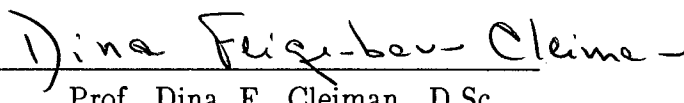


OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS
INCLUINDO REDE DE TRANSMISSÃO

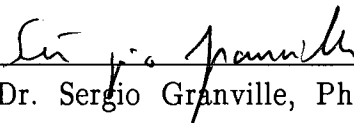
Boris Garbati Gorenstin

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

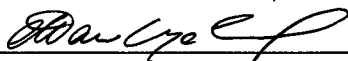
Aprovada por:



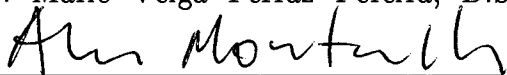
Prof. Dina F. Cleiman, D.Sc.



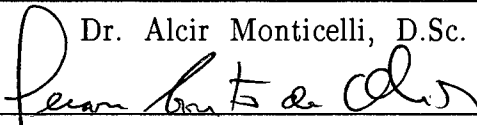
Dr. Sergio Granville, Ph.D.



Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.



Dr. Alcir Monticelli, D.Sc.



Dr. Gerson Couto de Oliveira, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – BRASIL

Outubro de 1991

À Eliane
Fernanda
André Felipe

Gorenstin, Boris Garbati

Otimização Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos
Incluindo a Rede de Transmissão [Rio de Janeiro] 1991
VIII,119 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 1991)
Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
1. Otimização da Operação de Sistemas Hidrotérmicos
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) pelo apoio e suporte material necessário à realização deste trabalho.

Aos professores Dina F. Cleiman e Sérgio Granville pelo apoio ao meu programa de doutorado.

Ao amigo Mario Veiga Ferraz Pereira pelo incentivo, orientação e participação no desenvolvimento da metodologia.

Aos colegas e amigos Nora Marcela Campodónico, Joari Paulo da Costa e Herminio José da Cunha P. Pinto pela colaboração neste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos Requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em Ciências (D.Sc.)

OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS INCLUINDO REDE DE TRANSMISSÃO

Boris Garbati Gorenstin

Outubro de 1991

Orientador: Sergio Granville – Dina F. Cleiman

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo da operação ótima de um sistema hidrotérmico consiste na determinação de uma estratégia de geração em cada usina do sistema que minimize os custos de operação no período de planejamento. O custo de operação é composto por gastos com combustíveis nas unidades térmicas, compras de energia em subsistemas vizinhos e penalidades por não atendimento à demanda. Este problema é essencialmente estocástico, devido à impossibilidade de se prever com exatidão as vazões afluentes aos aproveitamentos, e de grande porte, devido à existência de múltiplos reservatórios interconectados, restrições da rede de transmissão e a necessidade de uma otimização multiperíodo para obtenção da operação ótima. Este trabalho descreve um algoritmo de otimização estocástica para sistemas hidrotérmicos incluindo restrições da rede de transmissão, baseado em técnicas de decomposição e simulação e em algoritmos especializados de programação linear que tomam partido das características do problema. É também descrita uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada de sistemas hidrotérmicos, baseada na teoria de custos marginais. Exemplos e casos testes com o sistema interligado Sul–Sudeste e com o sistema da INECEL (Equador) são apresentados e discutidos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as
partial fulfillment of the requirements for the
degree of Doctor of Science (D.Sc.)

STOCHASTIC OPTIMIZATION OF HYDROTHERMAL SYSTEMS
INCLUDING NETWORK CONSTRAINTS

Boris Garbati Gorenstin

October de 1991

Thesis Supervisor: Sergio Granville — Dina F. Cleiman

Department: Computation and System Engineering

The objective of the optimal operation of a hydrothermal system is to determine an operation strategy which, for each stage of the planning period, given the system state, produces generation targets for each plant. This strategy should minimize the expected value of the operation cost along the period, composed of fuel costs plus penalties for failure in load supply. This problem is essentially stochastic, because it is impossible to have perfect forecasts of the future inflows, and large scale, due to the existence of multiple interconnected reservoirs, the need for multiperiod optimization, network constraints and static security constraints. This work describes an algorithm for the optimal stochastic operations scheduling of multireservoir hydrothermal system with power network constraints based on decomposition, simulation techniques and specialized linear programming algorithms. It is also presented a methodology for calculating marginal costs in a hydrothermal system. Examples and case studies with a Brazilian Southern–Shouteastern system and INECEL system (Equador) are presented and discussed.

ÍNDICE

I INTRODUÇÃO

- I.1 Introdução
- I.2 Formulação matemática
- I.3 Revisão bibliográfica
- I.4 Objetivos da tese

II PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

- II.1 Introdução
- II.2 Modelo de usinas hidroelétricas
- II.3 Modelo de usinas térmicas
- II.4 Modelo da rede de transmissão
- II.5 Restrições de segurança
- II.6 Esquema de solução conceitual

III PROBLEMA DE DECISÕES SEQUENCIAIS

- III.1 Introdução
- III.2 Caso determinístico
 - III.2.1 Técnicas de solução
 - III.2.2 Esquema de decomposição
 - III.2.3 Algoritmo de solução
 - III.2.4 Extensão para problemas multiestágio
- III.3 Caso estocástico
 - III.3.1 Esquema de decomposição
 - III.3.2 Algoritmo I
 - III.3.3 Algoritmo II: Programação dinâmica dual
 - III.3.3.1 Teste de convergência
 - III.3.3.2 Extensão para modelos autoregressivos

IV INCLUSÃO DA REDE DE TRANSMISSÃO

- IV.1 Introdução
- IV.2 Formulação matemática
- IV.3 Subproblema energético
- IV.4 Subproblema elétrico

V CÁLCULO DOS CUSTOS MARGINAIS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

- V.1 Introdução
- V.2 Teoria de custos marginais
- V.3 Alocação de custos e benefícios
- V.4 Custos marginais em sistemas elétricos
 - V.4.1 Sistemas térmicos (barra única)
 - V.4.2 Sistemas hidrotérmicos
 - V.4.2.1 Caso determinístico
 - V.4.2.2 Caso probabilístico
 - V.4.3 Sistemas de geração e transmissão
 - V.4.4 Inclusão de restrições de segurança
 - V.4.4.1 Cálculo dos custos marginais
- V.5 Utilização dos custos marginais na expansão do sistema

VI RESULTADOS COMPUTACIONAIS

- VI.1 Introdução
- VI.2 Caso estudo I
 - VI.2.1 Dados gerais
 - VI.2.2 Dimensão do problema
 - VI.2.3 Resultados
 - VI.2.4 Sensibilidade da solução com o tamanho da amostra
 - VI.2.5 Dimensionamento ótimo
- VI.3 Caso estudo II
 - VI.3.1 Dados gerais
 - VI.3.2 Dimensão do problema
 - VI.3.3 Resultados

VII CONCLUSÕES

ANEXO I Algoritmo simplex para fluxo de custo mínimo em redes com restrições adicionais

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 Introdução

O parque gerador brasileiro é predominantemente hidroelétrico, cerca de 90% da capacidade instalada em 1990, sendo caracterizado por grandes reservatórios existentes nas principais bacias hidrográficas situadas nas regiões Nordeste, Sudeste e Sul do país. O parque térmico, concentrado nas regiões Sul (usinas a carvão) e Sudeste (usinas convencionais e nucleares), é utilizado para complementar a produção de energia em períodos de hidraulicidade desfavorável. Em dezembro de 1990 a capacidade instalada por região era [1]:

Região	Total (MW)	Hidro (MW)	Térmica (MW)
Norte	4 759	3 979	780
Nordeste	7 897	7 217	680
Sudeste	35 963	34 607	1 956
Sul	6 738	5 586	1 152
Central	646	545	101
Total	55 203	50 534	4 669

Tabela I.1 Capacidade instalada

Os sistemas regionais de geração, inicialmente concebidos para atendimento aos mercados locais, vêm sofrendo um processo de interligação para tomar partido da complementaridade dos regimes hidrológicos entre regiões (Sudeste–Sul e Norte–Sudeste) e permitir a transmissão de energia de aproveitamentos distantes dos centros de carga (Norte–Nordeste).

O planejamento da operação de um sistema com as características mostradas acima é bastante complexo, já que a análise do desempenho do sistema deve considerar efeitos de longo prazo (valor esperado do custo de operação do sistema, possibilidade de déficits futuros etc) e efeitos de médio e curto prazo (contratos anuais para suprimento de energia entre empresas, programação das

manutenções nas unidades do sistema etc). De um modo geral, o objetivo da operação de um sistema hidrotérmico consiste na determinação de uma estratégia de geração em cada usina que minimize os custos de operação no período de planejamento. O custo de operação é composto de gastos com combustíveis nas unidades térmicas, eventuais compras de energia em subsistemas vizinhos e penalidades por não atendimento à demanda.

Algumas das características deste problema serão mostradas a seguir. A programação da operação de sistemas hidrotérmicos é um problema essencialmente probabilístico, devido à impossibilidade de se prever com exatidão as afluências aos aproveitamentos do sistema. Outras fontes de incertezas são: a demanda a ser atendida, a disponibilidade dos equipamentos, preços dos combustíveis fósseis, atrasos na entrada em operação de equipamentos etc. Na referência [2] são listadas cerca de 60 fontes de incerteza internas ao setor (vazões afluentes às usinas, disponibilidade de equipamentos etc) e externas (preços dos combustíveis fósseis, crescimento da demanda, restrições ambientais, variação da temperatura etc) ao setor elétrico, que podem ter um impacto relevante nas condições de suprimento de energia ao mercado.

A limitação na disponibilidade de energia hidroelétrica armazenada sob forma de água nos reservatórios cria uma relação entre as decisões tomadas em um estágio qualquer e suas conseqüências futuras [3]. Torna-se necessário o emprego de um período longo de estudo, caracterizando o problema de operação multireservatório como um problema de grande porte. Como os benefícios da geração de uma usina hidráulica não podem ser medidos diretamente como função da geração na usina, mas em termos da economia de combustíveis utilizados, tem-se que as variáveis envolvidas são não separáveis.

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos deve considerar também as restrições de origem hidráulica (limitação mínima e máxima de defluência em aproveitamentos, restrições para controle de cheias etc), restrições da rede de transmissão (limites de fluxo nos circuitos, tensão em barramentos, restrições associadas à estabilidade dinâmica do sistema etc) e restrições operacionais (contrato de suprimento entre empresas, programação de manutenção etc).

O despacho obtido considerando-se desde a a otimização plurianual das reservas de água armazenada nos reservatórios até o despacho horário das usinas pode ser ainda inseguro, ou seja, pode não ser possível continuar atendendo à

demanda após um distúrbio no sistema (perda de um gerador ou circuito). A representação das restrições de segurança tem por objetivo garantir que o sistema continue operando atendendo completamente a demanda após a ocorrência de um distúrbio. A análise de segurança do sistema leva a implementação de ações de controle preventivas possibilitando um nível maior de segurança.

