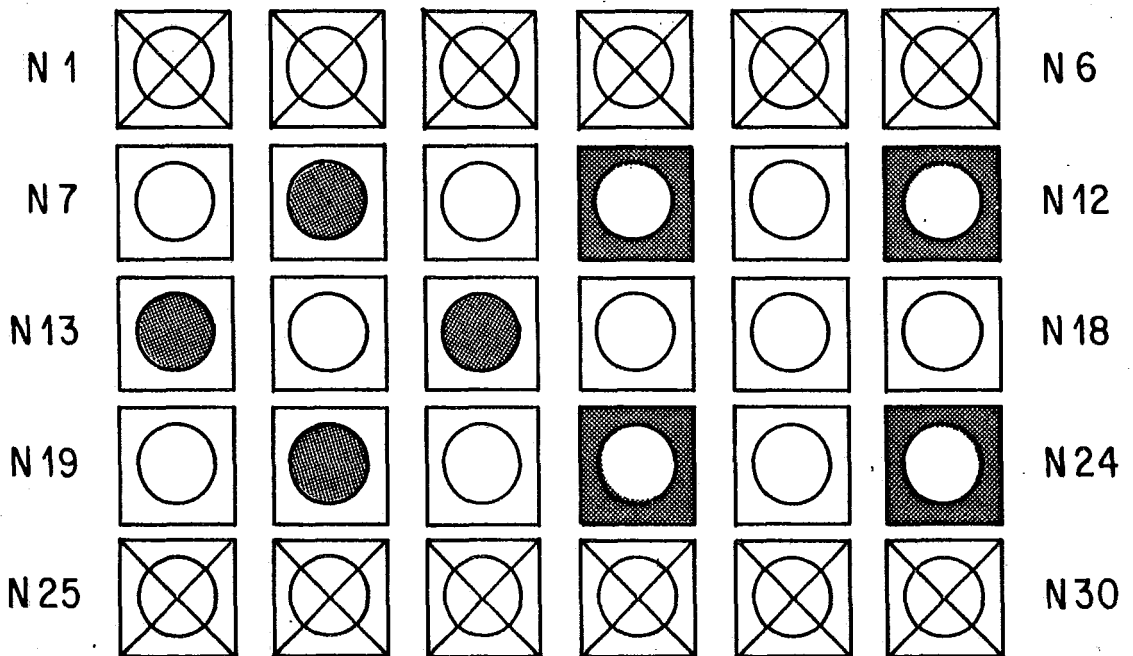


Figura V.24 - Isolamento de neurônios na Síntese - 15.

### Síntese - 20

Ainda considerando o padrão de atividade indicado por círculos na Figura (V.26), desejamos aplicar o método de síntese para gerar uma rede neuronal onde este padrão de atividade seja intrinsecamente estável. Utilizando o critério da topologia mínima, o Resfriamento Simulado, em 34801 configurações simuladas nas suas 4 mudanças de fase, determinou tal síntese controlado pelos parâmetros:

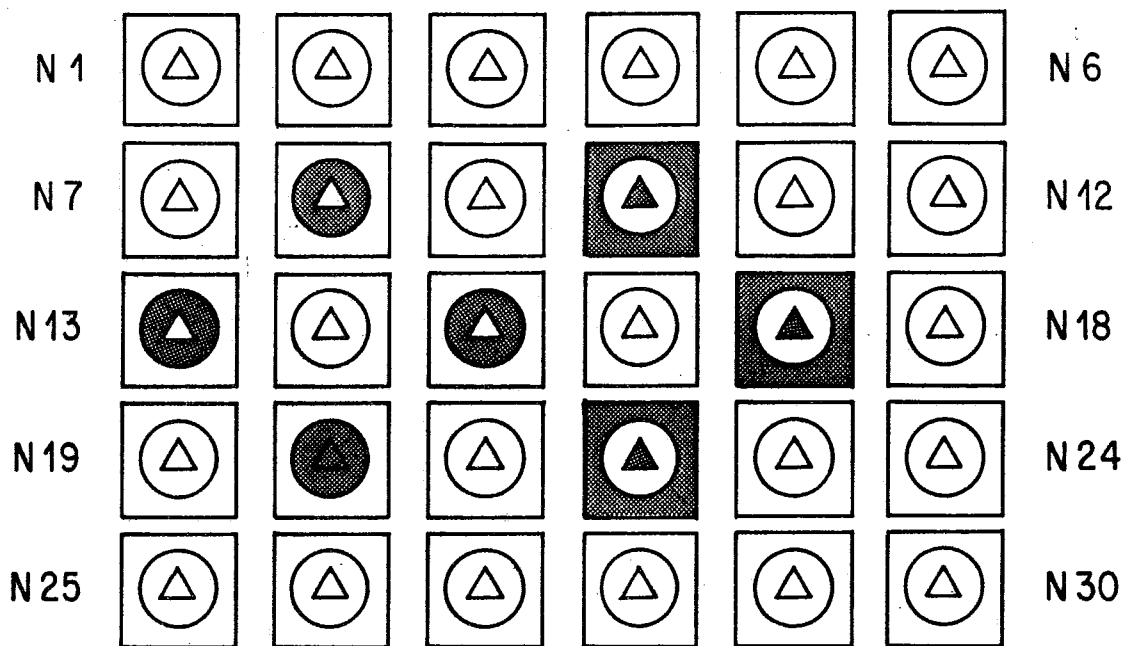
- critério objetivo - topologia mínima,
- probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,
- temperatura inicial -  $T_0 = 2261$ ,
- taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.3$ ,
- escala -  $\beta = 4$ ,
- equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,
- parâmetro de penalização -  $\mu = 2610$ ,
- cristalização -  $\phi = 2$ .

### Síntese - 21

Dados os padrões de atividade indicados na Figura (V.27), desejamos sintetizar uma rede neuronal onde exista uma relação de competição entre estes padrões de atividade. Com o critério da representação competitiva estabelecemos a dominância do padrão de atividade representado por círculos sobre o representado pelos quadrados e, juntamente com o critério da topologia mínima, aplicamos o Resfriamento Simulado com seus parâmetros ajustados para:

- critério objetivo - topologia mínima,
- probabilidade de aceitação inicial -  $p = 0.8$ ,
- temperatura inicial -  $T_0 = 332$ ,
- taxa de resfriamento -  $\alpha = 0.3$ ,
- escala -  $\beta = 4$ ,
- equilíbrio térmico -  $\epsilon = 0.02$ ,
- parâmetro de penalização -  $\mu = 2610$ ,
- cristalização -  $\phi = 2$ .

A síntese ótima foi obtida após 48721 configurações geradas em 4 mudanças de fase.



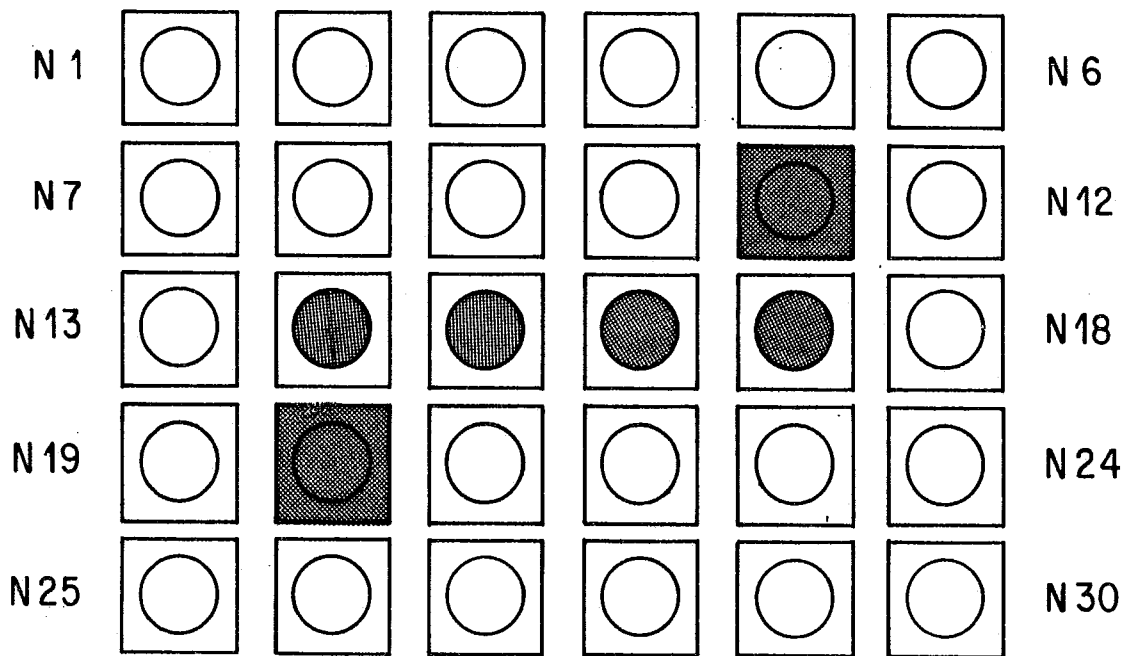
**Figura V.25** - Representação dedutiva com três padrões de atividade.

