Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
COPPE UFRJ

SOBRE DERIVAÇÕES SIMPLES E FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SEM SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Cecilia Fernanda Saraiva de Oliveira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Severino Collier Coutinho

Rio de Janeiro
Maio de 2012

SOBRE DERIVAÇÕES SIMPLES E FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SEM SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Cecilia Fernanda Saraiva de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Severino Collier Coutinho, Ph.D.

Prof. Yves Abert Emile Lequain, Ph.D.

Prof. Mario Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

Prof. Daniel Levcovitz, D.Sc.

Prof. Thiago Fassarella do Amaral, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MAIO DE 2012

Oliveira, Cecilia Fernanda Saraiva de

Sobre derivações simples e folheações holomorfas sem solução algébrica/Cecilia Fernanda Saraiva de Oliveira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

VIII, 72 p. 29, 7cm.

Orientador: Severino Collier Coutinho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 72.

1. derivações. 2. folheações. 3. soluções algébricas. I. Coutinho, Severino Collier. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

A meu eterno e querido amigo
Mestre Haku, in memoriam.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a meu orientador, Prof. Severino Collier Coutinho, pela imensa paciência e dedicação. Devo a ele as qualidades que possam ser encontradas neste trabalho, e credito apenas a mim as falhas que certamente serão observadas.

Agradeço também à minha mãe, Antonia Saraiva, pelo apoio constante, incentivo e amor. Devo a ela toda a força que me levou à conclusão deste projeto. À minha irmã, Roberta Saraiva, por suportar meu mau humor nos momentos ruins.

Finalmente, devo agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE DERIVAÇÕES SIMPLES E FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS SEM SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Cecilia Fernanda Saraiva de Oliveira

Maio/2012

Orientador: Severino Collier Coutinho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Estudamos, nesta tese, a simplicidade de famílias de derivações do anel polinomial complexo em duas variáveis produzidas pelo programa de computação algébrica `Singular` e mostramos a inexistência de soluções algébricas para folheações holomorfas genéricas induzidas por 1-formas projetivas com coeficientes polinomiais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON SIMPLE DERIVATIONS AND HOLOMORPHIC FOLIATIONS WITHOUT ALGEBRAIC SOLUTIONS

Cecilia Fernanda Saraiva de Oliveira

May/2012

Advisor: Severino Collier Coutinho

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work, we study the simplicity of derivation families of the complex polynomial ring in two variables produced by the computer algebra system `Singular` and show the non-existence of algebraic solutions for generic holomorphic foliations induced by projective 1-forms with polynomial coefficients.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo produzir exemplos de derivações simples de $\mathbb{C}[x, y]$ de grau 3 e exemplos genéricos de folheações de grau superior a 3 sem soluções algébricas. Há alguns anos, a exibição de famílias de derivações associadas a folheações sem solução tem se mostrado uma tarefa mais árdua do que o esperado. Pelo Teorema de Jouanolou, que afirma que o conjunto das folheações de grau $d \geq 2$ sem curvas algébricas invariantes é não vazio e denso no conjunto das folheações de grau $d \geq 2$ de $\mathbb{P}^2$. Portanto, pode-se imaginar uma aparente facilidade em se encontrar tais folheações. Ao contrário, muitos trabalhos utilizaram abordagens nada triviais para a produção de famílias de derivações relacionadas a estas referidas folheações. Ver [1], [4], [5] e [6].

No capítulo 1, apresentamos as definições algébricas básicas, o problema da holonomia em álgebras de Weyl e a questão da d-simplicidade. No capítulo seguinte, reapresentamos a questão utilizando a linguagem das folheações holomorfas, e resultados da teoria que serão fundamentais para a realização de nossos objetivos.

No capítulo 3, exibimos os campos de grau 3 produzidos com o auxílio da ferramenta computacional `Singular`, e os procedimentos utilizados para a confirmação da simplicidade na maioria dos casos. Veremos que o programa produziu também casos com singularidades dicríticas, exemplos estes que não podem ser abordados utilizando a mesma estratégia usada nos exemplos sem tais singularidades (utilização do teorema de Carnicer). Um dos exemplos produzidos pelo programa com singularidades dicríticas é estudado no capítulo 4, onde detalhamos a prova de simplicidade utilizando uma abordagem distinta.

Finalmente, no capítulo 5, exibimos o estudo de uma folheação associada a uma derivação onde um dos polinômios envolvidos possui grau muito maior do que 3. Analisamos singularidades e provamos a ausência de solução algébrica para o campo genérico, dado que tal folheação possui apenas singularidades reduzidas. Isso nos permite utilizar o teorema de Carnicer (ver [2]), também usado nos casos de grau 3.

Capítulo 1

O problema algébrico

Temos nesta seção introdutória o objetivo de esclarecer a motivação do estudo de derivações simples de anéis polinomiais em geral, e da procura por famílias destas derivações. Para isto precisamos de algumas definições e resultados básicos da teoria de anéis diferenciais, D-módulos e álgebras de Weyl.

1.1 Definições fundamentais e resultados básicos

Sejam K um corpo e R uma K-álgebra comutativa.

Definição 1.1. *Uma derivação de R é um operador K-linear d de R que satisfaz a* regra de Leibniz*: para todo $a, b \in R$,*

$$d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

Usa-se a notação $Der_K(R)$ para o R-módulo das derivações de R.

Se d é uma derivação de um anel R, um ideal I de R é chamado d-ideal *se $d(I) \subseteq I$. Diz-se ainda que I é d-estável, ou d-invariante. Se os únicos d-ideais de R forem (0) e R, este anel é dito* d-simples*, ou que d é uma* derivação simples *de R.*

Definição 1.2. *Sejam K um corpo de característica zero, e $K[x_1, ..., x_n] = K[X]$ o anel polinomial em n variáveis sobre K. Sua álgebra de operadores K-lineares é $End_K(K[X])$. Sejam $\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n$ e $\partial_1, ..., \partial_n$ elementos de $End_K(K[X])$ definidos por*

$$\widehat{x}_i(f) = x_i f$$

e

$$\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

para todo $f \in K[X]$. A álgebra de Weyl de ordem *n, $A_n(K)$, ou simplesmente A_n, é a K-subálgebra de $End_K(K[X])$ gerada por $\{\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n, \partial_1, ...\partial_n\}$. Por uma questão de consistência, escreve-se $A_0 = K$.*

Proposição 1.3. *Toda derivação de $K[X]$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i$, para $f_i \in K[X]$, $i \in \{1 \cdots n\}$, onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial com relação à i-ésima variável.*

Demonstração. Ver [3], pg. 21, Prop. 1.3. □

Denotamos por $\dim_K A$ a dimensão de A como K-espaço vetorial.

Teorema 1.4. *Se $M = \oplus_{i \geq 0} M_i$ é um módulo graduado finitamente gerado sobre o anel polinomial $K[X]$, então existem um polinômio $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\sum_{i=0}^{s} \dim_K(M_i) = \chi(s)$$

para todo $s \geq N$. Este é o Polinômio de Hilbert de M.

Demonstração. Ver [3], Teorema 9.1.1, p. 74. □

Seja R uma K-álgebra. Uma família $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \geq 0}$ de K-espaços vetoriais é uma *filtração* de R se

1. $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq R$,

2. $\cup_{i \geq 0} F_i = R$,

3. $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$.

Uma filtração de A_n é a *filtração de Bernstein*, denotada por $\mathcal{B}$. Denotamos por B_k o conjunto de operadores de A_n de grau menor ou igual a k. Estes B_k são subespaços vetoriais de A_n. É fácil verificar que a família $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 0}$ satisfaz as condições acima.

Agora consideremos M um A_n-módulo (à esquerda). Uma família $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i \geq 0}$ de K-espaços vetoriais de M é uma *filtração* de M se satisfaz

1. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq M$,

2. $\cup_{i \geq 0} \Gamma_i = M$,

3. $B_i \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}$.