Uma outra questão interessante refere-se a repartição dos custos e benefícios associados a operação de sistemas hidrotérmicos. No Brasil, por exemplo o planejamento da operação é realizado de maneira coordenada através de um organismo multilateral (GCOI), o que resulta em substancial benefício econômico tanto em termos de custo de operação (por exemplo, utilizando energia mais barata disponível em outras empresas, ou evitando déficit em uma região através da transferência de energia) quanto em termos do aumento da confiabilidade (através da utilização de capacidade excedente de outras áreas). Uma questão que naturalmente se coloca em toda a atividade coordenada é a repartição, ou rateio, dos benefícios e custos decorrentes destas atividades. Entre as alternativas metodológicas de rateio existente destacam-se os critérios baseados na remuneração a custo marginal [4,5], que apresentam uma série de atrativos em termos de coerência econômica e incentivo à otimização de investimentos e operação.

Esta tese propõe-se a dar uma contribuição para a análise do problema de programação da operação do sistema hidrotérmico. O algoritmo proposto, baseado em técnicas de programação linear estocástica, permite representar as usinas de forma individualizada, a estocasticidade das vazões afluentes aos reservatórios, as restrições da rede elétrica e de segurança do sistema. É apresentada e discutida uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada do sistema hidrotérmico.

No Capítulo I é formulado o problema de programação da operação para sistemas hidrotérmicos e feita uma revisão bibliográfica dos algoritmos de solução existentes.

No Capítulo II são analisados os modelos dos componentes do sistema hidrotérmico e a formulação do modelo para programação da operação de sistemas hidrotérmicos.

No Capítulo III é apresentada uma possível estratégia de solução para o modelo definido no capítulo anterior, sendo mostrada a decomposição do problema

multiestágio em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. São incorporadas as restrições provenientes da rede elétrica ao problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos.

No Capítulo IV o algoritmo proposto é detalhado, são definidos o subproblemas energético e elétrico e são analisadas as estratégias de solução para cada subproblema.

No Capítulo V, a partir do algoritmo proposto para o planejamento da operação, é descrita uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação coordenada de sistemas hidrotérmicos. A metodologia proposta baseia-se na teoria dos custos marginais e leva em consideração as características particulares do problema.

No Capítulo VI, são apresentados e discutidos casos testes com o sistema interligado Sul-Sudeste e o sistema INECEL (Equador). Finalmente no Capítulo VII, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

1.2 Formulação matemática

Supondo que os volumes afluentes às usinas sejam conhecidos no início de cada estágio, o problema de planejamento da operação pode ser formulado como um problema de programação dinâmica estocástica [6].

$$\alpha_t(x_t) = E_{a_t | x_t} \left\{ \min_{u_t} c_t(u_t) + \beta \alpha_{t+1}(x_{t+1}) \right\} \quad (\text{I.1.1})$$

s.a

$$x_{t+1} = F_t(x_t, a_t, u_t) \quad (\text{I.1.2})$$

$$R_{t+1}(x_{t+1}) \geq 0 \quad (\text{I.1.3})$$

$$S_t(u_t) \geq 0 \quad (\text{I.1.4})$$

$$t = T, T-1, \dots, 1$$

onde:

t Indexa estágios

x_t	Vetor de estado no início do estágio t
$\alpha_t(x_t)$	Valor esperado do custo de operação do estado x_t até o final do período de planejamento considerando a política de operação ótima.
$a_t x_t$	Distribuição de probabilidade do vetor de afluências a_t condicionado pelo estado x_t .
$E\{.\}$	Operador valor esperado
u_t	Vetor de decisão associado ao estágio t
c_t	Vetor de custos associados à decisão u_t
β	Fator de atualização
F_t	Função de transição
R_{t+1}	Limites no vetor de estado
S_t	Limites no vetor de decisão.

A programação dinâmica é um procedimento em que um problema complexo é transformado em uma sequência de problemas de solução mais simples. Cada ponto em que uma decisão pode ser realizada é chamado de **estágio**. Em cada estágio, as características do sistema (por exemplo volume armazenado no início do estágio) são definidas pelo **vetor de estado**. A relação entre os vetores de estado em estágios subsequentes é dada pela **função de transição** (I.1.2). A função que conecta os valores ótimos dos subproblemas é conhecida como **função de recorrência** (I.1.1). A relação de recorrência expressa o fato que $\alpha_{t+1}(x_{t+1})$, a solução do problema para os estágios $t+1, \dots, T$, independe do estado inicial e da decisão no estágio t . Esta propriedade é chamada de **princípio da otimalidade** e é base para a solução de problemas de decisões seqüenciais [62].

As variáveis de estado, no caso de otimização da operação de sistemas hidrotérmicos, incluem usualmente o nível dos reservatórios e a tendência hidrológica, fornecida por exemplo através das afluências laterais às usinas nos estágios anteriores. A utilização da tendência hidrológica como variável de estado pode ser entendida considerando-se que as vazões afluentes aos aproveitamentos que ocorreram no passado fornecem um indicador sobre as vazões futuras. Usualmente se representa como tendência hidrológica a vazão do mes anterior. As variáveis de decisão utilizadas são os volumes turbinados (q_t) e os volumes vertidos (s_t). No capítulo II esta formulação será apresentada detalhadamente para o problema de programação da operação de sistemas hidrotérmicos.

I.3 Revisão bibliográfica

A utilização de técnicas de programação dinâmica para a solução do

problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos tem uma limitação severa associada à dimensão do problema, ou seja, sua aplicabilidade está restrita a problemas de dimensões bastante reduzidas. Algumas das estratégias utilizadas para a solução de problemas com maiores dimensões serão descritas a seguir.

A técnica de equivalentes determinísticos [7,8,9] consiste em eliminar a representação explícita da natureza estocástica das vazões afluentes às usinas. Estes métodos são baseados no princípio do equivalente determinístico, que estabelece que a estratégia ótima para a solução de problemas estocásticos pode ser obtida de forma aproximada através da substituição das variáveis estocásticas por seus valores esperados, possibilitando a utilização de algoritmos de otimização determinística para a solução do problema. Normalmente estes modelos são utilizados de forma adaptativa, ou seja, a partir de novas medições da variável aleatória é possível refazer as previsões, o que permite um refinamento da solução anteriormente obtida. Na referência [8], esta metodologia é aplicada ao sistema interligado Sul-Sudeste utilizando-se técnicas de otimização não linear em redes capacitadas.

Uma característica dos métodos de equivalentes determinísticos é sua tendência otimista, ou seja, o custo de operação do sistema é sempre menor ou igual ao custo de operação caso fosse mantida a estrutura estocástica do problema. A tendência otimista pode ser explicada pela inequação de Jensen [63] que estabelece que o valor esperado de uma função convexa de variável aleatória ($E(g(x))$) é maior ou igual que o valor da função no ponto valor esperado da variável aleatória ($g(E(x))$). Uma tentativa para reduzir a tendência otimista é a representação de cenários alternativos para as variáveis aleatórias [10].

A programação dinâmica, quando aplicada a problemas com variáveis reais, requer a discretização do espaço de estados. Alguns trabalhos sugerem reduzir o esforço computacional através da redução da dimensão do problema utilizando-se uma representação agregada para o sistema hidrotérmico [11,12]. A técnica de agregação [11], conhecida como representação a reservatório equivalente, é baseada na estimação da energia produzida pelo completo deplecionamento dos reservatórios para um dado conjunto de volumes iniciais. Uma estratégia de operação simplificada é assumida, como descrito em [13]. A representação a reservatório equivalente é razoavelmente precisa se os reservatórios tiverem grande capacidade de regularização e as vazões afluentes aos reservatórios forem correlatadas.

Alguns autores sugerem, para a redução do esforço computacional, a utilização de técnicas de agregação analítica das variáveis de estado. Saad e Turgeon [14] propõem a utilização da técnica de componentes principais. Este algoritmo é baseado na otimização determinística para cada cenário de um conjunto de aflúências definido previamente. Os resultados das otimizações são analisados utilizando-se a técnica de componentes principais para a determinação de um conjunto reduzido de variáveis de estado que definam a operação do sistema para a programação dinâmica estocástica. Esta técnica reduz o número de variáveis de estado desde que exista um certo grau de interdependência entre as variáveis. Na literatura não há referências à aplicação desta metodologia a sistemas reais.

Provonost e Davis [15] sugerem a definição de um modelo estocástico de aflúências como função da energia armazenada. Esta técnica se baseia na observação de que a energia armazenada no sistema depende das aflúências passadas e contém, portanto, alguma informação sobre a "tendência hidrológica". O modelo estocástico de aflúências é então expresso como função da energia armazenada. Tavares [16] utiliza uma variável de estado composta por uma combinação linear entre a energia armazenada no início do período e a variável "tendência hidrológica" representada pela aflúência aos reservatórios no estágio anterior. Esta técnica visa a reduzir a dimensionalidade do problema estabelecendo uma relação funcional entre a variação da energia armazenada num mes e o valor esperado da energia afluyente futura.

Outros autores sugerem, para a redução do esforço computacional, a utilização de uma aproximação analítica para a função de custo futuro. Esta representação permite reduzir o número de variáveis de estado a examinar em cada estágio da recursão, já que é necessário apenas calcular a função para alguns pontos e estimar a partir destes pontos os parâmetros desta função. O valor da função para todos os demais pontos é obtido através da função aproximada. Gal [17] sugere a utilização de aproximações quadráticas ou cúbicas para a função de custo futuro. Foufula-Georgiou e Kitanidis [18] sugerem a utilização de uma aproximação baseada nos polinômios de Hermite. Recentemente Stedinger [19] demonstrou que se pode obter um desempenho semelhante ao obtido por [18] utilizando-se aproximações polinomiais do tipo "splines" para a função de custo futuro com menor esforço computacional. Uma aplicação da técnica de aproximação analítica da função de custo futuro para o sistema equivalente do Sudeste do Brasil é apresentada em Costa [20].

Nos algoritmos mostrados anteriormente a "tendência hidrológica" é representada por modelos auto-regressivos de ordem um, nos quais a distribuição de probabilidade das aflúências em um dado período é condicionada pela aflúência observada no período anterior. Entretanto, Kelman [21] mostrou que modelos auto-regressivos de ordem um em escala mensal são otimistas. Como consequência, o modelo tende a atribuir probabilidades excessivamente baixas a secas de longa duração que efetivamente ocorreram no passado. A representação de modelos de aflúência mais complexos requer variáveis de estado adicionais, aumentando o esforço computacional. Kelman e outros [22] propõem a utilização do algoritmo de programação dinâmica amostral que substitui a representação explícita do modelo de aflúências por uma representação implícita dada por uma grande amostra de seqüências de aflúências. Este método baseia-se na definição de um conjunto de cenários para a aflúência ao sistema que são usadas na simulação da operação dos reservatórios para todas as possíveis combinações entre nível de armazenamento e estado hidrológico. Stedinger [23] sugere a utilização da previsão da aflúência futura, em vez do vetor de aflúências passadas, como variável de estado. Em Maceira [24] esta alternativa, combinada com a programação dinâmica amostral, foi aplicada para o sistema interligado Sul-Sudeste Brasileiro.

Recentemente foi proposto um método que aproxima a função de custo futuro de forma analítica que não requer a discretização do espaço de estados. O algoritmo, conhecido como programação dinâmica dual estocástica (PDDE) combina técnicas de otimização de grande porte com a técnica de simulação de Monte Carlo [6]. O algoritmo de PDDE não requer a utilização de técnicas de agregação para as usinas e permite representar modelos auto-regressivos para as vazões afluentes de qualquer ordem sem um aumento excessivo do esforço computacional. Este algoritmo pode ser aplicado desde que as funções que governam o comportamento do sistema sejam convexas.

