

**MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES
PARA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA**

Roberto Quirino do Nascimento

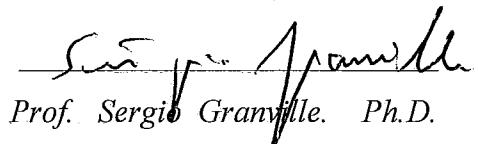
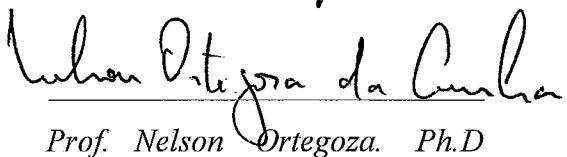
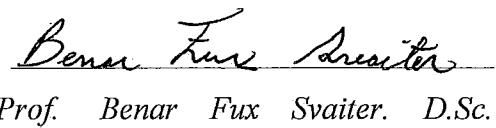
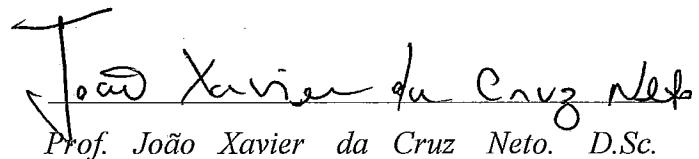
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Prof. Paulo Roberto Oliveira. Dr.Ing

(Presidente)


Prof. Sergio Granville. Ph.D.
Prof. Nelson Ortega da Cunha
Prof. Nelson Ortega da Cunha. Ph.D
Prof. Benar Fux Svaiter.
Prof. Benar Fux Svaiter. D.Sc.
Prof. João Xavier da Cruz Neto.
Prof. João Xavier da Cruz Neto. D.Sc.

RIO DE JANEIRO. RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1996

NASCIMENTO, ROBERTO QUIRINO DO

Métodos de Pontos Interiores para Programação Geométrica

[Rio de Janeiro] 1996

VII, 74 p 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,

Engenharia de Sistemas e Computação, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Otimização 2. Programação Geométrica

I. COPPE/UFRJ II. TÍTULO (série)

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências(D. Sc.)

MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES
PARA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

Roberto Quirino do Nascimento
AGOSTO, 1996

Orientador: Prof. Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Programação Geométrica é um dos ramos da Programação Matemática que tem sido bastante pesquisada devido às aplicações em várias áreas de engenharia, economia e a propriedades dos problemas Primal e Dual.

Neste trabalho resolvemos o problema de Programação Geométrica à luz da metodologia de pontos interiores, mais especificamente, apresentamos uma abordagem para o problema na qual é feita uma parametrização do par primal-dual. O objetivo é obtermos um ponto de acumulação da sequência gerada por uma variante do método de Newton, utilizado para resolver o sistema de equações não lineares de Karush-Kuhn-Tucker do problema parametrizado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science(D. Sc.)

**INTERIOR POINTS METHODS
FOR GEOMETRIC PROGRAMMING**

Roberto Quirino do Nascimento
AUGUST, 1996

Thesis Supervisor: Prof. Paulo Roberto Oliveira

Program: Engineering Systems and Computacion

Geometric Programming is one of the branches of Mathematical Programming which can be applied to several areas of Engineering and Economics, due to the Primal and Dual problems properties.

In this work we present a solution to the Geometric Programming problem under the approach of the interior points, that is to say, we present an approach in which a parametrization of the primal-dual problem is carried out. Our main goal is to obtain an accumulation point of the sequence yielded by a variant of the Newton method, as it is used in order to solve the non-linear equations sistem given by the Karush-Kuhn-Tucker equations of the parametrized problem.

Agradecimentos

Ao Professor e amigo Paulo Roberto pela orientação neste trabalho e pelo incentivo.

Aos colegas Alfredo, Joaquim Feitosa, Marcus Augusto, Orizon, Turíbio e Xavier pelos momentos de lazer e pelo apoio nas dificuldades.

Aos professores Adilson Xavier, Sérgio Granville e Suzana Makler pelas sugestões e pelo apoio.

Ao Prof. Clovis Gonzaga pela atenção e pelas referências bibliográficas

Ao Prof. Alfredo Iusen pelo incentivo, pelas sugestões e pela oportunidade de participar do grupo de Otimização do IMPA.

Aos colegas Benar, Regina, Mauricio e Luis pelo incentivo.

À colônia paraibana: Pereira, Mariano, Charles, João Alves, Lucília e Luiz Gabriel pela acolhida e por trazerem a Paraíba para mais perto.

À Rosângela Ivan Arthur e Heloisa Maria por tudo.

Aos colegas do Departamento. de Estatística da Universidade Federal da Paraíba por terem assumido minha carga horária neste periodo e pelo incentivo.

Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE.

Aos membros da banca examinadora desta tese.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ainda que eu falasse
as línguas dos homens e dos anjos,
e conhecesse todos os misterios e todas as ciências,
se não tivesse amor, eu nada seria.

Coríntios 13

Sumário

Capítulo I: Fundamentos de Programação Geométrica

1.1	Introdução.....	1
1.2	O Problema de Programação Geométrica.....	2
1.3	Teoria de Dualidade em Programação Geométrica.....	3
1.4	Algumas Propriedades dos Problemas Primal e Dual.....	7
1.4.1	Sobre o Problema Dual e a função $\log(u(x))$	9

Capítulo II: Métodos de Pontos Interiores

para Programação Geométrica

2.1	Introdução.....	13
2.2	Sobre a Complexidade Polinomial em Programação Geométrica.....	14
2.3	O Método Afim-Escala Dual de Kortaneck e No.....	18
2.3.1	O Algorítmo de Kortaneck e No.....	20
2.3.2	Análise da Convergência do Algorítmo.....	20
2.4	Um Método de Pontos Interiores Inviáveis para Resolver os Problemas Primal e Dual de Programação Geométrica.....	21

Capítulo III: Um Método de Pontos Interiores Inviáveis

para Programação Geométrica

3.1	Introdução.....	26
3.2	Sobre o Problema de Complementaridade Não Linear Misto Associado ao par Primal-Dual de Programação Geométrica.....	26
3.3	O Problema de Programação Geométrica Parametrizado.....	38
3.4	Um Algorítmo de Pontos Interiores Inviáveis para Programação Geométrica.....	42

Apêndice: Experiência Computacional 47

Referências Bibliográficas 71

Capítulo I

Fundamentos de Programação Geométrica

1.1 Introdução

Ao iniciarmos este trabalho achamos importante fazer uma breve dissertação do problema de Programação Geométrica relatando resultados teóricos tais como os teoremas de dualidade fraca e dualidade forte; também apresentamos algumas propriedades relevantes da função objetivo dual, etc. Do ponto de vista computacional apresentamos alguns dos diversos métodos que foram utilizados para resolver o problema de Programação Geométrica ressaltando suas dificuldades e vantagens.

Programação Geométrica é um dos ramos da Programação Matemática que procura minimizar uma função de custo que pode ser vista como um “polinômio generalizado”, que consiste de uma soma de termos onde cada termo é um produto de uma constante positiva e das variáveis do modelo elevadas a potências arbitrárias.

Programação Geométrica tem sua origem em 1961 quando C. Zener [41] e R.J. Duffin [10] estudaram o problema de otimizar polinômios generalizados. Com o objetivo de determinar condições de otimalidade e propriedades das soluções ótimas, C. Zener e R.J. Duffin utilizaram desigualdades ao invés da abordagem clássica das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Uma das desigualdades usadas em seus estudos foi a clássica desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, dando origem ao termo “Programação Geométrica”. Em 1963 E.L. Peterson [11] um aluno de R.J. Duffin, generalizou a teoria para o problema de Programação Geométrica com restrições. Surgiu então este novo ramo da otimização.

1.2 O Problema de Programação Geométrica

O problema Primal de Programação Geométrica (GP) consiste em:

$$\text{Minimizar } g_0(t)$$

$$\text{Sujeito a: } g_k(t) \leq 1 \quad k = 1, \dots, p \quad (1.2.1)$$

$$t \in \mathbf{R}_{++}^m \quad (1.2.2)$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (1.2.3)$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (1.2.4)$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = n_0 + 1, \quad m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, \quad n_p = n \quad (1.2.5)$$

os expoentes a_{ij} são constantes arbitrárias, os coeficientes c_i são positivos, as funções g_k são chamadas posinômios, os termos $c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$ são chamados termos posinomiais, n_0 é o número de termos posinomiais na função objetivo, n é o número de termos posinomiais existentes no problema e as variáveis t_j são as variáveis primas.

O problema Dual de Programação Geométrica (GD) consiste em:

$$\text{Maximizar } u(x)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i \in J[0]} x_i = 1 \quad (1.2.6)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = 0 \quad (1.2.7)$$

$$x \in \mathbf{R}_+^n \quad (1.2.8)$$

onde

$$u(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{x_i} \right)^{x_i} \cdot \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k} \quad (1.2.9)$$

$$\lambda_k = \sum_{i \in J[k]} x_i \quad (1.2.10)$$

e $J[k]$ é dado por (1.2.4).

Notação Afim de tornarmos u contínua fazemos $x_i^{x_i} = x_i^{-x_i} = 1$ se $x_i = 0$.

Observação: O chamado problema de Programação Geométrica Signomial consiste de uma formulação mais geral de Programação Geométrica, por exemplo quando $c_i < 0$ para algum i . Devido ao fato de que as metodologias que tiveram sucesso para resolver este tipo de problema baseiam-se na solução de uma sequência de problemas posinomiais, não trataremos daquele problema neste trabalho, para maiores detalhes ver referências [2] e [6], por exemplo.

1.3 Teoria de Dualidade em Programação Geométrica

Com o objetivo de obter uma teoria de dualidade em Programação Geométrica Duffin e Zener (ver ref.[12]) provaram o lema dado a seguir que é uma generalização da desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica.

Lema 1.1: (*Desigualdade Geométrica*). *Dados $u \in \mathbf{R}_{++}^n$ e $\delta \in \mathbf{R}_+^n$ temos que:*

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^\lambda \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \cdot \lambda^\lambda \quad (1.3.1)$$

onde

$$\delta^t = (\delta_1 \dots \delta_n) \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad \text{e} \quad \delta_i^{\delta_i} = \delta_i^{-\delta_i} = 1 \quad \text{se} \quad \delta_i = 0,$$

valendo a igualdade se e somente se $\delta = Bu$ com $B \geq 0$.

Prova: Ver ref. [12] pag. 110.

No problema de Programação Geométrica, fazendo

$$u_i = c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad i \in J[k] \quad (1.3.2)$$

e aplicando o lema 1.1 temos:

$$(g_k(t))^{\lambda_k} \geq \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_i(t)}{x_i} \right)^{x_i} \cdot \lambda_k^{\lambda_k} \quad (1.3.3)$$

logo

$$(g_0(t))^{\lambda_0} \cdot \dots \cdot (g_p(t))^{\lambda_p} \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{x_i} \right)^{x_i} \prod_{k=0}^p \lambda_k^{\lambda_k} \prod_{j=1}^m t_j^{\sum a_{ij} x_i}. \quad (1.3.4)$$

Suponhamos que t seja uma solução viável para o problema Primal (GP) e x seja uma solução viável para o problema dual; neste caso temos que as relações (1.2.1), (1.2.2), (1.2.6), (1.2.7) e (1.2.8) são satisfeitas e com isto podemos escrever a desigualdade (1.3.4) como

$$g_0(t) \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{x_i} \right)^{x_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k}. \quad (1.3.5)$$

Usando o lema 1.1 temos que a igualdade é válida se e somente se

$$x_i = \begin{cases} \frac{u_i(t)}{g_0(t)} & i \in J[0] \\ \lambda_k u_i(t) & i \in J[k] \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Veremos agora o relacionamento da desigualdade geométrica com a transformada de Legendre.

Definição 1.2: Dada $g: C \rightarrow \mathbf{R}$ uma função convexa contínua e diferenciável em $C \subseteq \mathbf{R}^n$ convexo. Seja $T \subset \mathbf{R}^n$ dado por:

$$T = \{y \in \mathbf{R}^n / y = \nabla g(x) \quad x \in C\}.$$

Seja $h: T \rightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$h(y) = g(x) - x^t y \quad (1.3.7)$$

h é denominada “transformada de Legendre” de g .

Observação: A função $h(x) = \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_i}{x_i} \right)^{\frac{x_i}{\lambda_k}} \cdot \lambda_k$ é a transformada de Legendre da função g_k dada em (1.2.3).

E.L. Peterson desenvolveu uma teoria de dualidade baseada na transformada de Legendre e funções conjugadas para Programação Geométrica, maiores detalhes (ver ref. [2] pag. 31).

Definição 1.3: Dizemos que o problema (Primal ou Dual) é consistente se existe pelo menos um ponto viável. O problema primal GP é dito superconsistente se existe:

$$t^* \in \mathbf{R}_{++}^m$$

tal que

$$g_k(t^*) < 1 \quad k = 1, \dots, p \quad (1.3.8)$$

O problema primal é dito subconsistente se para todo $\theta \in (0, 1)$ as restrições:

$$\theta g_k(t) < 1 \quad k = 1, \dots, p \quad (1.3.8)$$

são satisfeitas.

Teorema 1.4: (*Teorema de Dualidade Fraca em Programação Geométrica*). Suponha que o problema primal GP é superconsistente e que a função primal $g_0(t)$ atinge seu valor mínimo restrito em um ponto viável. Então:

- a) O problema Dual (GD) é consistente e a função dual $u(x)$ atinge seu valor máximo restrito em um ponto viável;

b) Se t^* e x^* são soluções ótimas dos problemas GP e GD respectivamente então

$$g_0(t^*) = u(x^*) \quad (1.3.9)$$

c) Se t' é uma solução ótima para o problema Primal existem multiplicadores de Lagrange não negativos μ'_k , $k = 1, \dots, p$ tais que a função Lagrangeana

$$L(t, \mu) = g_0(t) + \sum_{k=1}^p \mu'_k (g_k(t) - 1) \quad (1.3.10)$$

tem a seguinte propriedade:

$$L(t', \mu) \leq g_0(t') = L(t', \mu') \leq L(t, \mu') \quad (1.3.11)$$

para $t_j > 0$ e $\mu_k \geq 0$ arbitrários.

Além disso, a solução ótima do problema dual GD é dada por:

$$x_i = \begin{cases} c_i \prod_{j=1}^m t_j'^{a_{ij}} / g_0(t') & i \in J[0] \\ \mu'_k c_i \prod_{j=1}^m t_j'^{a_{ij}} / g_0(t') & i \in J[k] \end{cases} \quad (1.3.12)$$

$$\text{e } \lambda_k = \frac{\mu'_k}{g_0(t')}.$$

d) Se x' é uma solução ótima para o problema Dual GD existe uma solução ótima t' para o problema primal que satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$c_i \prod_{j=1}^m t_j'^{a_{ij}} = \begin{cases} x_i' u(x') & i \in J[0] \\ \frac{x_i'}{\lambda_k(x')} & i \in J[k] \end{cases} \quad (1.3.13)$$

Prova: Ver ref. [12].

Definição 1.5: Um problema de Programação Geométrica é dito canônico se o problema Dual GD possui uma solução \bar{x} tal que

$$\bar{x}_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

e \bar{x} satisfaz as restrições duais.

Teorema 1.6: (Dualidade forte em Prog. Geométrica).

Suponha que o problema é canônico e que o Primal (GP) é consistente. Então existe t^* tal que:

$$g_0^* = g_0(t^*)$$

onde

$$g_0^* = \min_{t \in X} g_0(t) \quad X = \{t/t_j > 0, \quad g_k(t) \leq 1\}$$

Prova: Ver ref. [12].

Definição 1.7: Chamamos grau de dificuldade de um problema de Programação Geométrica o número:

$$d = n - (m + 1) \quad (1.3.14)$$

onde n é o número de termos posinomiais e m é o número de variáveis primais.

1.4 Algumas Propriedades dos Problemas Primal e Dual

Nesta seção abordaremos algumas propriedades dos problemas primal e dual tais como convexidade, diferenciabilidade da função objetivo dual, etc.

Dado o posinômio

$$g(t) = \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad t_j > 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (1.4.1)$$

g pode não ser convexo. Um exemplo clássico de posinômio não convexo é

$$g(t) = t^{1/2}. \quad (1.4.2)$$

Como $t > 0$, fazendo a mudança de variáveis

$$t_j = e^{w_j} \quad w_j \in \mathbf{R} \quad (1.4.3)$$

o posinômio g será escrito como:

$$g(z) = \sum_{i=1}^n c_i e^{z_i} \quad (1.4.4)$$

$$z_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j$$

A função g dada em 1.4.4 é convexa.

O problema Primal de Programação Geométrica Separável (SPGP) é dado por:

$$\text{Minimize } g_0(z)$$

$$\text{Sujeito a: } g_k(z) \leq 1 \quad k = 1, \dots, p \quad (1.4.5)$$

$$z_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4.6)$$

onde

$$g_k(z) = \sum_{i \in J[k]} c_i e^{z_i} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (1.4.7)$$

e o conjunto $J[k]$ é dado em (1.2.4).

Definição 1.8: Dada $f: C \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ dizemos que f é separável se f pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (1.4.8)$$

onde f_i está definida em $C_i \subseteq \mathbf{R}$.

O problema SPGP é um problema separável convexo e possui dois tipos de restrições:

- restrições não lineares dadas por (1.4.5)
- restrições lineares dadas por (1.4.6)

Ao observarmos o problema GP podemos verificar que, pelo fato das variáveis serem estritamente positivas, o conjunto de soluções pode não ser compacto; nesse caso é possível que apenas um ínfimo seja determinado, é o caso dos problemas não canônicos ou degenerados. Quanto ao problema SPGP, apesar de ser um problema convexo e separável, apenas dois algoritmos foram desenvolvidos para esta formulação, um dos quais é o algoritmo diferencial de Beightler e Philips, ver ref. [6]. Mais recentemente com o desenvolvimento da metodologia dos métodos de pontos interiores, Nemirovski e Nesterov, ver refs. [33] [34], desenvolveram os métodos de barreira logarítmica, que possuem convergência polinomial, desde que seja satisfeita uma condição chamada “auto-concordância”; esta condição é satisfeita pela função barreira logarítmica associada ao problema SPGP. Veremos mais detalhes deste método no Capítulo II. Com o objetivo de resolver o problema GP diretamente os métodos mais explorados foram os métodos de planos de corte e linearização sequencial, que se mostram eficientes apenas ao resolver pequenos problemas (ver ref. [2] pag. 227).