Além disso, cada Γ_j é um espaço vetorial sobre K de dimensão finita. Denotamos por $gr^{\Gamma} M$ a soma direta dos fatores Γ_i / Γ_{i-1}, com $i \geq 0$. Esta é chamada *álgebra graduada associada à filtração* Γ.

Seja M um A_n-módulo (à esquerda) finitamente gerado. Suponha que Γ seja uma boa filtração de M com relação à filtração de Bernstein $\mathcal{B}$ (ou seja, o módulo graduado $gr^{\Gamma}M$ é finitamente gerado sobre $S_n = gr^{\mathcal{B}}A_n$). Denotamos por $\chi(t, \Gamma, M)$ o polinômio de Hilbert do módulo graduado $gr^{\Gamma}M$ sobre o anel polinomial S_n. Isto é, para $t >> 0$, temos

$$\chi(t, \Gamma, M) = \sum_{0}^{t} \dim_K(\Gamma_i/\Gamma_{i-1}) = \dim_K(\Gamma_t).$$

A *dimensão* $d(M)$ de M é $\deg(\chi(t, \Gamma, M))$ (onde $\deg(p)$ é o grau do polinômio p durante todo o texto).

Enunciamos a seguir, remetendo à prova em [3], pg. 83, Teorema 4.2, a **Desigualdade de Bernstein**.

Teorema 1.5. *Se M é um A_n-módulo (à esquerda) finitamente gerado, então $d(M) \geq n$*

Se um A_n-módulo à esquerda finitamente gerado M tem dimensão $d(M) = n$, ele é ***holônomo***. Se considerarmos A_n como A_n-módulo, tem-se que $d(A_n) = 2n$ (isto é, A_n não é holônomo) enquanto $d(K[X]) = n$, e portanto um anel polinomial sobre um corpo de característica zero é holônomo como A_n-módulo. Ver detalhes em [1].

1.1.1 A questão da d-simplicidade

Até 1985 acreditava-se na veracidade de uma conjectura que afirmava serem todos os módulos irredutíveis holônomos (ou simples, i.e., que não possuem submódulos próprios não-nulos) sobre A_n. Neste ano, um artigo de J. T. Stafford (ver [15]) mostrou a falsidade da conjectura. Stafford construiu exemplos de derivações d de $K[X]$ e polinômios $f \in K[X] = K[x_1, \cdots, x_n]$ de forma que $A_n/A_n(d+f)$ fosse um A_n-módulo irredutível e não holônomo.

Em 1988, uma outra abordagem por J.Bernstein e V.Lunts [1] mostrou um processo para a geração de famílias de derivações que davam origem a vários tipos de A_n-módulos simples não holônomos. Entretanto os exemplos de Stafford não se enquadravam nas famílias geradas pelo procedimento de Bernstein e Lunts.

Em 2002, S. C. Coutinho mostrou em [6] uma construção que dava origem a uma série de derivações simples d tais que $A_n/A_n(d + f)$, para polinômios f apropriados, fossem irredutíveis não holônomos. Os exemplos de Stafford se encaixam na família de A_n-módulos irredutíveis de Coutinho.

Assim, há algum tempo as derivações simples vêm sendo objeto de estudo e pesquisa, pela possibilidade de que certas classes de tais derivações, que estão associadas a determinado anel polinomial, dêem origem a módulos simples sobre A_n. Além disso, anéis d-simples comutativos estão relacionados à construção de anéis não comutativos simples. Para mais informações, ver [7].

A abordagem dos problemas envolvendo derivações simples de anéis polinomiais pode ser feita a partir de diversas áreas da matemática, e há aplicações tanto em álgebra e geometria algébrica, quanto em teoria de folheações holomorfas, havendo inclusive uma relevante ligação com a teoria de equações diferenciais. Ver [10] e [12].

1.1.2 Derivações simples e unimodularidade

A seguinte definição será fundamental durante todo o trabalho apresentado neste texto.

Definição 1.6. *Uma dupla (a, b) com $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$ é uma* ***linha unimodular*** *se existem u e $v \in \mathbb{C}[x, y]$ tais que $ua + vb = 1$, isto é, o ideal gerado por a e b é o anel $\mathbb{C}[x, y]$.*

Seja d uma derivação da forma $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, com $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$. Uma **singularidade** de d é um ponto $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $a(x_0, y_0) = 0 = b(x_0, y_0)$. Claramente a linha (a, b) é unimodular se, e somente se, d não possui singularidades.

Definição 1.7. *Uma* ***solução algébrica*** *de d em $K[X]$ é um polinômio $f \in K[X]$ tal que $d(f) = gf$, onde g é algum polinômio em $K[X]$.*

Diz-se também que f é estável por d, ou que o ideal gerado por f é d-invariante.

Lema 1.8. *Uma linha (a, b) é unimodular se, e somente se, $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ não possui ideal maximal invariante.*

Demonstração. Pelo *Nullstellensatz* de Hilbert $a(x, y) = b(x, y) = 0$ não tem solução se, e somente se, $(a, b) = 1$. Se d possui singularidade e $a(p_0) = b(p_0) = 0$, isto é equivalente a dizer que o ideal maximal associado $\underline{m}_{p_0} = (x - x_0, y - y_0)$ é invariante por d. Por um lado,

$$a\frac{\partial}{\partial x}(\underline{m}_{p_0}) + b\frac{\partial}{\partial y}(\underline{m}_{p_0}) \subseteq \underline{m}_{p_0},$$

pois pelo *Nullstellensatz*, se $a(p_0) = b(p_0) = 0$, então $a, b \in \underline{m}_{p_0}$. Reciprocamente, suponha $\underline{m}_{p_0}$ invariante por d. Assim, tem-se $h(x, y) = x - x_0 \in \underline{m}_{p_0}$, e daí $d(h) = a.1 = a \in \underline{m}_{p_0}$, logo $a(p_0) = 0$. O mesmo raciocínio se aplica a b. □

Como se sabe, $\mathbb{C}[x, y]$ é um anel de dimensão de Krull igual a 2. Esta dimensão é dada pela altura dos ideais maximais do anel, que são primos. Portanto, testar a d-simplicidade de $\mathbb{C}[x, y]$ é testar a d-estabilidade dos ideais de altura 2 (i.e., dos ideais maximais, que são da forma $m_{p_0} = (x - x_0, y - y_0)$) e dos ideais de altura 1 (principais, pelo Teorema do Ideal Principal de Krull, isto é, da forma (f) para algum polinomio f). Então, podemos resumir o que foi exposto como segue:

1. m_{p_0} é d-invariante se, e somente se, p é singularidade de d

2. (f) é d-invariante se, e somente se, f define curva invariante.

No capítulo a seguir, exploraremos as ideias acima do ponto de vista de folheações holomorfas.

Capítulo 2

Sobre folheações

2.1 Reformulação do problema

2.1.1 Definições básicas

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Consideremos x, y, z as coordenadas homogêneas do plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2$. Uma *folheação holomorfa* de $\mathbb{P}^2$ de grau n é definida por uma 1-forma $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$, com A, B, C polinômios homogêneos de grau $n+1$ satisfazendo $xA + yB + zC = 0$. Uma 1-forma satisfazendo esta condição é chamada de *projetiva*. Uma *singularidade* da folheação é um ponto p do plano projetivo tal que $A(p) = B(p) = C(p) = 0$. O conjunto de singularidades da folheação é denotado por $Sing(\Omega)$. Em nosso trabalho estudamos folheações com $Sing(\Omega)$ finito, isto é $\text{mdc}(A, B, C) = 1$.