### Síntese - 22

Um caso extremo de dominância é atingido nos padrões de atividade absolutamente estáveis. Na Figura (V.28) estão indicados três padrões de atividade, representados por círculos, quadrados e triângulos, sendo o objetivo desta síntese gerar uma rede neuronal onde os referidos padrões de atividade sejam estáveis e um deles, representado por círculos, seja absolutamente estável. O método de síntese, com os mesmos parâmetros da Síntese - 21, determinou a rede neuronal em apenas 3 mudanças de fase.

### Síntese - 23

Finalmente, desejamos através do critério da representação cooperativa sintetizar uma rede neuronal onde a presença simultânea de dois determinados padrões de atividade, indicados na Figura (V.29) por círculos e quadrados, dispara o decaimento determinístico para o padrão de atividade representado por triângulos na figura. Novamente, utilizando os mesmos parâmetros da Síntese - 21, o método



**Figura V.26** - Síntese de um padrão de atividade auto-estável.

de síntese determinou a rede neuronal em 4 mudanças de fase.

Muitas outras sínteses poderiam ser apresentadas com o objetivo de analisar a eficiência do método proposto, porém consideramos que os resultados desta seção, juntamente com o formalismo desenvolvido no Capítulo IV e o conhecimento sobre o Resfriamento Simulado, são suficientes para estabelecer o método de síntese como uma nova ferramenta na promoção do aprendizado em redes neuronais.

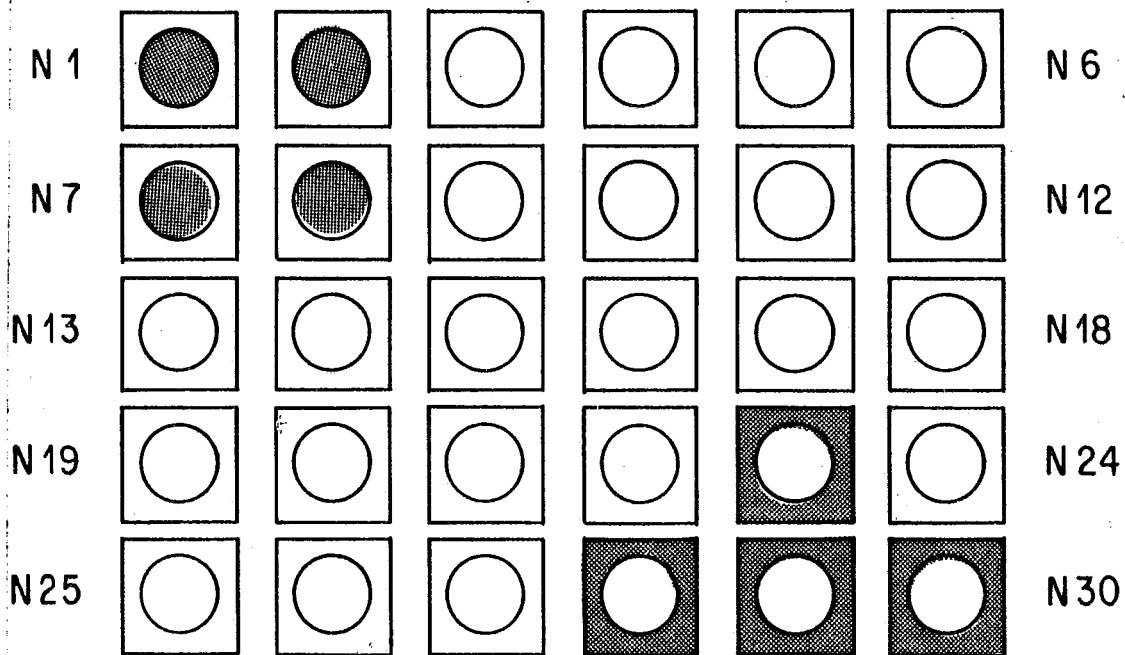
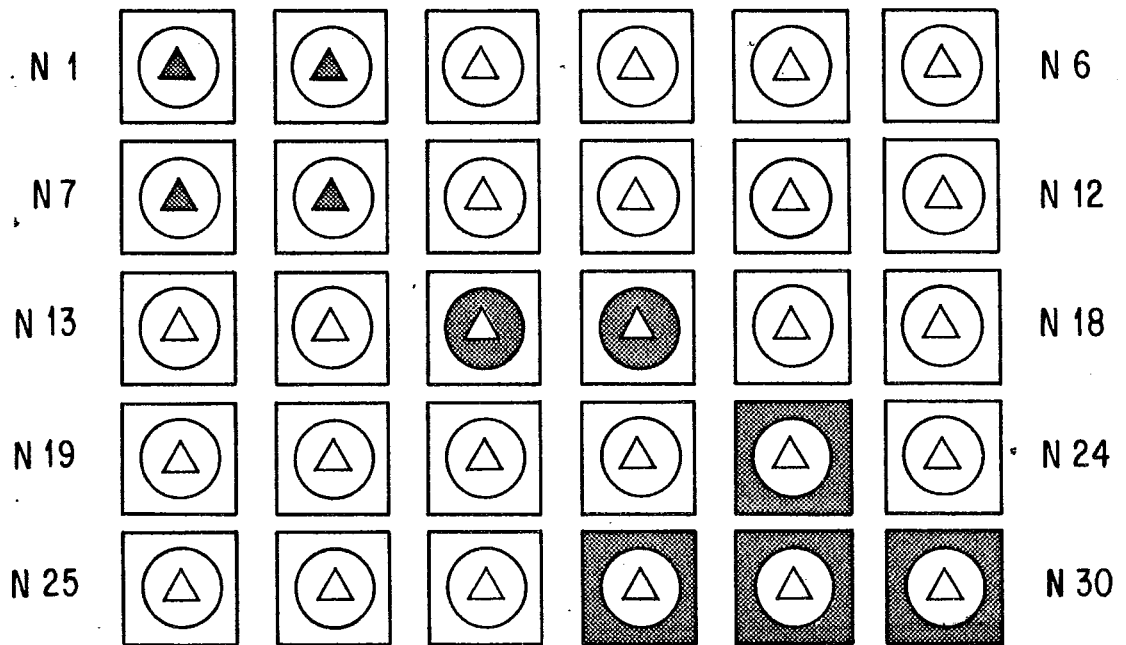
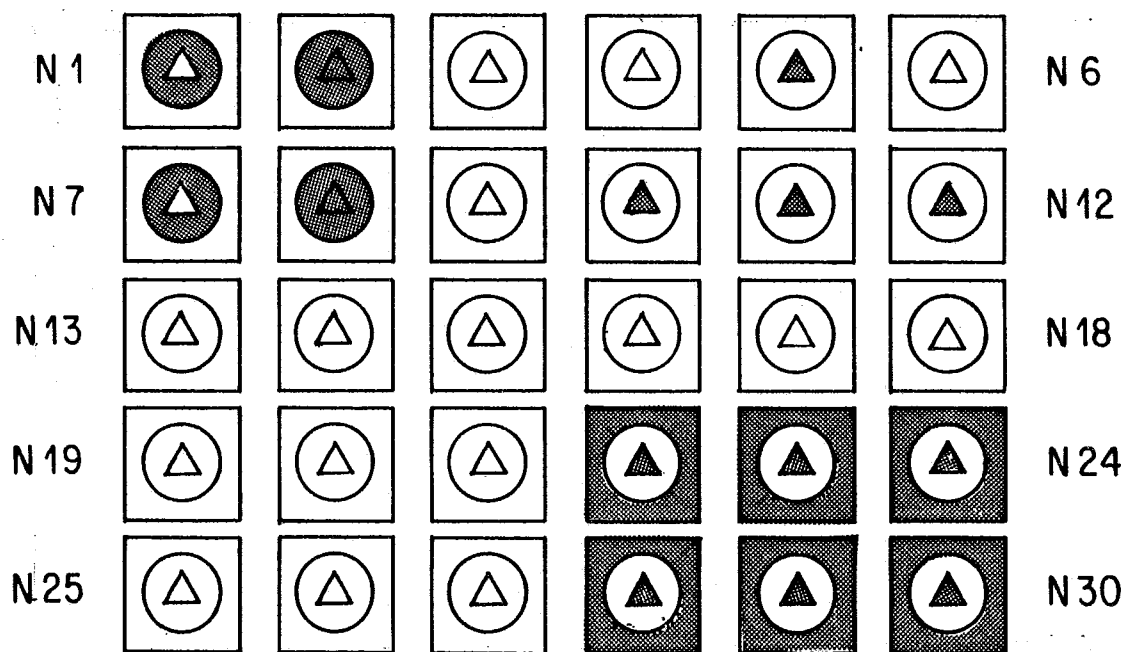


Figura V.27 - Dominância entre dois padrões de atividade.