1.4.1 Sobre o Problema Dual e a função $\log(u(x))$

Consideremos a função $u(x)$ em 1.2.9. Seja

$$f(x) = \log(u(x)) \quad (1.4.9)$$

Vejamos algumas propriedades de f :

a) f é côncava;

b) Se $\lambda_0 = 1$

$$\text{i}) \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \alpha > 0 \quad (1.4.10)$$

$$\text{ii}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \log\left(\frac{c_i \lambda_k}{x_i}\right) \quad i \in J[k] \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (1.4.11)$$

$$\text{iii}) \quad f(x) = x^t \nabla f(x) - \text{ Identidade de Euler} \quad (1.4.12)$$

c) A matriz Hessiana de f é da forma bloco diagonal:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} H_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_p \end{bmatrix} \quad (1.4.13)$$

onde

$$H_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_0} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{x_{n_0}} \end{bmatrix} \text{ e } H_k = \begin{bmatrix} (\lambda_k^{-1} - x_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \cdots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - x_{m_k+1}^{-1}) & \cdots & \lambda_k^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \cdots & (\lambda_k^{-1} - x_{n_k}^{-1}) \end{bmatrix} \quad (1.4.14)$$

Ao compararmos os problemas GP, SPGP e GD observamos que o problema GP possui o menor número de variáveis, mas pode não ser um problema convexo, isto é, algumas das funções g_k , $k = 0, \dots, p$ podem não ser convexas; o problema SPGP que é separável e convexo possui $n + m$ variáveis e dois tipos de restrições; e o problema dual GD possui n variáveis, e suas restrições são lineares. A função f (1.4.9) é côncava e possui as mesmas soluções ótimas; no entanto existem duas dificuldades: a primeira é o fato de que f não é diferenciável em qualquer vetor que tenha uma coordenada nula, a outra dificuldade é a conversão da solução ótima dual para a solução ótima primal, ver ref. [12].

Com o objetivo de obter a diferenciabilidade da função f dada em (1.4.9) a primeira estratégia utilizada foi acrescentar ao problema dual a restrição

$$x_i \geq \varepsilon \quad (1.4.15)$$

com ε positivo suficientemente pequeno. Esta estratégia assegura a diferenciabilidade mas pode trazer problemas computacionais uma vez que se existir uma solução ótima x^* com $x_i^* = 0$ para algum $i \in J[k]$ então $x_i^* = 0$ para todo $i \in J[k]$, ver ref. [12].

Uma alternativa para contornar possíveis problemas computacionais e garantir diferenciabilidade foi dada por Fang et al [13] ao considerar perturbações do problema da forma:

$$x_i \geq \ell_i$$

onde ℓ_i é controlado dinamicamente. A mesma estratégia também foi usado em [42].

Uma segunda alternativa para obter diferenciabilidade é aproximar os termos da função f por uma quadrática, como segue:

$$x_i \log\left(\frac{c_i}{x_i}\right) \cong \alpha x_j^2 + \beta x_j \quad 0 \leq x_j \leq \varepsilon$$

onde

$$\alpha = -1/\varepsilon, \quad \beta = \log\left(\frac{c_j}{\varepsilon}\right) + 1.$$

Neste caso as funções coincidem em $x_i^* = 0$ e $x_i^* = \varepsilon$ mas as derivadas parciais diferem em $x_i^* = 0$, maiores detalhes ver ref. [2]

Ao utilizarmos qualquer das alternativas anteriores podemos incluir o problema dual de Programação Geométrica na classe dos problemas convexos linearmente restritos, com isto podemos dispor de vários métodos computacionais para obtermos uma solução ótima do problema dual. Experiências computacionais com métodos de “Gradiente Reduzido”, Programação Quadrática Sequencial e Métodos de Newton foram testados obtendo-se bons resultados.

Com o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores para programação convexa linearmente restrita obteve-se convergência polinomial, desde que a função barreira logarítmica satisfaça alguma condição tal como a auto concordância, ver [17], [34] ou a chamada “Condição Escalada de Lipschitz”, ver [25], [26]. Esta última condição não é satisfeita por qualquer problema de Programação Geométrica que possua alguma restrição com mais de um termo posinomial, ver [26]. Um método afim escala também foi desenvolvido por Kortaneck e No [24] obtendo excelentes resultados computacionais. Todos estes métodos serão vistos com mais detalhes no Capítulo II deste trabalho.

Sobre a outra grande dificuldade que é a conversão Primal-Dual o Teorema 1.4 nos fornece as “Condições de Extremalidades” (equação 1.3.13). Se \bar{x} é uma solução ótima do problema dual então uma solução ótima do problema primal pode ser determinada resolvendo-se um sistema de equações lineares, digamos:

$$Lx = c.$$

A dificuldade existe quando a matriz L não é inversível como enfatiza Dembo [8]. Para contornar esta dificuldade uma das alternativas seria considerar métodos que determinem soluções primal e dual simultaneamente. Esta estratégia foi utilizada por Kortaneck e No ao desenvolverem um método Afim-Escala para o problema Dual de Programação Geométrica, ver [24].

Uma outra metodologia seria obtida pela determinação de uma solução para o sistema de equações não lineares, formado pelas equações (1.2.6), (1.2.7) e (1.3.13). Tal sistema é equivalente a resolver as equações de Karush-Kuhn-Tucker para o problema Dual.

Capítulo II

Métodos de Pontos Interiores para Programação Geométrica

2.1 Introdução

Em 1984, N. Karmakar (ver ref. [20]) apresentou um método de pontos interiores projetivo com redução de potencial para Programação Linear que possuia complexidade polinomial. Desde então, os Métodos de Pontos Interiores tornaram-se uma área de pesquisa muito explorada, vários pesquisadores tentaram melhorar os níveis de Complexidade do Algoritmo de Karmakar, outros tentaram aplicar a metodologia dos métodos de pontos interiores em outros problemas de programação matemática. Mais tarde pode-se constatar que o algoritmo de Karmakar, embora tendo complexidade polinomial, não era muito eficiente computacionalmente. Isto levou alguns pesquisadores a investigar outros métodos de pontos interiores tais como o método de barreira logarítmica, inicialmente desenvolvido por Fiacco e McCormick (ver ref. [14]), o método de centros e o método afim-escala inicialmente desenvolvido por Dikin[7].

Em 1993, Kojima et al (ver ref. [21]) propôs uma nova metodologia de métodos de pontos interiores denominada “Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual Inviáveis para Programação Linear”; esta metodologia consiste em utilizar o método de Newton para resolver o sistema de equações não lineares dado pelas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker do problema de programação linear. O método não exige que os problemas primal ou dual sejam viáveis pois ele é capaz de determinar uma solução ótima ou afirmar que não existe solução viável para o par primal-dual em uma região suficientemente grande. Esta metodologia também foi estendida por Kojima et al (ver ref. [21]) para problemas de

complementaridade. Ainda com relação aos métodos de pontos interiores inviáveis Wang Monteiro e Pang (ver ref. [40]) apresentaram um “Método de Redução de Potencial” para “Inequações Variacionais, Problemas de Complementaridade Não Linear e Sistemas de Equações Não Lineares onde o “Método de Newton” é a ferramenta fundamental, que associado a uma função de mérito do tipo potencial, garante convergência global desde que propriedades adicionais sejam observadas.

Neste capítulo apresentaremos alguns Métodos de Pontos Interiores que foram utilizados para resolver o problema de Programação Geométrica. Dividimos os métodos em dois grupos: um que busca condições para se obter um algoritmo com complexidade polinomial, que são os trabalhos de Nesterov e Nemirovski [33] [34], Den Hertog[17], Kortaneck e Zhu [26], e o grupo de métodos que tenta obter resultados computacionais eficientes apresentando resultados teóricos sobre convergência: são os trabalhos de Kortaneck e No (ver ref. [24]) e Kortaneck, Xu e Ye (ver ref. [28]), sendo o primeiro um método afim-escala e este último um método de pontos interiores inviáveis.

2.2 Sobre a Complexidade Polinomial em Programação Geométrica.

Com o objetivo de obter complexidade polinomial para problemas convexos, Nesterov e Nemirovski definiram uma classe de funções chamadas “auto-concordantes”. Tal classe possui propriedades bastante atrativas quando relacionadas com a direção de Newton.

Definição 2.1: Uma função $\varphi: \mathcal{F}_0 \subseteq \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ é chamada “ K -auto-concordante” sobre \mathcal{F}_0 , $K \geq 0$, se φ é três vezes continuamente diferenciável em \mathcal{F}_0 para todo $y \in \mathcal{F}_0$ não vazio, convexo e limitado, e $h \in \mathbf{R}^m$ a seguinte desigualdade é válida

$$|\nabla^3 \varphi(y)(h, h, h)| \leq 2K(h^t \nabla^2 \varphi(y)h)^{\frac{3}{2}} \quad (2.2.1)$$

Sejam f_0, f_1, \dots, f_m funções convexas duas vezes continuamente diferenciáveis e

$C \subseteq \mathbf{R}^n$ um conjunto convexo. Consideremos o seguinte problema

$$\text{Minimize } f_0(x)$$

PC

Sujeito a:

$$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2.2)$$

$$x \in C$$

Podemos associar ao problema PC uma função $\varphi_B: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ que denominamos função barreira logarítmica dada por:

$$\varphi_B(x) = \frac{f_0}{\mu} - \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \quad \mu > 0 \quad (2.2.3)$$

Para cada $\mu > 0$ sejam $\nabla \varphi_B(x, \mu)$ e $H(x, \mu)$ o gradiente e a matriz hessiana de φ_B respectivamente. Para cada x no interior do conjunto viável de PC se tem H definida positiva. Portanto, podemos considerar em \mathbf{R}^n a norma definida por:

$$\|w\|_B = \sqrt{w^T H(x, \mu) w}. \quad (2.2.4)$$

O resultado dado a seguir foi provado por Nesterov e Nemirovski[33]; no entanto, os resultados apresentados neste trabalho são baseados na tese de doutorado e no livro de D. Den Hertog [17] e [18] respectivamente.

Os dois lemas seguintes estabelecem propriedades de pontos "próximos" dos centros.

Seja

$$\mathcal{F}_0 = \{x; f_i(x) < 0 \quad i = 1, \dots, m\}$$

Lema 2.2: Se \mathcal{F}_0 é não vazio, limitado, a função barreira logarítmica φ_B é K -autoconcordante, e se $d \in \mathbf{R}^n$ é tal que $\|d\|_H < \frac{1}{K}$, então

$$x + d \in \mathcal{F}_0 \quad (2.2.5)$$

O lema a seguir nos dá um resultado sobre a convergência quadrática exibindo a região onde esta convergência ocorre.

Lema 2.3: Seja \mathcal{F}_0 o interior da região viável do problema PC. Se \mathcal{F}_0 é não vazio, limitado, a função barreira φ_B é K -auto-concordante e p é a direção de Newton, e se $\|p\|_H < \frac{1}{K}$, então

$$x^+ = x + p \in \mathcal{F}_0$$

$$\|p(x^+, \mu)\|_{H(x^+, \mu)} \leq \frac{K}{(1 - k \|p\|_H)} \|p\|_H^2 \quad (2.2.6)$$

O próximo lema fornece uma taxa de decrescimento para a função objetivo f_0 , quando tomamos um tamanho do passo fixo.

Lema 2.4: Seja \mathcal{F}_0 o interior da região viável para o problema PC. Se \mathcal{F}_0 é não vazio, limitado, a função barreira φ_B é K -auto-concordante e $\bar{\alpha} = \frac{1}{1+K\|p\|_H}$, então

$$\varphi_B(x, \mu) - \varphi_B(x + \bar{\alpha}p, \mu) \geq \frac{1}{K^2}(K \|p\|_H - \ln(1 + K \|p\|_H)). \quad (2.2.7)$$

Den Hertog [18] afirma que se $\theta \in (0, 1)$ então uma ε -solução para o problema PC é determinada pelo algoritmo de barreira logarítmica apresentado em [18] (pag. 13), em

$$O(K^2 m \ln(\frac{m\mu_0}{\varepsilon})) \quad (2.2.8)$$

iterações, onde θ é tal que $\mu^+ = (1 - \theta)\mu$.

Para o problema de Programação Geométrica, Nesterov e Nemirovski (ref. [34] Cap. 6, pag. 229) fazem uma reformulação do problema primal dado na forma exponencial (problema SPGP dado em (1.4.5), (1.4.6) e (1.4.7)) e provam que a função barreira logarítmica associada ao problema reformulado é $(4n + p + 3)$ -auto-concordante, onde n é o número de termos posinomiais e p é o número de restrições do problema. Den Hertog

[18], pag. 178 provou que a função barreira logarítmica associada ao problema dual dada por:

$$\varphi_B(x) = -\frac{\ln(v(x))}{\mu} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad (2.2.9)$$

é 2 auto-concordante.

Em 1993 Kortaneck e Zhu [27] publicaram um algoritmo polinomial de barreira logarítmica para problemas convexos linearmente restritos (LCCP) onde a condição essencial para a obtenção da convergência polinomial é que a função barreira satisfizesse a “Condição Escalada de Lipschitz” (SLC) dada a seguir:

Definição 2.5: Dada $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$, $0 < \beta < 1$ dizemos que f satisfaz a “Condição Escalada de Lipschitz” (SLC) se existe $M > 0$ tal que

$$\|X[\nabla f(x + \Delta x) - \nabla f(x) - \nabla^2 f(x)\Delta x]\| \leq M\Delta^T x \nabla^2 f(x) \Delta x \quad (2.2.10)$$

sempre que $x > 0$ e $\|X^{-1}\Delta x\| \leq \beta$, com $X = \text{diag}(x)$, sendo $\text{diag}(x)$ a matriz diagonal, cujos coeficientes da diagonal são as coordenadas de x .

Ao relacionar a Condição Escalada de Lipschitz e auto-concordância Jarre [43] provou o seguinte resultado:

Lema 2.6: Suponha que $f \in C^3$ e satisfaz a SLC com parâmetro M . Então a função barreira correspondente é $(1 + \frac{2}{3}M)$ auto-concordante.

Kortaneck e Zhu [27] provaram que se μ sofre um decréscimo da forma

$$\mu^+ = (1 - \gamma)\mu \quad (2.2.11)$$

podemos encontrar uma ε -solução para LCCP em $O(n \log(\varepsilon))$ iterações, se $\gamma \in (0, 1)$.

Com relação ao problema dual de Programação Geométrica Kortaneck e Zhu [26] (pag. 33) provaram que se o problema primal possuir alguma restrição com mais de um termo posinomial então as restrições duais associadas não satisfazem a SLC, o que não implica, necessariamente, que φ_B não seja auto-concordante.

2.3 O Método Afim-Escala para Programação Geométrica de Kortaneck e No [24]

Consideremos o seguinte problema

$$\text{Minimize } f(x)$$

LCCP

$$\text{Sujeito a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ com posto máximo.

Para remover as restrições de não negatividade podemos considerar um modelo local a partir de um ponto interior x^k com uma restrição elipsoidal baseada nas informações de 2ª ordem dadas pela matriz hessiana, conforme segue:

$$\text{Minimize } \nabla f(x^k)^t x$$

PL^k

$$\text{Sujeito a: } Ax = b$$

$$((x - x^k)^t \nabla^2 f(x^k) (x - x^k)) \leq p_k$$

onde p_k é uma constante positiva, suficientemente pequena.

Podemos reescrever o problema PL^k utilizando a mudança de variáveis (ou mudança de escala) dada por

$$y = X^k x \quad (2.3.1)$$

onde $X = \text{diag}(x^k)$.

Usando esta transformação temos, para

$$f_k(x) := f(X^k x), \quad (2.3.2)$$

$$\nabla f_k(e) = X^k \nabla f(x^k) \quad (2.3.3)$$

e

$$\nabla^2 f_k(e) = X^k \nabla^2 f(x^k) X^k \quad (2.3.4)$$

onde e é o vetor cujas coordenadas são todas iguais a 1. Desta forma o problema PL^k é equivalente ao seguinte problema de projeção sobre o espaço nulo de $A_k := AX^k$.

$$\text{Minimize } \nabla f_k(e)^t d$$

$\text{PL}^{k'}$

$$\text{Sujeito a: } A_k d = 0$$

$$d^t H_k d \leq p_k$$

onde $H_k = \nabla^2 f_k(e)$.

$\text{PL}^{k'}$ é por sua vez equivalente ao seguinte problema de Mínimos Quadrados restrito:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} (H_k^{-1} \nabla f_k(e) - d)^t H_k (H_k^{-1} \nabla f_k(e) - d) \mid A_k d = 0 \right\} \quad (2.3.5)$$

cuja solução é dada por

$$c_p^k = H_k^{-1} \nabla f_k(e) - H_k^{-1} A_k^t z^k \quad (2.3.6)$$

onde

$$z^k = (A_k H_k^{-1} A_k^t)^{-1} A_k H_k^{-1} \nabla f_k(e) \quad (2.3.7)$$

Notemos que

$$z^k = \arg \min \left\| H_k^{-1/2} \nabla f_k(e) - H_k^{-1/2} A_k^t z \right\|^2. \quad (2.3.8)$$

Das expressões 1.4.13 e 1.4.14 vimos que a matriz hessiana de f é singular quando se trata do problema dual de Programação Geométrica. Para contornar esta dificuldade trabalhamos com a função barreira logarítmica

$$\bar{f}(x) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \mu > 0$$

Temos assim:

$$\bar{f}_k(x) := f_k(x) - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (2.3.9)$$

$$\nabla \bar{f}_k(e) = \nabla f_k(e) - \mu e \quad (2.3.10)$$

$$\bar{H}_k(e) = \nabla^2 \bar{f}_k(e) = H_k + \mu I. \quad (2.3.11)$$

2.3.1 O algoritmo de Kortaneck e No

Dados: $x_0 \in \mathbf{R}_{++}^n$ tal que $Ax_0 - b = 0$ e $\alpha \in (0, 1)$

Defina:

$$X^k = \text{diag}(x^k)$$

$$A_k = AX^k$$

$$\bar{f}_k(x) = \bar{f}(X^k x)$$

$$\bar{H}_k = X^k \nabla^2 f(x^k) X^k + \mu X^{k-2}$$

$$c_p^k = H_k^{-1}(\nabla \bar{f}_k(e)) - H_k^{-1} A^T z^k$$

$$z^k = (A_k H_k^{-1} A_k^T)^{-1} A_k \bar{H}_k \nabla \bar{f}_k(e)$$

Enquanto $\nabla \bar{f}_k(e)^t c_p^k > 0$

Faça:

$$\gamma_k = \frac{1}{\|c_p^k\|}$$

$$t_k = \arg \min \{\bar{f}_k(e - \alpha t c_p^k) | 0 \leq t \leq 1\}$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha t_k X^k c_p^k$$

$$k = k + 1$$

Fim do enquanto.

O trabalho de Kortaneck e No apresenta resultados sobre a convergência do algoritmo afim-escala e resolve também um dos problemas congênicos de Programação Geométrica que é a conversão de uma solução ótima do problema dual para uma solução ótima do problema primal. Vejamos agora os resultados obtidos por Kortaneck e No.

2.3.2 Analise da Convergência do Algoritmo.

Teorema 2.7: Se \bar{f} é a função barreira logarítmica usada no algoritmo, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|c_p^k\| = 0 \quad (2.3.12)$$

Prova: ver ref. [24]

O teorema é uma das ferramentas utilizadas na prova do resultado mais importante do trabalho que é o teorema seguinte.

Teorema 2.8: Suponha que ao invés da função objetivo dual utilizemos a função barreira logarítmica com $\mu > 0$ fixo. Então a sequência gerada pelo algoritmo afim-escala converge para a única solução do problema dual de Programação Geométrica.

Finalmente temos o resultado sobre a conversão primal-dual.