Um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é uma *solução algébrica* de Ω se existe uma 2-forma η com coeficientes em $\mathbb{C}[x, y, z]$ de modo que

$$\Omega \wedge dF = F\eta.$$

Seja o morfismo

$$\pi_z : U_z \to \mathbb{C}^2$$

$$[x : y : z] \mapsto (x/z, y/z)$$

Vejamos que o *pullback* de uma 1-forma ω em $\mathbb{C}[x, y]$ por esta aplicação, multiplicada por uma potência de z conveniente (escolhida de forma que não haja polos na imagem do *pullback*) nos devolve a folheação Ω definida anteriormente. Isto é, $\pi_z^*(\omega) = \Omega$. Esta folheação de $\mathbb{P}^2$ é dita *induzida pela derivação d* e denotada por Ω_d. Descrevemos abaixo o processo que relaciona os coeficientes de ω e Ω neste processo de projetivização.

Seja $\omega = bdx - ady$. A derivação ou campo dual de ω é

$$d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}.$$

Suponhamos a princípio que o grau de a e b sejam iguais a k. Tomando as aplicações $x \mapsto x/z$ e $y \mapsto y/z$, teremos

$$b(x/z, y/z)d(x/z) - a(x/z, y/z)d(y/z) =$$

$$\frac{1}{z^k}b^h\big(\frac{zdx - xdz}{z^2}\big) - \frac{1}{z^k}a^h\big(\frac{zdy - ydz}{z^2}\big) = \frac{1}{z^{k+2}}\big(zb^h dx - za^h dy + (ya^h - xb^h)dz\big).$$

Aqui, a^h significa a homogeneizado em z, de forma que agora este é um polinômio em x, y e z. O mesmo ocorre em b^h. Fazemos $A = zb^h$, $B = za^h$ e $C = ya^h - xb^h$, e multiplicamos a forma obtida por z^{k+2}, para eliminar polos, se $ya_k - xb_k \neq 0$, onde a_k e b_k são os termos homogêneos de maior grau em a e b. Se $ya_k - xb_k = 0$, multiplicamos por z^{k+1}. Obtemos, assim, a forma $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$. Se por exemplo $\deg(b) = k > n = \deg(a)$, então no processo acima a diferença será que $z^{k-n}a^h$ aparecerá no lugar de a^h.

Reciprocamente, consideremos U_z o aberto na topologia de Zariski do plano projetivo definido por $z \neq 0$. Consideremos ω a desomogeneização de Ω com relação a z. Isto é o mesmo que restringir a folheação Ω de $\mathbb{P}^2$ a U_z, de modo que obtemos uma folheação de $\mathbb{C}^2$. Para obter ω, basta tomar o caminho inverso descrito acima para a projetivização. Teremos $\omega = bdx - ady$ a 1-forma correspondente no plano complexo, com $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$, que é a forma Ω desomogeneizada. Tome

$$d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}.$$

A 1-forma ω é a *1-forma dual da derivação d*. A folheação Ω restrita a U_z corresponde a ω, que é induzida pelo campo vetorial d.

Uma observação muito importante a fazer aqui é que claramente $Sing(\Omega_d) \cap U_z$ coincide com o conjunto de singularidades de d. Portanto, se d é simples, então é definida por uma linha unimodular e daí temos que as singularidades da folheação estão todas em $z = 0$, isto é, na reta no infinito L_∞ (isto é, o conjunto de pontos que satisfaz $z = 0$).

Uma derivação $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ induz um campo vetorial da forma (a, b) em $\mathbb{C}^2$, onde $a = a(x, y)$ e $b = b(x, y)$ são polinômios. Vimos que a mesma derivação está associada a uma forma $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$, onde $\mathrm{mdc}(A, B, C) = 1$, que induz um campo de planos em $\mathbb{C}^3$. Seja X uma curva algébrica, $X = Z(F) = \{p \in \mathbb{P}^2; F(p) = 0\}$, tangente ao campo em todo ponto que não seja singularidade de Ω. Assim, X é invariante pela folheação definida por Ω. O campo normal ao campo induzido por

d é da forma $(-b, a)$. Se $f = F(x, y, 1)$ é reduzido, então

$$0 = \nabla f(p) \cdot (-b(p), a(p)) = \big(- b\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}\big)(p).$$

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (*Nullstellenzats*), temos que o ideal gerado por f contém $-b\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}$. Assim, existe $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$-b\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} = gf.$$

O campo dual da derivação $-b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$ é $\omega = adx + bdy$. Temos também

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Assim,

$$\omega \wedge df = \left(a\frac{\partial f}{\partial y} - b\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy = gfdxdy = f\eta,$$

onde η é uma 2-forma em $\mathbb{C}^2$ com coeficientes polinomiais. Se π é a aplicação projetivização apresentada anteriormente, temos que

$$\pi^*(\omega \wedge df) = \pi^*(f\eta),$$

donde

$$\pi^*(\omega) \wedge d(\pi^*(f)) = \pi^*(f)\pi^*(\eta).$$

No processo de projetivização aparecem pólos de multiplicidade m, que eliminamos multiplicando a equação acima por z^m, obtendo finalmente

$$\Omega \wedge dF = F\Sigma,$$

onde Σ é uma 2-forma em $\mathbb{P}^2$ com coeficientes polinomiais.

Ou seja: dado um polinômio livre de quadrados não constante $f \in \mathbb{C}[x, y]$, diz-se que *f é uma solução algébrica de d* se a homogeneização de f com relação a z é F, solução algébrica da folheação Ω_d. Pelo raciocínio descrito acima, concluímos que isto é o mesmo que dizer que f é solução de d no sentido de invariância do ideal principal gerado por f por d, ou seja, que existe $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$d(f) = gf.$$

Isto é, o ideal principal (f) é d-estável. Obtemos então a seguinte conclusão:

Proposição 2.1. *A derivação d é simples se, e somente se, $Sing(\Omega_d) \subset L_\infty$ e d não possui soluções algébricas.*

Logo, sabendo que (a, b) é unimodular, testaremos somente a inexistência de ideais principais invariantes por d para testar a simplicidade da derivação d. Para provar que uma certa derivação d não possui solução algébrica, dada a forma dual ω de d, vamos usar durante este trabalho o seguinte resultado.

Proposição 2.2. *Se $\omega = bdx - ady$, com $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, possui uma solução algébrica, então existe um polinômio reduzido com coeficientes racionais que é invariante por ω.*

Demonstração. Esta proposição encontra-se provada em [21] (Prop. 2.1) e em [19] (Prop. 3.3, pag. 36), portanto não repetiremos sua demonstração aqui. □

Isto é, quando os coeficientes de a e b são racionais, se existe $F \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $d(F) = G.F$ para algum $G \in \mathbb{C}[x, y]$, então deve existir um polinômio $f \in \mathbb{Q}[x, y]$, reduzido, tal que $d(f) = g.f$ para $g \in \mathbb{Q}[x, y]$. Isto simplifica nosso trabalho de forma significativa, já que podemos utilizar diversos resultados e propriedades referentes ao anel $\mathbb{Q}[x, y]$.

Assim, a estratégia geral será supor que existe $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ tal que

$$d(f) = gf$$

para algum polinômio g. Utilizaremos resultados da teoria de folheações para relacionar singularidades e limitações no grau de f (Teorema de Carnicer).

Estas abordagens (unimodularidade, uso do `Singular`, e aplicação de resultados de folheações holomorfas) serão utilizadas no estudo do caso em que inicialmente estamos interessados, de derivações com polinômio cúbico, que será descrito no Capítulo 3.

Um fato importante a ser citado sobre singularidades segue abaixo.