Os modelos descritos acima não representam a rede elétrica. O despacho da geração obtido através destes modelos pode, portanto, ser eletricamente inviável. A introdução das restrições da rede aumenta consideravelmente a complexidade do problema devido à introdução de um número considerável de restrições e variáveis.

Na literatura encontram-se referências à introdução das restrições da rede dentro do contexto da otimização determinística multireservatório. Os trabalhos [25,26,27] representam a rede elétrica através de um modelo de transportes (limites de capacidades dos ramos), não representando a segunda lei de Kirchhoff.

A referência [27] decompõe o problema nos subproblemas energético e elétrico. O subproblema energético é solucionado através de um algoritmo de fluxo de custo mínimo, enquanto no subproblema elétrico a solução é obtida através de utilização de programação linear e técnicas de programação heurística.

I.4 Objetivos da tese

Este trabalho apresenta um método de solução para o problema da otimização estocástica de sistemas hidrotérmicos incluindo restrições da rede de transmissão. O algoritmo utilizado baseia-se em programação dinâmica dual. O problema multiperíodo é decomposto em uma sucessão de problemas de um único período. Cada subproblema é por sua vez dividido em dois subproblemas.

No subproblema energético todas as barras do sistema são agrupadas em uma única barra, e a configuração hidráulica é representada de maneira detalhada. É utilizado para a solução do subproblema um algoritmo de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais [29].

No subproblema elétrico é testada a viabilidade elétrica do despacho de geração obtido no subproblema energético e realizada uma análise de segurança do sistema. É utilizado um algoritmo de programação linear eficiente para a solução de problema com a estrutura apresentado pelo subproblema elétrico [30]. São apresentados e discutidos casos exemplos com o sistema interligado Sul-Sudeste e com o sistema do Equador.

Adicionalmente, é discutida uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada de um sistema hidrotérmico baseada na teoria de custos marginais. Esta metodologia pode ser utilizada para rateio dos benefícios associados a produção de energia elétrica, estabelecimento de tarifas de pedágio para acesso ao sistema de transmissão de uma empresa, e na definição de critérios para postergação de obras em caso de restrições financeiras.

CAPÍTULO II PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

II.1 Introdução

A operação estocástica de um sistema multireservatório é um problema de grande porte, não separável e não linear. O objetivo do problema é minimizar o valor esperado do custo de operação constituído por gastos com combustíveis nas usinas térmicas e penalidades por não atendimento à demanda. O horizonte de otimização varia de um a cinco anos, dependendo da capacidade de armazenamento dos reservatórios do sistema. A discretização varia de uma semana a um mês, dependendo da variação da demanda elétrica, restrições hidráulicas etc.

Os sistemas hidrotérmicos de geração são compostos de usinas termoelétricas convencionais ou nucleares e usinas hidroelétricas, conectadas aos centros de carga através de um sistema de transmissão. No item II.2 são descritos os modelos adotados para as usinas hidroelétricas e sua representação por uma estrutura em redes.

No item II.3 é descrito o modelo utilizado para a representação das usinas térmicas.

No item II.4 é descrito o modelo linear utilizado para descrever a rede de transmissão. No item II.5 são modeladas as restrições de segurança para o sistema elétrico.

No item II.6 é formulado o modelo matemático para a operação estocástica de um sistema multireservatório e discutidas as dificuldades para a solução do problema.

II.2 Modelo de usinas hidroelétricas

As usinas hidroelétricas convertem a energia potencial da água armazenada nos reservatórios em energia cinética, que é utilizada para acionar um conjunto turbina–gerador. As usinas hidroelétricas podem ser classificadas em usinas com reservatório e usinas a fio d’água (sem reservatório). Uma usina hidroelétrica pode ser representada por 3 variáveis (volume armazenado, volume turbinado e volume vertido) e 3 restrições (balanço hídrico, limites de armazenamento e turbinamento e produção energética).

(i) balanço hídrico:

$$v_{t+1} = v_t + a_t + M(q_t + s_t) \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (\text{II.1})$$

onde:

t Indexa estágios

T Horizonte de planejamento

v_t Vetor de volumes armazenados no início do estágio t (m^3)

a_t Vetor de volumes afluentes incrementais no estágio t (m^3)

q_t Vetor de volumes turbinados no estágio t (m^3)

s_t Vetor de volumes vertidos no estágio t (m^3)

M Matriz de incidência de usinas hidroelétricas definida por:

$M_{ij} = 1$ se a usina j estiver imediatamente a montante da usina i

$M_{ii} = -1$

$M_{ij} = 0$, para os demais elementos da linha i

Os vetores $v_t = [v_{1,t}, v_{2,t}, \dots, v_{n,t}]$, $a_t = [a_{1,t}, a_{2,t}, \dots, a_{n,t}]$, $q_t = [q_{1,t}, q_{2,t}, \dots, q_{n,t}]$ e $s_t = [s_{1,t}, s_{2,t}, \dots, s_{n,t}]$, tem dimensão igual a n , onde n é o número de usinas do sistema; A matriz M tem dimensão $(n \times n)$. Note que para uma usina a fio d’água $v_{t+1} = v_t = 0$.

(ii) **limites de armazenamento e turbinamento:**

$$q_t \leq \bar{q}$$

e para $t=1, \dots, T$ (II.2)

$$v_t \leq \bar{v}$$
 (II.3)

onde:

\bar{q}, \bar{v} Vetores de dimensão (n) com as capacidades de turbinamento e armazenamento respectivamente.

(iii) **produção de energia:**

A geração hidroelétrica de uma usina i está relacionada com o volume turbinado $q_{i,t}$ no estágio t por:

$$gh_{it} = \rho_i q_{it} \quad t=1, \dots, T$$
 (II.4)

onde ρ_i é o coeficiente de produtibilidade da usina i , dado por:

$$\rho_i = 9.81 \times 10^{-3} h_{lit} \mu_{tit} \mu_{git}$$
 (II.5)

onde:

gh_{it}	Geração hidráulica na usina i durante o estágio t (Mw—mes)
q_{it}	Volume turbinado na usina i durante o estágio t (m^3)
h_{lit}	Altura líquida da usina i durante o estágio t (m)
μ_{tit}	Rendimento da turbina da usina i durante o estágio t
μ_{git}	Rendimento do gerador da usina i durante o estágio t .

Neste trabalho a produtibilidade de uma usina será considerada constante, calculada na altura líquida média e utilizando-se os valores médios dos rendimentos da turbina e gerador da usina. Esta aproximação é válida no caso brasileiro devido à existência de reservatórios com grande capacidade de regularização e pequena variação da altura de queda para a maioria dos possíveis cenários hidrológicos.

Considerando a produtividade constante, a limitação de geração hidráulica em uma usina i é dada por:

$$gh_{it} = \rho_i q_{it} \leq \overline{gh}_i \quad t=1, \dots, T \quad (\text{II.6})$$

Algoritmos recentes [64] desenvolvidos para a solução do problema da otimização de sistemas hidrotérmicos aproveitam o fato que as equações de balanço hídrico e as restrições de limite de turbinamento e armazenamento tem uma estrutura de fluxo em redes que permite a utilização de algoritmos de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas. Esta equivalência é ilustrada na figura II.1 para um sistema com duas usinas (um reservatório e uma usina a fio d'água) em série e três intervalos de tempo.

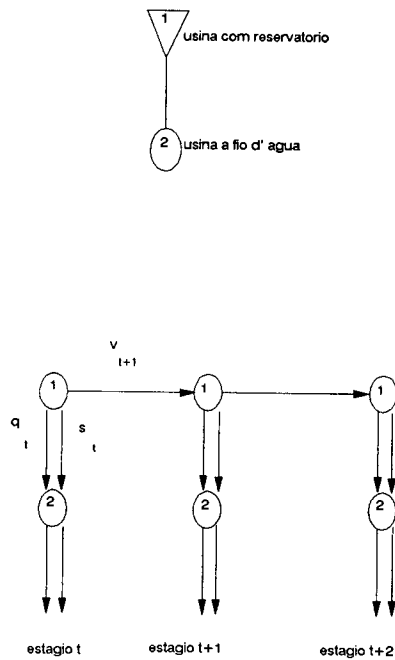


Figura II.1 – Estrutura em redes

Os nós da figura II.1 representam as equações de balanço hídrico em cada usina, os ramos representam as variáveis armazenamento, turbinamento e vertimento. O fluxo de cada ramo está limitado pela capacidade do ramo. Note que uma usina a fio d'água não possui um ramo associado à variável armazenamento.

II.3 Modelo de usinas térmicas

As usinas termoelétricas podem ser classificadas em dois grupos:

- (i) Convencionais
- (ii) Nucleares

As usinas convencionais utilizam como combustível materiais fósseis como carvão, óleo combustível, gás natural etc. As usinas nucleares utilizam como combustível materiais físeis como urânio, plutônio etc. As usinas térmicas, de um modo geral, produzem vapor, através da queima de combustíveis, que é utilizado para acionar o conjunto turbina-gerador. A representação das usinas térmicas nos estudos de planejamento da operação é feita por uma única variável (geração da usina) com seu custo incremental associado e de uma restrição limitando a capacidade de geração da usina.

(i) limite de geração:

$$gt_t \leq \overline{gt} \quad \text{para } t=1, \dots, T \quad (\text{II.7})$$

onde:

gt_t Vetor de geração térmica no estágio t

\overline{gt} Vetor de capacidades de geração

Os vetores $gt_t = [gt_{1,t}, gt_{2,t}, gt_{3,t}, \dots, gt_{nb,t}]$ e $\overline{gt}_t = [\overline{gt}_1, \overline{gt}_2, \overline{gt}_3, \dots, \overline{gt}_{nb}]$ têm dimensão igual a nb , onde nb é o número de barras do sistema. Para uma barra (i) onde não há geração térmica $gt_{ti} = \overline{gt}_{ti} = 0$ para $t=1, \dots, T$.

II.4 Modelo de rede de transmissão

A rede de transmissão, composta por linhas e transformadores, é utilizada para transportar a energia gerada nas usinas até os consumidores. Neste trabalho o

sistema elétrico será representado através de um modelo linear, que relaciona os fluxos de potência ativa com as injeções de potência de acordo com [31]:

$$Af + g = d \quad (\text{II.8.1})$$

$$f - \Gamma A^t \theta = 0 \quad (\text{II.8.2})$$

onde:

nb Número de barras

nl Número de circuitos

A Matriz de incidência barra-circuito (dimensão: $nb \times nl$)
 ($A_{ij}=1$, se a barra i for a barra origem do circuito j ;
 $A_{ij}=-1$, se a barra i for a barra destino do circuito j ;
 $A_{ij}=0$, caso contrário)

f Vetor de fluxo nos circuitos (dimensão: nl)

g Vetor de gerações hidroelétricas e térmicas (dimensão: nb)

d Vetor de demanda (dimensão: nb)

θ Vetor de ângulos de tensão nas barras (dimensão: nb)

Γ Matriz primitiva. Os elementos da diagonal desta matriz são os inversos das reatâncias dos circuitos. Os demais elementos são nulos (dimensão: $nl \times nl$)

t Indica transposição

O conjunto de equações (II.8) corresponde às leis de Kirchhoff. A equação (II.8.1) está associada à conservação de fluxo na rede, e a equação (II.8.2) representa a segunda lei de Kirchhoff, que estabelece que o fluxo em um circuito é igual ao produto entre a susceptância do circuito e a diferença angular entre as barras terminais do circuito.