Teorema 2.9: Se $\mu > 0$ é o parâmetro da função barreira logarítmica associada ao problema dual e $(\bar{x}, \bar{z}) = (x(\mu), z(\mu))$ denota o limite da sequência $\{x^k, z^k\}$ gerada pelo algoritmo, então sob a transformação:

$$\bar{t}_j = t_j(\mu) = \exp(z(\mu)), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.3.13)$$

$\{\bar{t}_j\}_{j=1}^m$ é uma solução viável para o problema GP e qualquer ponto de acumulação é uma solução ótima para o problema GP.

2.4 Um Método de Pontos Interiores Inviáveis para Resolver os Problemas Primal e Dual de programação Geométrica (Kortaneck, Xu e Ye [28])

Considere o seguinte problema

$$\text{Minimize } f(x)$$

P

Sujeito a:

$$Ax = b \quad x \geq 0$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ com posto máximo, $b \in \mathbf{R}^n$ e f é uma função convexa e diferenciável.

Definição 2.10: Dizemos que P é assintoticamente compatível se existe uma sequência $\{x^k\}_k \in \mathbf{R}_+^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Ax^k - b = 0 \quad (2.4.1)$$

Tal sequência é chamada assintoticamente viável para P e esta coleção é denotada por $AF(P)$. O subvalor ou valor assintótico de f é dado por

$$\bar{V}_P := \inf_{x \in AF(P)} [\liminf_k f(x^k)] \quad (2.4.2)$$

Consideremos agora o problema dual de Wolfe do problema P dado por

$$\text{Maximize } b^t y - x^t \nabla f(x) + f(x)$$

$$\text{Sujeito a: } A^T y - \nabla f(x) + z = 0$$

$$x > 0 \quad y - \text{livre} \quad z \geq 0$$

Definição 2.11: Dizemos que D é assintoticamente compatível se e somente se existe uma sequência $\{x^k, y^k, z^k\} \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [A^T y^k - \nabla f(x^k) - z^k] = 0. \quad (2.4.3)$$

Tal sequência é chamada assintoticamente viável para D e esta coleção é denotada por $AF(D)$. O subvalor de (D) ou valor assintótico da função objetivo é dado por

$$\bar{V}_D = \sup_{\{x^k, y^k, z^k\} \in AF(D)} [\limsup \{b^t y - (x^k)^t \nabla f(x^k) + f(x^k)\}] \quad (2.4.4)$$

Partamos agora do sistema de equações associado às condições de Karush-Kuhn-Tucker do Problema P:

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0 \\ \text{KKT} \quad -\nabla f(x) + A^T y + z &= 0 \\ Xz &= 0 \end{aligned}$$

$$y \text{ livre} \quad x > 0 \quad z > 0.$$

Seja (x^0, y^0, z^0) um ponto inicial ou ponto de referência tal que $z^0 > \nabla f(x^0)$ e $X^0 z^0 = \mu^0 e$, onde $\mu^0 = \frac{(x^0)^t z^0}{n}$.

Sejam r_p^0 e r_D^0 os resíduos primal e dual, respectivamente, dados por:

$$r_p^0 = -(b - Ax^0), \quad (2.4.5)$$

$$r_D^0 = -(-\nabla f(x^0) + A^T y^0 + z^0) \quad (2.4.6)$$

e PKKT uma perturbação do sistema KKT dada por:

$$Ax - b = -\theta r_p^0$$

$$\text{PKKT} \quad -\nabla f(x) + A^T y + z = -\theta r_D^0$$

$$X z = \mu e$$

$$x > 0, \quad y \in \mathbf{R}^m, \quad z \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Observe que o algoritmo reduzido por PKKT é essencialmente um método de sub-relaxação de resolução de sistemas de equações.

Hipótese 1: O problema P é compatível e o problema (D) é assintoticamente compatível.

As hipóteses de compatibilidade assintótica fazem parte do trabalho de Kortanek, Xu e Ye (ver ref. [28]) as quais juntamente com a definição de problemas “limitadamente assintoticamente solucionáveis” dada a seguir permitem a demonstração de alguns resultados importantes sobre a trajetória central inviável, o que veremos adiante.

Proposição 2.12: Sob a Hipótese 1 o sistema PKKT possui uma única solução para $\theta \in (0, 1]$ e $\mu \in (0, \mu^0]$ prova ver ref. [28].

Definição 2.13: Dizemos que os problemas (P) e (D) são “Limitadamente Assintoticamente Solucionáveis” se e somente se existe uma sequência “limitada” $(x^k > 0, y^k, z^k \geq 0)$ tal que

$$\hat{r}_p^k = b - Ax^k \rightarrow 0 \quad (2.4.7)$$

$$\hat{r}_D^k = -A^T \hat{y}^k + \nabla f(\hat{x}^k) - z^k \rightarrow 0 \quad (2.4.8)$$

$$(\hat{x}^k)^t z^k \rightarrow 0 \quad (2.4.9)$$

Hipótese 2: Os problemas (P) e (D) são “Limitadamente Assintoticamente Solucionáveis”

Notação: Denotaremos por $ALS(P,D)$ o conjunto de todas as sequências limitadas $\{x^k, y^k, z^k\}$ que satisfazem 2.4.6, 2.4.7 e 2.4.8.

Sob as Hipóteses 1 e 2 Kortaneck, Xu e Ye provaram os seguintes resultados:

Proposição 2.14: Se $(\hat{x}^k, \hat{y}^k, \hat{z}^k) \in ALS(P, D)$ e \hat{x}^* é um ponto de acumulação de $\{\hat{x}^k\}_k$, então \hat{x}^* é uma solução ótima para (P) e $\{(\hat{x}^k, \hat{y}^k, \hat{z}^k)\}_k$ é uma solução assintótica para (D) com $\bar{V}_p = \bar{V}_D$, onde \bar{V}_p e \bar{V}_D são dados por 2.4.2 e 2.4.4 respectivamente.

Fazendo-se $\mu = \theta \mu^0$ podemos reescrever o sistema PKKT da seguinte forma:

$$Ax - b = -\theta r_p^0$$

$$\text{PKKT'} \quad -\nabla f(x) + A^T y + z = -\theta r_D^0$$

$$X z = \theta \mu^0 e$$

$$x > 0, \quad y \in \mathbf{R}^m, \quad z \geq 0$$

Definição 2.15: Dizemos que $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ está na “Trajetória Central Inviável” se $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ é solução de PKKT’.

Proposição 2.16: Se (P) e (D) são “Limitadamente Assintoticamente Solucionáveis” e $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ está na “Trajetória Central Inviável”, então $(x(\theta), z(\theta))$ e $(y(\theta))^t r_p^0$ são limitadas para todo $\theta \in (0, 1]$. Além disso o ”gap” primal-dual converge para zero, isto é:

$$(x(\theta))^t \nabla f(x(\theta)) - b^t y(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \theta \rightarrow 0. \quad (2.4.10)$$

Com o objetivo de obter sequências assintoticamente viáveis para (P) e (D) Kortaneck et al utilizaram o Método de Newton para resolver o sistema PKKT' e exigem que a sequência gerada pelo algoritmo esteja em uma dada região:

Dado (x^0, y^0, z^0) tal que $z^0 > \nabla f(x^0)$, a sequência definida pelo algoritmo de Pontos Interiores Inviáveis é dada por:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha t_k \delta x^k \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha t_k \delta y^k \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha t_k \delta z^k \end{aligned}$$

onde $(\delta x^k, \delta y^k, \delta z^k)$ são soluções do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} A \Delta x &= \eta^k r_p^k \\ -H^k \delta x + A^T \delta y + \delta z &= \eta^k r_D^k \\ Z^k \delta x + X^k \delta z &= \gamma^k \mu e - X z, \end{aligned}$$

Sendo $H = \nabla^2 f(x^k)$, η^k e δ^k são parâmetros determinados via predição-correção.

A sequência $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ satisfaz as seguintes condições:

$$1 - x^{k+1} > 0 \quad z^{k+1} > 0$$

$$2 - X^{k+1} z^{k+1} \geq \sigma \mu^k$$

$$3 - \|X^{k+1} z^{k+1} - \mu^{k_1} e\| \leq \beta \mu^{k+1}$$

$$4 - (x^{k+1})^t z^{k+1} \leq \theta_c (x^k)^t z^k$$

$$5 - \|r_p(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})\| \leq \theta_p (x^{k+1})^t z^{k+1}$$

$$6 - \|r_d(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})\| \leq \theta_d (x^{k+1})^t z^{k+1}$$

$$\theta_c > 0, \theta_d > 0, \theta_p > 0, 0 < \sigma < 1, \beta > 0$$

Capítulo III

Um Método de Pontos Interiores Inviáveis para Programação Geométrica

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma abordagem de métodos de pontos interiores inviáveis. Esta metodologia foi inicialmente desenvolvida por Kojima et al (ver ref. [21]) para Programação Linear e consiste em determinar pontos próximos à trajetória central inviável aproximando-se a cada passo da solução do problema. Neste capítulo faremos uma adaptação deste método para Programação Geométrica e apresentaremos algumas propriedades que são satisfeitas pelo sistema de Equações de Karush-Kuhn-Tucker associado a este problema desde que certa condição de regularidade também seja satisfeita. Nosso método é primal-dual, porém se trata de uma alternativa à proposta de Kortaneck, Xu, Ye [28], pela forma através da qual se perturba as condições de K.K.T.

Os resultados apresentados neste capítulo serão referenciados exceto aqueles aqui obtidos.

3.2 Sobre o Problema de Complementaridade Não Linear Misto Associado ao Par Primal-Dual de Programação Geométrica

O Problema Primal de Programação Geométrica (GP) será neste capítulo representado pelo problema GP1 dado a seguir

$$\text{Minimize } t_0$$

$$\text{Sujeito a} \quad t_0^{-1} g_0(t) \leq 1 \quad (3.2.1)$$

$$g_k(t) \leq 1 \quad k = 1, \dots, p$$

$$t_0 > 0 \quad t_j > 0 \quad j = 1, \dots, m$$

onde g_k é dada pela equação (1.2.3). Conclui-se, facilmente, que o problema dual do problema GP1 é o problema GD.

Condições de Optimalidade

Com o objetivo de resolver as condições de optimalidade a partir do dual, associado à função objetivo $f(x) = \log((u(x)))$, temos como em 2.4, através do dual de Wolfe de GD, o seguinte sistema:

$$-\nabla f(x) - A^T y - z = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\text{KKT} \quad Ax - b = 0 \quad (3.2.3)$$

$$Xz = 0 \quad (3.2.4)$$

$$x \in \mathbf{R}_{++}^n \quad z \in \mathbf{R}_+^n \quad y \in \mathbf{R}^{m+1}$$

onde f é a função dada em (1.4.9), A e b são deduzidos das equações (1.2.6) e (1.2.7).

Utilizando agora (1.4.11), (1.2.6) e (1.2.7) o sistema acima se desenvolve em:

$$-\log\left(\frac{c_i \lambda_k}{x_i}\right) - y_0 - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j - z_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

$$\text{KKT} \quad \sum_{i \in J[0]} x_i = 1 \quad (3.2.6a)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2.6b)$$

$$x_i z_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.7)$$

$$x \in \mathbf{R}_{++}^n \quad z \in \mathbf{R}_+^n \quad y \in \mathbf{R}^{m+1}$$

onde $J[k]$ e λ_k são dados pelas equações (1.2.4) e (1.2.10) respectivamente.

Suponha que $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja uma solução de KKT. Neste caso temos $-\bar{x}^t \nabla f(\bar{x}) - \bar{y}_0 = \bar{x}^t \bar{z} = 0$ pois $A\bar{x} - b = 0$; como $\lambda_0 = 1$ temos da equação 1.4.12 que $-f(\bar{x}) = \bar{y}_0$. Fazendo $\bar{t}_0 = \exp(-\bar{y}_0)$, $\bar{t}_j = \exp \bar{y}_j$, $j = 1, \dots, m$, usando propriedades do logarítmico e o fato que $z \geq 0$ temos da equação (3.2.5) que:

$$\bar{t}_0^{-1} c_i \prod_{j=1}^m \bar{t}_j^{a_{ij}} \leq \bar{x}_i \quad i \in J[0] \quad (3.2.8)$$

$$c_i \prod_{j=1}^m \bar{t}_j^{a_{ij}} \leq \frac{\bar{x}_i}{\bar{\lambda}_k} \quad i \in J[k], \quad k = 1, \dots, p \quad (3.2.9)$$

De (1.2.3), (1.2.10), (3.2.8) e (3.2.9) concluimos que as inequações (1.2.1) e (3.2.1) são satisfeitas. Logo \bar{t} é uma solução viável para GP, \bar{x} é uma solução viável para GD e $g_0(\bar{t}) \leq \bar{t}_0 = u(\bar{x})$: Da viabilidade de \bar{t} e \bar{x} temos que $g_0(\bar{t}) \geq u(\bar{x})$. Logo \bar{t} e \bar{x} são soluções ótimas dos problemas GP e GD respectivamente.

Formulação primal-dual interior

A resolução dos problemas GP e GD é equivalente a resolver KKT. KKT é um problema de Complementaridade Não Linear Misto, o qual pode não ter solução, se, por exemplo, para todo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ satisfazendo (3.2.3) e (3.2.4) tivermos $\bar{x}_i = 0$ para algum i . Devido a isto consideramos a usual perturbação do sistema KKT que interioriza x e z , dada por:

$$-\nabla f(x) - A^T y - z = 0$$

$$\text{KKT-}\mu \quad Ax - b = 0$$

$$Xz = \mu e \quad (3.2.10)$$

$$x \in \mathbf{R}_{++}^n, \quad z \in \mathbf{R}_{++}^m, \quad y \in \mathbf{R}^{m+1}, \quad \mu > 0$$

onde $e^t \in \mathbf{R}^n$, $e^t = (1, \dots, 1)$

Definição 3.1:[14,15,17,19,21,22] Dizemos que o vetor $w = (x, y, z)$ está na trajetória central em μ associada ao problema GP, ou simplesmente na trajetória central, se w é solução de KKT- μ .

Proposição 3.2 Se $w(\mu) = (x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ está na trajetória central, então existe um ponto $t(\mu)$ viável para o problema GP, $x(\mu)$ um ponto viável para o problema GD e a seguinte desigualdade é satisfeita por $t(\mu)$ e $x(\mu)$:

$$u(x(\mu)) \leq g_0(t(\mu)) \leq u(x(\mu)) \cdot \exp(n\mu) \quad (3.2.11)$$

Prova: Se $w(\mu) = (x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ é solução de KKT- μ as equações (3.2.5) (3.2.6a) (3.2.6b) e (3.2.10) são satisfeitas. Fazendo

$$t_0(\mu) = \exp(-y_0(\mu)), \quad t_j(\mu) = \exp(y_j(\mu)), \quad j = 1, \dots, m,$$

e usando o fato que $z_i(\mu) \in \mathbf{R}_{++}^n$ temos pela equação (3.2.5) que:

$$t_0^{-1} c_i \prod_{j=1}^m t_j(\mu)^{a_{ij}} \leq x_i(\mu) \quad i \in J[0] \quad (3.2.12)$$

$$c_i \prod_{j=1}^m t_j(\mu)^{a_{ij}} \leq \frac{x_i(\mu)}{\lambda_k(\mu)} \quad i \in J[k] \quad (3.2.13)$$

e pelas equações (1.2.3),(1.2.10),(3.2.12) e (3.2.13) temos:

$$g_0(t(\mu)) \leq t_0(\mu) \quad (3.2.14)$$

$$g_k(t(\mu)) \leq 1. \quad (3.2.15)$$

Portanto $t(\mu)$ é viável para GP. Claramente $x(\mu)$ é viável para GD portanto

$$g_0(t(\mu)) \geq u(x(\mu))$$

provando assim a primeira parte da desigualdade. Vejamos que:

$$x^t(\mu)(-\nabla f(x(\mu)) - A^t y(\mu)) = x^T(\mu)z(\mu) = n\mu$$

Das equações (1.4.12),(3.2.6a),(3.2.6b) e (3.2.10) temos:

$$-f(x(\mu)) - y_0(\mu) = n\mu$$

e, usando (3.2.14) temos:

$$g_0(t(\mu)) \leq u(x(\mu)) \exp(n\mu). \quad c.q.d$$

Observando KKT vemos que se $w = (x, y, z)$ é uma solução de KKT- μ então w é uma solução aproximada do primeiro com $x^t z = n\mu$, o que nos diz, também, que

$$\frac{g_0(t)}{u(x)} = \exp(n\mu).$$

Propriedades da Trajetória Central (perturbada)

Passamos, agora, a estudar as soluções de KKT- μ , caso existam, isto é, estudar as soluções sobre a trajetória central. A nossa orientação será no sentido de responder às seguintes questões:

- a) Dado $\mu \in (0, \mu_0]$ $\mu_0 > 0$ arbitrário, a trajetória central está bem definida, isto é, KKT- μ possui uma solução, e caso exista, esta solução é única?
- b) A trajetória central é limitada $\forall \mu \in (0, \mu_0]$?

Com o objetivo de responder a estas perguntas enunciaremos algumas definições e resultados a respeito de aplicações em espaços métricos. Os conceitos aqui enunciados foram originalmente desenvolvidos por R.D.C. Monteiro e J.S. Pang [32]. Devido a não diferenciabilidade da função f dada em (1.4.9) fizemos algumas adaptações nos resultados.

Definição 3.3:[32] Seja $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$, $U \subseteq X \times Y$ e $J: X \times Y \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{n+m}$ uma aplicação. Então

- a) J satisfaz a (x, z) -monotonicidade sobre U se: Dados (x, z, y) , (x', z', y') em $U \times \mathbf{R}^m$ tais que $J(x, z, y) = J(x', z', y')$ tem-se:

$$(x - x')^t (z - z') \geq 0 \quad (3.2.16)$$

- b) J satisfaz a y -injetividade sobre U se para cada par $(x, z) \in U$ (x, z) fixo a função $J(x, z, \cdot)$ é injetiva em \mathbf{R}^m
- c) J satisfaz a y -limitação sobre U se para qualquer sequência $(x^k, z^k, y^k) \in U \times \mathbf{R}^m$ com (x^k, z^k) limitada e $\|(x^k, z^k, y^k)\| \rightarrow \infty$ tivermos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|J(x^k, z^k, y^k)\| = \infty. \quad (3.2.17)$$

Definição 3.4:[32] Sejam M, N espaços métricos e $F: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. F é própria com relação ao conjunto $E \subseteq N$ se para todo compacto $K \subset E$ o conjunto:

$$F^{-1}(K) = \{x \in M; F(x) \in K\} \quad (3.2.18)$$

é compacto. Se F é própria com respeito a N dizemos simplesmente que F é própria.

Os lemas dados a seguir foram provados por Monteiro e Pang.

Lema 3.5:[32] Suponha que (x, z) e (\hat{x}, \hat{z}) são dois pontos em \mathbf{R}^{2n} satisfazendo:

$$(x - \hat{x})^t (z - \hat{z}) \geq 0.$$

Então as afirmações seguintes são verdadeiras

- a) Se $x + z = \hat{x} + \hat{z}$ então $(x, z) = (\hat{x}, \hat{z})$
- b) Se $(x, z) > 0$, $(\hat{x}, \hat{z}) > 0$ e $Xz = \hat{X}\hat{z}$ então $(x, z) = (\hat{x}, \hat{z})$.