Proposição 2.3. *Dada uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ induzida por $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$, com $Ax + By + Cz = 0$, se $\mathcal{F}$ não possui singularidades nos pontos tais que $z = 0$, então $\mathcal{F}$ possui singularidades nos pontos onde $z = 1$. Isto é, toda folheação de $\mathbb{P}^2$ possui singularidades.*

Demonstração. Pelo Teorema de Bézout, os polinômios A e B têm um número finito de zeros comuns, ou melhor $\deg(A)\deg(B)$ zeros comuns, contando com multiplicidades. Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um destes pontos tais que $A(p) = B(p) = 0$. Assim, como $xA + yB + zC = 0$, então

$$x_0 A(p) + y_0 B(p) + z_0 C(p) = 0,$$

donde

$$z_0 C(p) = 0.$$

Se $z_0 \neq 0$, então $C(p) = 0$, e assim temos uma singularidade onde $z = 1$ (é uma singularidade de $\mathbb{P}^2$). Se $z_0 = 0$, isto é, se $p \in L_\infty$, então basta aplicar uma transformação projetiva de modo que $p \notin L_\infty$ e assim podemos aplicar o mesmo raciocínio usado no caso $z = 0$. $\square$

2.1.2 Campos sem solução e o Teorema de Carnicer

Aqui precisamos enunciar um resultado fundamental na teoria das folheações holomorfas, devido a M.N. Carnicer [2] e que será aplicado em nosso estudo. Um dos problemas mais importantes na teoria de folheações holomorfas, o Problema de Poincaré, deu origem ao estudo que resultou no Teorema de Carnicer (que, por sua vez, é uma solução parcial do Problema de Poincaré). Este problema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Dada uma 1-forma $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$, existe um limite para o grau de suas curvas invariantes, e que dependa somente de características particulares de ω?

Suponha que a folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ induzida pela 1-forma Ω possua uma singularidade $p \in U_z$ (sem perda de generalidade). Consideremos V uma vizinhança de p tal que esta seja a única singularidade de $\mathcal{F}$ em V. Podemos fazer isso se supusermos Ω saturada, isto é, $\mathrm{Sing}(\Omega)$ é um conjunto finito. Para simplificar a notação, podemos supor uma escolha de coordenadas tais que possamos considerar $p = (0,0)$. Um *blow-up* (explosão) de V com centro em p é a superfície definida por:

$$B_p(V) = \{\big((x,y),[u:v]\big) \in V \times \mathbb{P}^1; xv = yu\}.$$

A aplicação *blow-up* é o morfismo $\phi : B_p(V) \to V$ definida por $\phi((x,y),[u:v]) = (x,y)$. Vemos claramente que $B_p(V)$ é a união de dois abertos isomorfos a V, o conjunto tal que $u \neq 0$ e o conjunto dos pontos tais que $v \neq 0$. Assim, se $v \neq 0$, por exemplo, podemos considerar que o isomorfismo leva (u,y) a $\big((yu,y),[u:1]\big) \in B_p(V)$. Identificando $B_p(V)|_{v=1}$ com V, temos que ϕ restrita a $B_p(V)|_{v=1}$ fica $\phi_v(u,y) = (uy,y)$. Usando raciocínio análogo com $u \neq 0$, teremos $\phi_u(x,v) = (x,xv)$. Notemos que no complementar do fechado (chamado **divisor excepcional**) abaixo

$$E = \phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(0,0) = \{((0,0),[u:v]); u,v \in \mathbb{C}\},$$

a aplicação ϕ é um isomorfismo.

Seja $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ o campo dual associado a $\omega = \Omega|_{U_z}$. Sabemos que, por hipótese, $a(p) = b(p) = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz jacobiana $J(p)$, onde $J(x, y)$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} \partial a(x,y)/\partial x & \partial a(x,y)/\partial y \\ \partial b(x,y)/\partial x & \partial b(x,y)/\partial y \end{bmatrix}$$

.

A singularidade p é dita **reduzida** caso $\lambda_2 \neq 0$ e satisfaça:

- $\lambda_1 = 0$, ou
- $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$ (isto é, a razão dos autovalores não é um racional positivo).

Caso ambos a singularidade não seja reduzida, existe (segundo Seidenberg [14]) uma resolução (sequência de *blow-ups*) da singularidade p tal que ou ela resulte em uma singularidade reduzida, ou num ponto que não seja mais singularidade da folheação.

Suponha que $p = (0, 0)$ seja uma singularidade do campo vetorial X induzido pela derivação $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$. A definição que seguirá é válida para singularidades fora da origem, basta aplicar uma transformação projetiva, e por isso podemos tomar $p = (0, 0)$. Seja $\mathrm{malg}(a)$ a multiplicidade algébrica de a, isto é, o menor inteiro positivo tal que a tenha componente homogênea de grau m não nula; assim, $a = a_m + a_{m+1} + \cdots$. A *multiplicidade algébrica do campo* é definida por

$$m = \min(\mathrm{malg}(a), \mathrm{malg}(b)).$$

Desta forma, o campo X tem componente de menor multiplicidade dado por $X_m = a_m\frac{\partial}{\partial x} + b_m\frac{\partial}{\partial y}$. Seja $\mathcal{F}'$ o pullback da forma ω que define $\mathcal{F}$ pelo blow-up $\pi : S' \to S$ com centro em p, onde p é uma singularidade de $\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}' = \pi^*(\omega)$, e S é um conjunto algébrico complexo irredutível. Se o divisor excepcional $\pi^{-1}(p)$ for invariante por $\mathcal{F}'$, então o blow-up é dito **não dicrítico**. Caso contrário, é **dicrítico**. O seguinte resultado é capital para a verificarmos se a folheação é ou não dicrítica com relação ao blow-up em questão. Para a prova, ver [24], p. 489.

Proposição 2.4. *Seja p uma singularidade da folheação $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é não dicrítica com relação ao blow-up $\pi : S' \to S$ com centro p se, e somente se*

$$xb_m(x, y) - ya_m(x, y) \neq 0,$$

sendo m é a multiplicidade algébrica do campo $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ que define a folheação em S.

Consideremos a resolução (sequência de blow-ups)

$$S_n \to S_{n-1} \to \cdots S_0,$$

onde cada $\pi_i : S_{i+1} \to S_i$ possui centro em p_i, e p_i é singularidade da folheação $\mathcal{F}_i$ associada. Se cada blow-up é não-dicrítico, então diz-se que a singularidade $p = p_0$ é **não-dicrítica**. Caso algum dos blow-ups seja dicrítico, portanto, diz-se que a singularidade é **dicrítica**. Esta condição é independente da resolução. Para ver a prova disto, ver [24].

Proposição 2.5. *Seja p uma singularidade da folheação $\mathcal{F}$. Se*

1. *p é uma singularidade reduzida, ou*

2. *a parte linear da derivação associada ao campo vetorial que define $\mathcal{F}$ em p tem a forma $(x+y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$,*

então p é uma singularidade não-dicrítica de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Ver [24], (2.b),p.517. □

Lembremos que, ao relacionarmos os coeficientes a e b do campo induzido por d com os coeficientes de Ω, supondo a e b com mesmo grau, chegamos à seguinte forma:

$$zb^h dx - za^h dy + (ya^h - xb^h)dz = zb^h dx - za^h dy + \Delta dz.$$

Mas estamos interessados em folheações sem solução algébrica além de $z = 0$. Se $\Delta = ya^h - xb^h \neq 0$ em $z = 0$ (e neste caso $C = \Delta$), teremos que a reta definida por $z = 0$ é invariante pelo campo, ou seja, $z = 0$ será solução da folheação:

$$\Omega \wedge dz = (Adx + Bdy + Cdz) \wedge dz = z\eta,$$

pois $dz \wedge dz = 0$ e $A = zb^h$, e $B = -za^h$. Se $\Delta = ya^h(x,y,0) - xb^h(x,y,0)$ é identicamente nulo, temos que z divide Δ e os coeficientes de dx e dy de Ω, e para manter a saturação, consideramos

$$\Omega = b^h dx + a^h dy + \frac{\Delta}{z} dz = Adx + Bdy + Cdz,$$

isto é, Ω com todos os coeficientes divididos por z. Claramente temos $xA + yB + zC = 0$. Mas sendo $\Delta(x,y,0) = ya^h(x,y,0) - xb^h(x,y,0) = 0$, temos que $ya^h(x,y,0) = xb^h(x,y,0)$. Ocorre que os termos líderes de a e b, que são a_n e b_n, não são afetados pela homogeneização, e $b^h(x,y,0) = A(x,y,0) = b_n(x,y)$, assim como $-a^h(x,y,0) =$

$B(x,y,0) = -a_n(x,y)$. Sabendo que $ya^h(x,y,0) = xb^h(x,y,0)$, concluímos que $ya_n(x,y,0) = xb_n(x,y,0)$, donde $a_n = xh$ e $b_n = yh$, onde $h \in \mathbb{C}[x,y]$ é homogêneo de grau $n-1$. Ou seja:

$$a = xh + \tilde{a},$$

onde $\tilde{a}$ é um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$, e

$$b = yh + \tilde{b},$$

onde $\tilde{b}$ é de grau menor ou igual a $n-1$.