Utilizando-se (II.8.2), o fluxo em um circuito $k-m$ pode ser calculado como:

$$f_{km} = (\theta_k - \theta_m) \times \gamma_{km}$$

onde γ_{km} é o inverso da reatância do circuito $k-m$.

Note que no modelo linear as perdas de transmissão são desprezadas, já que

$$f_{km} = -f_{mk}.$$

A equação (II.8) pode ser expressa de uma forma mais compacta substituindo-se (II.8.2) em (II.8.1):

$$B\theta + g = d \quad (\text{II.9})$$

onde $B = A \Gamma A^t$ é a matriz de susceptância definida como:

$$B_{ij} = \gamma_{ij} \quad \text{para } i \neq j$$

$$B_{ii} = -\sum_{j \in \Omega_i} \gamma_{ij}$$

onde:

Ω_i conjunto de barras diretamente conectadas a barra i .

A matriz B que aparece em (II.9) é singular, pois a soma dos componentes de $d - g$ é nula. Ou seja, a injeção líquida de potência em uma barra qualquer pode ser obtida a partir da soma das demais. Para que a matrix B seja inversível elimina-se uma das equações de (II.9) e adota-se esta barra como referência angular (usualmente é adotado o valor zero). A partir das considerações acima, dados g e d , o conjunto de equações lineares (II.9) pode ser solucionado utilizando-se técnicas de esparsidade para obtenção do vetor θ [31]. Conhecido θ , os fluxos nos circuitos podem ser obtidos utilizando-se (II.8.2). O fluxo em um circuito está limitado por sua capacidade.

$$|f| \leq \mathcal{F} \quad (\text{II.10})$$

Caso o fluxo de algum circuito exceda a capacidade do circuito, o sistema estará sobrecarregado. A eliminação de sobrecargas requer o redespacho da geração e, se necessário, medidas mais severas como corte de carga em uma ou mais barras.

II.5 Restrições de segurança

A segurança de um sistema elétrico pode ser definida como a capacidade do sistema em suportar uma perturbação (perda de um componente) e continuar atendendo à demanda. As restrições de segurança são usualmente representadas

através de uma lista de contingências de equipamentos. Dada uma lista de contingências, um ponto de operação **seguro** deve satisfazer ao seguinte conjunto de restrições [32]:

$$\begin{aligned}
 A^0 f^0 + g &= d \\
 g &\leq \bar{g} \\
 f^0 &\leq \bar{f} \\
 f^0 - \Gamma^0 (A^0)^t \theta^0 &= 0 \\
 A^1 f^1 + g &= d \\
 f^1 - \Gamma^1 (A^1)^t \theta^1 &= 0 \\
 f^1 &\leq \bar{f} \\
 \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\
 A^{nc} f^{nc} + g &= d \\
 f^{nc} - \Gamma^{nc} (A^{nc})^t \theta^{nc} &= 0 \\
 f^{nc} &\leq \bar{f}
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

onde:

- nc Número de contingências de equipamentos representadas
- 0 Grandeza associada ao caso base
- i Grandeza associada à contingência i .

II.5 Esquema de solução conceitual

O problema (I.1) pode ser reescrito como:

$$\alpha_t(x_t) = E_{a_t | x_t} \left\{ \min_{u_t} c_t(u_t) + \beta \alpha_{t+1}(x_{t+1}) \right\} \tag{II.12.1}$$

s.a

$$x_{t+1} = F_t(x_t, a_t, u_t) \tag{II.12.2}$$

$$R_{t+1}(x_{t+1}) \geq 0 \quad (\text{II.12.3})$$

$$S_t(u_t) \geq 0 \quad (\text{II.12.4})$$

$$t = T, T-1, \dots, 1$$

Utilizando-se um modelo linear para o sistema elétrico e relaxando-se por simplicidade de notação as restrições de segurança, obtém-se o custo imediato de operação através da solução de:

$$\begin{aligned} c_t(u_t) &= \min c_t g_t + w_t r_t \\ \text{s.a} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$A f_t + g_t + r_t = d_t - \rho q_t$$

$$f_t - \Gamma A^t \theta = 0$$

$$f_t \leq \bar{f}$$

$$g_t \leq \bar{g}^t$$

onde:

r_t Vetor de cortes de carga no estágio t

w_t Vetor de penalidades associados ao corte de carga no estágio t

A função de transição (II.12.2), no caso da otimização estocástica se sistemas hidrotérmicos corresponde à equação do balanço hídrico (II.1). As restrições (II.12.3, II.12.4) correspondem respectivamente às restrições de limite de armazenamento nos reservatórios (II.2) e de limite de turbinamento (II.3). O custo imediato (II.13) é dado pelos gastos com combustíveis nas unidades térmicas utilizados para complementar o suprimento de energia, respeitando-se as equações de conservação de energia (II.8.1), segunda lei de Kirchhoff (II.8.2) e o limite de fluxo nos circuitos (II.10).

O problema como definido em (II.12), é um problema de decisões seqüenciais em que a otimalidade de uma decisão depende do conjunto de acontecimentos futuros. Por exemplo, se em um estágio qualquer se decidir deplecionar os reservatórios e no futuro ocorrerem baixos volumes afluentes,

provavelmente será necessário ligar as usinas térmicas, consumindo combustível e portanto com alto custo de operação; se, por outro lado, a decisão for manter os reservatórios cheios através do uso intensivo da geração térmica, e se ocorrerem no futuro volumes afluentes grandes, provavelmente será necessário verter água, causando desperdício de energia e custos de operação mais altos.

Supondo o espaço de estados em cada estágio discretizado em m valores e conhecido o estado inicial $x_{i,1}$. O algoritmo geral de programação dinâmica pode ser expresso através de:

(a) **início**

$$\alpha_T(x_{i,T}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

(b) **recursão "backward"**

para $t = T-1, \dots, 2$ calcular:

para $i = 1, \dots, m$

$$\alpha_t(x_{j,t}) = \min c_t u_t + \beta \alpha_{t+1}(x_{i,t+1}).$$

onde i é o índice do intervalo de discretização mais próximo do estado obtido no estágio $t+1$ a partir do estado $x_{j,t}$ do estágio t .

(c) **estágio 1**

calcular para o estado inicial $x_{i,1}$:

$$\alpha_1(x_{i,1}) = \min c_1 u_1 + \beta \alpha_2(x_{i,1})$$

A recursão feita no sentido inverso do tempo se inicia em um estágio T qualquer suficientemente distante no futuro. O estágio b consiste no cálculo recursivo da função α_t respeitadas as restrições do problema. A solução de (II.12) requer a discretização do espaço de estados, que ocasiona um aumento exponencial do esforço computacional em relação à dimensão do vetor de estados, tornando-se necessário o desenvolvimento de métodos alternativos para a obtenção de sua solução.

CAPÍTULO III PROBLEMA DE DECISÕES SEQUÊNCIAIS

III.1 Introdução

No Capítulo II, o problema de operação de um sistema multireservatório foi modelado como um problema estocástico, de grande porte, multiperíodo e não linear. Pode-se simplificar este problema, tornando-o linear, caso as produtibilidades das usinas forem consideradas constantes, neste caso, sua solução pode ser obtida através de algoritmos convencionais de programação linear. Entretanto a utilização de técnicas que tomam partido da estrutura do problema permite uma melhoria no desempenho do algoritmo simplex. As referências [33,34,35,36] utilizam a decomposição de Benders [37] para a solução do problema linear, determinístico, multiestágio. Esta técnica decompõe o problema original em um conjunto de subproblemas de um único estágio. Cada subproblema envia para o subproblema subsequente a sua solução, e recebe deste uma restrição relacionando a variação marginal do valor da sua função objetivo em relação à variação da solução enviada pelo problema precedente.

Estes algoritmos tem o inconveniente da explosão combinatória, como será visto posteriormente. A programação dinâmica dual estocástica, para evitar a explosão combinatória, estima o valor esperado do valor da função objetivo com uma precisão aceitável utilizando uma amostra aleatória do espaço de estados. Esta algoritmo permite obter a solução ótima com uma precisão compatível com o tamanho da amostra escolhido, ou seja, a incerteza da solução para uma amostra de cenários pequena é maior do que para uma amostra maior de cenários.

No item III.2 é apresentado o problema de decisões sequenciais determinístico e as técnicas de solução deste problema. No item III.3 é discutido o problema multiestágio estocástico e apresentado o algoritmo de programação dinamica estocástica dual.

III.2 Caso determinístico

O problema de decisões seqüenciais será ilustrado primeiramente para o caso determinístico.

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T c_t x_t$$

s.a

$$A_1 x_1 = B_1$$

$$H_{t-1} x_{t-1} + A_t x_t = B_t \quad t = 2, \dots, T \quad (\text{III.1})$$

$$x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

onde:

T Horizonte de planejamento

x_t Vetor de dimensão n_t

A_t Matriz de dimensão $m_t \times n_t$

H_t Matriz de dimensão $m_t \times n_t$

Todos os outros vetores e matriz tem dimensões compatíveis com x_t e A_t . A matriz de coeficientes de (III.1) tem uma estrutura particular na qual os blocos de elementos não nulos se encontram imediatamente abaixo dos elementos da diagonal. Esta estrutura é conhecida como dual angular ("staircase"). A Figura III.1 ilustra a estrutura da matriz de coeficientes para o problema definido em (III.1).

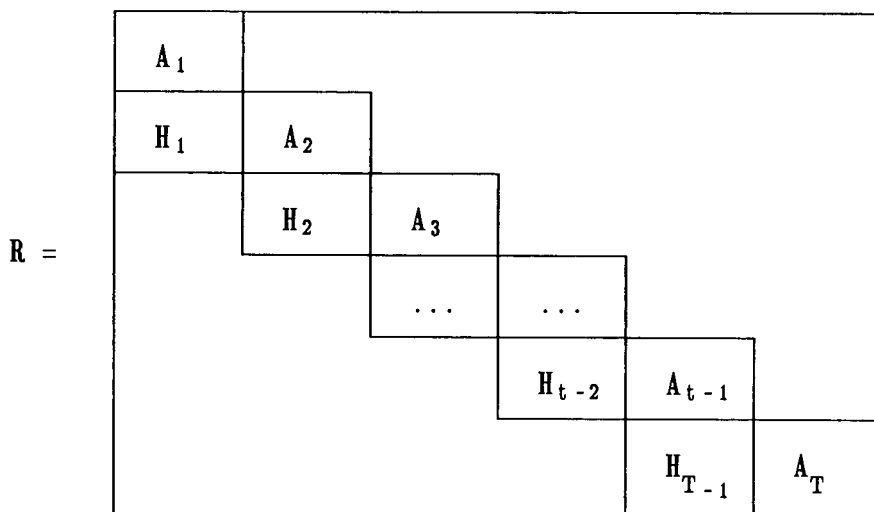


Figura III.1 – Estrutura dual angular

III.2.1 Técnicas de solução

O método simplex pode ser utilizado diretamente para resolver o problema (III.1), Entretanto, testes em [38] demonstraram que sua solução requer um esforço computacional maior que problemas de tamanho e densidade semelhantes que não possuem a mesma estrutura. Para aumentar a eficiência computacional do algoritmo simplex são propostas na literatura os seguintes esquemas de solução:

(i) Redução de base

No algoritmo simplex de programação linear, a maior parte do esforço computacional está relacionado com a obtenção das soluções dos sistemas de equações lineares utilizados para a determinação das variáveis primais e duais a cada iteração. O esquema de base reduzida emprega uma representação especial da base, inversa da base, ou de uma substituta da base ou de sua inversa para a obtenção das soluções destes sistemas. A utilização deste esquema foi sugerida por Dantzig em 1955 [39]. Heesterman e Sandee [40] e Propoi e Krivonoshko [41] empregaram esta técnica para a solução de problemas de decisões seqüenciais. Porém, existem poucas informações sobre o desempenho do método em problemas de grande porte.