**Figura V.28 - Padrão absolutamente estável para a Síntese - 22.**



**Figura V.29 - Cooperação entre dois padrões de atividade.**

## Capítulo VI

### Redes Neurais e Otimização

#### § VI.1 - O Problema do Caixeiro Viajante

O ramo da ciência conhecido como Otimização Combinatória trata de determinar o mínimo de funções matemáticas cujas variáveis assumem um número infinito de valores e respeitam certas restrições. Sendo  $D$  um conjunto finito do qual cada uma das  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$  toma seu valor e  $f$  uma função da forma

$$f : D^n \rightarrow \mathcal{R},$$

o Problema de Otimização Combinatória pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in D, \end{aligned}$$

onde  $D \subseteq D^n$  é o conjunto de *soluções viáveis*, ou seja, o conjunto de valores das variáveis que respeita as restrições impostas ao problema tratado.

Normalmente o número de variáveis e de valores que estas podem assumir tornam o Problema de Otimização Combinatória de difícil solução, sendo, então, estabelecido um índice de medida da sua dificuldade denominado *complexidade computacional* [86]. Geralmente a determinação de tal índice não se baseia no Problema de Otimização anteriormente apresentado mas em um *problema de decisão* equivalente onde, dado um número  $F \in \mathcal{R}$ , deseja-se saber se existe  $x \in D$  tal que  $f(x) \leq F$  e, desta forma, só existem duas soluções, dadas pela resposta “sim” ou pela resposta “não”. Se há um método capaz de resolver o problema de decisão consumindo um tempo que é uma função polinomial de  $n$ , por exemplo  $n^2$ , dizemos que o referido problema pertence à classe  $P$ . Por outro lado, o problema pertence à classe  $NP$  se, dada uma solução viável  $x \in D$ , a desigualdade  $f(x) \leq F$  pode ser verificada por algum método cujo consumo de tempo é dado por um polinômio em  $n$ . A classe  $NP$  possui uma subclasse, a classe dos problemas  $NP$  – *completos*, com a importante característica de que qualquer algoritmo que venha a ser desenvolvido para solucionar, em tempo polinomial em  $n$ , um problema desta subclasse, poderá ser utilizado na solução de todos os problemas da classe  $NP$  (e também da classe  $P$ , que é um subconjunto da classe  $NP$  [87]). Até hoje todas as tentativas

para o estabelecimento de um algoritmo com tal capacidade foram infrutíferas e a melhor maneira de se resolver um problema  $NP$  – completo é através de métodos aproximativos.

Um importante, e aparentemente simples, problema da classe  $NP$  é conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante no qual, dado um conjunto de  $n$  cidades e, conhecidas as distâncias  $d(i, j)$  entre cada par de cidades  $(i, j)$ , deseja-se determinar a rota que fará um caixeiro viajante caminhar a menor distância total possível para que, partindo de uma das cidades, visite todas as outras exatamente uma vez e retorne à cidade de origem. Associando cada uma das  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$  a cada cidade e, sendo o conjunto  $D$  de seus valores admissíveis  $D = \{1, \dots, n\}$ , quando  $x_i = k$  para algum  $i; 1 \leq i \leq n$  e algum  $k \in D$  dizemos que a cidade  $i$  é a  $k$ -ésima a ser visitada pelo caixeiro viajante. Como as cidades devem ser visitadas exatamente uma vez, o conjunto  $D$  de soluções viáveis é composto de vetores  $x \in D^n$  nos quais cada uma das variáveis  $x_1, \dots, x_n$  possui valor diferente das demais, ou seja que  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ .

Como mencionado no Capítulo II, redes neurais de Hopfield possuem a interessante característica de, em sua evolução dinâmica, diminuírem gradativamente sua função de energia computacional. Baseando-se nisso, HOPFIELD [14–16] percebeu que, associando os padrões de atividade de uma rede neuronal às soluções viáveis de um problema de Otimização e a energia computacional à função objetivo do referido problema, obteria uma rede neuronal capaz de gerar, ao fim de sua evolução dinâmica, uma solução viável do problema de Otimização melhor do que a inicialmente fornecida.

Tendo em mente o objetivo de sintetizar uma rede neuronal capaz de ser associada ao Problema do Caixeiro Viajante com  $n$  cidades e gerar soluções viáveis para o mesmo, considere o modelo neuronal de Hopfield com  $m = n^2$  neurônios semi-lineares regido pelas regras de saída e ativação dadas pelas equações (II.6) e (II.10) e cuja regra de propagação e energia computacional estão representadas nas expressões (II.15) e (II.16). Uma vez que o neurônio semi-linear possui infinitos estados de ativação no intervalo real  $(0, 1)$  e como, para efeito de representação do problema considerado, necessitamos de apenas duas entidades opostas, dizemos que o neurônio está excitado quando seu estado de ativação é maior do que 0,5 e

inibido em todos os outros casos. Para simplificar a exposição, sejam os  $m = n^2$  neurônios desta rede neuronal numerados por  $N_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$  como que formando uma *matriz de neurônios*  $n \times n$  cujas  $n$  linhas associamos às  $n$  cidades e cujas  $n$  colunas associamos às  $n$  possíveis posições que cada cidade pode ocupar na seqüência de cidades que o caixeiro viajante deve visitar. Por exemplo, em um Problema do Caixeiro Viajante com quatro cidades a rede neuronal associada tem a forma apresentada na Figura (VI.1) onde o fato de o neurônio  $N_{23}$  estar excitado, representado pela cor escura, significa que a cidade número dois é a terceira a ser visitada pelo caixeiro viajante. Segundo essa associação de significados, o neurônio  $N_{ij}$  está excitado somente quando a variável  $x_i$  assume o valor  $j$  e, como em uma solução viável do problema  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , concluímos que se o neurônio  $N_{ik}$  está excitado então todos os outros neurônios  $N_{jk}$  devem estar inibidos, representando que um padrão de atividade associado à uma solução do Problema do Caixeiro Viajante deve possuir apenas um neurônio excitado em cada coluna da matriz de neurônios dessa rede neuronal. Lembrando que nas soluções viáveis deste problema cada cidade deve ser visitada apenas uma vez, o que equivale a dizer que cada variável  $x_i$  só assume um único valor  $j$ , então, em um padrão de atividade associado a uma solução viável, para cada linha  $i$  da matriz de neurônios somente é possível a existência de um neurônio  $N_{ij}$  excitado. Pelas duas razões expostas acima, uma solução viável do Problema do Caixeiro Viajante é plenamente representada nessa rede neuronal por um padrão de atividade, denominado *padrão solução*, onde existe um único neurônio excitado em cada linha e um único neurônio excitado em cada coluna da matriz de neurônios:

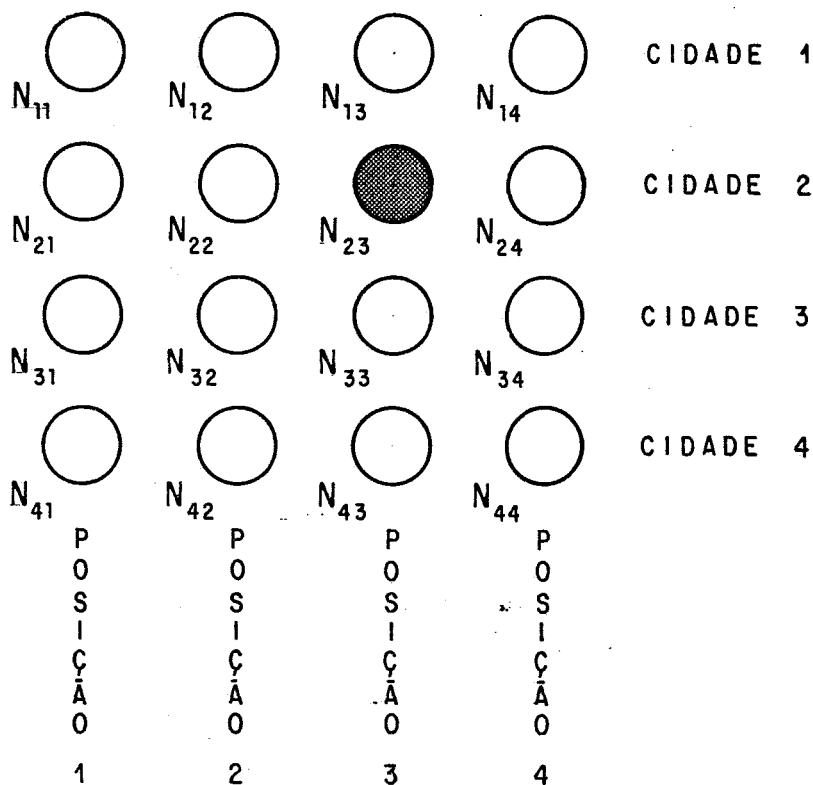
$$\text{i) Existe apenas um } j \text{ tal que } a_{ij} > 1/2 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\text{ii) existe apenas um } i \text{ tal que } a_{ij} > 1/2 \quad ; \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde  $a_{ij}$  é o estado de ativação do neurônio  $N_{ij}$ .

Para que a rede neuronal, ao fim de todas as possíveis evoluções dinâmicas, gere soluções viáveis do Problema do Caixeiro Viajante é preciso sintetizá-la de modo que todos os seus padrões estáveis sejam padrões solução. Primeiramente, para garantir que em um padrão estável não exista nenhuma linha ou coluna com todos os neurônios inibidos, basta escolhermos um valor altamente negativo para o potencial limiar  $\theta$ , pois desta forma, mesmo supondo todos os neurônios da rede

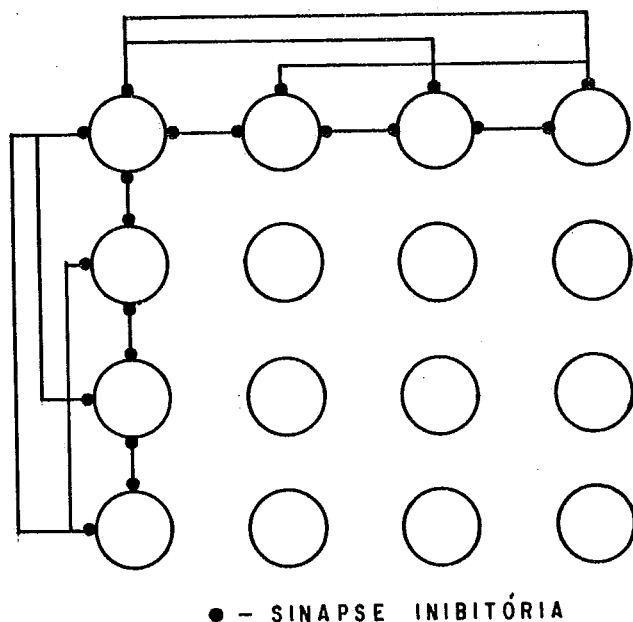
neuronal inibidos, o impulso total de entrada de cada um deles, sendo nulo, já é suficiente para garantir um alto nível de excitação, como pode ser visto pela regra de ativação (II.10), resultando na excitação futura de todos os neurônios da rede neuronal. Porém em um padrão solução deve haver apenas um neurônio excitado em cada linha e coluna, sendo necessário, então, a criação de sinapses  $w$  altamente inibitórias ( $w < 0$ ) entre todos os neurônios de uma mesma linha e de uma mesma coluna, de forma que a excitação simultânea de dois neurônios de uma linha ou coluna resulte em seus impulsos totais de entrada muito negativos e na conseqüente inibição de ambos os neurônios (Figura VI.2). Certamente é preciso definir uma relação quantitativa entre os valores negativos do potencial limiar  $\theta$  e da sinapse inibitória  $w$ , o que será realizado posteriormente a esta análise intuitiva.



**Figura VI.1** - Rede neuronal associada ao Problema do Caixeiro Viajante.

Finalmente, para garantir que a energia computacional da rede neuronal em

um padrão solução seja proporcional à distância percorrida pelo caixeiro viajante na solução viável associada a este padrão solução, conectamos os neurônios de cada linha  $k$  aos neurônios de cada linha  $l$  com uma sinapse inibitória cujo valor  $-d(k, l)$  é o recíproco da distância  $d(k, l)$  entre as cidades  $k$  e  $l$ , desde que estes neurônios ocupem colunas consecutivas na matriz de neurônios, considerando a primeira coluna como consecutiva da última (Figura VI.3). Desta forma, quando dois neurônios de colunas consecutivas e linhas  $k$  e  $l$  estão excitados, representam cidades vizinhas na seqüência de visitas do caixeiro viajante e sua contribuição  $d(k, l)$  à energia é exatamente a distância entre as duas cidades  $k$  e  $l$ . Na Figura (VI.4) são apresentadas as sinapses que contribuem para a energia computacional de um padrão solução associado a uma solução viável do Problema do Caixeiro Viajante com quatro cidades.



**Figura VI.2** - Neurônios de uma mesma linha ou coluna inibem-se aos pares.

Estabelecido um Problema do Caixeiro Viajante com  $n$  cidades onde a distância entre cada par de cidades  $i$  e  $j$  é dada por  $d(i, j)$ , definimos a rede neuronal de soluções viáveis por uma rede neuronal de Hopfield com  $m = n^2$

neurônios semi-lineares  $N_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , cujas capacitâncias elétricas, resistências elétricas e potenciais limiares são iguais respectivamente a  $C$ ,  $R$  e  $\theta$ , e ainda com eficiências sinápticas  $w_{ij,i'j'}$  entre os neurônios  $N_{ij}$  e  $N_{i'j'}$  dadas por:

- a)  $w_{ij,i'j'} = w$  ;  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, 1 \leq j' \leq n, j \neq j'$ ,
- b)  $w_{ij,i'j} = w$  ;  $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq i' \leq n, i \neq i'$ ,
- c)  $w_{ij,k(j+1)} = -d(i, k)$  ;  $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq n-1, i \neq k$ ,
- d)  $w_{in,k1} = -d(i, k)$  ;  $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, i \neq k$ ,

onde  $w < 0$  é dita sinapse inibitória.

**Teorema VI.1.** *Em uma rede neuronal de soluções viáveis cujos neurônios possuem potencial limiar  $\theta < \min_i(-2 \sum_{j \neq i} d(i, j))R$  e sinapses inibitórias  $w < \theta/R$ , todos os padrões estáveis são padrões solução.*

**Prova:**

Demonstraremos a proposição equivalente de que se um padrão de atividade não é um padrão solução, então não é estável. Para isto é suficiente mostrar que:

a) todo padrão de atividade com mais de um neurônio excitado em uma linha ou em uma coluna da matriz de neurônios não é estável,

b) todo padrão de atividade que possui uma linha ou coluna da matriz de neurônios com todas as células inibidas não é estável,

pois estas são as únicas formas possíveis para padrões de atividade diferentes do padrão solução.

Seja, por definição,  $A_{kl}(t) = \sum_{j \neq k} w_{kl,j(l-1)} a_{j(l-1)}(t) + w_{kl,j(l+1)} a_{j(l+1)}(t)$  e note que seu valor mínimo  $-2 \sum_{j \neq k} d(k, j)$  é atingido quando  $a_{j(l-1)}(t)$  e  $a_{j(l+1)}(t); 1 \leq j \leq n$  são unitários. Iniciamos pela demonstração do item "a":

a) Considere um padrão de atividade onde existe mais de um neurônio excitado na linha  $k$  ou na coluna  $l$  no instante de tempo  $t$  e seja  $N_{kl}$  uma destas células. A regra de propagação do modelo neuronal para este neurônio é:

$$C \frac{du_{kl}(t)}{dt} = A_{kl}(t) + wq - \frac{u_{kl}(t)}{R}, \quad (\text{VI.1})$$

onde  $q$  é o número de neurônios excitados na linha  $k$  e coluna  $l$  excetuando-se o neurônio  $N_{kl}$ .