Seja X o campo vetorial (a,b) induzido por $d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$. Consideremos uma reta genérica não-invariante por d (passando pela origem a menos de uma transformação afim) $\lambda = \alpha x + \beta y = 0$. Logo, $d(\lambda) \notin (\lambda)$, onde (λ) é o ideal gerado por λ. Vamos calcular o número de pontos de tangência entre a reta λ e o campo X. O vetor normal à reta é $n = (\alpha, \beta)$. Portanto, nos pontos de tangência ocorre

$$a\alpha + b\beta = 0,$$

enquanto

$$\lambda = \alpha x + \beta y = 0.$$

A primeira equação tem grau n e a segunda, grau 1. Pelo Teorema de Bézout, deve haver n pontos de interseção entre as curvas definidas pelas equações acima. Mas, olhando mais de perto para o caso em que a reta no infinito (isto é, definida por $z = 0$) não é invariante pela folheação, temos: $a = xh + \tilde{a}$ e $b = yh + \tilde{b}$, donde $a\alpha + b\beta = 0$ fica

$$(xh + \tilde{a})\alpha + (yh + \tilde{b})\beta = 0,$$

mas $\beta y = -\alpha x$. Portanto, a última equação fica, substituindo $-\alpha x$ por βy:

$$\alpha xh + \alpha\tilde{a} - \alpha xh + \beta\tilde{b} = 0,$$

ou seja, procuramos pelos pontos que satisfazem

$$\alpha\tilde{a} + \beta\tilde{b} = 0,$$

que possui no máximo $n-1$ soluções, dados os graus máximos de $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$. Assim, temos a motivação geométrica para a seguinte definição:

Definição 2.6. *O **grau** da folheação $\mathcal{F}$ induzida pela forma projetiva $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$, onde $\deg(A) = \deg(B) = \deg(C) = m$ é o número de tangências do campo vetorial X induzido por d com relação a retas genéricas de $\mathbb{C}^2$ não invariantes por X. Mais precisamente: se d é a derivação $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, onde a e b são polinômios* *de grau m, associada à forma Ω, que induz a folheação projetiva $\mathcal{F}$, temos duas situações possíveis:*

1. *se z é solução algébrica da folheação (isto é, $\Delta \neq 0$ em $z = 0$), então o grau de* $\deg(\mathcal{F}) = n$*;*

2. *se z não é solução algébrica da folheação (isto é, $\Delta = 0$ em $z = 0$), então o grau de* $\deg(\mathcal{F}) = n - 1$.

Se o grau de a é diferente do grau de b, temos que $A = zb^h$. Portanto $\deg(A) = n+1$, se, por exemplo, $n = \deg(b) > \deg(a)$. Vimos que neste caso também teremos $\deg(B) = \deg(C) = n + 1$.

Podemos, então, enunciar o Teorema de Carnicer e o teorema que o segue, de fato um corolário do Teorema de Carnicer, que para nós será uma das principais ferramentas utilizadas neste trabalho.

Teorema 2.7. *(M.M. Carnicer, 1994) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação do plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2$. Se C é uma curva algébrica irredutível invariante por $\mathcal{F}$ e não há singularidades dicríticas de $\mathcal{F}$ em C, então*

$$\deg(C) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2.$$

Demonstração. Ver [2]. □

Teorema 2.8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ induzida pela derivação*

$$d = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$

cujas singularidades sejam todas reduzidas, tal que z seja solução algébrica de d. Se $f \in \mathbb{C}[x, y]$, $f \notin \mathbb{C}$, é uma solução algébrica de d, então

$$\deg(f) \leq n + 1,$$

onde $n = \max\{\deg(a), \deg(b)\}$.

Demonstração. Como z é solução de d, então temos $\Delta \neq 0$. Isto significa que o grau da folheação é n. Além disso, se f é solução de d, então zf também é solução. O Teorema de Carnicer então nos dá

$$\deg(f) + 1 = \deg(zf) \leq n + 2,$$

donde

$$\deg(f) \leq n + 1.$$

□

Observemos que todas as derivações estudadas neste texto satisfazem a condição de ter z como solução (dado que $\Delta = ya^h(x,y,0) - xb^h(x,y,0) \neq 0$ em todos os casos). Se as singularidades forem reduzidas, obtemos uma limitação para o grau da solução proposta para a folheação. Isto facilita o estudo do problema já que não precisamos nos preocupar com graus acima desta cota. Mais adiante neste texto utilizaremos novamente o corolário do Teorema de Carnicer no estudo de campos sem solução (não necessariamente induzindo derivações simples) algébrica de grau maior do que 4.

2.2 O teorema de Jouanolou e genericidade

Diz-se que uma propriedade é *muito genérica* se é válida no conjunto complementar de uma união enumerável de fechados não-vazios num certo espaço topológico M, se este complementar for não-vazio. Equivalentemente, um elemento pertencente a uma interseção enumerável de abertos não-vazios é dito *muito genérico*. A expressão *genérica* descreve a propriedade válida numa interseção finita de abertos. Por uma questão de simplicidade e praticidade no uso da nomenclatura, utilizaremos, neste texto, *genérico* com o primeiro significado, o de *muito genérico*. Nesta seção enunciamos o *Teorema de Jouanolou*, que afirma que uma folheação genérica de grau d de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ não possui solução algébrica. O teorema e sua demonstração foram publicados em 1979, na monografia de J.P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*. Para a prova, ver [20], páginas 157-160. Não repetiremos sua demonstração aqui, mas precisamos ressaltar alguns fatos expostos durante a prova na monografia de Jouanolou para uma melhor compreensão de sua aplicação em nosso trabalho. O que utilizaremos de fato é o argumento da demonstração, e não o teorema em si.

Jouanolou chama uma 1-forma projetiva algébrica Ω de *forma de Pfaff*, e de *equação de Pfaff* a classe de 1-formas módulo o produto destas por constantes não-nulas. Também denota por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m)$ a projetivização do espaço vetorial de formas de Pfaff de grau m sobre $\mathbb{P}^2$, que de fato é o conjunto da equações de Pfaff. Se Z_m é o conjunto das equações de Pfaff sem solução algébrica, tem-se $Z_m \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m)$ e o enunciado:

Teorema de Jouanolou:*Seja $m \geq 3$. Então Z_m é uma interseção enumerável não-vazia de abertos do tipo Zariski em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m)$.*

Ou ainda: uma folheação genérica de grau $m \geq 3$ em $\mathbb{P}^2$ não admite nenhuma curva algébrica invariante.