(ii) **Decomposição**

Este esquema é baseado em métodos que decompõe o problema em uma sucessão de subproblemas associados a cada estágio. Na literatura encontram-se diversas referências [35,36,43] sobre a aplicação deste método em problemas de decisões seqüenciais. No item seguinte este método será descrito para um problema determinístico de dois estágios.

III.2.2 **Esquema de decomposição**

Os conceitos serão ilustrados através da solução do problema de decisão em dois estágios:

$$z = \min c_1x_1 + c_2x_2$$

s.a

$$A_1x_1 \geq B_1 \tag{III.2.a}$$

$$H_1x_1 + A_2x_2 \geq B_2 \tag{III.2.b}$$

$$x \geq 0$$

O problema (III.2) pode ser interpretado como um processo de decisão em dois estágios. No primeiro estágio obtem-se uma solução viável (\hat{x}_1), que satisfaz (III.2.a). Dado o vetor \hat{x}_1 , o problema de segundo estágio pode ser representado por:

$$\alpha(\hat{x}_1) = \min c_2x_2 \quad \text{var}$$

s.a dual

$$\begin{aligned} A_2 x_2 &\geq B_2 - H_1 \hat{x}_1 && \pi \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

O dual do problema (III.3) é:

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{x}_1) &= \max \pi (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \\ \text{s.a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi A_2 &\leq c_2 && x_2 \\ \pi &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Onde π é o vetor de variáveis duais.

No caso do problema da programação da operação de sistemas hidrotérmicos, os vetores x_1 e x_2 representam as gerações hidráulicas e térmicas, volumes armazenados e vertidos no primeiro e segundo estágio respectivamente. As restrições de operação do primeiro e segundo estágio estão representadas através de (III.2.a e III.2.b). Os custos associados aos estágios referem-se aos gastos com combustíveis.

No problema (III.4) o vetor de decisão \hat{x}_1 , tomado no primeiro estágio, aparece apenas na função objetivo, e não afeta o conjunto de soluções viáveis do problema. Pela teoria de programação linear sabe-se que a solução ótima dos problemas (III.3) e (III.4) coincidem, quando existirem. Supondo que o problema dual tenha solução ótima finita, é possível provar que a função objetivo atinge a solução ótima em pelo menos um vértice. Isto significa que a solução ótima associada a cada decisão de primeiro estágio pode ser caracterizada a priori, sem a necessidade de se resolver (III.4) para cada decisão x_1 . Seja portanto $\Pi = \{ \pi^i, i=1, \dots, r \}$ o conjunto de vértices tal que $\{ \pi \in \mathbb{R}_n^+ \mid \pi A_2 \leq c_2 \}$. O problema (III.4) pode ser reescrito como:

$$\alpha(\hat{x}_1) = \max \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad \text{para } i = 1, \dots, r \quad (\text{III.5})$$

Este problema pode ainda ser expresso em forma equivalente por:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\hat{x}_1) &= \min \alpha \\
 \text{s.a} & \\
 \alpha &\geq \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad \text{para } i = 1, \dots, r
 \end{aligned}
 \tag{III.6}$$

onde α é uma variável escalar.

A equivalência entre as duas formulações pode ser facilmente verificada observando que se α é maior ou igual do que $\pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1)$, é maior ou igual a $\max \{ \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \}$. Como o objetivo é minimizar α , seu valor ótimo é $\max \{ \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \}$. O problema (III.6) pode ser interpretado geometricamente como uma função linear por partes, constituída por hiperplanos suportes da função de custo futuro como mostrado na figura III.2. Este fato permite a caracterização da função de custo futuro sem a necessidade de sua discretização como nos algoritmos baseados em programação dinâmica.

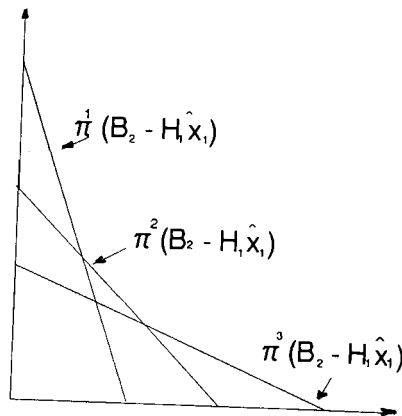


Figura III.2 – Função de custo futuro

Pode-se reescrever o problema (III.2) como:

$$z = \min \left\{ c_1 x_1 + \max_{i=1, \dots, r} \pi_i (B_2 - H_1 x_1) \right\}$$

s.a.

(III.7)

$$A_1 x_1 \geq B_1$$

Ou utilizando—se (III.6):

$$z = \min c_1 x_1 + \alpha$$

s.a.

(III.8)

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq \pi^1 (B_1 - H_1 x_1) \\ \alpha &\geq \pi^2 (B_2 - H_1 x_1) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha &\geq \pi^r (B_2 - H_1 x_1) \end{aligned}$$

O número de restrições $\alpha \geq \pi_i (B_1 - H_1 x_1)$ deste problema é igual ao número de vértices do conjunto de soluções viáveis de (III.3). Entretanto, é possível demonstrar que o número de restrições ativas (atendidas na igualdade) na solução ótima não excede a $n_t + 1$, onde n_t é o número de variáveis x_1 . Portanto é interessante a utilização de técnicas de relaxação. Experiências demonstram que o número de cortes atendidos no limite na solução ótima é bem menor na maioria dos problemas do que este limite teórico, mesmo em problemas de dimensões elevadas [45].

III.2.3 Algoritmo de solução

Como mostrado no item anterior, apenas um número pequeno de restrições $\alpha \geq \pi^i (B_2 - H_2 x_1)$ para $i = 1, \dots, r$ está atendido na igualdade na solução ótima. A estratégia de solução baseia—se na construção iterativa da função que relaciona a solução ótima do segundo estágio com a decisão do primeiro estágio.

Inicialmente, é escolhido um valor para a decisão de primeiro estágio (\hat{x}_1). Dado \hat{x}_1 , é resolvido (III.4), obtendo—se um vetor de decisão associado ao segundo estágio (\hat{x}_2). A solução (\hat{x}_1, \hat{x}_2) obtida atende às restrições de primeiro e segundo

estágio. Portanto, é um limitante superior para o valor ótimo do problema (III.2), já que sua solução ótima deve ter um custo menor ou igual do que qualquer solução viável. Pode-se construir uma aproximação para o problema (III.8) através de:

$$\begin{aligned} z &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \tag{III.9}$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

Como o problema (III.9) é construído relaxando-se todas as restrições associadas ao segundo estágio, z é um limitante inferior para z , no sentido de que o valor da solução ótima de (III.9) deve ser inferior ao valor da solução de (III.8). Portanto, a solução ótima do problema (III.8) pertence ao intervalo definido por $[z, \bar{z}]$. Esta diferença pode ser utilizada para verificar a precisão da solução de (III.9). Considerando que o termo $c_1 x_1$ aparece nas expressões dos limitantes inferior e superior da solução de (III.9), verifica-se que $\bar{z} - z$ mede a diferença entre o valor do custo do segundo estágio e o valor previsto utilizando-se (III.8).

A diferença entre o valor previsto e o custo do segundo estágio indica que pelo menos uma das restrições de (III.8) está violada na solução de (III.9). O algoritmo evolui incorporando uma destas restrições. A seguir será descrito como a partir da solução do problema (III.4) pode-se obter uma das restrições de (III.8) violadas na solução de (III.9). Dada uma decisão de primeiro estágio \hat{x}_1 , o custo de operação do segundo estágio é sempre maior que o valor previsto por (III.9) (α).

$$c_2 x_2 > \alpha \tag{III.10}$$

Utilizando-se o fato que a solução ótima dos problemas primal (III.4) e dual (III.5) coincidem, tem-se que:

$$c_2 x_2 = \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \tag{III.11}$$

Substituindo-se (III.11) em (III.10) e cancelando os termos iguais tem-se:

$$\pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) > \alpha \tag{III.12}$$

O que mostra que a restrição:

$$\alpha \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad (\text{III.13})$$

está violada na solução corrente $(\hat{x}_1, \underline{z})$. Note que a própria solução do problema de segundo estágio fornece a restrição violada no problema relaxado.

Incorporando-se a restrição violada ao problema (III.9), este passa a ser expresso por:

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

A incorporação de restrições violadas na solução do problema relaxado se processa até que a diferença entre \bar{z} e \underline{z} seja inferior a uma determinada tolerância. A convergência finita do algoritmo pode ser demonstrada verificando-se que o número de restrições de (III.8) é finito, já que cada uma está associada a um vértice do conjunto de restrições, e que o algoritmo gera restrições diferentes das já incorporadas ao problema relaxado, considerando que as restrições a serem adicionadas devem estar violadas na solução corrente.

A expressão (III.13) pode ser expressa de uma forma mais conveniente utilizando-se a igualdade primal-dual entre os problemas (III.3) e (III.4):

$$a(\hat{x}_1) = \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad (\text{III.15})$$

Subtraindo-se (III.15) de ambos os lados da restrição (III.13) obtém-se:

$$a - a(\hat{x}_1) \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) - \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad (\text{III.16})$$

$$a \geq a(\hat{x}_1) - \pi^i H_1 (x_1 - \hat{x}_1) \quad (\text{III.17})$$

É interessante observar que (III.17) pode ser interpretada como a expansão de Taylor de primeira ordem da função de custo do segundo estágio expressa em função das variáveis do primeiro estágio. O problema (III.14) pode ser reescrito utilizando-se (III.17) como:

$$\begin{aligned} z &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \tag{III.18}$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq a(\hat{x}_1) - \pi^i H_1(x_1 - \hat{x}_1) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Finalmente é possível demonstrar que o método converge mesmo que o subproblema do segundo estágio seja resolvido de maneira aproximada [35].

O algoritmo de decisões seqüenciais para o caso determinístico com dois estagios pode ser resumido nos seguintes passos:

(a) **Inicialização**

$$\underline{z} = 0$$

$$\bar{z} = \infty$$

(b) **Obtenção da estimativa do custo futuro**

Resolver (III.14) ou (III.18). Seja \hat{x}_1 a decisão de primeiro estágio e \underline{z} a estimativa para o custo do segundo estágio dada a partir da decisão \hat{x}_1 .

(c) **Cálculo do custo futuro associado à decisão \hat{x}_1**

Utilizando-se \hat{x}_1 , resolver (III.3). Seja \hat{x}_2 a decisão de segundo estágio e $a(\hat{x}_1)$ o valor ótimo da função objetivo.

(d) **Melhor solução obtida**

$$\bar{z} = \min (\bar{z}, c_1 x_1 + a(\hat{x}_1))$$

(e) **Teste de convergência**

Se $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância}$, **FIM**.