Como o neurônio  $N_{kl}$  está excitado,  $u_{kl}(t) > \theta$ , o que nos permite escrever:

$$C \frac{du_{kl}(t)}{dt} < A_{kl}(t) + wq - \frac{\theta}{R}. \quad (\text{VI.2})$$

Uma vez que todas as eficiências sinápticas da rede neuronal são negativas e  $w < \theta/R$ , então  $C \frac{du_{kl}(t)}{dt} < 0$ , implicando que em algum instante de tempo  $t'$  o impulso total de entrada  $u_{kl}(t)$  se tornará menor do que  $\theta$ , resultando na inibição do neurônio  $N_{kl}$ .

b) Considere, agora, um padrão de atividade onde no instante  $t$  existe uma linha  $k$  com todos os seus neurônios inibidos. Como, devido ao item "a", não há estabilidade com mais de uma célula excitada em cada linha ou coluna da matriz de neurônios, a existência da linha  $k$  resulta na existência de uma coluna  $l$  também com todos os seus neurônios inibidos. A regra de propagação do neurônio  $N_{kl}$  é dada por:

$$C \frac{du_{kl}(t)}{dt} = A_{kl}(t) - \frac{u_{kl}(t)}{R}, \quad (\text{VI.3})$$

e como esta célula está inibida,  $u(t)_{kl} < \theta$ , concluímos que

$$C \frac{du_{kl}(t)}{dt} > A_{kl}(t) - \frac{\theta}{R}. \quad (\text{VI.4})$$

Uma vez que  $\theta < A_{kl}(t) < 0$ , então  $C \frac{du_{kl}(t)}{dt} > 0$  o que implica na excitação futura da célula  $N_{kl}$ .

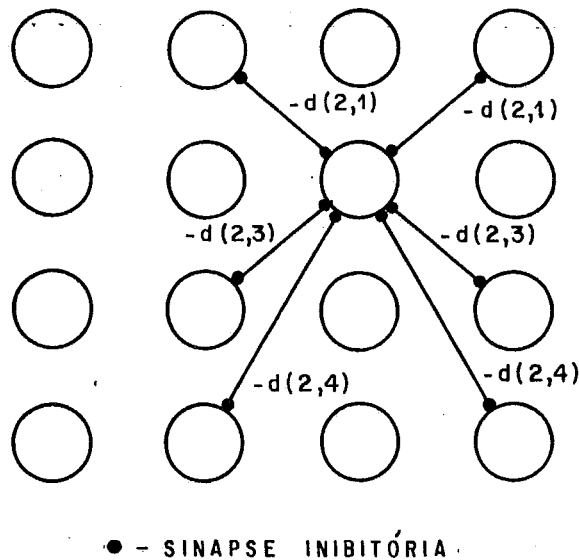
□

Finalmente, a função objetivo deve ser relacionada à energia computacional de forma que a minimização desta última implique na redução da primeira.

**Teorema VI.2.** *Em um padrão solução associado a uma solução viável do Problema do Caixeiro Viajante, a energia computacional da rede neuronal de soluções viáveis é igual, a menos de uma constante aditiva, ao comprimento total da trajetória percorrida pelo caixeiro viajante naquela solução viável.*

**Prova:**

Considere a energia computacional de uma rede neuronal de Hopfield com  $m$  neurônios semi-lineares que é dada por:



**Figura VI.3** - As distâncias entre as cidades são codificadas nas sinapses.

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_{ij} a_i(t) a_j(t) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i} \int_0^{a_i(t)} \theta_i - \frac{1}{\gamma} \ln(1/a - 1) da; \gamma \in \mathcal{R}_+. \quad (\text{VI.5})$$

Como as resistências elétricas  $R_i$  e potenciais limiares  $\theta_i$  são iguais para todos os neurônios e, uma vez que em todos os padrões solução existem  $n$  neurônios excitados, o segundo termo do lado direito da equação (VI.5) é constante.

Sabemos, também, que em um padrão solução os  $n$  neurônios excitados se encontram distribuídos de modo que apenas existe um deles em cada linha e coluna da matriz de neurônios, donde concluímos que as sinapses inibitórias  $w$  em nada contribuem na energia computacional da rede neuronal. Sejam, agora, os  $n$  neurônios excitados em um padrão solução numerados por  $N_{l_1,1}, N_{l_2,2}, \dots, N_{l_n,n}$  e, então, o primeiro termo do lado direito da equação (VI.5) toma a forma:

$$-[a_{l_1,1} w_{l_1,1,l_2,2} a_{l_2,2} + a_{l_2,2} w_{l_2,2,l_3,3} a_{l_3,3} + \dots + a_{l_n,n} w_{l_n,n,l_1,1} a_{l_1,1}], \quad (\text{VI.6})$$

pois na rede neuronal de soluções viáveis só existem sinapses entre neurônios de colunas consecutivas.

Da síntese da rede neuronal de soluções viáveis vemos que  $w_{l_1 k, l_2 (k+1)} = -d(l_1, l_2)$  e, lembrando que o estado de ativação destes neurônios é unitário no padrão estável (o impulso total de entrada é muito maior do que o potencial limiar), a substituição na expressão (VI.6) nos fornece:

$$d(l_1, l_2) + d(l_2, l_3) + \dots + d(l_n, l_1), \quad (\text{VI.7})$$

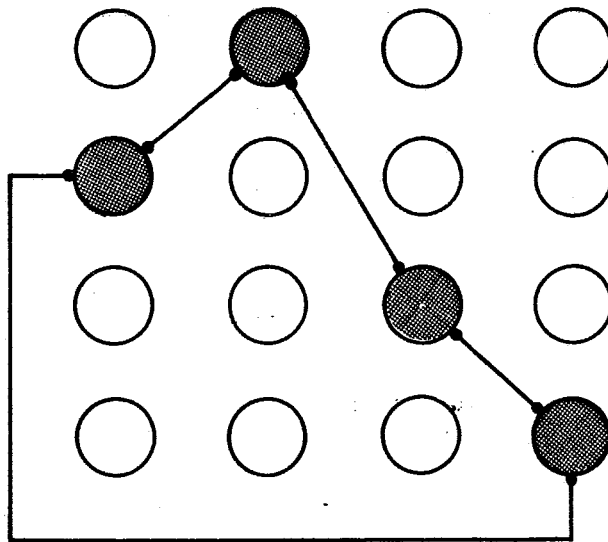
que é exatamente a distância total percorrida pelo caixeiro viajante na solução viável associada ao padrão solução. □

## § VI.2 - A Heurística de Simulação Probabilística

No Capítulo II entendemos que as redes neuronais de Hopfield evoluem dinamicamente até o ponto de mínimo da energia computacional mais próximo de seu ponto de partida. Por esta razão, a rede neuronal de soluções viáveis sintetizada na seção anterior determina apenas a solução viável do Problema do Caixeiro Viajante que está próxima do padrão de atividade que a ativou inicialmente, quando o que se deseja é a solução ótima do problema considerado. Esta "limitação" do modelo conexionista de Hopfield é devida ao fato de que a regra de ativação de seus neurônios sempre diminui o valor da energia computacional, resultando na convergência a mínimos locais característica do Método do Gradiente, cuja filosofia é semelhante. Observando esse fato, HINTON [88] modificou o modelo neuronal de Hopfield com neurônios lógicos introduzindo uma *regra de ativação termodinâmica* que permite aos neurônios assumirem, com uma determinada probabilidade, estados de ativação que provocam aumento da energia computacional. Na denominada *Máquina de Boltzmann*, sendo  $\Delta E_k$  a variação de energia computacional observada quando o neurônio  $N_k$  desta rede neuronal assume estado de ativação unitário e, posteriormente, inverte seu estado de ativação para nulo, o estado de ativação futuro  $a_k$  do neurônio  $N_k$  é dado por:

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{com probabilidade } p_k = \frac{1}{1 + e^{-\Delta E_k/T}}; \\ 0 & \text{com probabilidade } q_k = 1 - p_k, \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

onde  $T$  é um parâmetro de controle conhecido como a “temperatura” do sistema. Notamos que na Máquina de Boltzmann os neurônios são análogos às moléculas de um gás perfeito em equilíbrio térmico à temperatura  $T$  em um recipiente fechado, possuindo apenas dois níveis quânticos de energia. A altas temperaturas há uma grande probabilidade de se encontrar neurônios em qualquer dos estados de ativação, enquanto a baixas temperaturas os neurônios têm uma grande probabilidade de assumirem estados de ativação que reduzem a energia computacional da rede neuronal, como na, já mencionada, formação de cristais a partir do vapor. A redução da temperatura segundo uma determinada taxa de resfriamento permite que a Máquina de Boltzmann encerre sua evolução dinâmica em um ponto de mínimo global de sua energia computacional.