Lema 3.6:[32] Suponha que a aplicação $J: \mathbf{R}_+^{2n} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{n+m}$ seja contínua e satisfaça a (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} , a y -injetividade sobre \mathbf{R}^m e a y -limitação sobre \mathbf{R}^m . Então a aplicação $G^t(x, z, y) = (Xz, J(x, z, y))$ é injetiva sobre $\mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^m$ e própria com respeito a:

$$\mathbf{R}_+^n \times (\mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^m)$$

Neste trabalho faremos a seguinte hipótese:

Hipótese 1 – A matriz A tem posto máximo;

Proposição 3.7: Suponha que o problema Primal de Programação Geométrica é canônico(def. 1.5). Então a aplicação:

$$J(x, z, y) := \begin{pmatrix} -\nabla f(x) - A^T y - z \\ Ax - b \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

satisfaz a (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} , e a y -injetividade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n}

Prova: Vejamos inicialmente que J satisfaz a (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} . Dado $(x, z, y), (x', z', y')$ com $J(x, z, y) = J(x', z', y')$ temos:

$$-\nabla f(x) - A^T y - z = -\nabla f(x') - A^T y' - z' \quad (3.2.20)$$

$$Ax - b = Ax' - b \quad (3.2.21)$$

de (3.2.20) e (3.2.21) temos:

$$z - z' = -\nabla f(x) - (-\nabla f(x') - A^T(y' - y)) \quad (3.2.22)$$

$$A(x - x') = 0 \quad (3.2.23)$$

De (3.2.22), (3.2.23) e como função f é côncava, temos

$$(x - x')^t(z - z') = -(x - x')^t(\nabla f(x) - \nabla f(x')) \geq 0 \quad (3.2.24)$$

portanto J satisfaz a (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} .

Para provar a y -injetividade observamos que

$$J(x, z, y) = J(x, z, \bar{y}) \quad (3.2.25)$$

se e somente se $A^T y = A^T \bar{y}$. Pela hipótese 1 A tem posto máximo logo $y = \bar{y}$, provando assim a y -injetividade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} .

Lema 3.8 Seja $(x^k, z^k, y^k) \in \mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1}$ talque $\sum_{i \in J[0]} x_i^k = 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{k^t} (Ax^k - b) = 0.$$

com (x^k, z^k) limitada e $\|(x^k, z^k, y^k)\| \rightarrow \infty$, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|J(x^k, z^k, y^k)\| = \infty.$$

Prova. Seja $(x^k, z^k, y^k) \in \mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1}$ como na hipótese.

A prova será feita por contradição.

Suponha que $\|J(x^k, z^k, y^k)\|$ seja limitada, isto é:

$$J_1(x^k, z^k, y^k) = -\nabla f(x^k) - A^T y^k - z \quad (3.2.26)$$

$$J_2(x^k, y^k, z^k) = Ax^k - b \quad (3.2.27)$$

são limitadas. Temos por hipótese que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{k^t} (Ax^k - b) = 0 \quad (3.2.28)$$

Vejamos agora o seguinte:

$$\begin{aligned} x^{k^t} z^k &= x^{k^t} (-\nabla f(x^k) - A^T y^k) - x^{k^t} (-\nabla f(x^k) - A^T y^k - z^k) \\ &= -f(x^k) - y^{k^t} (Ax^k) - x^{k^t} (-\nabla f(x^k) - A^T y^k - z^k) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Como o vetor $b \in \mathbf{R}^{m+1}$ das restrições duais (equações 1.2.6 e 1.2.7) é $b^t = (1, 0 \dots 0)$ temos que $y_k^t b = y_0^k$, e podemos então escrever :

$$y_0^k = -f(x^k) - y_k^t (Ax^k - b) - x^{k^t} (-\nabla f(x^k) - A^T y^k - z^k) - x^{k^t} z^k \quad (3.2.30)$$

Como f é contínua em \mathbf{R}_+^n concluimos de (3.2.26) (3.2.27) e (3.2.28) que y_0^k é limitada. Sendo:

$$J_{1i}^k = -\log\left(\frac{c_i \lambda_k}{x_i^k}\right) - y_0 - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^k - z_i^k \quad i \in J[0] \quad (3.2.31)$$

e

$$J_{1i}^k = -\log\left(\frac{c_i \lambda_k}{x_i^k}\right) - \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^k - z_i^k \quad i \in J[l] \quad (3.2.32)$$

limitada para todo $i = 1, \dots, n$,

$$\log\left(\frac{x_i^k}{\lambda_k}\right) \leq 0 \quad (3.2.33)$$

e z_i^k limitada para todo $i = 1, \dots, n$, temos que a sequência w_k dada por

$$w_i^k = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^k \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.34)$$

é limitada superiormente, pois y_0^k é limitada.

Como o problema é canônico existe $\bar{x} \in \mathbf{R}_{++}^n$ satisfazendo a equação (1.2.7), portanto

$$\sum_{i=1}^n w_i^k \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^k \right) \bar{x}_i = \sum_{j=1}^m y_j^k \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{x}_i \right) = 0 \quad (3.2.35)$$

Como w^k é limitada superiormente, concluimos de (3.2.35) que w_k também é limitada inferiormente, finalmente como a matriz A tem posto máximo concluimos que y^k é limitada o que é absurdo. c.q.d

A condição imposta no lema 3.8 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{k^t} (Ax^k - b) = 0.$$

é mais forte que a hipótese de compatibilidade assintótica feita no capítulo II no entanto a forma através da qual perturbaremos KKT nos permite gerar uma sequência (x^k, z^k, y^k) satisfazendo a condição acima

Uma aplicação direta da (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} e da y -injetividade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} é o seguinte resultado.

Proposição 3.9. Suponha que o problema Primal (GP) seja superconsistente (ver def. 1.3) e canônico (ver def. 1.5). Então dado $\mu > 0$ o sistema de equações KKT- μ possui uma única solução em $\mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1}$.

Prova: Sendo GP superconsistente e canônico existem $\bar{x}, \hat{x} \in \mathbf{R}_{++}^n$ e $\bar{y} \in \mathbf{R}^{m+1}$ tais que:

$$-\nabla f(\bar{x}) - A^T \bar{y} > 0$$

$$A\hat{x} - b = 0,$$

e portanto, o problema:

$$\min -f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

Sujeito a $Ax = b$

$$x \geq 0$$

possui uma solução ótima (ver [26]). Consequentemente o sistema KKT- μ possui uma solução $w(\mu) = (x(\mu), z(\mu), y(\mu))$. Vejamos que esta solução é única. Suponha que existam $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}), (\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}) \in \mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1}$ soluções de KKT- μ logo $\bar{X}\bar{z} = \hat{X}\hat{z}$. Como a aplicação J , dada em (3.2.19), satisfaz a (x, z) -monotonicidade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} temos que $(\bar{x} - \hat{x})^t(\bar{z} - \hat{z}) \geq 0$, pelo lema 3.5 item b conclui-se que $\bar{x} = \hat{x}$, $\bar{z} = \hat{z}$. Da y -injetividade sobre \mathbf{R}_{++}^{2n} temos $\bar{y} = \hat{y}$. Logo a solução é única. c.q.d

Necessitaremos do conjunto abaixo para o estabelecimento do algoritmo

$$W_\mu = \{(x, z, y) \in \mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1} :$$

$$x^t z \leq \gamma_1 \mu,$$

$$\|J(x, z, y)\|_2 \leq \gamma_2 \mu \tag{3.2.36}$$

$$\sum_{i \in J[0]} x_i = 1$$

$$\varepsilon \leq x_i z_i \quad i = 1, \dots, n\}$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma euclidiana .

A proposição 3.11 dada a seguir nos da garantias de que quando o parâmetro μ tende a zero o "gap" de dualidade tende a zero, portanto, ao construirmos um algoritmo que nos forneça um ponto (x^k, z^k, y^k) pertencente a W_{μ^k} para cada k , estamos nos aproximando da solução ótima do problema.

Proposição 3.11 *Dado $\mu \in [\varepsilon, \mu^0]$ e $w = (x, z, y) \in W_\mu$. Se o problema (GP) é super-consistente e canônico e W_μ é compacto, então existem constantes $L_1 > 0$ $L_2 > 0$ tais que:*

$$u(x)e^{-L_1\mu} \leq g_0(t) \leq u(x)e^{L_2\mu} \quad (3.2.37)$$

onde $t_j = e^{y_j}$, $j = 1, \dots, m$.

Prova: Como W_μ é limitado e como $W_\mu \subset W_{\mu^0}$, $\forall \mu \in [\varepsilon, \mu^0]$ existem constantes $\ell_1 > 0$, $\ell_2 > 0$ tais que

$$\|x\|_1 \leq \ell_1 \quad \|y\|_1 \leq \ell_2. \quad (3.2.38)$$

onde $\|\cdot\|_1$ denota a norma da soma dos módulos .

Podemos escrever o seguinte:

$$z = -\nabla f(x) - A^t y - (-\nabla f(x) - A^t y - z) \quad (3.2.39)$$

Usando a identidade de Euler (eq. (1.4.12)) e (3.2.39) temos

$$x^t z = -f(x) - y^t (Ax) - x^t (-\nabla f(x) - A^t y - z). \quad (3.2.40)$$

Como $y^t b = y_0$ podemos escrever (3.2.40) como

$$x^t z = -f(x) - y_0 - y^t (Ax - b) - x^t (-\nabla f(x) - A^t y - z).$$

Usando a desigualdade de Schwarz em (3.2.40) e o fato que $w \in W_\mu$ temos

$$\begin{aligned} -f(x) - y_0 &\leq \gamma_1 \mu + \|y\|_1 \|Ax - b\|_2 + \|x\|_1 \|-\nabla f(x) - A^t y - z\|_2 \\ &\leq [\gamma_1 + \gamma_2(\ell_1 + \ell_2)]\mu \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Fazendo $t_0 = e^{-y_0}$ temos

$$t_0 \leq u(x)e^{[\gamma_1 + \gamma_2(\ell_1 + \ell_2)]\mu}. \quad (3.2.42)$$

Usando novamente o fato que $\|J(x, z, y)\| \leq \gamma_2\mu$ temos

$$-\gamma_2\mu \leq \log\left(\frac{x_i}{c_i}\right) - y_0 - \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j - z_i \quad i \in J[0] \quad (3.2.43)$$

$$-\gamma_2\mu \leq \log\left(\frac{x_i}{c_i\lambda_k}\right) - \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j \quad i \in J[k] \quad (3.2.44)$$

Com a transformação $t_j = e^{y_j} \quad j = 1, \dots, m$ podemos escrever a partir das equações (3.2.43) e (3.2.44) o seguinte:

$$\sum_{i \in J[0]} e^{-\gamma_2\mu} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \leq e^{-y_0} \quad (3.2.45)$$

$$\sum_{i \in J[k]} e^{-\gamma_2\mu} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \leq 1 \quad (3.2.46)$$

Seja

$$r_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \quad j = 1, \dots, m; \quad (3.2.47)$$

como $-\gamma_2\mu \leq r_j \leq \gamma_2\mu$ temos

$$-\gamma_2\mu |y_j| \leq y_j(-r_j) \leq \gamma_2\mu |y_j|, \quad j = 1, \dots, m; \quad (3.2.48)$$

de (3.2.48) e (3.2.36) concluimos que

$$\prod_{j=1}^m t_j^{-r_j} \leq e^{\gamma_2\mu \|y\|_1} \leq e^{\gamma_2\mu \ell_2} \quad (3.2.49)$$

ou

$$e^{-\gamma_2\mu \ell_2} \prod_{j=1}^m t_j^{-r_j} \leq 1. \quad (3.2.50)$$

Fazendo

$$\begin{aligned}\bar{g}_k(t) &= e^{-\gamma_2 \mu} \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 1, \dots, p \\ \bar{g}_{p+1}(t) &= e^{-\gamma_2 \mu \ell_2} \prod_{j=1}^m t_j^{-r_j},\end{aligned}$$

construiremos o seguinte problema de Programação Geométrica:

$$\begin{aligned}& \min \bar{g}_0(t) \\ GP^{aux} \quad & \text{Sujeito a } \bar{g}_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ & \bar{g}_{p+1}(t) \leq 1 \\ & t_j > 0 \quad j = 1, \dots, m;\end{aligned}$$

cujo problema dual é dado por:

$$\begin{aligned}& \max \bar{u}(x) \\ GD^{aux} \quad & \text{Sujeito a } \sum_{i \in J[0]} x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - rx_{n+1} = 0 \\ & x \geq 0 \quad x_{n+1} \geq 0\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i e^{-\gamma_2 \mu}}{x_i} \right)^{x_i} \left(\frac{e^{-\gamma_2 \mu}}{x_{n+1}} \right)^{x_{n+1}} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k} x_{n+1}^{x_{n+1}} \\ &= u(x) e^{-\gamma_2 \mu \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\gamma_2 \mu \ell_2 x_{n+1}}\end{aligned}\tag{3.2.51}$$

Das equações (3.2.46) e (3.2.49) concluimos que t é uma solução viável para o problema GP^{aux} . Usando a equação (3.2.46) observamos que o vetor $\bar{x} \in \mathbf{R}_{++}^{n+1}$ dado por $\bar{x}^t = (x^t, 1)$ satisfaz as restrições do problema dual GD^{aux} , portanto a inequação (1.3.2) é satisfeita por $\bar{g}_0(t)$ e $\bar{u}(\bar{x})$ isto é:

$$\bar{g}_0(t) \geq \bar{u}(\bar{x})\tag{3.2.52}$$

Das inequações (3.2.41) e (3.2.44) temos

$$g_0(t) \leq u(x)e^{[\gamma_1 + (1+\ell_1+\ell_2)\gamma_2]\mu}$$

Das inequações (3.2.36),(3.2.49) e (3.2.50) temos que

$$e^{(1-\ell_1-\ell_2)\gamma_2\mu}u(x) \leq g_0(t)$$

Fazendo $L_1 = -(1 - (\ell_1 + \ell_2))\gamma_2$, $L_2 = \gamma_1 + \gamma_2(1 + \ell_1 + \ell_2)$ da viabilidade dual de \bar{x} temos que $\ell_1 > 1$ logo $L_1 < 0$ e consequentemente

$$e^{-L_1\mu}u(x) \leq g_0(t) \leq e^{L_2\mu}u(x). \quad c.q.d$$

3.3 O Problema de Programação Geométrica Parametrizado

Nesta seção apresentaremos uma perturbação do par Primal Dual de Programação Geométrica. À diferença de Kortaneck, Xu e Ye (ver seção 2.4 e ref. [26]). a perturbação aqui desenvolvida dá origem a um par primal-dual, indexado a um parâmetro θ e a um vetor $x_0 \in \mathbf{R}_{++}^n$, superconsistente e canônico.

Dado $(x^0, \theta) \in (\mathbf{R}_{++}^{n+1} \cap H) \times (0, 1]$ seja $r \in \mathbf{R}^{m+1}$ o vetor dado por:

$$r_j = - \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.3.1)$$

$$r_{m+1} = - \left(\sum_{i=1}^n x_i^0 - x_{n+1}^0 \right) \quad (3.3.2)$$

Consideremos agora o seguinte problema de Programação Geométrica

$$\min t_{m+1}g_0(t)$$

$$\text{GP-}(x_0, \theta) \quad \text{Sujeito a: } t_{m+1}g_k(t) \leq 1 \quad k = 1, \dots, p \quad (3.3.3)$$

$$e^{-\theta} t_{m+1}^{-1} \leq 1 \quad (3.3.4)$$

$$\beta \prod_{j=1}^{m+1} t_j^{\theta r_j} \leq 1 \quad (3.3.5)$$

onde $\beta < 1$.

O problema dual é:

$$\max u_\theta(x)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i \in J[0]} x_i = 1$$

$$\text{GD-}(x_0, \theta) \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i + \theta r_j x_{n+2} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n x_i - x_{n+1} + \theta r_{m+1} x_{n+2} = 0$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+2$$

onde $u_\theta(x) = u(x) e^{-\theta x_{n+1}} \beta^{x_{n+2}}$.

Observação: Se d é o grau de dificuldade do problema GP (ver Def. 1.3.14) o grau de dificuldade do Problema GP- (x_0, θ) é dado por:

$$d(x_0, \theta) = n - m + 2 = d + 1$$

para todo $\theta \in (0, 1]$.

Os problemas GP- (x_0, θ) e GD- (x_0, θ) são tais que quando $\theta \rightarrow 0$ os conjuntos de soluções viáveis dos dois problemas tendem aos conjuntos de soluções viáveis dos problemas GP e GD.

A proposição dada a seguir mostra que para valores convenientes de θ o problema GP- (x_0, θ) é superconsistente e o problema GD- (x_0, θ) é canônico.

Proposição 3.13. Suponha que o problema GP seja subconsistente e $r_{m+1}(x_0) = 0$, então existem $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que para $\theta = \alpha \mu$ o problema GP- (x_0, θ) é superconsistente e canônico para $\mu \in (0, \mu_0]$.

Prova: Para provar que $\text{GD}-(x_0, \theta)$ é canônico basta observar que devido a (3.3.1) e (3.3.2) o vetor $\tilde{x}^t = (x_0^t, \frac{1}{\theta})$ satisfaz as equações (3.3.6) e (3.3.7), logo $\text{GD}-(x_0, \theta)$ é canônico.

Como o problema GP é subconsistente, de acordo com a definição (1.3.10), para cada $\theta \in (0, 1)$ existe $\hat{t} > 0$ tal que

$$\theta g_k(\hat{t}) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p$$

em particular para $\theta = e^{-s\mu}$, $s \in (0, \frac{1}{3})$, $\mu \in (0, \mu_0]$.

Tomemos agora $\beta < 1$ tal que:

$$\hat{t}_j^{3s\mu_0 r_j} < (\frac{1}{\beta})^{1/m}, \quad j = 1, \dots, m$$

logo para todo $\mu \in (0, \mu_0]$ temos:

$$\beta \prod_{j=1}^m \hat{t}_j^{3s\mu r_j} < 1$$

fazendo $\hat{t}_{m+1} = e^{-2s\mu}$, $\alpha = 3s$ e usando o fato que $r_{m+1} = 0$ temos que:

$$\hat{t}_{m+1} g_k(\hat{t}) < 1$$

$$e^{-\alpha\mu} \hat{t}_{m+1}^{-1} < 1$$

$$\beta \prod_{j=1}^{m+1} \hat{t}_{m+1}^{\alpha\mu r_j} < 1$$

portanto o problema $\text{GP}-(x_0, \theta)$ é superconsistente.

c.q.d

Observação. Na demonstração da proposição 3.13 vimos que uma solução viável inicial para o problema $\text{GD}-(x_0, \theta)$ é dada por $\tilde{x}^t = (x_0^t, \frac{1}{\theta})$; portanto ao utilizarmos o método de Newton para resolver o sistema $KKT - \mu$ associado ao par $\text{GP}-(x_0, \theta)$ e $\text{GD}-(x_0, \theta)$ com \tilde{x} como solução inicial para o problema dual e θ fixo a sequência gerada é tal que $Ax^k - b = 0$ para todo k . Com isto é possível construirmos uma sequência (x^k, z^k, y^k) satisfazendo: $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{k^t} (A(x_0, \theta)x^k - b) = 0$.

Determinando uma solução aproximada para os problemas Primal e Dual.