Caso contrário, incorporar a restrição violada expressa sob a forma de (III.13) ou (III.17) ao problema de primeiro estágio:

$$a \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad (\text{III.19})$$

onde π^i é o vetor de variáveis duais associado a solução de (III.3)

(f) **voltar para o passo b****III.2.4 Extensão para problemas multiestágio**

A extensão do algoritmo descrito acima para problemas determinísticos multiestágio é imediata. Na extensão do algoritmo para problemas multiestágio soluções primais (x_t) são passadas aos problemas associados a estágios subsequentes alterando o termo independente do problema associado ao estágio $t+1$; soluções duais (π_t) são calculadas no problema associado ao estágio $t+1$ e enviadas ao estágio t sob a forma de restrições que relacionam a variação marginal do custo de operação do estágio $t+1$ até o final do horizonte de planejamento com a variação marginal da solução primal fornecida pelo estágio t . A figura III.3 ilustra o conceito mostrado.

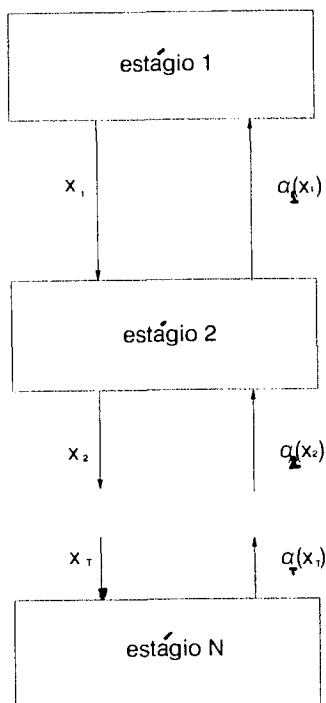


Figura III.3 — Esquema geral de decomposição do problema multiestágio

Existem diversas estratégias que podem ser aplicadas ao algoritmo geral para a solução do problema: a mais simples consiste em percorrer todos os estágios do primeiro até o estágio final, passando a solução primal de um estágio para o estágio subsequente. Uma vez atingido o estágio T , a direção é alterada e cortes são gerados para os estágios anteriores. Quando o estágio 1 for atingido, o ciclo é repetido até ser obtida a convergência do algoritmo. Uma outra possível estratégia consiste em passar as soluções primais e duais entre os subproblemas até um estágio pré-estabelecido nas primeiras iterações. Nas próximas iterações mais alguns estágios são considerados. Este processo é repetido até se alcançar o subproblema associado ao final do período de planejamento. Outras estratégias para a solução do problema multiestágio determinístico podem ser encontradas na referência [43].

Utilizando a estratégia descrita acima, o algoritmo para a solução do problema multiestágio pode ser representado pelos seguintes passos:

(a) **Inicialização**

T – Horizonte de Planejamento

$$\bar{z} = \infty$$

$$\underline{z} = 0$$

$$\tilde{\alpha}_t(x_t) = 0 \text{ para } t = 0, \dots, T$$

$$\hat{x}_0 = 0$$

onde $\tilde{\alpha}_t(x_t)$ é a aproximação corrente para a função de custo futuro dada uma decisão x_t no estágio t .

(b) **Simulação "forward"**

para $t = 1, \dots, T$

Resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{t-1}(\hat{x}_{t-1}) = & \min c_t x_t + \tilde{\alpha}_t(x_t) \\ \text{s.a.} & \end{aligned} \tag{III.20}$$

$$A_t x_t \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{t-1}$$

Seja \hat{x}_t , a solução de (III.20).

(c) **Melhor solução obtida**

$$\bar{z} = \min \left(\bar{z}, \sum_{t=1}^T c_t \hat{x}_t \right)$$

(d) **Simulação "backward"**

para $t = T, \dots, 1$

Calcular as soluções duais associadas ao problema de otimização:

$$\tilde{\alpha}_{t-1}(\hat{x}_{t-1}) = \begin{array}{ll} \min c_t x_t + \tilde{\alpha}_t(x_t) & \text{variável} \\ \text{s.a} & \text{dual} \end{array} \quad (\text{III.21})$$

$$A_t x_t \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{t-1} \quad \pi_t$$

A solução dual (π_t) é utilizada para a construção de mais um hiperplano suporte da função $\tilde{\alpha}_{t-1}(x_{t-1})$.

(e) **Cálculo da estimativa do custo de operação**

$$\underline{z} = c_1 x_1 + \tilde{\alpha}_1(x_1)$$

(f) **Teste de convergência**

Se $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância}$, **FIM**.

Caso contrário, incorporar a restrição violada expressa por (III.13) ou (III.18) ao problema associado ao estágio anterior e retornar para o passo b.

Como observação final sobre o problema multiestágio determinístico cabe observar que todos os subproblemas associados aos estágios são idênticos, à exceção do vetor de recursos e dos cortes gerados. Este fato pode ser utilizado para a construção de algoritmos mais eficientes que exploram esta característica.

III.3 Caso estocástico

O problema de otimização de recursos estocásticos com horizonte finito pode ser formulado matematicamente através de:

$$\min c_1 x_1 + \underset{B_2}{E} \min (c_2 x_2 + \underset{B_3}{E} \min (c_3 x_3 + \underset{B_4}{E} \min (c_4 x_4 + \dots \min c_T x_T)))$$

s.a

$$\begin{aligned} A_1 x_1 & \geq B_1 \\ H_1 x_1 + A_2 x_2 & \geq B_2 \\ H_2 x_2 + A_3 x_3 & \geq B_3 \\ & \vdots \\ H_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T & \geq B_T \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

onde as matrizes de restrições A_t , H_t e o vetor c_t são variáveis determinísticas e o vetor B_t é um vetor aleatório com densidade de probabilidade conhecida. Considerando as variável aleatória B_t discreta com um número finito de realizações com probabilidades conhecidas, pode-se reescrever este problema utilizando-se o problema determinístico equivalente mostrado a seguir:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \sum_{i=1}^{K_2} p_{i,2} c_2 x_{i,2} + \sum_{i=1}^{K_3} p_{i,3} c_3 x_{i,3} + \dots + \sum_{i=1}^{K_T} p_{i,T} c_T x_{i,T}$$

s.a

$$\begin{aligned} A_1 x_1 & \geq B_1 \\ H_1 x_1 + A_2 x_{1,2} & \geq B_{i,2} & i = 1, \dots, K_2 \\ H_2 x_{a(i,3)} + A_3 x_{i,3} & \geq B_{i,3} & i = 1, \dots, K_3 \\ & \vdots \\ H_{T-1} x_{a(i,T)} + A_T x_{i,T} & \geq B_{i,T} & i = 1, \dots, K_T \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

onde:

- k_t Número de nós do estágio t
- $p_{i,t}$ Probabilidade associada a realização $B_{i,t}$
- $a_{(i,t)}$ Nó predecessor do nó i no estágio t
- $B_{i,t}$ i -ésima realização do vetor aleatório B_t

O problema (III.23) pode ser visualizado através da árvore de cenários mostrada abaixo.

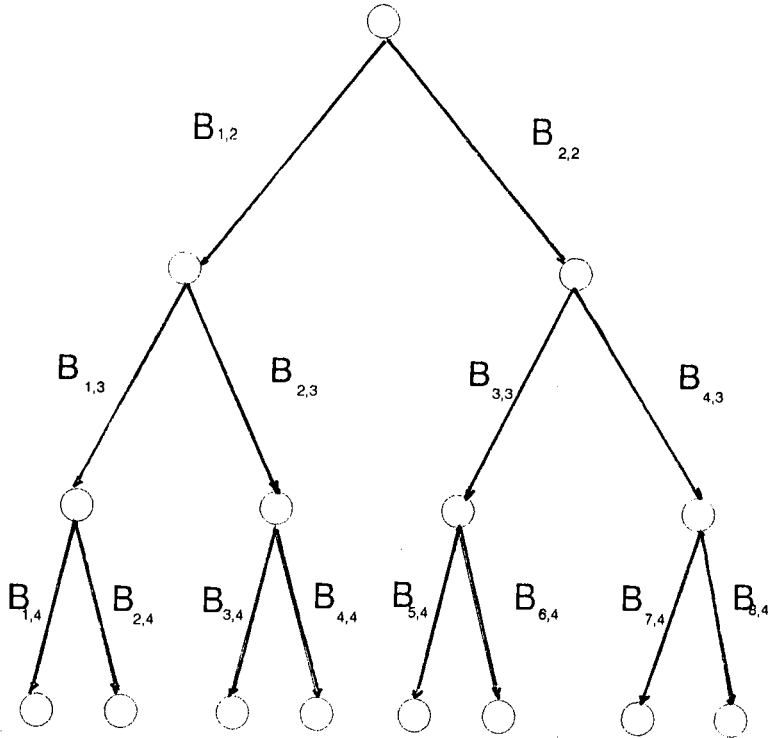


Figura III.4 – Árvore de cenários

Os ramos da árvore estão associados às possíveis realizações do vetor aleatório B_t ; os nós da árvore estão associados às decisões em um dado estágio para os cenários com as mesmas realizações até o estágio t . Para o problema de operação estocástica de um sistema multireservatório, o vetor $B_{i,t}$ corresponde ao vetor de afluências, enquanto as decisões $x_{i,t}$ correspondem ao volume armazenado nos reservatórios do sistema ao final do período t .

III.3.1 Esquema de decomposição

Como foi visto no item anterior, o algoritmo básico decompõe o problema multiestágio em uma seqüência de subproblemas de um único estágio, representando as restrições operacionais de cada estágio e utilizando uma

aproximação linear por partes da função de valor esperado do custo de operação. A extensão do algoritmo para problemas estocásticos será ilustrada através de um problema de otimização de dois estágios.

$$\begin{array}{ll}
 \min c_1 x_1 + p_1 c_2 x_{2,1} + p_2 c_2 x_{2,2} + \dots + p_m c_2 x_{2,m} & \text{variáveis} \\
 & \text{duais} \\
 \text{s.a} & \text{(III.24)} \\
 \\
 A_1 x_1 \geq B_1 & \pi_1 \\
 H_1 x_1 + A_2 x_{2,1} \geq B_{2,1} & \pi_{2,1} \\
 H_1 x_1 \quad + A_2 x_{2,2} \geq B_{2,2} & \pi_{2,2} \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 H_1 x_1 \quad \quad \quad + A_2 x_{2,m} \geq B_{2,m} & \pi_{2,m}
 \end{array}$$

O problema (III.22) pode ser interpretado da seguinte forma: no primeiro estágio é tomada a decisão \hat{x}_1 . Dada esta decisão é possível desacoplar o problema de segundo estágio em m subproblemas:

$$\begin{array}{ll}
 a_{1,j}(\hat{x}_1) = & \min c_2 x_{2,j} \\
 \text{s.a} & \\
 A_2 x_{2,j} \geq B_{2,j} - H_1 \hat{x}_1 & j = 1, \dots, m \quad \text{(III.25)}
 \end{array}$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de primeiro estágio ($c_1 x_1$) e o valor esperado dos custos associados ao segundo estágio. O valor esperado do custo futuro de operação dada a decisão \hat{x}_1 , associada ao primeiro estágio, pode ser representado por:

$$E(a_1(\hat{x}_1)) = \sum_{j=1}^m p_j a_{1,j}(\hat{x}_1) \quad \text{(III.26)}$$

Como (III.13) e (III.17), as restrições violadas na solução corrente do problema relaxado podem ser expressas por:

$$\alpha \geq E(\pi^i B_2) - E(\pi^i) H_1 x_1 \quad \text{(III.27)}$$

ou

$$a \geq E(a(\hat{x}_i)) - E(\pi^i) H_1(x_i - \hat{x}_i) \quad (\text{III.28})$$

onde:

i é o i -ésimo hiperplano suporte gerado

$$E(\pi^i) = \sum_{j=1}^m p_j \pi_{2,j}^i$$

III.3.2 Algoritmo I

A extensão para o algoritmo estocástico multiestágio é imediata. A seguir será mostrado o algoritmo básico para este caso.