Vamos, aqui, analisar a argumentação que leva a concluir o seguinte fato fundamental em nosso texto, como veremos mais adiante:

Proposição 2.9. *O conjunto das equações de Pfaff sem solução de grau exatamente* *igual a t, é um aberto não vazio na topologia de Zariski.*

Durante a demonstração, Jouanolou define W_{m-1} como o espaço vetorial complexo das 2-formas com coeficientes polinomiais homogêneos de grau $m-1$, $S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ o espaço vetorial complexo dos polinômios homogêneos de grau t e o conjunto $Y_t \subset V_m \times W_{m-1} \times S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ é dado por

$$Y_t = \{(\omega, \alpha, f); \omega \wedge df = \alpha f, (\omega, \alpha) \neq (0,0), f \neq 0\}.$$

Depois, é definida uma subvariedade projetiva $\bar{Y}_t$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}\big(V_m \times W_{m-1}\big) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}\big(S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)\big)$ da seguinte forma: se $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ e $(\omega, \alpha, f) \in Y_t$, segue que $(\lambda\omega, \lambda\alpha, \mu f) \in Y_t$ por causa da relação $\omega \wedge df = \alpha f$, donde pode-se definir $\bar{Y}_t$ como o quociente $Y_t/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Observemos que a sequência de projeções canônicas

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m \times W_{m-1}) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)) \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m \times W_{m-1}) \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m)$$

dadas por

$$[\omega : \alpha] \times [f] \mapsto [\omega : \alpha] \mapsto [\omega]$$

não está bem definida pois se $\omega = 0$, então não necessariamente tem-se $\alpha = 0$. Mas o morfismo algébrico

$$\pi_t : \bar{Y}_t \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m),$$

dado pela restrição a $\bar{Y}_t$ nas projeções descritas acima, está bem definido. Isto ocorre porque se $\omega = 0$, pela relação

$$\omega \wedge df = \alpha f,$$

temos $0 = \alpha f$. Como $f \neq 0$, então $\alpha = 0$. Sendo $\bar{Y}_t$ projetivo, $\pi_t(\bar{Y}_t)$ é um fechado de Zariski. Observemos que o fechado $\pi_t(\bar{Y}_t)$ é o conjunto das equações de Pfaff de grau m que possuem soluções algébricas de grau t. Jouanolou conclui que

$$Z_m = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m) - \bigcup_{t \geq 1} \pi_t(\bar{Y}_t).$$

Um detalhe importante é que, se $Z_m \neq \emptyset$, então

$$U_t = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m) - \pi_t(\bar{Y}_t),$$

isto é, o conjunto das equações de Pfaff sem solução de grau exatamente igual a t, é um aberto não-vazio na topologia de Zariski, e portanto um subconjunto denso de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V_m)$.

Capítulo 3

Derivações simples e o Singular

3.1 Linhas unimodulares e singularidades

Seja d uma derivação da forma $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$.

Vimos, pelo lema 1.8 e pela subseção 1.1.2, que buscar linhas unimodulares é uma estratégia inicial para testar a simplicidade de uma derivação. Garantimos com isto que os ideais invariantes pela derivação, se existirem, têm altura menor do que 2. Desta forma, neste caso, sobram apenas os ideais principais a serem testados com relação à invariância por d. Lembremos que:

Um ideal de altura 1 (isto é, principal) é invariante por d se, e somente se, seu gerador $f \in \mathbb{C}[x, y]$ é solução de d (ou, equivalentemente, existe $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $d(f) = gf$).

Tomamos $p(x, y) = xy + b$, onde $b \in \mathbb{Q}$, com $b \neq 0$, e $q(x, y) = a_9y^3 + a_8xy^2 + a_7x^2y + a_6x^3 + a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2 + a_2x + a_1y + a_0$, onde q foi considerado em sua forma mais geral possível de grau 3. Os polinômios acima possuem coeficientes a determinar. Se há zeros comuns entre p e q, estes pontos são as singularidades de d, e vice-versa. Vejamos que elas devem ser da forma $(x_0, -b/x_0)$, pois se $p(x_0, y_0) = x_0y_0 + b = 0$, então $y_0 = -b/x_0$. Além disso, $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, pois $b \neq 0$.

Suponhamos que haja singularidades. Então podemos considerar apenas as abscissas (as coordenadas x_0) destes pontos. Estas abscissas são as raízes do polinômio resultante $\rho = Res_x(p, q)$, que é o determinante da Matriz de Sylvester dos coeficientes de p e q em x (isto é, ρ é um polinômio em x).

Teorema 3.1. *Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[x, y]$ tais que*

$$\rho(x) = \alpha(x, y)p(x, y) + \beta(x, y)q(x, y).$$

Demonstração. Ver [13], pág. 202. □

Logo, se $p_0 = (x_0, y_0)$ é uma singularidade de d, teremos

$$\rho(x_0) = \alpha(p_0)p(p_0) + \beta(p_0)q(p_0) = 0.$$

O polinômio $\rho(x)$ é da forma

$$\rho(x) = \rho_t x^t + \rho_{t-1}x^{t-1} + \cdots + \rho_1 x + \rho_0,$$

onde os coeficientes ρ_i são polinômios nas variáveis a_j e b, e $t = \deg(p)\deg(q)$(ver [13], cap. IV, seção 8). Em nosso caso, $\deg(\rho) = 6$. Isto sugere a estratégia seguinte para a obtenção de condições sob as quais tenhamos (p, q) unimodular: forçamos ρ a não ter raízes, ou forçamos condições sobre os coeficientes de ρ de modo que $x_0 = 0$ seja a única raiz deste polinômio, o que sabemos ser proibido pela condição $b \neq 0$. Assim, como ρ_i é uma expressão polinomial em a_j e b, encontraremos relações de dependência entre estas variáveis (que são os coeficientes de p e q, e constituímos novos polinômios apenas com as "variáveis independentes". Explicaremos a seguir.

Estratégia em linhas gerais: O polinômio ρ não possui raízes apenas se for uma constante não-nula. Assim d não tem singularidades. Se $\rho(x) = \rho_6 x^6 + ... + \rho_0$, uma condição suficiente para a unimodularidade de (p, q) é que

$$\rho_6 = \rho_5 = ... = \rho_1 = 0$$

e

$$\rho_0 \neq 0.$$

Mas os polinômios ρ_i são nulos ($i \neq 0$) para alguma escolha dos coeficientes a_j e b enquanto $\rho_0 \neq 0$ para esta mesma escolha se, e somente se $\rho_0 \notin rad(\rho_1, ..., \rho_6)$, onde $rad(\rho_1, \cdots, \rho_6)$ é o radical do ideal gerado pelos coeficientes ρ_i para $i \in 1, \cdots, 6$. Daí, utilizamos o programa `Singular` para realizar esta operação. Pelo Teorema da Decomposição Primária para ideais (ver [23], pag. 55), o ideal I gerado por $\rho_1, \cdots, \rho_6$, sem ρ_0, pode ser escrito como interseçao finita de ideais primários, e para cada um deles existe um único ideal primo associado. O programa exibe uma decomposição e os geradores de cada ideal primo associado. Verificamos então se ρ_0 pertence ao dado ideal primo ou não usando a ferramenta computacional. Consideramos então as relações entre os geradores para determinar em que condições ρ_0 pertence ao ideal, e obtemos os coeficientes independentes nestas relações de modo a construir um polinômio $\hat{q}$ tal que $(p, \hat{q})$ seja uma linha unimodular. Daremos mais detalhes adiante (próxima seção) com a exibição de um exemplo.

Outra forma de obter linhas unimodulares usando este raciocínio é estudarmos em que condições $\rho_j \neq 0$ para algum $j \neq 0$ enquanto $\rho_6 = ... = \hat{\rho}_j = \rho_{j-1} = ... =$

$\rho_0 = 0$, e $\hat{\rho}_j$ indica a omissão do termo ρ_j na igualdade. Teremos que $\rho(x_0) = \rho_j x_0^j = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, o que é impossível pela imposição sobre b. Logo, novamente precisamos obter condições em que $\rho_j \notin \mathrm{rad}(\rho_t, ..., \hat{\rho}_j, \rho_{j-1}, ..., \rho_0)$. Como antes, utilizamos o `Singular` para tal tarefa, decompondo o ideal gerado por $\rho_0, \cdots, \hat{\rho}_j, \cdots, \rho_6$ (onde $\hat{\rho}_j$ significa a ausência deste coeficiente entre os geradores do ideal) em componentes primárias. Verifica-se se nosso coeficiente não pertence a cada ideal primo associado aos ideais primários da citada decomposição. Usando as mesmas operações descritas na estratégia anterior, mais uma vez obtemos uma linha unimodular.