Dado $\theta \in (0, 1]$ fixo. Seja $w = (x, z, y)$ uma solução para o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
-\nabla f(x) - A^T y - z &= y_{m+1} \cdot e \\
Ax &= b + \theta(Ax_0) \cdot x_{n+2} \\
\text{KKT-}(x_0, \theta\mu) \quad e^t x - x_{n+1} &= \theta(e^t x_0 - x_{n+1}^0) \cdot x_{n+2} \\
ln(\frac{1}{\beta}) + (A^T x_0)^t y &= -\theta(e^t x_0 - x_{n+1}^0) y_{m+1} - x_{n+2} \\
-z_{n+1} &= -\theta - y_{m+1} \\
x_i z_i &= \mu, \quad i = 1, \dots, n+2 \\
x > 0, \quad z > 0
\end{aligned}$$

Este sistema é o sistema KKT- μ associado ao problema GP- (x_0, θ) logo podemos observar que:

$$\begin{aligned}
g_k(t) &\leq e^\theta \\
\sum_{i \in J[0]} x_i &= 1 \\
Ax - \theta Ax_0 x_{n+2} &= b \\
x > 0
\end{aligned}$$

onde $t = e^y$.

3.4 O Algoritmo de Pontos Interiores Inviáveis para Programação Geométrica

O Algoritmo aqui desenvolvido tem como princípio básico gerar uma sequência $\{\mu^k\}$, $k = 0, 1, \dots$ com $\mu^k \geq \bar{\varepsilon}$, estritamente decrescente e uma sequência

$$w^k = (x^k, z^k, y^k) \in \overline{W}_{\mu^k}$$

com \overline{W}_{μ} dado por:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\mu} = \{(x, z, y) \in \mathbf{R}_{++}^{2n} \times \mathbf{R}^{m+1} : \\ \varepsilon \leq x^t z \leq \gamma_1 \mu, \\ \|J_{\theta}(x, z, y)\|_2 \leq \gamma_2 \mu \\ x^t z \leq x_i z_i \leq \gamma_3 \mu \quad i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

onde J_{θ} é a aplicação dada em (3.2.16) aplicada ao problema GP- (x_0, θ) , e o parâmetro θ será chamado de parâmetro de perturbação. Decorre da definição de W_{μ^k} que se $\mu_k = \frac{x^{k^t} z^k}{n}$ e $\sigma^k \in (0, \gamma]$, $\gamma < 1$, então

$$\|X^k z^k - \sigma^k \mu_k\| \leq x^{k^t} z^k.$$

Nosso objetivo é obtermos direções de descida para o "gap" $x^t z$, para a medida de proximidade

$$\delta(x, z) = \|Xz - \mu e\|_2,$$

e também para a função $\bar{\delta}(x, y, z)$ a qual chamaremos de medida de proximidade para pontos inviáveis, dada por:

$$\bar{\delta}_{\theta}(x, y, z) = \frac{1}{2} \|Xz - \mu e\|^2 + \frac{1}{2} \|-\nabla f_{\theta}(x) - A^T(x_0 \theta)y - z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|A(x_0, \theta)x - b\|_2^2,$$

ver [15], tomamos $\sigma^k = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x^{k^t} z^k}{x_0^t z_0}\right)^{1/n^2}\right)$. Desta forma criamos direções que são combinações convexas das direções afim escala e centralização.

Afim de assegurar que a sequência $w^k \in W^{\mu_k, \varepsilon}$ resolvemos em cada iteração o seguinte sistema de equações lineares:

$$\text{SL} \quad \begin{bmatrix} H^k + (X^k)^{-1}Z^k & -A^{t_k} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\nabla f_{\theta^k}(x^k) - \mu^k(X^k)^{-1}e \\ A^k x^k - b \end{pmatrix}$$

onde $A^k = [A : -\theta^k Ax_0]$ $f_{\theta^k}(x) = -\ln(u_{\theta^k}(x))$. Fazendo

$$\Delta^t w^k = (\Delta^t x^k, \Delta z^{k^t}, \Delta^t y^k)$$

onde

$$\Delta x^k = \delta x^k, \quad \Delta y^k = \delta y^k - y^k, \quad \Delta z^k = z^k - (X^k)^{-1}(Z^k \Delta x^k - \mu^k e)$$

temos que Δw^k é uma direção de descida para a função mérito

$$M_\theta(x, z, y) = x^t z + \frac{1}{2} \| -\nabla f_\theta(x) - A^T(x_0, \theta)y - z \|_2^2 + \frac{1}{2} \| A(x_0, \theta)x - b \|_2^2$$

3.4.1 O Algoritmo

Dados do Problema GP

- 1) Os coeficientes c_i ;
- 2) A matriz de expoentes a ;
- 3) O conjunto de índices $N = \{n_0, n_1 \dots n_p\}$.

Dados Iniciais para o Algoritmo:

$$\bar{x}_0^t = \left(\frac{1}{n_0}, \dots, \frac{1}{n_0}, \frac{n}{n_0} \right) \in \mathbf{R}_{++}^{n+1}, \bar{x}_0 \text{ é chamado ponto de referência}$$

$$y_0^t = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbf{R}^{m+2}$$

$$\theta_0 \in (0, 1], \sigma^0 = 0, c_{n+1} = e^{-\theta_0}, c_{n+2} = \frac{1}{2}, \alpha = 0.995$$

$$\gamma_1 \in (0, 1], x_0^t = (\bar{x}_0, \frac{1}{\theta_0}) \in \mathbf{R}_{++}^{n+2}, \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0$$

Inicialização:

Calcule:

$$A^0 = [A : -\theta A \bar{x}_0]$$

A^0 é a matriz das restrições do problema GD- (\bar{x}_0, θ)

$$-\nabla f_{\theta_0}(x_0), \quad H(x_0), \quad z_0 = \| -\nabla f_{\theta_0}(x_0) - A^{0t}y^0 \|_\infty \cdot e$$

onde e é o vetor $e^t = (1 \dots 1) \in \mathbf{R}_{++}^n$

$$R_0 = \frac{\| -\nabla f_{\theta_0}(x_0) - A^{0t}y_0 - z_0 \|_2^2 + \| A^0 x_0 - b \|_2^2}{x_0^t z_0}$$

Enquanto $(x^k)^t z^k \geq \varepsilon$.

3.4.1.1 – Determine a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} H^k + (X^k)^{-1}z^k & -A^{k^t} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f_{\theta^k} - \mu^k (X^k)^{-1}e \\ A^k x^k - b \end{pmatrix}$$

Calcule as direções:

$$\begin{aligned} \Delta x^k &= \delta x^k \\ \Delta y^k &= \delta y^k - y^k \\ \Delta z^k &= z^k - (X^k)^{-1}(Z^k \Delta x^k - \mu^k e) \end{aligned}$$

3.4.1.2 – Determine o tamanho do passo

a) Teste da razão: encontre t_k^a tal que

$$x^k + t_k^a \Delta x^k \geq 0$$

$$z^k + t_k^a \Delta z^k \geq 0$$

b) Decréscimo do "gap": encontre t_k^b tal que

$$(x^k + t_k^b \Delta x^k)^t (z^k + t_k^b \Delta z^k) < x^k z^k$$

c) Decréscimo das Inviabilidades: encontre t_k^c tal que

$$\left\| \nabla f_{\theta^k}(x^k + t_k^c \alpha \Delta x^k) - A^{k^t} (y^k + t_k^c \Delta y^k) - (z^k + t_k^c \Delta z^k) \right\|_2 \leq R_0 (x^k + t_k^c \Delta x^k)^t (z^k + t_k^c \Delta z^k)$$

$$\|A^k x^k - b\| \leq R_0(x^k + t_k^c \Delta x^k)^t (z^k + t_k^c \Delta z^k).$$

Faça $t_k = \min\{1, t_k^a, t_k^b, t_k^c\}$

3.4.1.3 Atualização: faça

$$x^{k+1} = x^k + t_n \alpha \Delta x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + t_k \alpha \Delta y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + t_k \alpha \Delta z^k$$

$$\theta^{k+1} = \max\left\{\frac{(x^{k+1})^t (z^{k+1})}{x_0^t z_0}, \varepsilon_1\right\}$$

$$\sigma^{k+1} = \frac{1}{2}(1 - (\theta^{k+1})^{1/n^2})$$

$$c_{n+1}^{k+1} = e^{-\theta^{k+1}}$$

$$\mu^{k+1} = \left\{ \sigma^{k+1} \frac{(x^{k+1})^t (z^{k+1})}{n} \right\}$$

$$A^{k+1} = A(\bar{x}_0, \theta^{k+1})$$

$$k = k + 1$$

Fim do enquanto.

Observações finais

O Método de Pontos Interiores aqui apresentado nos dá apenas um ponto que está numa vizinhança da trajetória central num ponto $\mu^L > 0$. Tal fato acontece porque a matriz Hessiana da função dual é singular e a aplicação J não é contínua em $\mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}^{n+m+1}$.

Computacionalmente o algoritmo mostra-se comparável ao de Kortaneck, Xu e Ye, o que é verificado ao resolvemos alguns problemas existentes na literatura de Programação Geométrica.

Apêndice

Experimentos Computacionais

Apresentamos neste apêndice o resultado da implementação do algoritmo desenvolvido no capítulo III, ao resolvemos um grupo de exemplos existentes na literatura de programação geométrica, inclusive alguns problemas considerados "patológicos", por serem subconsistentes (prob. Kort951), ou apenas um ínfimo pode ser determinado (problemas Kort952 e 953). Foram resolvidos 20 problemas e em todos eles o critério de parada foi obedecido. Denominamos os problemas de acordo com as referências na qual aparecem afim de facilitar a identificação e também para fazermos uma comparação com o algoritmo de Kortaneck, Xu e Ye [28]. O algoritmo foi implementado em MATLAB-386 for DOS e os problemas foram executados em um PC-486DX2 100MHZ, e o critério de parada foi o mesmo usado em [28], o qual é dado por:

$$\max\left\{\frac{x^t z}{1 + \|x\|_1 + \|z\|_1}, 10^{-4} \frac{\|Ax - b\|_1}{1 + \|x\|_1}, 10^{-4} \frac{\|-(x) - A^t y - z\|_1}{1 + \|z\|_1}\right\} \leq 10^{-12}$$

Com o objetivo de compararmos os resultados aqui obtidos com os resultados dados em [28] observamos que o algoritmo desenvolvido aqui resolve em cada iteração apenas um sistema de equações lineares da forma:

$$SL \quad \begin{bmatrix} H^k + (X^k)^{-1} Z^k & -A^{t_k} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\nabla f_{\theta^k}(x^k) - \mu^k (X^k)^{-1} e \\ A^k x^k - b \end{pmatrix}$$

Enquanto que em [28] determina-se uma direção afim-escala, determina-se os parâmetros de centragem e de perturbação, e a seguir resolve-se novamente um sistema linear do tipo SL afim de determinar as direções desejadas.

Nas tabelas 1 e 2 anexas (pag. 69 e 70) temos uma comparação do número de iterações do algoritmo desenvolvido no capítulo III com o algoritmo de Kortaneck, Xu e Ye [28] (tabela 1) e também uma comparação dos demais resultados que são dados em [28] são eles:

$$relgap = \frac{|obj_{primal} - GP - obj_{dual} - GD|}{1 + |obj_{dual} - GD|}$$

$$inf_D = \frac{\|Ax - b\|_1}{1 + \|x\|_1}, \quad inf_P = \sum_{k=1}^p \max\{g_k(t) - 1, 0\}$$

Problema Beck751 Ref [5][8]

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & 10t_1 t_2^{-1} t_4^2 t_6^{-3} t_7^\beta + 15t_1^{-1} t_2^{-2} t_3 t_4 t_5^{-1} t_7^{-0.5} + \\
 & 20t_1^{-2} t_2 t_4^{-1} t_5^{-2} t_6 + 25t_1^2 t_2^2 t_3^{-1} t_5^{0.5} t_6^{-2} t_7 \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 0.5t_1^{0.5} t_3^{-1} t_6^{-2} t_7 + 0.7t_1^3 t_2 t_3^{-2} t_6 t_7^{0.5} + 0.2t_2^{-1} t_3 t_4^{-0.5} t_6^{\frac{2}{3}} t_7^{0.25} \leq 1 \\
 & 1.3t_1^{-0.5} t_2 t_3^{-1} t_5^{-1} t_6 + 0.8t_3 t_4^{-1} t_5^{-1} t_6^2 + 3.1t_1^{-1} t_2^{0.5} t_4^{-2} t_5^{-1} t_6^{\frac{1}{3}} \leq 1 \\
 & 2t_1 t_3^{-1.5} t_5 t_6^{-1} t_7^{\frac{1}{3}} + 0.1t_2 t_3^{-0.5} t_5 t_6^{-1} t_7^{-0.5} + t_1^{-1} t_2 t_3^{0.5} t_5 \\
 & + 0.65t_2^{-2} t_3 t_5 t_6^{-1} t_7 \leq 1 \\
 & 0.2t_1^{-2} t_2 t_4^{-1} t_5^{0.5} t_7^{\frac{1}{3}} + 0.3t_1^{0.5} t_2^2 t_3 t_4^{\frac{1}{3}} t_5^{-\frac{2}{3}} t_7^{0.25} + 0.4t_1^{-3} t_2^{-2} t_3 t_5 t_6^{0.75} \\
 & + 0.5t_3^{-2} t_4 t_7^{0.5} \leq 1 \\
 & t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 7 \quad \beta = -0.25
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:7
Número de Rest.	Prima	:4
Número de Termos		:18
Grau de dificuldade		:10

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 2.85615855575196e + 00 \\
 t_2 &= 6.10823030803607e - 01 \\
 t_3 &= 2.15081256216411e + 00 \\
 t_4 &= 4.71287370922768e + 00 \\
 t_5 &= 9.99487540857664e - 01 \\
 t_6 &= 1.34750750482677e + 00 \\
 t_7 &= 3.16527665028102e - 02
 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned}
 x_{01} &= 5.56057737994567e - 01 & x_{10} &= 8.77902684338194e - 02 \\
 x_{02} &= 4.43364743520609e - 01 & x_{11} &= 1.07235567198619e + 00 \\
 x_{03} &= 2.36836844158320e - 04 & x_{12} &= 4.38229340010425e - 01 \\
 x_{04} &= 3.40681640665339e - 04 & x_{13} &= 7.91149816633945e - 01 \\
 x_{05} &= 1.22846843592335e - 14 & x_{14} &= 2.22018903961310e - 01 \\
 x_{06} &= 1.20716678811948e - 13 & x_{15} &= 6.55218309231036e - 15 \\
 x_{07} &= 5.26191066561876e - 14 & x_{16} &= 4.62000445815683e - 14 \\
 x_{08} &= 6.12632541971488e - 01 & x_{17} &= 1.02657721195365e - 14 \\
 x_{09} &= 1.37966284579795e + 00 & x_{18} &= 2.46737919149433e - 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Valor ótimo Primal} &= 1809.76476556483 \\
 \text{Valor ótimo Dual :} &= 1809.76476557100 \\
 \text{Max}\{g_k(t) | k = 1, \dots, p\} &= 1.000000000000116 \\
 \|Ax - b\|_2 &= 3.32708565658034e - 15 \\
 \text{Gap de Dualidade: } x^t z &= 6.96385488207605e - 13 \\
 \text{Tempo de CPU (seg.)} &= 16. \\
 \text{Número de iterações} &= 22
 \end{aligned}$$

Problema Beck752 Ref [5][8]

Problema Beck751 com $\beta = 0.25$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:7
Número de Rest.	Prima	:4
Número de Termos		:18
Grau de dificuldade		:10

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 3.89625319107111e + 00 \\ t_2 &= 8.09358760105343e - 01 \\ t_3 &= 2.66438599377522e + 00 \\ t_4 &= 4.30091287479484e + 00 \\ t_5 &= 8.53554935248758e - 01 \\ t_6 &= 1.09528744457641e + 00 \\ t_7 &= 2.73104596577148e - 02 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_{01} &= 4.73855826226122e - 01 & x_{10} &= 8.69130224853726e - 02 \\ x_{02} &= 5.23583300389483e - 01 & x_{11} &= 1.00211128292777e + 00 \\ x_{03} &= 4.08736358552978e - 04 & x_{12} &= 5.57232139774475e - 01 \\ x_{04} &= 2.15213702584146e - 03 & x_{13} &= 6.89729406888641e - 01 \\ x_{05} &= 1.95427163916224e - 04 & x_{14} &= 1.34095908420560e - 01 \\ x_{06} &= 1.98013429391720e - 02 & x_{15} &= 2.28455363256361e - 15 \\ x_{07} &= 3.17801365810306e - 03 & x_{16} &= 8.09218220501486e - 14 \\ x_{08} &= 4.77459846248946e - 01 & x_{17} &= 2.78042756692908e - 15 \\ x_{09} &= 1.29547116468341e + 00 & x_{18} &= 1.04555907710738e - 14 \end{aligned}$$

$$\text{Valor ótimo Primal} = 911.880571429980$$

$$\text{Valor ótimo Dual :} = 911.880571430068$$

$$\max\{g_k(t)k = 1, \dots, p\} = 1.000000000000080$$

$$\|Ax - b\|_2 = 4.47421732433933e - 15$$

$$\text{Gap de Dualidade: } x^t z = 2.07017060105411e - 13$$

$$\text{Tempo de CPU (seg.)} = 14.5$$

$$\text{Número de iterações} = 20$$

Problema Beck753 Ref [5][8]

Problema Beck751 com $\beta = 0.5$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:7
Número de Rest.	Prima	:4
Número de Termos		:18
Grau de dificuldade		:10

RESULTADOS

Solução Primal	Solução Dual
$t_1 = 4.39410451052815e + 00$	$x_{01} = 2.60277518861287e - 01$
$t_2 = 8.54468738797340e - 01$	$x_{02} = 7.32620526268245e - 01$
$t_3 = 2.84323031395038e + 00$	$x_{03} = 7.97461449007210e - 04$
$t_4 = 3.39997866768666e + 00$	$x_{04} = 6.30449342146147e - 03$
$t_5 = 7.22926133007208e - 01$	$x_{05} = 8.53498551447623e - 04$
$t_6 = 8.70406381804499e - 01$	$x_{06} = 6.10586374439760e - 02$
$t_7 = 2.46388263272340e - 02$	$x_{07} = 9.28028316616272e - 03$
	$x_{08} = 3.44280600791093e - 01$
	$x_{09} = 1.07564300066572e + 00$
	$x_{10} = 1.14312193625854e - 01$
	$x_{11} = 1.04901241810592e + 00$
	$x_{12} = 6.34899703079201e - 01$
	$x_{13} = 5.61279082600325e - 01$
	$x_{14} = 1.22652959286777e - 01$
	$x_{15} = 1.02789532651419e - 04$
	$x_{16} = 1.54092440977030e - 01$
	$x_{17} = 1.31733684335198e - 04$
	$x_{18} = 5.26806949900110e - 03$

Valor Ótimo Primal	=	543.667958466225
Valor Ótimo Dual :	=	543.667958466285
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000139
$\ Ax - b\ _2$	=	2.61098540311070e - 15
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	8.94722131680006e - 15
Tempo de CPU (seg.)	=	16.81
Número de iterações	=	22

Problema Demb761 Ref [8]