(a) **Inicialização:**

T – horizonte de planejamento

$$\underline{z} = 0$$

$$\bar{z} = \infty$$

$$\tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) = 0 \quad \text{para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, K_t$$

(b) **Simulação "forward"**

para $t = 1, \dots, T$

para $i = 1, \dots, K_t$

Resolver o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_t x_{i,t} + \tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) \\ \text{s.a} \quad & A_t x_{i,t} \geq B_{i,t} - H_{t-1} \hat{x}_{a(i,t)} \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

(c) **Calcular o valor esperado de \bar{z} :**

$$\bar{z} = \min(\underline{z}, \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{K_t} p_{i,t} c_t x_{i,t})$$

(d) **Simulação "backward"**para $t = T, \dots, 1$ para $i = 1, \dots, K_t$

Calcular as soluções duais associadas ao seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \min c_t x_{i,t} + \tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) & \text{variável} \\ \text{s.a} & \text{dual} \end{array} \quad (\text{III.30})$$

$$A_t x_{i,t} \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{a(i,t)} \quad \pi_{i,t}$$

(e) **Cálculo do valor esperado dos multiplicadores simplex**

$$E(\pi_{i,t}) = \sum_{i=1}^{k_t} p_{i,t} \pi_{i,t}$$

O valor $E(\pi_{i,t})$ será utilizado para a construção de mais um hiperplano suporte para a função de valor esperado do custo futuro.

(f) **Cálculo da estimativa inferior do valor esperado do custo de operação**

$$\underline{z} = c_1 \hat{x}_1 + \tilde{\alpha}_1(\hat{x}_1)$$

(g) **Teste de convergência:**

Se $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância FIM}$.

Caso contrário incorporar mais um hiperplano suporte à função de valor esperado do custo futuro e retornar para o passo b.

O algoritmo para a solução de problemas multiperíodo estocásticos utiliza a estratégia de resolver os subproblemas associados aos estágios em seqüência

iniciando no estágio 1 até atingir o estágio T . Uma vez o estágio T sendo atingido, o algoritmo evolui gerando cortes do estágio T até atingir o estágio 1.

Pode-se utilizar outras estratégias para tentar melhorar a convergência do algoritmo. Por exemplo, verificando-se que o esforço computacional é crescente com o número do estágio (ver Figura III.3), é possível alterar o algoritmo básico (especificamente os passos b e d) da seguinte maneira:

Após resolver-se todos os problemas associados ao estágio t .

- i) Volta-se a resolver os problemas associados ao estágio $t-1$, indo para o estágio $t+1$ apenas quando não for possível gerar novas restrições.
- ii) Resolve-se os problemas associados ao estágio $t+1$, e posteriormente os problemas associados ao estágio t com os novos cortes gerados, retornando ao estágio $t+1$ com as novas soluções primais, repetindo-se o processo até não ser possível obter novas soluções primais.

O algoritmo mostrado acima para a solução de problemas multiperíodo estocástico torna-se computacionalmente inviável mesmo para problemas de dimensões não muito elevadas; por exemplo, supondo um horizonte de planejamento de 20 períodos e uma abertura da árvore igual a 5 (3 cenários por período), tem-se 9.54×10^{13} subproblemas a resolver por iteração. No próximo item será mostrado um algoritmo chamado de programação dinâmica dual estocástica [6] que tem por objetivo eliminar a relação combinatória entre o número de cenários e estágios.

III.3.3 Algoritmo II: Programação Dinâmica Dual Estocástica

O algoritmo de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) [6], para evitar a explosão combinatória entre cenários e estágios, propõe que o valor esperado do custo de operação seja estimado utilizando-se uma simulação Monte-Carlo para uma amostra de cenários. O método de Monte Carlo [65] é uma forma de estimar estatísticas de interesse em um sistema qualquer a partir da análise do desempenho do sistema para estados de uma amostra aleatória do espaço de estados. No algoritmo de programação dinâmica dual estocástica, o método de Monte Carlo permite estimar o valor esperado do custo de operação a partir de uma amostra aleatória de afluências as usinas do sistema.

O método de Monte—Carlo, dada uma amostra de ns cenários, estima o valor esperado do custo de operação através de:

$$\bar{z} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} z_i \quad (\text{III.31})$$

onde z_i é o custo total de operação para o cenário i , dado por:

$$z_i = \sum_{t=1}^T c_t \hat{x}_{i,t} \quad (\text{III.32})$$

A estimativa \bar{z} é uma variável aleatória com distribuição normal de média igual ao valor esperado do custo de operação e variância igual a:

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^{ns} (\bar{z} - z_i)^2 \quad (\text{III.33})$$

Na apresentação do algoritmo de programação dinâmica dual estocástico será assumido que:

- i) Os vetores B_t são variáveis aleatórias independentes.
- ii) Cada vetor B_t será discretizado em nd_t cenários com uma probabilidade dada por $p_{t,j}$ $j = 1, \dots, nd_t$.

Representando—se as afluências como variáveis aleatórias independentes, a função de valor esperado do custo futuro não depende do cenário $j = 1, \dots, nd_t$. Em outras palavras pode—se construir uma única aproximação da função de custo futuro em cada estágio. Portanto cada recursão "backward" gera um segmento linear adicional que é válido para todos os cenários do estágio anterior e não só para o cenário predecessor. O resultado acima pode ser estendido para qualquer modelo estocástico de vazões do tipo autoregressivo.

O algoritmo de programação dinâmica dual é semelhante ao algoritmo de programação estocástica multiperíodo mostrado no item anterior, alterando—se apenas a obtenção do valor esperado do custo de operação, que no PDDE é

estimado através de uma amostra de cenários, e modelado com uma variável aleatória com distribuição normal e média e variância dadas respectivamente por (III.31) e (III.32).

O algoritmo de PDDE é implementado através de:

(a) **Inicialização**

$$\bar{z} = \omega$$

$$\underline{z} = 0$$

para $i = 1, \dots, ns$

para $t = 1, \dots, T$

$$\tilde{\alpha}_t(x_{i,t}) = 0$$

(b) **Simulação "forward"**

para $t = 1, \dots, T$

para $i = 1, \dots, ns$

sortear um vetor B_{ti}

resolver o problema de otimização:

$$\min c_t x_{t,i} + \tilde{\alpha}_t(x_{t,i})$$

s.a

$$A_t x_{t,i} \geq B_{ti} - H_t \hat{x}_{t-1,i}$$

(III.34)

(c) **Cálculo da estimativa de \bar{z} e a incerteza associada.**

$$\bar{z} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{ns} c_t \hat{x}_{i,t} \quad (III.35)$$

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{ns^2} \sum_{t=1}^{ns} (\bar{z} - z_i)^2 \quad (III.36)$$

(d) **Simulação "backward"**

para $t = T, \dots, 1$

para $i = 1, \dots, ns$

para $j = 1, \dots, nd$

Resolver o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll}
 \min c_t x_{t,i} + \tilde{\alpha}_t(x_{t,i}) & \text{variável} \\
 \text{s.a} & \text{dual} \\
 A_t x_{t,i} \geq B_{tj} - H_{t-1} \hat{x}_{t-1,i} & \pi_{t-1,i,j}
 \end{array} \tag{III.37}$$

(e) **Cálculo do valor esperado de $\pi_{t-1,i}$.**

$$E(\pi_{t-1,i}) = \sum_{j=1}^{nd} p_t \pi_{t-1,i,j} \tag{III.38}$$

O valor de $E(\pi_{t-1,i})$ será utilizado para a construção do hiperplano suporte para a função objetivo.

(f) **Cálculo da estimativa do custo de operação.**

$$z = c_1 x_1 + \tilde{\alpha}_1(x_1)$$

(g) **Teste de convergência.**

O teste de convergência será detalhado a seguir. Caso o problema não tenha convergido é incorporado mais um hiperplano suporte a aproximação da função valor esperado do custo futuro e retorna-se ao passo d. Caso contrario, **FIM**.

III.3.2.1 Teste de convergência

No algoritmo de PDDE, o valor esperado do custo de operação e a incerteza deste índice são estimados através de uma simulação Monte-Carlo. Utilizando essas informações é possível obter um intervalo de confiança para o valor de \bar{z} (população), por exemplo para um intervalo de confiança de 95%. O valor de

população está compreendido no intervalo $[\bar{z} - 1.96\sigma_{\bar{z}}, \bar{z} + 1.96\sigma_{\bar{z}}]$.

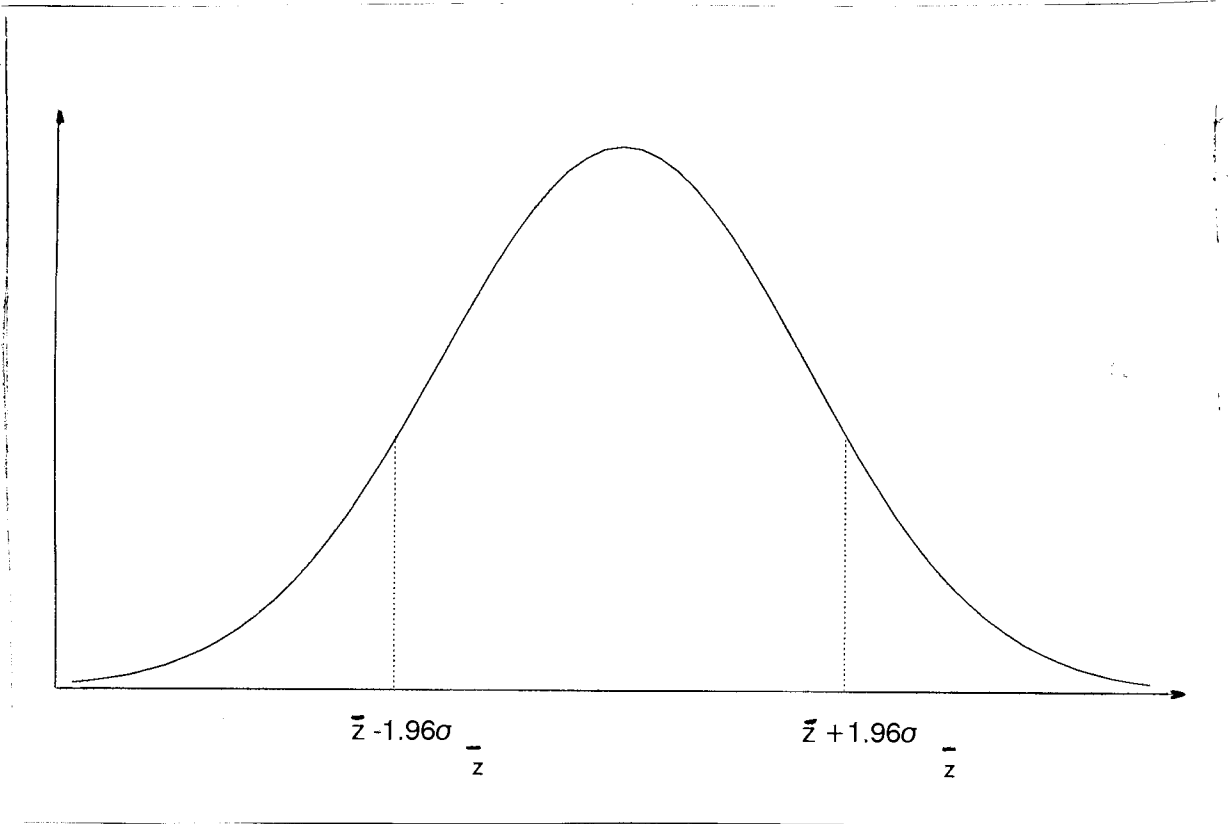


Figura III.5 – Distribuição de \bar{z} .