**Figura VI.4** - Um padrão solução e as sinapses que contribuem para a energia computacional.

Apesar da Máquina de Boltzmann ter resolvido o problema da convergência a mínimos locais de sua energia computacional, sua operação é muito lenta para objetivos práticos pois, uma vez que se baseia no modelo de Hopfield com neurônios

lógicos, a cada instante apenas um único neurônio pode alterar seu estado de ativação, o que elimina a interessante característica de paralelismo temporal dos modelos conexionistas. Ocorre, porém, que no modelo neuronal de Hopfield com neurônios semi-lineares tal limitação inexistente e, desta forma, o desenvolvimento de uma variante da Máquina de Boltzmann baseada neste segundo modelo de Hopfield traz avanços referentes às aplicações dos sistemas conexionistas na Otimização.

Considerando o modelo neuronal de Hopfield com neurônios semi-lineares apresentado no Capítulo II, e em analogia com a Máquina de Boltzmann, propomos um modelo neuronal onde a cada instante  $t > 0$  o estado de ativação direto  $a_i(t)$  do neurônio  $N_i$  é:

$$a_i(t) = [1 + e^{-\gamma(u_i(t) - \theta_i)}]^{-1} ; \quad \gamma \in \mathcal{R}_+, \quad (\text{VI.9})$$

e o estado de ativação inverso  $\bar{a}_i(t)$  do mesmo neurônio é dado por:

$$\bar{a}_i(t) = \begin{cases} 1 - a_i(t) & \text{com probabilidade } p, \\ a_i(t) & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases} \quad (\text{VI.10})$$

A regra de propagação do neurônio  $N_i$  em qualquer instante  $t$  é semelhante à utilizada no modelo de Hopfield, ou seja:

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \tilde{a}_j(t) - \frac{u_i(t)}{R_i}, \quad (\text{VI.11})$$

e, definindo  $\Delta E(t) = E(\bar{a}(t)) - E(a(t))$ , a variável aleatória  $\tilde{a}_j(t)$  é a  $j$ -ésima componente do vetor  $\tilde{a}(t)$  determinado no instante  $t^+$ , infinitesimalmente maior do que  $t$ , por:

$$\tilde{a}(t^+) = \begin{cases} a(t) & \text{com probabilidade } p' = \frac{1}{1 + e^{-\Delta E(t)/T(t)}} ; \\ \bar{a}(t) & \text{com probabilidade } 1 - p', \end{cases} \quad (\text{VI.12})$$

sendo  $T(t)$  uma função decrescente que fornece a temperatura do sistema a cada instante de tempo  $t$ .

Esta rede neuronal funciona como se a cada instante  $t$  um observador externo ao sistema, com base nos impulsos totais de entrada  $u_i(t)$  dos neurônios, determina dois padrões de atividade possíveis  $a(t)$  e  $\bar{a}(t)$  para ativar a rede neuronal e escolhe um deles em função do efeito energético provocado em concordância com a distribuição de Boltzmann. O estado de ativação direto, fornecido pela equação (VI.9),

é o mesmo determinado pelo modelo de Hopfield para neurônios semi-lineares, enquanto o estado de ativação inverso, dado pela equação (VI.10), permite que, com probabilidade  $p$ , os neurônios do sistema desobedeçam sua regra de ativação com o objetivo de provocar aumentos da energia computacional, exatamente como realizado na Máquina de Boltzmann. O observador externo — elemento centralizador de decisões inexistente na Máquina de Boltzmann — avaliando a variação de energia computacional da rede neuronal quando excitada por cada um dos padrões de atividade, decide através da distribuição de Boltzmann (equação VI.12) qual deles efetivamente ativará a rede neuronal em um instante infinitesimalmente posterior  $t^+$ . À semelhança da Máquina de Boltzmann, em temperaturas altas, início do comportamento dinâmico da rede neuronal, há uma igual probabilidade de aumentos ou diminuições da energia computacional; enquanto em baixas temperaturas, final da evolução do sistema, a rede neuronal funciona exatamente como o modelo de Hopfield, aceitando apenas decréscimos energéticos. A lenta operação da Máquina de Boltzmann é superada por este modelo que, porém, necessita de processos computacionais centralizados.

A heurística de simulação probabilística das redes neuronais de Hopfield, aqui estabelecida, foi utilizada na rede neuronal de soluções viáveis sintetizada na seção anterior, com o objetivo de gerar boas soluções para o Problema do Caixeiro Viajante. Para isto foi escrito um programa FORTRAN-77 que, em um micro-computador, simula a rede neuronal de soluções viáveis, resolvendo a equação diferencial da regra de propagação dos neurônios (equação VI.11) por diferenças finitas a intervalos de um centésimo de segundo. Foram gerados aleatoriamente vinte e quatro instâncias do Problema do Caixeiro Viajante e, ativando-se a rede neuronal de soluções viáveis com um padrão de atividade, também aleatoriamente gerado, determinou-se, para cada instância, o custo  $C_H$  da solução viável determinada pelo modelo neuronal de Hopfield e o custo  $C_P$  da solução viável encontrada através da simulação probabilística proposta. Por desconhecermos a solução ótima de cada instância, definimos uma medida de eficiência  $\eta$  como:

$$\eta = \left(1 - \frac{C_P}{C_H}\right), \quad (\text{VI.13})$$

e determinando um valor médio para a energia computacional da rede neuronal quando a probabilidade  $p$  de inversão dos estados de ativação dos neurônios é

0,5, por substituição na distribuição de Boltzmann, determinou-se a temperatura inicial  $T_0$  para que o padrão de atividade inverso seja aceito, inicialmente, com probabilidade  $p'$  próxima de 0,5:

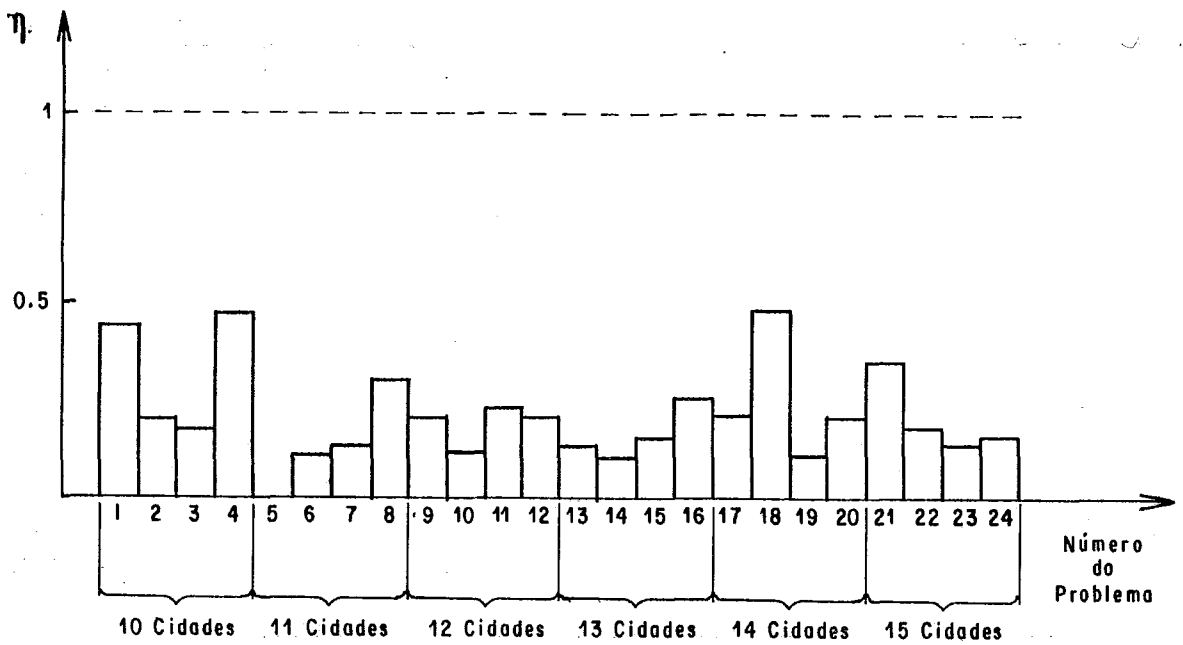
$$T_0 = -100n^3w. \quad (\text{VI.14})$$

A taxa de resfriamento utilizada em todas as redes neuronais de soluções viáveis foi:

$$T(t) = T_0(0,03)^t. \quad (\text{VI.15})$$

As resistências e capacitâncias elétricas das membranas celulares foram consideradas unitárias, enquanto o potencial limiar e as sinapses inibitórias foram, certamente, determinadas pelas condições do Teorema VI.1.