Minimizar $10^{-70} t_1^{-0.00133172} t_2^{-0.002270927} t_3^{-0.00248546} t_4^{-4.67} t_5^{-4.671973} t_6^{-0.00814}.$
 $t_7^{-0.008092} t_8^{-0.005} t_9^{-0.000909} t_{10}^{-0.00088} t_{11}^{-0.00119}$

Sujeito a $53637.300t_1 + 2186.3746t_2 + 97733.533t_3 + 6.6940803.10^{15}t_4t_5 \leq 1$
 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4t_{12} + t_5t_{12}^{-1} + t_6t_{12}^{-1} + t_7t_{12} + 1.0898645.10^{17}t_4t_5 +$
 $1.6108052.10^9t_2t_5t_{12}^{-1} + t_2t_4t_5 + 1.9304541.10^{-3}t_2t_4^{-1}t_5t_2^{-2} + t_10t_{12}^{-1} \leq 1$
 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + 1.0898645e + 17t_4t_5 + 1.6108052.10^9t_2t_5 +$
 $t_2t_4t_5t_6 + 1.9304541.10^{-3}t_2t_4^{-1}t_5 + t_9 + 1.1184059.10^7t_1t_9 + t_{11} \leq 1$
 $t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 12$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:12
Número de Rest. Primais	:3
Número de Termos	:31
Grau de dificuldade	:18

RESULTADOS

Solução Primal

$t_1 = 2.51807245220558e - 06$	$x_1 = 1.000000000000000$	$x_{17} = 8.79999999999997e - 04$
$t_2 = 2.53725190438068e - 05$	$x_2 = 4.42065163446287e - 04$	$x_{18} = 4.51642862791053e - 06$
$t_3 = 7.65742250075255e - 06$	$x_3 = 1.81568005329781e - 04$	$x_{19} = 4.55082899896840e - 05$
$t_4 = 1.18489387208944e - 09$	$x_4 = 2.44949958738137e - 03$	$x_{20} = 1.37343951989176e - 01$
$t_5 = 7.70024473927314e - 09$	$x_5 = 1.99906107078075e - 04$	$x_{21} = 2.12523229053996e - 09$
$t_6 = 1.30205895060364e - 03$	$x_6 = 7.30881993013574e - 06$	$x_{22} = 1.38112015132129e - 08$
$t_7 = 4.28194349356562e - 03$	$x_7 = 7.36448916319465e - 05$	$x_{23} = 2.33538010968840e - 03$
$t_8 = 2.78768099720051e - 03$	$x_8 = 2.22260174197208e - 05$	$x_{24} = 5.000000000000002e - 03$
$t_9 = 1.73786330824455e - 05$	$x_9 = 2.23920789808038e - 09$	$x_{25} = 1.78354231873882$
$t_{10} = 1.97396538995349e - 04$	$x_{10} = 3.43279341524180e - 08$	$x_{26} = 5.64466364829161e - 04$
$t_{11} = 6.63468077333675e - 04$	$x_{11} = 5.80461989031161e - 03$	$x_{27} = 1.09431180119577e - 17$
$t_{12} = 6.51082319423286e - 01$	$x_{12} = 8.09199999999998e - 03$	$x_{28} = 5.70919756845494e - 07$
	$x_{13} = 2.88626052120192$	$x_{29} = 3.11704120043345e - 05$
	$x_{14} = 1.40298903596302e - 03$	$x_{30} = 8.77829587995664e - 04$
	$x_{15} = 1.14344935445478e - 17$	$x_{31} = 1.190000000000000e - 03$
	$x_{16} = 2.17949249955304e - 06$	

Valor ótimo Primal	=	4.89047582163844e + 09
Valor ótimo Dual :	=	4.89047582163862e + 09
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.00000000000104
$\ Ax - b\ _2$	=	2.96107159506337e - 16
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	3.71097502437456e - 15
Tempo de CPU (seg.)	=	35.76
Número de iterações	=	16

Problema Demb762 Ref [8]

Minimizar	$10^5 t_1^{-0.00133172} t_2^{-0.002270927} t_3^{-0.00248546} t_4^{-4.67} t_5^{-4.671973} t_6^{-0.00814} \cdot$
	$t_7^{-0.008092} t_8^{-0.005} t_9^{-0.000909} t_{10}^{-0.00088} t_{11}^{-0.00119}$
Sujeito a	$5.3673730.10^{-2} t_1 + 2.1863746.10^{-2} t_2 + 9.7733533.10^{-2} t_3 + 6.6940803.10^{-3} t_4 t_5 \leq 1$
	$10^{-6} t_1 + 10^{-5} t_2 + 10^{-6} t_3 + 10^{-10} t_4 t_{12} + 10^{-8} t_5 t_{12}^{-1} + 10^{-2} t_6 t_{12}^{-1} +$
	$10^{-4} t_7 t_{12} + 1.0898645.10^{-1} t_4 t_5 + 1.6108052.10^{-4} t_2 t_5 t_{12}^{-1} +$
	$10^{-23} t_2 t_4 t_5 + 1.9304541.10^{-6} t_2 t_4^{-1} t_5 t_1 2^{-2} + 10^{-3} t_1 0 t_{12}^{-1} \leq 1$
	$10^{-6} t_1 + 10^{-5} t_2 + 10^{-6} t_3 + 10^{-9} t_4 + 10^{-9} t_5 + 10^{-3} t_6 + 10^{-3} t_7 +$
	$1.0898645.10^{-1} t_4 t_5 + 10^{-5} t_2 t_5 + 10^{-23} t_2 t_4 t_5 t_6 + 1.9304541.10^{-8} t_2 t_4^{-1} t_5 +$
	$10^{-5} t_9 + 1.1184059.10^7 t_1 t_9 + 10^{-4} t_{11} \leq 1$
	$t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 12$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:12
Número de Rest.	Prima	:3
Número de Termos		:31
Grau de dificuldade		:18

RESULTADOS

Solução Primal

$t_1 = 2.51615194753443$	$x_1 = 1.00000000000000e + 00$	$x_{17} = 8.80000000000000e - 04$
$t_2 = 2.54304592238784$	$x_2 = 4.42097156950023e - 04$	$x_{18} = 4.51299414575573e - 06$
$t_3 = 7.65624237766516$	$x_3 = 1.82011092653370e - 04$	$x_{19} = 4.56123143561893e - 05$
$t_4 = 0.99027315600172$	$x_4 = 2.44950512768957e - 03$	$x_{20} = 1.37323093949943e - 05$
$t_5 = 9.21359287142762$	$x_5 = 1.99937391970992e - 04$	$x_{21} = 1.77616348693318e - 09$
$t_6 = 1.38218123813701$	$x_6 = 7.30323600027817e - 06$	$x_{22} = 1.65255882066570e - 08$
$t_7 = 3.93386927545144$	$x_7 = 7.38129688419929e - 05$	$x_{23} = 2.47909345938176e - 03$
$t_8 = 2.78767473026558$	$x_8 = 2.22225629154407e - 05$	$x_{24} = 5.00000000000000e - 03$
$t_9 = 1.73914033924174$	$x_9 = 2.03699976424520e - 09$	$x_{25} = 1.78354650144249$
$t_{10} = 2.14863022527061$	$x_{10} = 3.77354914484414e - 08$	$x_{26} = 4.20253294400649e - 04$
$t_{11} = 6.63466585803163$	$x_{11} = 5.66090654061825e - 03$	$x_{27} = 1.02657234873163e - 17$
$t_{12} = 7.08691916875442$	$x_{12} = 8.092000000000001e - 03$	$x_{28} = 8.19248396667038e - 07$
	$x_{13} = 2.88625701628031e + 00$	$x_{29} = 3.11933870960552e - 05$
	$x_{14} = 1.54577840181217e - 03$	$x_{30} = 8.77806612903945e - 04$
	$x_{15} = 1.07297513123667e - 17$	$x_{31} = 1.19000000000000e - 03$
	$x_{16} = 2.63967953894856e - 06$	

Valor ótimo Primal	=	3.16748071810210
Valor ótimo Dual :	=	3.16748071810210
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.00000000000000
$\ Ax - b\ _2$	=	7.05408936880616e - 16
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	3.43556920172067e - 15
Tempo de CPU (seg.)	=	42.35
Número de iterações	=	18

Problema Demb781 Ref [9]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1} \\
 & \text{Sujeito a:} && 0.25t_1^{0.5} + t_2 \leq 1 \\
 & && t_1 > 0 \quad t_2 > 0
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:2
Número de Rest. Primais	:2
Número de Termos	:4
Grau de dificuldade	:1

RESULTADOS

Solução Primal

$$t_1 = 3.97996476403623e + 00$$

$$t_2 = 2.51258505863032e - 01$$

Solução Dual

$$x_1 = 4.99999999999642e - 01$$

$$x_2 = 5.00000000000358e - 01$$

$$x_3 = 1.43879791681862e - 12$$

$$x_4 = 7.19483617531167e - 13$$

Valor ótimo Primal	=	2.000000000000000
Valor ótimo Dual :	=	1.99999999999787
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000000
$\ Ax - b\ _2$	=	5.32907051820077e - 15
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	1.36419805458681e - 14
Tempo de CPU (seg.)	=	2.58
Número de iterações	=	9

Problema Demb782 Ref [9]

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1} \\ & \text{Sujeito a:} && 2t_1^2 \leq 1 \\ & && t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:2
Número de Rest. Primais	:2
Número de Termos	:3
Grau de dificuldade	:0

RESULTADOS

Solução Primal

$$t_1 = 0.00000018062355e + 03$$

$$t_2 = 5.53637658896508e + 03$$

Solução Dual

$$x_1 = 5.00000000000000e - 01$$

$$x_2 = 5.00000000000000e - 01$$

$$x_3 = 0.00000000000023$$

Valor ótimo Primal	=	2.000000000000000
Valor ótimo Dual :	=	1.99999999998316
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000000
$\ Ax - b\ _2$	=	0.00000000000178
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	0.00000000001245
Tempo de CPU (seg.)	=	3.4
Número de iterações	=	11

Problema Kort921 Ref. [24]

Minimizar $2541t_1 + 0.012293t_7 + 2.419t_3t_4t_6 + 77171t_3^{-1.8}t_5^{-4.8}t_6$

Sujeito a $888.76t_7^{-1}t_8 + 2.3972.10^{-1}t_2t_7^{-1}t_8 + t_7^{-1}t_8t_9t_{10} \leq 1$

$0.62004t_9^{-1} + 1.1072.10^{-3}t_2t_9^{-1} \leq 1$

$2.1872.10^{18}t_1^{-2}t_2^{-6.0244}t_{10}^{-1} + 6.2139.10^{-8}t_1t_2^{3.0122}t_{10}^{-1} \leq 1$

$50t_2^{-1} + 4.7394.10^{-9}t_2^{-1}t_7$

$+ 7.3124.10^{-6}t_2^{-1}t_3^{-\frac{7}{6}}t_4^{-1}t_6^{-\frac{4}{3}}t_7^{\frac{4}{3}} +$

$1.2577.10^{-5}t_2^{-1}t_3^{0.2}t_5^{0.8}t_6^{-1}t_7 \leq 1$

$2.447.10^{-6}t_8^{-1} + 1.0289.10^{-3}t_2 \leq 1$

$8.1667.10^{-3}t_4^{-1} + t_4^{-1}t_5 \leq 1$

$0.083333t_4^{-1} \leq 1$

$t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 10$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:10
Número de Rest. Primais	:7
Número de Termos	:20
Grau de dificuldade	:8

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 4.08835781391220e + 02 \\ t_2 &= 8.54470280796466e + 01 \\ t_3 &= 1.68123662682899e + 04 \\ t_4 &= 8.33330000007991e - 02 \\ t_5 &= 7.51663000007797e - 02 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_1 &= 3.20897949716680e - 02 \quad quad x_{11} = 1.23173814264614e - 02 \\ x_2 &= 9.60440709624428e - 01 \quad x_{12} = 1.32311602889499e - 02 \\ x_3 &= 6.55181607369298e - 03 \quad x_{13} = 3.17212717170484e - 03 \\ x_4 &= 9.17679330208053e - 04 \quad x_{14} = 3.78454910948645e - 03 \\ x_5 &= 9.15462583266262e - 01 \quad x_{15} = 2.42342992458399e - 03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_6 &= 6.25844716629966e + 01 & x_6 &= 2.10987793082456e - 02 & x_{16} &= 9.71082332200030e - 01 \\
t_7 &= 2.52929391625805e + 09 & x_7 &= 3.45209696255262e - 02 & x_{17} &= 9.36033856922464e - 02 \\
t_8 &= 2.68286824432281e + 06 & x_8 &= 2.99509877176301e - 02 & x_{18} &= 2.67939707562735e - 04 \\
t_9 &= 7.14646949489797e - 01 & x_9 &= 4.56998190789611e - 03 & x_{19} &= 2.46611684533048e - 03 \\
t_{10} &= 4.68959505545595e + 01 & x_{10} &= 2.22035881990654e - 02 & x_{20} &= 3.32104113129215e - 05
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Valor ótimo Primal} &= 3.23732738533320e + 07 \\
\text{Valor ótimo Dual :} &= 3.23732738533317e + 07 \\
\text{Max}\{g_k(t) | k = 1, \dots, p\} &= 1.00000000000059 \\
\|Ax - b\|_2 &= 6.28464545056490e - 15 \\
\text{Gap de Dualidade: } x^t z &= 7.07158070600949e - 15 \\
\text{Tempo de CPU (seg.)} &= 12.91 \\
\text{Número de iterações} &= 15
\end{aligned}$$

Problema Kort922 Ref. [24]

Minimizar	$19.4t_{11}^{-1.47} + 86t_{12}^{-0.38} + 152t_{13}^{-0.27}$ $19.4t_{21}^{-1.47} + 16.8t_{22}^{-1.66} + 27.4t_{23}^{-0.63} + 179t_{24}^{-0.37}$ $19.4t_{31}^{-1.47} + 16.8t_{32}^{-1.66} + 91.5t_{33}^{-0.3} + 120t_{34}^{-0.33} +$ $19.4t_{41}^{-1.47} + 45.9t_{42}^{-0.45} + 179t_{43}^{-0.37} +$ $19.4t_{51}^{-1.47} + 16.8t_{52}^{-1.66} + 91.5t_{53}^{-0.3} + 152t_{54}^{-0.27} +$ $19.4t_{61}^{-1.47} + 16.8t_{62}^{-1.66} + 27.4t_{63}^{-0.63} + 179t_{64}^{-0.37}$
Sujeito a:	$0.7756t_{11}t_{12}t_{13} \leq 1$ $0.8544t_{11}t_{12}t_{13} + .9172t_{21}t_{22}t_{23}t_{24} \leq 1$ $0.8804t_{11}t_{12}t_{13} + 2.0082t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}$ $+ 0.1029t_{31}t_{32}t_{33}t_{34} \leq 1$ $0.8540t_{11}t_{12}t_{13} + 4.331t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}$ $+ 0.3305t_{31}t_{32}t_{33}t_{34} + 0.4018t_{41}t_{42}t_{43} \leq 1$ $0.8433t_{11}t_{12}t_{13} + 4.4959t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}$ $+ 0.3476t_{31}t_{32}t_{33}t_{34} + 0.4377t_{41}t_{42}t_{43}$ $+ 0.012t_{51}t_{52}t_{53}t_{54} \leq 1$ $0.8162t_{11}t_{12}t_{13} + 4.8288t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}$ $+ 0.3827t_{31}t_{32}t_{33}t_{34} + 0.5003t_{41}t_{42}t_{43}$ $+ 0.0379t_{51}t_{52}t_{53}t_{54} + 1.64t_{61}t_{62}t_{63}t_{64} \leq 1$ $0.1t_{11}^{-1}t_{12}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{21}^{-1}t_{22}^{-1}t_{23}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{31}^{-1}t_{32}^{-1}t_{33}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{41}^{-1}t_{42}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{51}^{-1}t_{52}^{-1}t_{53}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{61}^{-1}t_{62}^{-1}t_{63}^{-1} \leq 1$ $0.15t_{21}^{-1}t_{22}^{-1}t_{23}^{-1} \leq 1$ $1.4286t_{61}t_{62} \leq 1$ $1.25t_{41} \leq 1$ $0 < t_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, 6; \quad j = 1, \dots, m_i$

onde $m_i = 3$ para $i = 1, 4$ $m_i = 4$ para $i = 2, 3, 5, 6$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:22
Número de Rest. Primais	:36
Número de Termos	:74
Grau de dificuldade	:38

RESULTADOS

Solução Primal

$t_{11} = 7.23964673056272e - 01$
 $t_{12} = 4.10222804994089e - 01$
 $t_{13} = 6.63362955787007e - 01$
 $t_{21} = 7.72902365052840e - 01$
 $t_{22} = 7.85389793681397e - 01$
 $t_{23} = 2.47104906956228e - 01$
 $t_{24} = 4.35984057708686e - 01$
 $t_{31} = 8.64584493375479e - 01$
 $t_{32} = 8.67353091260427e - 01$
 $t_{33} = 4.31619191066082e - 01$
 $t_{34} = 9.99999999908093e - 01$
 $t_{41} = 8.55839982297468e - 01$
 $t_{42} = 2.93649568093169e - 01$
 $t_{43} = 9.99999999995677e - 01$
 $t_{51} = 9.99999999985364e - 01$
 $t_{52} = 9.99999999984452e - 01$
 $t_{53} = 9.99999999983778e - 01$
 $t_{54} = 9.99999999995592e - 01$
 $t_{61} = 7.72902365032946e - 01$
 $t_{62} = 7.85389793663511e - 01$
 $t_{63} = 2.47104906970228e - 01$
 $t_{64} = 9.58965527951798e - 01$