O critério de convergência mostrado não depende do grau de precisão da função aproximada de valor esperado do custo futuro (a_t). Pode-se incorporar esta informação ao processo de convergência através de um critério constituído por dois passos

(i) O valor da função aproximada do custo esperado de operação (z) deve estar dentro do intervalo de confiança de \bar{z} .

(ii) A diferença entre as estimativas de z e \bar{z} entre duas iterações consecutivas for menor que uma determinada tolerância.

III.3.2.1 Extensão para Modelos Autoregressivos

É possível representar processos estocásticos nos quais a distribuição de probabilidade de B_t é condicionada pelas realizações dos estágios anteriores $t-1, \dots, t-p$. Supondo, por exemplo, um modelo autoregressivo de ordem p .

$$B_t = \sum_{i=1}^p R_i B_{t-i} + \epsilon_t \quad (\text{III.39})$$

onde:

- p Ordem do modelo autoregressivo
- R_i Matriz de coeficientes de regressão de ordem i
- ϵ_t Vetor de ruídos com distribuição normal de média nula e desvio padrão 1.

Para a representação de processos autoregressivos, as seguintes modificações devem ser introduzidas no algoritmo descrito no item anterior.

- i) Discretização do vetor de ruídos em ns cenários para a simulação forward e cálculo de B_t utilizando a equação (III.39).
- ii) Alteração da função aproximada de custo futuro que passa a depender dos valores de afluências anteriores e da discretização do vetor de ruídos.

CAPÍTULO IV INCLUSÃO DA REDE DE TRANSMISSÃO

IV.1 Introdução

Será mostrado neste capítulo a incorporação das restrições da rede elétrica ao problema de operação estocástica de um sistema multireservatório. O algoritmo de solução baseia-se na técnica de programação dinâmica dual mostrada no capítulo anterior. Como foi visto anteriormente, neste algoritmo o problema multiestágio é decomposto em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. Incorporando-se as restrições da rede elétrica, cada subproblema passa a ser constituído por restrições provenientes do problema energético (balanço hídrico, limites de armazenamento nos reservatórios, limites de turbinamento nas usinas do hidroelétricas, atendimento a demanda de energia etc), por restrições do sistema elétrico (conservação de energia, segunda lei de Kirchhoff, limites de fluxos em circuitos etc) e por restrições relacionadas ao nível de segurança do sistema.

Cada subproblema de um único estágio é um problema de grande porte mesmo para sistemas elétricos de pequenas dimensões. O algoritmo proposto para a solução de cada subproblema é decomposto em duas fases.

Na primeira fase (**subproblema energético**) são representadas as usinas hidroelétricas de maneira detalhada, as usinas térmicas são agrupadas por classes de mesmo custo de combustível e é representada uma única barra onde é consumida a demanda de energia do sistema. Em outras palavras, nesta fase não são representadas as restrições provenientes da rede elétrica.

Na segunda fase (**subproblema elétrico**), o despacho de geração obtido na fase anterior é modificado para eliminar eventuais violações nas restrições de transmissão. O ponto de operação obtido na segunda fase pode ainda ser alterado para se obter um ponto de operação seguro, no qual o desempenho do sistema elétrico é analisado de maneira que ocorrendo um distúrbio qualquer seja ainda possível continuar atendendo completamente a demanda.

IV.2 Formulação matemática

O algoritmo PDDE decompõe o problema multiestágio em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. Supondo conhecida a afluência no início do estágio t e utilizando um modelo linear para representar a rede de transmissão, cada subproblema pode ser formulado através de:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t(\hat{x}_{t-1}) = \min & \sum_{i \in nb} (c_i g_{i,t} + w_i r_{i,t}) + a_{t+1} \\ \text{s.a} & \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

(a) equações de balanço hídrico:

$$v_{t+1} + q_t + s_t - M(q_t + s_t) = v_t + a_t$$

(b) limites de armazenamento:

$$0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v}$$

(c) limites de turbinamento:

$$0 \leq q_t \leq \bar{q}$$

(d) conservação de fluxo:

$$A f_t + g_t + \rho q_t + r_t = d_t$$

(e) representação da admitância:

$$f_t = \Gamma A^t \theta_t$$

(f) limites de fluxo:

$$|f_t| \leq \bar{f}_{ij}$$

(g) **limites de corte de carga:**

$$r_t \leq d_t$$

(h) **função aproximada de custo futuro:**

$$a_{t+1} \geq E(\pi_t^i B_{t+1}) - E(\pi_t^i) H_t x_t \quad i = 1, \dots, r$$

onde:

nb	Conjunto de barras
r	Número de hiperplanos suportes da função de custo futuro
w_i	Penalidade por não atendimento a demanda da barra i

Na equação de balanço hídrico (restrição a), o volume armazenado ao final do estágio $t-1$ (v_t) foi colocado a direita da igualdade para enfatizar que este é um recurso que o estágio anterior fornece ao estágio corrente.

Na função aproximada de custo futuro (restrição h), o termo x_t corresponde ao volume armazenado ao final do estágio t (v_{t+1}), enquanto o termo E_t refere-se ao coeficiente desta variável na restrição de balanço hídrico, que é igual a 1. A restrição h pode ainda, ser expressa de uma forma alternativa, conforme mostrado no capítulo III, por:

$$a_{t+1} \geq E(a_{t+1}(v_{t+1}^i)) - E(\pi_{h,t+1}^i) (v_{t+1} - v_{t+1}^i) \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{IV.2})$$

Onde: $E(\pi_{h,t+1}^i)$ é o vetor contendo os valores esperados das variáveis duais associadas às equações de balanço hídrico no estágio $t+1$.

Adicionalmente às restrições (a-h), pode-se ainda incorporar as restrições de segurança representadas por:

$$A^k f^k + g = d$$

$$f^k - \Gamma^k (A^k)^t \theta^k = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$|f_t^k| \leq \bar{f} \quad \text{para } k \in K$$

Onde K é o conjunto de contingências representadas.

O subproblema (IV.1) é um problema de programação linear de grande porte podendo ser solucionado por algoritmos convencionais de programação linear. Entretanto, algoritmos que tomam partido da estrutura particular do problema permitem uma redução do esforço computacional. A metodologia proposta consiste em decompor o subproblema de operação em duas fases.

- Na primeira fase (subproblema energético), são representadas as usinas hidroelétricas de maneira detalhada, as usinas térmicas são agrupadas em classes de mesmo custo de operação e a demanda concentrada em uma única barra. Em outras palavras, inicialmente verifica-se a viabilidade energética do subproblema associado a um estágio, relaxando-se as restrições de transmissão. O problema resultante, à exceção de algumas poucas restrições, possui uma estrutura de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas. O algoritmo de solução é baseado em um algoritmo de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais.

- Na segunda fase (subproblema elétrico), o despacho de geração obtido na fase anterior é modificado para eliminar eventuais violações nas restrições de transmissão. O ponto de operação obtido na segunda fase pode ser alterado para se obter um ponto de operação seguro, no qual o desempenho do sistema elétrico é analisado de maneira que ocorrendo um distúrbio qualquer seja ainda possível continuar atendendo completamente à demanda. No subproblema elétrico, a rede de transmissão é representada por um modelo linear como mostrado no capítulo II, e é solucionado através de um algoritmo de fluxo de potência ótimo linearizado. A técnica de solução baseia-se em programação linear e toma partido das características particulares deste tipo de problema.

IV.3 Subproblema energético

O subproblema energético pode ser formulado como:

$$a_t(v_t) = \min \sum_{i \in nb} (c_i g_{i,t}) + w_t r_t$$

s.a

$$v_{t+1} + a_t + q_t + s_t - M(q_t + s_t) = v_t + a_t \quad (\text{IV.4.1})$$

$$0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v} \quad (\text{IV.4.2})$$

$$0 \leq q_t \leq \bar{q} \quad (\text{IV.4.3})$$

$$\sum_{i \in n} \rho_i q_{i,t} + \sum_{j \in nb} g_{j,t} + r_t = d_t \quad (\text{IV.4.4})$$

A restrição (IV.4.4) corresponde ao atendimento a demanda agrupando-se todas as barras do sistema. As restrições do subproblema energético, à exceção da restrição (IV.4.4), podem ser representadas por um modelo de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas, como mostrado no capítulo II. Para tomar partido da estrutura de grafos das restrições (IV.2.1 a IV.2.3) é possível utilizar um esquema de partição de base [29] que tenta preservar esta estrutura nas bases associadas as iterações do algoritmo de programação linear.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.1 – Matriz base

As restrições associadas a fluxo em redes são agrupadas na parte superior da base, enquanto que as restrições não associadas a fluxo em redes são posicionadas na parte inferior da base. As variáveis relacionadas somente com as restrições "não-fluxo em redes" (geração térmica e corte de carga) são posicionadas à direita

das demais variáveis. As dimensões das submatrizes B , C , D , F são respectivamente $(m1 \times m1)$, $(m1 \times m2)$, $(m2 \times m1)$ e $(m2 \times m1)$, onde $m1$ é o número de restrições tipo fluxo em redes e $m2$ é o número de restrições sem a estrutura de fluxo em redes. Caso a submatriz B seja inversível é possível relacionar a inversa da matriz \bar{B} com a inversa da matriz B através de:

$$\bar{B}^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB & -B^{-1}CQ^{-1} \\ \hline -Q^{-1}DB & Q^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.2 – Matriz inversa de \bar{B}

$$\text{onde } Q = F - DB^{-1}C \tag{IV.5}$$

Como pode ser visto no anexo I, é possível demonstrar que sempre que a matriz B for inversível, a matriz Q também o será. Para obter a inversa de \bar{B} é necessário inverter as matrizes B e Q . A matriz B^{-1} pode ser obtida sem a utilização de operações matemáticas de ponto flutuante, usando-se apenas algoritmos para determinação de caminhos em uma árvore. A matriz Q^{-1} é uma matriz densa, porém de menor dimensão $(m2 \times m2)$, permitindo uma redução do esforço computacional. Em outras palavras, a eficiência computacional deste método depende da relação entre o número de restrições de fluxo em redes e as restantes. Por exemplo, no subproblema energético a cada estágio existem N nós e $3 \times N$ ramos no problema de fluxo em redes (correspondentes as equações de balanço de água e variáveis de armazenamento, turbinamento e vertimento) e uma única restrição adicional associada ao atendimento à demanda neste estágio..

O ponto chave do algoritmo consiste em manter a base B inversível. O procedimento adotado consiste em:

Supondo que a base B inicial seja inversível e que uma variável básica (i) associada a B seja removida da base. Alguma outra variável deve substituir a variável i para manter a estrutura da matriz B . Seja j uma coluna da matriz C linearmente independente das colunas restantes de B . As colunas i e j podem ser trocadas mantendo a matriz B inversível. No anexo demonstra-se que caso não exista nenhuma coluna em C linearmente independente das colunas restantes de B , a variável que entra na base manterá a inversibilidade de B . Uma descrição