A eficiência na solução de cada instância está registrada no diagrama de barras da Figura (VI.5), onde percebemos que em apenas um dos vinte e quatro exemplos estudados, o modelo probabilístico não obteve uma solução viável melhor que a obtida pelo sistema conexionista de Hopfield.



**Figura VI.5 - A eficiência da heurística proposta.**



## Capítulo VII

### Análise dos Resultados

#### § VII.1 - *Conclusões e Trabalhos Futuros*

O pouco que se tem escrito sobre a representação do conhecimento em redes neuronais é superficial e generalizado a todos os sistemas conexionistas sendo, talvez, esta generalização responsável pela falta de entendimento do assunto. A partir do momento em que se decidiu, neste trabalho, restringir o estudo da representação do conhecimento a um único modelo neuronal bem definido, surgiram interessantes resultados. As definições de dependência e independência entre padrões de atividade nos permitem visualizar como conceitos opostos ou semelhantes podem ser representados em redes neuronais e, além disto, como a presença simultânea de dois padrões de atividade pode ter um sentido de adição ou de aniquilação de significados. Já o conhecido mecanismo de generalização ou formação de hierarquias em redes neuronais, assumiu neste trabalho um formalismo original através da definição de extensão de um padrão de atividade, estando em dois teoremas estabelecido o procedimento de síntese de uma rede neuronal de Hopfield para a representação de qualquer hierarquia.

O conceito de decaimento de um padrão de atividade permitiu a representação de inferências lógicas e a geração do esboço de uma futura linguagem de representação do conhecimento em redes neuronais. Os resultados sobre novos conceitos denominados auto-estabilidade, estabilidade intrínseca, dominância e estabilidade absoluta, além de sua natural aplicação na representação do conhecimento, demonstram potencial de utilização no controle de sistemas e nos processos de reconhecimento de padrões e filtragem. Certamente, pesquisas futuras deverão ser realizadas no sentido de esclarecer estas possíveis aplicações.

A definição da síntese de redes neuronais como um processo de minimização sobre um conjunto de soluções viáveis e o estabelecimento de critérios de síntese com variadas utilizações é, sem dúvida, um interessante passo na formalização do aprendizado em redes neuronais. Os critérios operacionais, cuja relação com a representação do conhecimento é nenhuma, devem ser úteis nas aplicações de engenharia; enquanto os critérios sintáticos e semânticos parecem apenas aguardar

um especialista em representação do conhecimento para a geração de uma linguagem de programação em redes neuronais. Além disto, o método de síntese e seus critérios merecem um esforço de generalização, inicialmente para a síntese de redes neuronais de Hopfield com neurônios semi-lineares e, posteriormente, na síntese de outros modelos conexionistas.

A síntese de uma rede neuronal capaz de gerar soluções viáveis para o Problema do Caixeiro Viajante só é original pela forma com que é feita, muito mais simples do que a já conhecida e estabelecida por Hopfield. Contudo, a heurística de simulação probabilística é um assunto novo, que precisa ser considerado detalhadamente pois, talvez, não seja somente uma heurística mas sim um método formal à semelhança do Resfriamento Simulado. Os resultados obtidos são animadores mas é necessária a realização de um número muito maior de experimentos utilizando instâncias do Problema do Caixeiro Viajante cujo número de cidades é da ordem de centenas. O tempo e a escassez de recursos computacionais impediram, por um momento, a realização destes testes, mas, certamente, não serão barreiras suficientes para o cancelamento deste objetivo futuro. Finalmente, é interessante que a referida heurística seja utilizada na busca de soluções de outros problemas de Otimização Combinatória, o que implica na síntese de redes neuronais capazes de gerar suas soluções viáveis.

Não há dúvida de que este trabalho significa um pequeno passo à frente no entendimento das redes neuronais, porém, sua melhor contribuição, nada original, é incluir novos itens na vasta lista daquilo que não sabemos.

## Referências Bibliográficas

- [1] McCULLOCH, W. S., PITTS, W., " A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity ", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 5, pp. 115-133, 1943.
- [2] PITTS, W. H. , McCULLOCH, W. S., " How We Know Universals: The Perception of Auditory and Visual Forms ", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 9, pp. 127-147, 1947.
- [3] HEBB, D. O., *Organization of Behavior*, Science Editions, Inc., New York, 1961
- [4] LASHLEY, K. S., " In The Search of The Engram ", *Society of Experimental Biology Symposium*, Num. 4, pp. 478-505, 1950.
- [5] ROSENBLATT, F., *Principles of Neurodynamics*, Spartan Books, New York, 1962.
- [6] SELFRIDGE, O. G., " Pandemonium: A Paradigm of Learning ", *The Mechanisation of Thought Process*, H. M. Stationery Office, London, 1959.
- [7] MINSKY, M. L. and PAPERT, S., *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
- [8] GROSSBERG, S., " Adaptative Pattern Classification and Universal Recoding: Part I. Parallel Development and Coding of Neural Feature Detectors ", *Biological Cybernetics*, Vol. 23, pp. 121-134, 1976.
- [9] ANDERSON, J. A., " Two Models for Memory Organization Using Interacting Traces ", *Mathematical Biosciences*, Vol. 8, pp. 137-160, 1970.
- [10] FELDMAN, J. A., " Connections ", *Byte*, pp. 277-284, April 1985.
- [11] HOPFIELD, J. J., " Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities ", *Proc. National Academy of Science, USA*, Vol. 79, pp. 2554-2558, April 1982.
- [12] HOPFIELD, J. J., " Unlearning Has a Stabilizing Effect in Collective Memories ", *Nature*, Vol. 304, pp. 158-159, July 1983.
- [13] HOPFIELD, J. J., " Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two-state Neurons ", *Proc. National Academy of Science, USA*, Vol. 81, pp. 3088-3092, May 1984
- [14] HOPFIELD, J. J., " Simple Neural Optimization Networks : An A/D

- Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit ", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-33, Num. 5, May 1986.
- [15] **HOPFIELD, J. J.**, " Computing with Neural Circuits : A Model ", *Science*, Vol. 233, pp. 625-633, August 1986.
- [16] **HOPFIELD, J. J. , TANK, D.**, " Neural Computation of Decisions in Optimization Problems ", *Biological Cybernetics*, Vol. 52, pp. 141-152, 1985.
- [17] **HINTON, G. E.**, " Learning in Parallel Networks ", *Byte*, pp. 265-273, April 1985.
- [18] **McCLELLAND, J. L., RUMELHART, D. E., HINTON, G. E.**, " The Appeal of Parallel Distributed Processing ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [19] **McCLELLAND, J. L., RUMELHART, D. E., HINTON, G. E.**, " A General Framework for Parallel Distributed Processing ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [20] **HINTON, G. E. and ANDERSON, J. A.**, *Parallel Models of Associative Memory*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1981.
- [21] **SMITH, C. U. M.**, *The Brain. Towards an Understanding*, London, Faber and Faber, 1972.
- [22] **STEVENS, C. F.**, *Neurophysiology : A Primer*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [23] **SCHMIDT, R. F.**, *Neurofisiologia*, São Paulo, EDUSP, 1979.
- [24] **BROBECK, J. R.**, *Best and Taylor's Physiological Basis of Medical Practice*, New York, Williams and Wilkins Company, 1973.
- [25] **NEWELL, A. and SIMON, H. A. ,** " GPS, A Program That Simulates Human Thought ", *Computers and Thought*, Ed. Feigenbaum, E. A., McGraw-Hill Book Company, 1963.
- [26] **NEWELL, A. and SIMON, H. A.**, " Computer Science As Empirical Inquiry: Symbols and Search ", *Communications of the ACM*, Vol. 19, Num. 3, pp. 113-125, March 1976.