Solução Dual

$x_1 = 1.70283767179419e - 02$
 $x_2 = 6.58729309841386e - 02$
 $x_3 = 9.27100510158727e - 02$
 $x_4 = 1.54673023474267e - 02$
 $x_5 = 3.60903721428003e - 02$
 $x_6 = 1.32863278815492e - 01$
 $x_7 = 1.31174932815346e - 02$
 $x_8 = 1.16160934481279e - 02$
 $x_9 = 6.42757170750061e - 02$
 $x_{10} = 6.55144812174924e - 02$
 $x_{11} = 1.33149858742149e - 02$
 $x_{12} = 4.34956205173932e - 02$
 $x_{13} = 9.77257678131707e - 02$
 $x_{14} = 1.05915077969344e - 02$
 $x_{15} = 9.17202737061243e - 03$
 $x_{16} = 4.99547919271239e - 02$
 $x_{17} = 8.29850095396782e - 02$
 $x_{18} = 1.54673023480108e - 02$
 $x_{19} = 1.36969484648415e - 02$
 $x_{20} = 3.60903721415125e - 02$
 $x_{21} = 9.92526206963485e - 02$
 $x_{22} = 1.26621141963255e - 13$
 $x_{23} = 1.32820760352627e - 13$
 $x_{24} = 8.88596536650358e - 14$
 $x_{25} = 1.89920765444483e - 13$
 $x_{26} = 1.64272631051178e - 13$
 $x_{27} = 9.28698920327296e - 14$
 $x_{28} = 9.63145000309174e - 13$
 $x_{29} = 1.79908488513738e - 12$
 $x_{30} = 6.97773898752139e - 13$
 $x_{31} = 6.71480335487846e - 13$
 $x_{32} = 5.05108691852580e - 13$
 $x_{33} = 7.95599726294033e - 13$
 $x_{34} = 3.80857041355089e - 13$
 $x_{35} = 3.75092174350987e - 13$
 $x_{36} = 1.14673570613152e - 13$
 $x_{37} = 2.50317137863222e - 02$
 $x_{38} = 4.91594131674042e - 02$
 $x_{39} = 1.92827151277532e - 02$
 $x_{40} = 1.95730292348777e - 02$
 $x_{41} = 5.89990221658373e - 03$
 $x_{42} = 3.67234696518736e - 02$
 $x_{43} = 3.50336127907214e - 13$
 $x_{44} = 2.64224787116545e - 02$
 $x_{45} = 3.08537369817665e - 13$
 $x_{46} = 4.59509513411579e - 13$
 $x_{47} = 1.25353000715359e - 13$
 $x_{48} = 1.39865352028909e - 02$
 $x_{49} = 1.66962014793135e - 12$
 $x_{50} = 9.32097619776066e - 13$
 $x_{51} = 7.36386465023062e - 13$
 $x_{52} = 2.66939314790910e - 13$
 $x_{53} = 5.79782709805444e - 13$
 $x_{54} = 9.23227319370935e - 13$
 $x_{55} = 9.84481803682662e - 13$
 $x_{56} = 1.70114250652230e - 13$
 $x_{57} = 2.85771709217705e - 13$
 $x_{58} = 1.63719607639981e - 12$
 $x_{59} = 1.67372507246247e - 12$
 $x_{60} = 2.83406360945753e - 13$
 $x_{61} = 2.33706367924558e - 03$
 $x_{62} = 1.53106032336482e - 12$
 $x_{63} = 1.94232749891675e - 13$
 $x_{64} = 1.65855048577812e - 02$
 $x_{65} = 9.66961424820880e - 03$
 $x_{66} = 9.32566322193169e - 03$
 $x_{67} = 9.08653536485236e - 03$
 $x_{68} = 1.65060503623028e - 02$
 $x_{69} = 9.23275960167208e - 13$
 $x_{70} = 9.84530782359880e - 13$
 $x_{71} = 1.70110628061641e - 13$
 $x_{72} = 5.77520572102232e - 12$
 $x_{73} = 1.25958968882624$
 $x_{74} = 1.29098805029843e - 14$

Valor Ótimo Primal	=	1831.65611293155
Valor Ótimo Dual :	=	1831.65611304345
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.00000000001003
$\ Ax - b\ _2$	=	4.90441852924698e - 11
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	2.99865162243229e - 11
Tempo de CPU (seg.)	=	90.68
Número de iterações	=	16

Problema Kort951 Ref. [16][28]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && t_1 + t_3 \\
 & \text{Sujeito a:} && 2t_2 t_3^{-1} \leq 1 \\
 & && t_2^{-1} t_3^{-1} \leq 1 \\
 & && t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \quad t_3 > 0
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:2
Número de Rest. Primais	:2
Número de Termos	:4
Grau de dificuldade	:1

RESULTADOS

Solução Primal	Solução Dual
$t_1 = 0.00000000000001e + 00$	$x_1 = 4.53173053753339e - 16$
$t_2 = 7.07106781186564e - 01$	$x_2 = 1.00000000000218e + 00$
$t_3 = 1.41421356241216e + 00$	$x_3 = 5.00000000000000e - 01$
	$x_4 = 5.00000000000000e - 01$

Valor ótimo Primal	=	1.41421356226359e + 00
Valor ótimo Dual :	=	1.41421356227617e + 00
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.00000000010500e + 00
$\ Ax - b\ _2$	=	5.34753258579411e - 12
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	1.38244636909750e - 10
Tempo de CPU (seg.)	=	4.07
Número de iterações	=	14

Problema Kort952 Ref. [16][28]

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & t_1^{-1} \\ \text{Sujeito a:} & 0.5t_1 + 0.5t_1^{-1} \leq 1 \\ & t_1 > 0 \end{array}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:1
Número de Rest.	Prima	:1
Número de Termos		:3
Grau de dificuldade		:1

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{array}{ll} t_1 = 1.00000005260197e + 00 & x_1 = 1.00000000000000e + 00 \\ t_2 = 2.51258505863032e - 01 & x_2 = 9.40068937505444e + 06 \\ & x_3 = 9.40068837505444e + 06 \end{array}$$

$$\text{Valor ótimo Primal} = 9.99999947398030e - 01$$

$$\text{Valor ótimo Dual :} = 9.99999950485410e - 01$$

$$Max\{g_k(t) | k = 1, \dots, p\} = 1.00000000000000$$

$$\|Ax - b\|_2 = 1.21388998320228e - 14$$

$$\text{Gap de Dualidade: } x^t z = 8.28193469754116e - 10$$

$$\text{Tempo de CPU (seg.)} = 18.23$$

$$\text{Número de iterações} = 60$$

Problema Kort953 Ref. [16][28]

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & t_1 \\ \text{Sujeito a:} & t_1 + t_2 \leq 1 \\ & t_1^{-1} \leq 1 \\ & t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \end{array}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:2
Número de Rest.	Prima	:2
Número de Termos		:4
Grau de dificuldade		:1

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 9.99999995418673e - 01 \\ t_2 &= 1.71741298049217e - 70 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.00000000000000e + 00 \\ x_2 &= 2.20852742806978e - 03 \\ x_3 &= 1.10517633515973e - 13 \\ x_4 &= 1.00220852727169e + 00 \end{aligned}$$

Valor ótimo Primal	=	9.99999992170224e - 01
Valor ótimo Dual :	=	1.00000000324843e + 00
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	9.99999999973410e - 01
$\ Ax - b\ _2$	=	2.16735556382238e - 10
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	3.53564621813066e - 09
Tempo de CPU (seg.)	=	9.61
Número de iterações	=	34

Problema Rijk781 Ref. [38]

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & t_1^{-1} \\ \text{Sujeito a:} & t_1 t_2^{-1} + 0.5 t_3^{-1} \leq 1 \\ & 0.01 t_3 t_4^{-1} + 0.01 t_2 + 0.0005 t_2 t_4 \leq 1 \\ & t_1 > 0, t_2 > 0 \end{array}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:4
Número de Rest. Primais	:2
Número de Termos	:6
Grau de dificuldade	:1

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 8.26228714856915e + 01 \\ t_2 &= 8.79295990610434e + 01 \\ t_3 &= 8.28472894173007 \\ t_4 &= 1.37273467275880 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.00000000000000e + 00 \\ x_2 &= 1.00000000000000e + 00 \\ x_3 &= 6.42283120874312e - 02 \\ x_4 &= 6.42283120874312e - 02 \\ x_5 &= 9.35771687912569e - 01 \\ x_6 &= 6.42283120874312e - 02 \end{aligned}$$

Valor ótimo Primal	=	1.21031862245695e - 02
Valor ótimo Dual :	=	1.21031862246320e - 02
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000331
$\ Ax - b\ _2$	=	8.42782868523862e - 16
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	4.75539327258905e - 14
Tempo de CPU (seg.)	=	3.95
Número de iterações	=	11

Problema Rijk782 Ref. [38]

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 5t_1 + 50000t_1^{-1} + 20t_2 + 72000t_2^{-1} + 10t_3 + 144000t_3^{-1} \\ \text{Sujeito a:} \quad & 4t_1^{-1} + 32t_2^{-1} + 120t_3^{-1} \leq 1 \\ & t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \quad t_3 > 0 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:3
Número de Rest. Primais	:1
Número de Termos	:9
Grau de dificuldade	:5

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 1.08734704910980e + 02 \\ t_2 &= 8.51262127909253e + 01 \\ t_3 &= 2.04324596612700e + 02 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_1 &= 8.62995433259160e - 02 & x_6 &= 1.11869617953280e - 01 \\ x_2 &= 7.29914745386059e - 02 & x_7 &= 1.33080687873098e - 02 \\ x_3 &= 2.70248704677503e - 01 & x_8 &= 1.35990913733250e - 01 \\ x_4 &= 1.34257790944253e - 01 & x_9 &= 2.12463250607162e - 01 \\ x_5 &= 3.24332868560442e - 01 \end{aligned}$$

Valor ótimo Primal	=	6.29984242792252e + 03
Valor ótimo Dual :	=	6.29984242792137e + 03
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000331
$\ Ax - b\ _2$	=	8.68142012596645e - 16
Gap de Dualidade: $x^t z$	=	2.92556852626931e - 13
Tempo de CPU (seg.)	=	5.27
Número de iterações	=	15

Problema Rijk783 Ref. [38]

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & 592t_1^{0.65} + 582t_1^{0.39} + 1200t_1^{0.52} + 370t_1^{0.22}t_2^{-0.22} \\
 & + 250t_1^{0.4}t_3^{-0.4} + 210t_1^{0.62}t_3^{-0.62} + 250t_1^{0.4}t_4^{-0.4} + 200t_1^{0.85}t_4^{-0.85} \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 500t_1^{-1} + 50t_1^{-1}t_2 + 50t_1^{-1}t_3 + 50t_1^{-1}t_4 \leq 1 \\
 & t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \quad t_3 > 0 \quad t_4 > 0
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:4
Número de Rest. Primais	:1
Número de Termos	:12
Grau de dificuldade	:7

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 7.49894869983588e + 02 \\
 t_2 &= 1.11141722161457e - 01 \\
 t_3 &= 1.46193669912674 \\
 t_4 &= 3.42481897761143
 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3.46463650607269e - 01 & x_7 &= 1.70871973333814e - 02 \\
 x_2 &= 6.09198542446391e - 02 & x_8 &= 1.54498427837605e - 01 \\
 x_3 &= 2.97007329371322e - 01 & x_9 &= 4.03403927323227e - 01 \\
 x_4 &= 2.03795487492247e - 02 & x_{10} &= 4.48350072482944e - 03 \\
 x_5 &= 2.40189742376280e - 02 & x_{11} &= 5.89751006187880e - 02 \\
 x_6 &= 7.96250176189295e - 02 & x_{12} &= 1.38158542595318e - 01
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Valor Ótimo Primal} &= 1.26303177997356e + 05 \\
 \text{Valor Ótimo Dual :} &= 1.26303177993426e + 05 \\
 \max\{g_k(t) | k = 1, \dots, p\} &= 9.99999999999999e - 01 \\
 \|Ax - b\|_2 &= 7.27006647198067e - 15 \\
 \text{Gap de Dualidade: } x^t z &= 1.73269917538007e - 14 \\
 \text{Tempo de CPU (seg.)} &= 5.33 \\
 \text{Número de iterações} &= 12
 \end{aligned}$$

Problema Rijk784 Ref. [38]

Minimizar $10^5 t_1^{-0.00133172} t_2^{-0.002270927} t_3^{-0.00248546} t_4^{-4.67} t_5^{-4.671973} t_6^{-0.00814} \cdot t_7^{-0.008092} t_8^{-0.005} t_9^{-0.00909} t_{10}^{-0.00088} t_{11}^{-0.0019}$

Sujeito a: $0.005176t_1 + 0.021864t_2 + 0.097733t_3 + 0.00669408t_4t_5 \leq 1$
 $10^{-6}t_1 + 10^{-5}t_2 + 10^{-6}t_3 + 10^{-10}t_4 + 10^{-8}t_5 + 10^{-3}t_6 + 10^{-3}t_7 + 0.10898645t_4t_5 \leq 1$
 $0.10898645t_2t_5 + 10^{-23}t_2t_4t_5 + 1.93 \cdot 10^{-6}t_2t_4^{-1}t_5t_6 + 10^{-4}t_{10} +$
 $10^{-6}t_1 + 10^{-5}t_2 + 10^{-6}t_3 + 10^{-10}t_4 + 10^{-8}t_5 + 10^{-3}t_6 + 10^{-3}t_8 +$
 $0.10898645t_4t_5 + 0.00016108t_2t_5 + 10^{-23}t_2t_4t_5 + 1.9 \cdot 10^{-6}t_2t_4^{-1}t_5 +$
 $10^{-5}t_9 + 0.0001184t_1t_9 + 10^{-4}t_{11} \leq 1$
 $t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 11$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primaes	:11
Número de Rest. Primaes	:3
Número de Termos	:31
Grau de dificuldade	:19

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_1 &= 1.44940567890281e - 02 \\ t_2 &= 2.77810432223150 \\ t_3 &= 8.98591970368459 \\ t_4 &= 1.35795490083510e + 01 \\ t_5 &= 6.70647747075096e - 01 \\ t_6 &= 1.73004553622539 \\ t_7 &= 5.68332565199929 \\ t_8 &= 1.52380291717814 \\ t_9 &= 2.36450232813244e + 02 \\ t_{10} &= 2.68189313423324 \\ t_{11} &= 5.79045108527671 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.000000000000000 \\ x_2 &= 2.08706523523893e - 07 \\ x_3 &= 1.68977922489187e - 04 \\ x_4 &= 2.44318054269279e - 03 \\ x_5 &= 1.69598697472719e - 04 \\ x_6 &= 2.06368445479854e - 08 \\ x_7 &= 3.95550449720438e - 05 \\ x_8 &= 1.27942804433999e - 05 \\ x_9 &= 1.93347563788728e - 09 \\ x_{10} &= 9.54877824166020e - 09 \\ x_{11} &= 2.46326347219107e - 03 \\ x_{12} &= 8.09200000000000e - 03 \\ x_{13} &= 1.41320659616119 \\ x_{14} &= 9.84749671854176e - 04 \\ x_{15} &= 1.16585421947455e - 17 \\ x_{17} &= 8.79999999999999e - 04 \\ x_{18} &= 4.75588300658242e - 08 \\ x_{19} &= 9.11569432935420e - 05 \\ x_{20} &= 2.94851768638130e - 05 \\ x_{21} &= 4.45580894831312e - 09 \\ x_{22} &= 2.20057247202965e - 08 \\ x_{23} &= 5.67673652780894e - 03 \\ x_{24} &= 5.00000000000000e - 03 \\ x_{25} &= 3.25662553649759 \\ x_{26} &= 9.84749671854176e - 04 \\ x_{27} &= 1.16585421947455e - 17 \\ x_{28} &= 8.68872768433200e - 07 \\ x_{29} &= 7.75855690219814e - 03 \\ x_{30} &= 1.33144309780186e - 03 \\ x_{31} &= 1.90000000000000e - 03 \end{aligned}$$

$x_{16} = 8.68872768433200e - 07$	
Valor Ótimo Primal	= 3.06723779931679
Valor Ótimo Dual :	= 3.06723779931678
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	= 1.000000000000000
$\ Ax - b\ _2$	= 5.05158570892707e - 16
Gap de Dualidade: $x^t z$	= 3.67391570148969e - 15
Tempo de CPU (seg.)	= 54.48
Número de iterações	= 19

Problema Rijk785 Ref. [38]

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & 168t_1 t_2 + 3651.2t_1 t_2 t_3^{-1} + 3651.2t_1 + 40000t_4^{-1} \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 1.0425t_1 t_2^{-1} \leq 1 \\
 & 0.00035t_1 t_2 \leq 1 \\
 & 1.25t_1^{-1}t_4 + 41.63t_1^{-1} \leq 1 \\
 & t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \quad t_3 > 0
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:4
Número de Rest. Primais	:3
Número de Termos	:8
Grau de dificuldade	:3

RESULTADOS

Solução Primal	Solução Dual
$t_1 = 4.30137553577189e + 01$	$x_1 = 5.19921606569034e - 01$
$t_2 = 4.48418399604841e + 01$	$x_2 = 1.70113825877931e - 01$
$t_3 = 6.64239342360816e + 01$	$x_3 = 2.51988535544886e - 01$
$t_4 = 1.10700428613735$	$x_4 = 5.79760320081511e - 02$
	$x_5 = 6.90035432446965e - 01$
	$x_6 = 1.70113825877925e - 01$
	$x_7 = 5.79760320081509e - 02$
	$x_8 = 1.74419719430859$

Valor Ótimo Primal	= 6.23249876120479e + 05
Valor Ótimo Dual :	= 6.23249876117587e + 05
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	= 9.99999999999999e - 01
$\ Ax - b\ _2$	= 6.24269112039562e - 15
Gap de Dualidade: $x^t z$	= 1.01807451358132e - 13
Tempo de CPU (seg.)	= 5.99
Número de iterações	= 17

Problema Rijk786 Ref. [38]

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & 2t_1^{0.9}t_2^{-1.5}t_3^{-3} + 5t_4^{-0.3}t_5^{2.6} + 4.7t_6^{-1.8}t_7^{-0.5}t_8 \\
 \text{Sujeito a:} \quad & 7.2t_1^{-3.8}t_2^{2.2}t_3^{4.3} + 0.5t_4^{-0.7}t_5^{-1.6} + 0.2t_6^{4.3}t_7^{-1.9}t_8^{8.5} \leq 1 \\
 & 10t_1^{2.3}t_2^{1.7}t_3^{4.5} \leq 1 \\
 & \beta t_4^{-2.1}t_5^{0.4} \leq 1 \\
 & 6.2t_6^{4.5}t_7^{-2.7}t_8^{-0.6} \leq 1 \\
 & 3.1t_1^{1.6}t_2^{0.4}t_3^{-3.8} \leq 1 \\
 & 3.7t_4^{5.4}t_5^{1.3} \leq 1 \\
 & 0.3t_6^{-1.1}t_7^{7.3}t_8^{-5.6} \leq 1 \\
 & t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 8 \quad \beta = 0.6
 \end{aligned}$$

ESTATÍSTICA

Número de Vars.	Prima	:4
Número de Rest.	Prima	:3
Número de Termos		:8
Grau de dificuldade		:3

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 9.68889071118269e - 01 \\
 t_2 &= 1.98952159244957e - 01 \\
 t_3 &= 1.12127059669352e - 00 \\
 t_4 &= 7.84410026306503e - 01 \\
 t_5 &= 1.00224370906804e - 00 \\
 t_6 &= 7.01033973645064e - 01 \\
 t_7 &= 1.09414148281833e - 00 \\
 t_8 &= 9.72445179596921e - 01
 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 5.31619879971197e - 01 & x_9 &= 1.12340687314760e - 01 \\
 x_2 &= 1.85061721235884e - 01 & x_{10} &= 3.25403952690324e - 02 \\
 x_3 &= 2.83318398792919e - 01 & x_{11} &= 6.91855054553016e - 02 \\
 x_4 &= 2.34899280706669e - 01 & x_{12} &= 6.55920131214921e - 02 \\
 x_5 &= 3.64435910185728e - 01 \\
 x_6 &= 1.78119161266227e - 02 \\
 x_7 &= 1.57432496643831e - 01 \\
 x_8 &= 2.99895599799303e - 02
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Valor Ótimo Primal} &= 2.92294839244682e + 01 \\
 \text{Valor Ótimo Dual :} &= 2.92294839248974e + 01 \\
 \text{Max}\{g_k(t) | k = 1, \dots, p\} &= 1.00000000001875 \\
 \|Ax - b\|_2 &= 2.37293569335624e - 15 \\
 \text{Gap de Dualidade: } x^t z &= 1.45686615218398e - 11 \\
 \text{Tempo de CPU (seg.)} &= 7.91 \\
 \text{Número de iterações} &= 17
 \end{aligned}$$