Após a obtenção de uma linha unimodular, resta testar os ideais principais, questão abordada mais adiante. Detalharemos o processo computacional na próxima seção.

3.2 Descrição do procedimento e resultados obtidos

3.2.1 Procedimentos no `Singular`

Consideramos a derivação dada por

$$p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $p(x,y) = xy + b$, com $b \in \mathbb{Q}$, e $q(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$, $a_i \in \mathbb{Q}$. Procuramos primeiro, segundo a estratégia delineada na seção anterior, condições para as quais, a partir de (p,q), possamos obter uma linha unimodular. Para detalhar melhor os principais procedimentos utilizados no uso do `Singular`, vamos mostrar o que foi feito para produzir um dos casos com singularidades reduzidas em $z = 0$ (como veremos na próxima seção). Exibimos os comandos e trechos de linhas de código, explicando basicamente o que está sendo realizado.

```
ring r = 0, (x,y,b, a(0..9)), dp;
```

Determinamos acima o anel de polinômios com os coeficientes (b e $a_0, \cdots, a_9$) e variáveis (x e y) que serão utilizados.

```
poly p = x*y+b;
poly q = a(0)+a(1)*x+a(2)*y+a(3)*x^2+a(4)*x*y+a(5)*y^2+
a(6)*x^3+a(7)*x^2*y+a(8)*x*y^2+a(9)*y^3;
```

```
poly  R = resultant(p,q,y);
matrix m = coef(R,x*y);
print(m);
matrix B = permcol(m,4,7);
```

Nos comandos acima, determinamos o polinômio **resultante** de p e q em y, isto é, o determinante da *Matriz de Sylvester* em x de p e q, denotado por R (o mesmo ρ descrito anteriormente). A *matriz dos coeficientes* de R é a matriz m abaixo:

$$\begin{bmatrix} x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 \\ \rho_6 & \rho_5 & \rho_4 & \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix}$$

A matriz B é a matriz m cujas colunas 4 e 7 foram trocadas. O propósito é gerar um ideal com os coeficientes de R, nomeados $\rho_0, \cdots, \rho_6$, mas sem ρ_3 neste caso. Vamos utilizar as colunas 1 a 6 de B, como descrito abaixo:

```
int k = 1;
ideal i = B[2,1];
while (k < ncols(B)-1)
 {k= k+1;
  i = i, B[2,k];}
```

O ideal i gerado pelos coeficientes descritos na segunda linha de B, nas colunas 1 a 6, foi criado. A seguir, pedimos ao programa que construa a lista L, que exibe a decomposição de i em ideais primários, usando o comando a seguir.

```
list L = primdecGTZ(i);
```

A lista exibe 4 ideais primários, cada um seguido de seu ideal primo associado. Uma destas duplas segue abaixo:

```
 L:
[1]:
   [1]:
      _[1]=a(0)
      _[2]=b
      _[3]=a(6)
      _[4]=a(3)
   [2]:
      _[1]=a(0)
      _[2]=b
      _[3]=a(6)
      _[4]=a(3)
```

Notemos que $L[1][2]$ é o ideal primo associado. Cada linha exibe um gerador do ideal. Verificaremos se $\rho_3 = -ba_4 + a_0$ pertence a cada ideal primo consituinte na decomposição primária de i.

```
ideal j = L[1][2];
ideal j1 = std(j);
```

Criamos acima a base de Groebner associada ao ideal primo L[1][2] com o comando `std(j)` (`std` vem de *standard basis*).

```
poly ro3 = -b*a(4)+a(0);
reduce (ro3, j1);
```

O comando `reduce`, acima, determina, via algoritmo da divisão, se ρ pertence ao ideal j_1 (que é o primo $j = L[1][2]$ já normalizado pela base de Groebner com o comando `std`) ou não: se a resposta de `reduce` for 0, o elemento pertence a j_1; se diferente de 0, não pertence.

Fizemos o mesmo com todas os outros ideais primos. Exibimos a seguir as outras componentes primárias com seus ideais primos associados.

```
[2]:
   [1]:
      _[1]=a(9)
      _[2]=a(5)
      _[3]=-a(2)*a(7)+a(1)*a(8)
      _[4]=b*a(8)-a(2)
      _[5]=b*a(7)-a(1)
      _[6]=a(6)
      _[7]=a(3)
   [2]:
      _[1]=a(9)
      _[2]=a(5)
      _[3]=-a(2)*a(7)+a(1)*a(8)
      _[4]=b*a(8)-a(2)
      _[5]=b*a(7)-a(1)
      _[6]=a(6)
      _[7]=a(3)

[3]:
   [1]:
      _[1]=a(2)
```

```
        _[2]=a(1)^2
        _[3]=b*a(7)-a(1)
        _[4]=b*a(1)
        _[5]=b^2
        _[6]=a(6)
        _[7]=a(3)
     [2]:
        _[1]=a(2)
        _[2]=a(1)
        _[3]=b
        _[4]=a(6)
        _[5]=a(3)
[4]:
     [1]:
        _[1]=a(5)
        _[2]=a(2)^2
        _[3]=-a(1)*a(2)*a(7)+a(1)^2*a(8)
        _[4]=a(1)^2*a(2)
        _[5]=a(1)^3
        _[6]=b*a(7)-a(1)
        _[7]=b*a(1)*a(8)-a(1)*a(2)
        _[8]=b*a(1)*a(2)
        _[9]=b*a(1)^2
        _[10]=b^2*a(8)-b*a(2)
        _[11]=b^2*a(2)
        _[12]=b^2*a(1)
        _[13]=b^3
        _[14]=a(6)
        _[15]=a(3)
     [2]:
        _[1]=a(5)
        _[2]=a(2)
        _[3]=a(1)
        _[4]=b
        _[5]=a(6)
        _[6]=a(3)
```

Vejamos os resultados das reduções (verificações de que ρ_3 pertence ou não a cada um dos 4 ideais primos da decomposição). Cada linha é o resto da divisão nas bases de Groebner.

```
a(0)
-b*a(4)+a(0)
a(0)
a(0)
```

Isto é, neste exemplo, $\rho_3 \notin L[i][2]$, para $i = 1, \cdots, 4$. Desejamos verificar em que condições temos $\rho_i = 0, i \neq 3$. Uma forma de realizar isto aqui é igualar a 0 todos os geradores de cada ideal primo, e reaver as relações que obtivermos daí, substituindo em q. Pelas reduções acima, vimos que ρ_3 não pertence a nenhum destes ideais (restos foram não-nulos). Isto nos garante que ρ_3 não será afetado pelas relações entre os outros coeficientes. Observando os componentes primos na decomposição L, vemos que as análises devem ser feitas apenas em L[2][2], pois os outros componentes possuem b como gerador e teríamos que fazer $b = 0$, o que é descartado por hipótese.