- [27] **FEIGENBAUM, E.**, " The Simulation of Verbal Learning And Behavior ", *Computers and Thought*, Ed. Feigenbaum, E. A., McGraw-Hill Book Company, 1963.
- [28] **LENAT, D. B.**, " The Nature of Heuristics ", *Artificial Intelligence*, Vol. 19, pp. 189-249, 1982.
- [29] **GEORGEFF, M. P.**, " Procedural Control in Production Systems ", *Artificial Intelligence*, Vol. 18, pp. 175-201, 1982.
- [30] **SCHANK, R. C. and ABELSON, R. P.**, *Scripts, Plans, Goals and Understanding* , Lawrence Erlbaum Associates, Inc., New Jersey, 1977.
- [31] **SCHANK, R. C.**, *Dynamic Memory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [32] **ANDERSON, J. R. and BOWER, G. H.**, *Human Associative Memory*, Hemisphere Publishing Company, Washington D.C., 1974.
- [33] **MacGREGOR, R. J. and LEWIS, E. R.**, *Neural Modeling*, Plenum Press, New York, 1977.
- [34] **GRIFFITH, J. S.**, *Mathematical Neurobiology*, Academic Press, Inc., London, 1971.
- [35] **KOHONEN, T.**, " An adaptive Associative Memory Principle ", *IEEE Transactions*, Vol. C-23, pp. 444-445, 1974.
- [36] **KOHONEN, T.**, *Associative Memory: A System Theoretical Approach*, Springer, New York, 1977.
- [37] **KOHONEN, T.**, *Self-organization and Associative Memory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [38] **ARBIB, M. A.**, *Brains, Machines and Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [39] **WILLIAMS R. J.**, " The Logic of Activation Functions ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [40] **LUENBERGER, D. G.**, *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1979.
- [41] **THORNDIKE, E. L.**, *Animal Intelligence*, McMillan, New York, 1898.
- [42] **PIAGET, J.**, *A Equilibraco das Estruturas Cognitivas*, Zahar Editores, Rio

de Janeiro, 1976.

- [43] **PIAGET, J.**, *Psicologia da Inteligência*, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1977.
- [44] **TELES A. X.**, *Psicologia Moderna*, Ática Editora, Rio de Janeiro, 1973.
- [45] **RUMELHART, D. E. and ZISPER, D.**, " Feature Discovery by Competitive Learning ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [46] **EHRlich, S.**, *Aprendizagem e Memória Humanas*, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1979.
- [47] **NORMAN, D. A.**, *Models of Human Memory*, Academic Press, New York, 1970.
- [48] **ESTES, W. K.**, *Handbook of Learning and Cognitive Processes*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1975.
- [49] **WOLFF, W.**, *Fundamentos de Psicologia*, Editora Mestre Jou, São Paulo, 1967.
- [50] **FLEXNER, J. B. , FLEXNER, L. B. and STELLAR, E.**, " Memory in Mice as Affected by Intracerebral Puromycin ", *Science*, Vol. 141, pp. 57-59, 1963.
- [51] **DINGMAN, W. , SPORN, M. B.**, " Molecular Theories of Memory ", *Science*, Vol. 144, pp. 26-29, 1964.
- [52] **BABICH, F. R. , JACOBSON, A. L. and BUBASH, S.**, " Transfer of a Response to Naive Rats by Injection of Ribonucleic Acid Extracted from Trained Rats ", *Science*, Vol. 146, pp. 656-657, 1965.
- [53] **THOMPSON, R. F.**, " The Neurobiology of Learning and Memory ", *Science*, Vol. 233, pp. 941-947, 1986.
- [54] **JOHN, E. R. , TANG, Y. , BRILL, A. B. and ONO, Y. K.**, " Double-Labeled Metabolic Maps of Memory ", *Science*, Vol. 233, pp. 1167-1174, 1986.
- [55] **BLACK, I. B. , ADLER, J. E. , DREYFUS, C. F. , FRIEDMAN, W. F. , LAGAMMA, E. F. and ROACH, A. H.**, " Biochemistry of Information Storage in the Nervous System ", *Science*, Vol. 236, pp. 1263-1266, 1987.
- [56] **REILLY, D. L. , COOPER, L. N. and ELBAUM, C.**, " A Neural

- Model for Category Learning ", *Biological Cybernetics*, Vol. 45, pp. 35-41, 1982.
- [57] KINZEL, W., " Learning and Pattern Recognition in Spin Glass Models "; *Condensed Matter*, Vol. 60, pp. 205-213, 1985.
- [58] HOFFMANN, G. W. , BENSON, M. W. and BREE, G. M., " A Teachable Neural Network Based on an Unorthodox Neuron ", *Physica*, Vol. 22D. pp. 233-246, 1986.
- [59] PERSONNAZ, L. , GUYON, I. and DREYFUS, G., " Collective Computational Properties of Neural Networks: New Learning Mechanisms ", *Physical Review*, Vol. 34, Num. 5, 1986.
- [60] DIEDERICH, S. , OPPER, M., " Learning of Correlated Patterns in Spin Glass Networks by Local Learning Rules ", *Physical Review Letters*, Vol. 58, Num. 9, 1987.
- [61] ECCLES, J. G., *The Neurophysiological Basis of Mind*, Clarendon Publishing Company, Oxford, 1953.
- [62] WIDROW, B. , HOFF, M. E., " Adaptative Switching Circuits ", 1960 *WESCON Convention Record*, Part IV, pp. 96-104, 1960.
- [63] LUENBERGER, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1973.
- [64] RUMELHART, D. E. , HINTON, G. E. and WILLIAMS, R. J., " Learning Internal Representations by Error Propagation ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [65] FOX, L. *Introduction to Numerical Linear Algebra*, Oxford University Press, New York, 1965.
- [66] BOULLION, T. L., *Generalised Inverse Matrices*, John Wiley and Sons, Inc., 1971.
- [67] KREYSZIG, T., *Introductory Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [68] HINTON, G. E. , McCLELLAND, J. L. and RUMELHART, D. E., " Distributed Representations ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts,

1986.

- [69] **ZISPER, D.**, " Biologically Plausible Models of Place Recognition and Goal Location ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [70] **McCLELLAND, J. L. and RUMELHART, D. E.**, " A Distributed Model of Human Learning and Memory ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [71] **McCLELLAND, J. L. and RUMELHART, D. E.**, " Amnesia and Distributed Memory ", *Parallel Distributed Processing*, Eds. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [72] **CASPER, G.**, *Introduction to Real Analysis*, Harper and Row, New York, 1966.
- [73] **WATANABE, S.**, *Knowing and Guessing*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.
- [74] **HINTIKKA, J. and SUPPES, P.**, *Aspects of Inductive Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.
- [75] **FITCH, F. B.**, *Symbolic Logic - An Introduction*, Ronald, New York, 1952.
- [76] **METROPOLIS, N. , ULAM, S.**, " The Monte Carlo Method ", *J. American Statistical Association*, Vol. 44, Num. 247, pp. 335-341, 1949.
- [77] **SÓBOL, I. M.**, *Metodo de Monte Carlo*, Editora MIR, Moscú, 1976.
- [78] **METROPOLIS, N. , ROSENBLUTH, A. W. , ROSENBLUTH, M. N. and TELLER, A. H. , TELLER, E.**, " Equation of State Calculations by Fast Computing Machines ", *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 21, Num. 6, 1953.
- [79] **KNIGHT, C. A.**, *The Freezing of Supercooled Liquids*, D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey, 1967.
- [80] **KIRKPATRICK, S. , GELATT, C. D. , and VECCHI, M. P.**, " Optimization by Simulated Annealing ", *Science*, Vol. 220, Num. 4598, pp. 671-680, 1983.
- [81] **MITRA, D. , ROMEO, F. and SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A.**, " Convergence and Finite-time Behavior of Simulated Annealing " *Ad-*



*vances in Applied Probability*, Vol. 18, Num. 3, pp. 747-771, 1986.

- [82] **ARAGON, C. R. , JOHNSON, D. S. , McGEOCH, L. A. and SCHEVON, C.**, " Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation ", *Workshop on Statistical Physics in Engineering and Biology*, 1984.
- [83] **BONOMI, E. and , LUTTON, J.**, " The N-city Travelling Salesman Problem: Statistical Mechanics and The Metropolis Algorithm ", *SIAM Review*, Vol. 26, Num. 4, pp. 551-567, 1984.
- [84] **CERNY, V.**, " Thermodynamical Approach to the Travelling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm ", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 45, Num. 1, pp. 41-51, 1985.
- [85] **GEMAN, S. and GEMAN, D.**, "Stochastic Relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian Restoration of Images", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-6, Num. 6, pp. 721- 741, 1984.
- [86] **COOK, S. A.**, "An Overview of Computational Complexity", *Communications of the ACM*, Vol. 26, Num. 8, pp. 401-408.
- [87] **GAREY, M. R. and JOHNSON, D. S.**, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, 1979.
- [88] **HINTON, G. E., SEJNOWSKI, T. J. and ACKLEY, D. H.**, "Boltzmann Machines: Constraints Satisfaction Networks that Learn", *Technical Report CMU-CS-84-119*, Computer Science Department, Carnegie-Melon University, 1984.