Problema Rijk787 Ref. [38]

Problema Rijk786 com $\beta = 0.2$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:4
Número de Rest. Primais	:3
Número de Termos	:8
Grau de dificuldade	:3

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned}t_1 &= 9.66813613462653e - 01 \\t_2 &= 1.99777173071387e - 01 \\t_3 &= 1.12074674686013 \\t_4 &= 7.82962660496144e - 01 \\t_5 &= 1.00996210112422 \\t_6 &= 7.02013824891775e - 01 \\t_7 &= 1.09617004080481 \\t_8 &= 9.74528680486279e - 01\end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned}x_1 &= 5.28106041736572e - 01 & x_9 &= 1.12206375748003e - 01 \\x_2 &= 1.88914287485643e - 01 & x_{10} &= 3.23253136113027e - 02 \\x_3 &= 2.82979670777785e - 01 & x_{11} &= 5.62099432363579e - 02 \\x_4 &= 2.33346671210805e - 01 & x_{12} &= 6.55135930382645e - 02 \\x_5 &= 3.52656296043716e - 01 \\x_6 &= 1.77906206688586e - 02 \\x_7 &= 1.56391917939157e - 01 \\x_8 &= 1.86272804395073e - 14\end{aligned}$$

Valor Ótimo Primal	=	2.92264512243685e + 01
Valor Ótimo Dual :	=	2.92264512243627e + 01
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.000000000000000
$\ Ax - b\ _2$	=	1.36272717640288e - 15
Gap de Dualidade: $x^T z$	=	2.58116899586383e - 13
Tempo de CPU (seg.)	=	8.02
Número de iterações	=	15

Problema Rijk788 Ref. [38]

Minimizar $10t_1 t_2^{-1} t_3^{-1} t_4 + 20t_1^{-1} t_4^{-1} t_5 t_6 + 30t_2 t_3 t_4 +$
 $100t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} t_4^{-1} t_5^{-1} t_6^{-1} t_7^{-1} + 5t_1^2 t_2^2 t_3 t_4 t_6^{1.5} t_7^2 +$
 $50t_3^{-0.5} t_4^{-0.5} t_5^{-0.5} + 25t_3^2 t_4^2 t_5^{-1} t_6^{-1} t_7^{-1} + 10t_3^{0.5} t_4^{0.5} t_5 t_6 t_7$

Sujeito a: $0.2t_1^2 t_2^2 t_3 + 0.05t_4 t_5^{0.5} + 0.15t_5^{0.5} t_6^{0.5} \leq 1$
 $0.1t_1 t_4 t_7 + 0.05t_1 t_2^{-1} t_3^{-1} t_5 t_6 t_7^{0.5} + 0.05t_2^2 t_3^2 t_4^{-1} +$
 $0.15t_1^{-0.5} t_2^{-0.3} t_4 t_6^{0.5} + 0.1t_5 t_6 + 0.1t_4^2 + 0.2t_1 t_2 t_3 \leq 1$
 $0.1t_1 + 0.1t_2 + 0.1t_3 + 0.1t_4 + 0.1t_5 + 0.1t_6 + 0.1t_7 \leq 1$
 $0.02t_1^2 + 0.02t_1 t_2 + 0.02t_1 t_3 + 0.02t_1 t_4 + 0.02t_1 t_5 + 0.02t_1 t_6 + 0.02t_1 t_7 \leq 1$
 $0.01t_1 t_2^{-1} + 0.01t_2 t_3^{-1} + 0.01t_3 t_4^{-1} + 0.01t_4 t_5^{-1} + 0.01t_5 t_6^{-1} + 0.01t_6 t_7^{-1} \leq 1$
 $0.1t_1 t_3^{-2} + 0.1t_2 t_4^{-2} + 0.1t_3 t_5^{-2} + 0.1t_4 t_6^{-2} + 0.1t_5 t_7^{-2} \leq 1$
 $0.02t_1^{-0.5} t_3 + 0.02t_2^{-0.5} t_4 + 0.02t_3^{-0.5} t_5 + 0.02t_4^{-0.5} t_6 + 0.02t_5^{-0.5} t_7 \leq 1$
 $t_j > 0 \quad j = 1, \dots, 7$

ESTATÍSTICA

Número de Vars. Primais	:4
Número de Rest. Primais	:3
Número de Termos	:8
Grau de dificuldade	:3

RESULTADOS

Solução Primal

$$\begin{aligned} t_{02} &= 1.34186577012542e + 00 \\ t_{02} &= 9.93245490580146e - 01 \\ t_{03} &= 8.70468948184761e - 01 \\ t_{04} &= 9.23591117035729e - 01 \\ t_{05} &= 3.14899476802615e + 00 \\ t_{06} &= 4.03873391244407e - 01 \\ t_{07} &= 1.54768291900542e + 00 \end{aligned}$$

Solução Dual

$$\begin{aligned} x_{01} &= 8.03145888587965e - 02 & x_{25} &= 3.87398388766073e - 14 \\ x_{02} &= 1.14993649716562e - 01 & x_{26} &= 1.92094609391450e - 15 \\ x_{03} &= 1.34222829993368e - 01 & x_{27} &= 1.70296004807237e - 15 \\ x_{04} &= 2.65654775375658e - 01 & x_{28} &= 1.61963605987168e - 15 \\ x_{05} &= 8.38636817212584e - 02 & x_{29} &= 1.65620864770529e - 15 \\ x_{06} &= 1.76069051029661e - 01 & x_{30} &= 2.84873422360941e - 15 \\ x_{07} &= 4.59962477196313e - 02 & x_{31} &= 1.24424774619250e - 15 \\ x_{08} &= 9.88851755850653e - 02 & x_{32} &= 2.04028433012620e - 15 \\ x_{09} &= 2.98229045000708e - 15 & x_{33} &= 1.08121014078519e - 15 \\ x_{10} &= 2.19219937584924e - 15 & x_{34} &= 1.03116870952576e - 15 \\ x_{11} &= 2.60678955853731e - 15 & x_{35} &= 9.79162644382004e - 16 \\ x_{12} &= 5.06587104131151e - 02 & x_{36} &= 7.40992173159845e - 16 \\ x_{13} &= 3.24272923619347e - 02 & x_{37} &= 1.98953175247061e - 15 \\ x_{14} &= 1.06879237411706e - 02 & x_{38} &= 7.22794304580709e - 16 \\ x_{15} &= 5.29349262996741e - 02 & x_{39} &= 1.47060257673071e - 02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{16} &= 3.35892648502458e-02 & x_{40} &= 9.66918616970092e-03 \\
x_{17} &= 2.25290465951547e-02 & x_{41} &= 7.28957519037937e-04 \\
x_{18} &= 6.12819073983320e-02 & x_{42} &= 4.70199410002100e-02 \\
x_{19} &= 3.39229495473222e-14 & x_{43} &= 1.09169362632089e-02 \\
x_{20} &= 2.57534440733437e-14 & x_{44} &= 1.09621076424605e-15 \\
x_{21} &= 2.28709961186616e-14 & x_{45} &= 1.16604571489566e-15 \\
x_{22} &= 2.41186273054677e-14 & x_{46} &= 1.82965937834829e-15 \\
x_{23} &= 7.61615999515573e-14 & x_{47} &= 9.35886991351989e-16 \\
x_{24} &= 1.18470394945300e-14 & x_{48} &= 1.14506830851233e-15
\end{aligned}$$

Valor Ótimo Primal	=	178.477919997770
Valor Ótimo Dual :	=	178.477919998366
$\max\{g_k(t) k = 1, \dots, p\}$	=	1.00000000001242
$\ Ax - b\ _2$	=	1.59028056606002e-15
Gap de Dualidade:	$x^t z$	= 1.37308644570208e-13
Tempo de CPU (seg.)	=	66.18
Número de iterações	=	21

Tabela 1**Comparação do Número de Iterações**

Resumo dos problemas			Eficiencia		Precisão			
Nome do Problema	Número de Var. Restr.	Terms	Grau de Dific.	N. Iter.	Kort. N. Iter.	Valor Objetivo DUAL	Valor Objetivo PRIMAL	
1 Beck751	7	4	18	10	22	13	1.80976476557e+03	1.80976476557e+03
2 Beck752	7	4	18	10	20	13	9.11880571430e+02	9.11880571430e+02
3 Beck753	7	4	18	10	22	14	5.43667958466e+02	5.43667958466e+02
4 Demb761	12	3	31	18	16	20	4.89197944642e+09	4.89197944642e+09
5 Demb762	12	3	31	18	18	16	3.17245814116e+00	3.17245813419e+00
6 Demb781	2	1	4	1	9	7	2.00000000000e+00	2.00000000000e+00
7 Demb782	2	1	3	0	11	5	2.00000000000e+00	2.00000000000e+00
8 Kort921	10	7	20	9	15	14	1.83180661058e+03	1.83180661058e+03
9 Kort922	22	36	73	50	16	14	3.23732738533e+03	3.23732738533e+03
10 Kort951	3	2	4	1	10	15	1.00000000000e+00	1.00000000000e+00
11 Kort952	1	1	3	1	52	40	9.99655192851e-01	9.996310742237e-01
12 Kort953	2	2	4	0	15	40	1.41421356237e+00	1.41421356237e+00
13 Rijk781	4	2	6	1	11	8	1.21031862246e-02	1.21031862246e-02
14 Rijk782	3	1	9	5	13	11	6.29984242792e+03	6.29984242792e+03
15 Rijk783	11	3	31	19	12	7	1.26303177993e+05	1.26303177993e+05
16 Rijk785	4	3	8	3	16	12	6.23249876121e+05	6.23249876107e+05
17 Rijk786	8	7	12	3	15	10	2.92294839249e+01	2.92294839249e+01
18 Rijk787	8	7	12	3	13	7	2.92264512244e+01	2.92264512244e+01
19 Rijk788	7	7	48	40	18	12	1.78477919998e+02	1.78477919998e+02

Tabela 2**Comparação com os Parâmetros utilizados em [28]**

Nome do Problema	Relgap	\inf_D	\inf_P	Relgap [28]	\inf_D [28]	\inf_P [28]
1 Beck751	6.1e-12	1.1e-16	4.5e-14	5.5e-15	6.6e-15	0.0e+00
2 Beck752	1.1e-11	8.0e-17	3.4e-14	4.1e-13	1.1e-13	1.2e-13
3 Beck753	7.5e-13	1.4e-16	0.0e+00	0.0e+00	1.7e-15	0.0e+00
4 Demb761	8.4e-12	2.5e-15	0.0e+00	3.0e-10	2.4e-12	4.0e-15
5 Demb762	3.7e-13	3.3e-16	0.0e+00	1.7e-09	3.0e-10	0.0e+00
6 Demb781	9.7e-13	3.3e-16	0.0e+00	3.3e-15	5.1e-17	0.0e+00
7 Demb782	2.1e-14	3.0e-16	0.0e+00	0.0e+00	3.1e-17	0.0e+00
8 Kort921	5.6e-12	1.5e-15	0.0e+00	1.6e-14	1.5e-15	7.0e-14
9 Kort922	7.5e-13	2.0e-15	3.9e-13	1.3e-12	3.4e-14	1.5e-10
10 Kort951	8.4e-10	3.3e-20	0.0e+00	1.4e-14	6.3e-15	2.2e-16
11 Kort952	3.4e-08	2.7e-31	3.5e-14	1.7e-04	0.0e+00	2.4e-07
12 Kort953	8.4e-10	1.9e-15	1.5e-11	1.5e-13	1.2e-09	2.2e-16
13 Rijk781	1.4e-13	4.5e-15	0.0e+00	8.9e-16	2.0e-16	0.0e-00
14 Rijk782	7.7e-12	1.2e-15	0.0e+00	4.6e-13	3.5e-14	0.0e+00
15 Rijk783	7.1e-13	2.9e-16	0.0e+00	0.0e+00	3.5e-17	0.0e+00
16 Rijk785	3.2e-13	6.2e-16	0.0e+00	2.2e-11	3.1e-13	1.0e-11
17 Rijk786	1.2e-11	5.1e-16	0.0e+00	9.8e-13	1.7e-14	5.1e-13
18 Rijk787	1.9e-12	1.8e-16	0.0e+00	1.5e-12	5.3e-16	0.0e+00
19 Rijk788	1.3e-12	7.5e-16	0.0e+00	6.1e-14	3.0e-16	1.0e-14

Referências Bibliográficas:

- [1] Abrams, Robert, A. (1975), "Projections of Convex Programs with Unattained Infima", SIAM J. Control, 13, 706–718.
- [2] Avriel, M. (1980), "Advances in Geometric Programming" Edited by Mordecai Avriel Plenum Press-New York and London.
- [3] Avriel, M. and Williams, A.C. (1970), "On the Primal and Dual Constraints Sets in Geometric Programming", J. Mathematical Analysis, 3, 684–688.
- [4] Bazaraa, M.S. and Shetty, C.M., (1979), Nonlinear Programming Theory and Algorithms", Jonh Wilwy & Sons, New York.
- [5] Beck, P.A. and Ecker, J.G., (1975), "A modified concave simplex algorithm for geometric programming", Journal of Optimization Theory and Applications, 15, 189–202.
- [6] Beightler, C.S. and Philips, D.T., (1976), "Applied Geometric Programming", John Wiley & Sons, New York.
- [7] Dikin, I.I., (1967), "Iterative Solutions of Problems of Linear and Quadratic Programming", Soviet Math. Dokl. 8, 674–675
- [8] Dembo, R.S., (1976), "A Set of Geometric Programming test problems and their Solutions", Mathematical Programming, 10, 192–213.
- [9] Dembo, R.S., (1978), "Dual to Primal conversion in Geometric Programming", Journal of Optimization Theory and Applications, 26 (2), 243– 252.
- [10] Duffin R. J., (1962) "Dual Programs and Minimal Cost", SIAM Journal 10, 119.
- [11] Duffin, R.J., Peterson, E.L. (1964), "Constrained Minima Treated by Geometric Means", Westinghouse Scientific Paper 64-158-129-P3.
- [12] Duffin, R.J., Peterson, E.L. and Zener, C., (1967), "Geometric Programming – Theory and Applications", John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [13] Fang, S.C., Peterson, E.L. and Rajasekara, J.R., (1988), "Controlled dual perturbations for posynomial Programs", European Journal of Operation Research 35, 111–117.

- [14] Fiacco, A.V. and McCormick, G.P. (1968), “Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques”, John Wiley & Sons New York, Reprinted in Classics in Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [15] Gonzaga, C.C., (1992), “Path Following Methods for Linear Programming”, SIAM Review 34, 167–224.
- [16] Gochet, W., Kortanek, K.O. and Smeers, Y., (1976), “On the Classification Scheme for Geometric Programming and Complementary Theorems”, Applicable Analysis, 6, 47–59.
- [17] Hertog, D.D. (1992), “Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming” PhD Thesis, Faculty of Mathematics and Informatics/Computer Sciences, Delft University of Technology, Delft, Holland.
- [18] Hertog, D.D. (1994), “Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming”, Series Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers.
- [19] Iusem, A.N., Svaiter, B.F., João Xavier da Cruz Neto, 1995, “Central Paths, generalized proximal points methods and Cauchy trajectories in Riemannian Manifolds”. Submitted to publications.
- [20] Karmakar, N., (1984), “A new polynomial algorithm for linear programming”, Combinatorica (4), 373–395.
- [21] Kojima, M., Megido, N. and Mizuno, S. (1993), “A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming”. Mathematical Programming 61, 263–280.
- [22] Kojima, M., Noma, T. and Yoshije, A., (1994), “Global convergence in infeasible interior-point algorithms”, Mathematical Programming 65, 43–72.
- [23] Kortanek, K.O., Potra, F. and Ye, Y., (1991), “On some efficient interior point method for nonlinear convex programming problems”, Linear Algebra and its applications (152), 169–189.
- [24] Kortanek, K.O. and No, H., (1992), “A second order affine scaling Algorithm for geometric programming dual with logarithmic barrier”, Optimization (23), 303–322.

- [25] Kortaneck, K.O. and Zhu, J., (1993), “A Polynomial Barrier Algorithm for Linearly Constrained Convex Programming”, Mathematics of Operation Research, vol. 18, nº 1 pp. 116–127.
- [26] Kortaneck, K.O., and Zhu, J.,(1993), “ On controlling the parameter in the logarithmic barrier term for convex programming problems”, Department of Management Science, University of Iowa, Iowa City.
- [27] Kortaneck, K.O., and Zhu, J.,(1995), “ On controlling the parameter in the logarithmic barrier term for convex programming problems”, Journal of Optimization Theory and Applications (84) nº1 ,117-143.
- [28] Kortanek, K.O., Xu, X. and Ye, Y., (1995), “An Infeasible Interior Point Method for Solving Primal and Dual Geometric Programs”, Department of Management Science, University of Iowa, Iowa City (January 1995).
- [29] Monteiro, R.D.C. and Adler, I.(1989) “ Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear Programming”, Mathematical Programming (44)27-41
- [30] Monteiro, R.D.C. Adler, I. and Resende, M.(1990) “ A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extensions”, Math. Oper.Res.,15
- [31] Monteiro, R.D.C., (1994), “A globally convergent primal-dual interior point algorithm for convex programming”, Mathematical Programming (64) 27–41.
- [32] Monteiro, R.D.C. and Pang, J.S., (1995), “Properties of an interior point mapping for mixed complementary problems”, Mathematics of Operations Research. to appear.
- [33] Nesterov, Y.E. and Nemirovski, A.S., (1989), “Self Concordance and Polynomial Time Methods in Convex Programming”, Moscow USSR .
- [34] Nesterov, Y.E. and Nemirovski, A.S., (1994), “Interior Point Polynomials Methods in Convex Programming”, Theory and Algorithms, SIAM Publications (1994).
- [35] Oliveira, P.R. and Quirino, R.N., (1994), “Um Método de Pontos Interiores Primal-Dual para Programação Geométrica”, Anais do XVI – SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, in portuguese.
- [36] Ortega, J.M. and Rehimboldt, (1970), “Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables”, Academic Press, San Diego.

- [37] Potra, F.A., (1992), "An Infeasible interior-point predictor-corrector algorithm for linear programming", Technical Report, Department of Mathematics, The University of Iowa.
- [38] Rijckaert, M.J. and Martens, X.M., (1978), "Compararison of generalized geometric programming algorithm", Journal of Optimization Theory and Applications 26(2), 205–242.
- [39] Vial, J.P. (1993), "Computacional Experience with a primal-dual interior-point method for convex programming", Department of Management Studies, University of Geneva, Geneve, Switzerland.
- [40] Wang, T., Monteiro, R.D.C. and Pang, J.S., (1995), "An Interior Point Potential Reduction Method for Constrained Equations", Department of Mathematical Sciences, The Jonh Hopkins University, Baltimore, Mariland.
- [41] Zener, C.(1962) " A Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs," Proc. Nat. Acad. Sci. 47,537
- [42] Zhu, J. Kortaneck, K.O., and Huang, S. (1994), "Controlled dual perturbations for central path trajectories in geometric programming". European Journal of Operational Research (73), 524–531.
- [43] Jarre, F.(1990), "Interior-Point Methods for Convex Programming", Technical Report SOL 90-16, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California.