Analisando L[2][2] e realizando as substituições em q:

```
> poly q1 = subst(q,a(9),0);
// ** redefining q1 **
```

Aqui fizemos $a_9 = 0$ no polinômio q, obtendo um polinômio q_1. O mesmo é feito a seguir com os outros geradores de $j = L[2][2]$.

```
> q1;
x^3*a(6)+x^2*y*a(7)+x*y^2*a(8)+x^2*a(3)+x*y*a(4)+y^2*a(5)+x*a(1)+y*a(2)+a(0)
> poly q2 = subst(q1,a(5),0);
// ** redefining q2 **
> q2;
x^3*a(6)+x^2*y*a(7)+x*y^2*a(8)+x^2*a(3)+x*y*a(4)+x*a(1)+y*a(2)+a(0)
> poly q3 = subst(q2,a(6),0);
// ** redefining q3 **
> q3;
x^2*y*a(7)+x*y^2*a(8)+x^2*a(3)+x*y*a(4)+x*a(1)+y*a(2)+a(0)
> poly q4 = subst(q3,a(3),0);
// ** redefining q4 **
> q4;
x^2*y*a(7)+x*y^2*a(8)+x*y*a(4)+x*a(1)+y*a(2)+a(0)
> poly q5 = subst(q4,a(1),b*a(7));
> poly q6 = subst(q5,a(2),b*a(8));
> q6;

x^2*y*a(7)+x*y^2*a(8)+x*y*a(4)+x*b(1)*a(7)+y*b*a(8)+a(0)
```

Após todas as possíveis substituições, obtivemos o polinômio $\hat{q}$, que sem prejuízo na compreensão continuaremos denotando por $q(x, y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + ba_7x + ba_8y + a_0$. Temos, pela construção acima, que (p, q) é uma linha unimodular sob condições impostas aos coeficientes. Isto é: produzimos uma linha de modo que existam escolhas para os coeficientes a_i e b tais que (p, q) seja unimodular. Importante observar que, nos casos em que a redução de ρ_i na base de Groebner respectiva ao ideal primo analisado foi igual a 0, nada foi feito. São casos que simplesmente foram ignorados por não influírem de modo algum na produção de polinômios com coeficientes livres de relações, como é o q acima.

Da mesma forma operamos com todos os coeficientes ρ_i do polinômio resultante $R = \rho$, produzindo os casos descritos na próxima seção.

3.2.2 Casos produzidos

Exibimos aqui os polinômios $\hat{q} = q$ produzidos segundo os procedimentos descritos, listando-os por coeficiente que foi deixado de fora da geração do ideal i estudado pelo programa `Singular`, como descrito na seção anterior, e por isso cada item começa por "$\rho_i \neq 0$". Há diferença entre as abordagens dos casos em que q possui termos x^3 e/ou y^3, e a dos casos sem qualquer um dos dois termos. Na análise de singularidades em $z = 0$ (quando realizarmos a projetivização da forma associada à derivação constituída por p e q em cada situação) do segundo caso, as singularidades são reduzidas, e no primeiro caso as singularidades em $z = 0$ são dicríticas, como veremos adiante. Por isso listamos os polinômios q produzidos em duas classes separadas.

Sem y^3 e/ou x^3:

1. $\rho_1 \neq 0$:

$$q(x, y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + a_5y^2 + ba_7x + ba_8y + ba_4$$

2. $\rho_2 \neq 0$:

$$q(x, y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + ba_7x + a_2y + ba_4.$$

3. $\rho_3 \neq 0$:

$$a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + ba_7x + ba_8y + a_0$$

4. $\rho_4 \neq 0$

$$q(x, y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + ba_8y + a_1x + ba_4.$$

5. $\rho_5 \neq 0$:

$$q(x,y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_4xy + a_3x^2 + a_7bx + ba_8y + ba_4.$$

Com x^3 e/ou y^3:

6. $\rho_6 \neq 0$:

$$q(x,y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_6x^3 + ba_7x + ba_8y + ba_4.$$

7. $\rho_0 \neq 0$:

$$q(x,y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 + a_4xy + ba_7x + ba_8y + ba_4.$$

Na primeira classe desta lista, vemos um padrão: $q = a_7x^2y + a_8xy^2 + S(x,y) = xy\lambda + S$, onde o grau de S é menor ou igual a 2, e $\lambda = a_7x + a_8y$. Isto será importante na próxima seção, onde analisamos as singularidades das derivações que possuem q como coeficiente de $\frac{\partial}{\partial y}$ de uma das formas acima.

Devemos ressaltar que o mesmo processo descrito na seção anterior foi feito calculando-se polinômios resultantes em y, e as mesmas linhas unimodulares da lista acima foram produzidas.

3.3 Análise de singularidades em $z = 0$

Como não existem singularidades em $z \neq 0$, já que (p,q) é linha unimodular (construção com uso do `Singular`), vamos analisar as singularidades em $z = 0$ para a projetivização da derivação

$$p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y},$$

sabendo que $p = p(x,y) = xy + b$, e $q = q(x,y)$ é um dos polinômios de grau 3 produzidos acima, no caso em que o termo homogêneo de grau 3 não é múltiplo constante de x^3 ou y^3. Veremos que as singularidades são reduzidas, de forma que podemos limitar o grau das soluções e usar o Teorema de Carnicer. No caso em que ocorre y^3 ou x^3, há singularidades dicríticas, como veremos no próximo capítulo, o que torna muito mais difícil a abordagem do problema da d-simplicidade e da inexistência de soluções algébricas em geral para o campo d. Então enunciemos o resultado desta seção:

Proposição 3.2. *As singularidades em $z = 0$ de*

$$d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + \big(a_7x^2y + a_8xy^2 + R(x,y)\big)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $a_7x^2y + a_8xy^2 + R(x,y) = q$ *é um dos polinômios exibidos na seção 3.2.2, com* $\deg(R) = 2$*,* $b, a_i \in \mathbb{Q}$*,* $b \neq 0$*,* $a_7 \neq 0$*,* $a_8 \neq 0$ *e* $a_5 > 0$*, são não-dicríticas.*

Demonstração. A 1-forma dual deste campo é

$$\omega = qdx - pdy,$$

onde $p = xy + b$ e $q = a_7x^2y + a_8xy^2 + R(x,y)$. A homogeneização é folheação de grau 3

$$\Omega = (a_7x^2y + a_8xy^2 + zR^h)(zdx - xdz) - (xyz + bz^3)(zdy - ydz) =$$

$$= z(a_7x^2y + a_8xy^2 + zR^h)dx - z(xyz + bz^3)dy + (xy^2z + byz^3 - a_7x^3y - a_8x^2y^2 - xzR^h)dz,$$

onde R^h é o polinômio R homogeneizado em z. Assim, as singularidades em $z = 0$ só podem ocorrer em $a_7x^3y + a_8x^2y^2 = 0$, isto é: $x = 0$, $y = 0$ ou $\lambda = a_7x + a_8y = 0$. Vamos analisar então o que ocorre nos abertos U_x e U_y de $\mathbb{P}^2$.

(i) $x = 1$:

$$\omega_x = -z(yz + bz^3)dy + (y^2z + byz^3 - a_7y - a_8y^2 - z\bar{R})dz,$$

onde $\bar{R} = R^h(1, y, z)$. O campo associado é dado por

$$-(y^2z + byz^3 - a_7y - a_8y^2 - z\bar{R})\frac{\partial}{\partial y} - z(yz + bz^3)\frac{\partial}{\partial z},$$

e a matriz jacobiana fica, em $z = 0$,

$$\begin{bmatrix} a_7 + 2a_8y & -y^2 - \bar{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em $y = 0$, um autovalor é 0 e o outro é a_7, que é não-nulo por hipótese. Em $y = -a_7/a_8$, temos os autovalores 0 e $-a_7$. Portanto as singularidades são reduzidas em $x = 1$.

(ii) $y = 1$:

$$\omega_y = z(a_7x^2 + a_8x + z\bar{R})dx + (xz + bz^3 - a_7x^3 - a_8x^2 - xz\bar{R})dz,$$

onde, agora, $\bar{R} = R^h(x, 1, z)$. O campo dual é

$$d = -(xz + bz^3 - a_7x^3 - a_8x^2 - xz\bar{R})\frac{\partial}{\partial x} + z(a_7x^2 + a_8x + z\bar{R})\frac{\partial}{\partial z},$$

cuja matriz jacobiana em $z = 0$ fica igual a

$$\begin{bmatrix} 3a_7x^2 + 2a_8x & -x + x\bar{R} \\ 0 & a_7x^2 + a_8x \end{bmatrix}$$

O $x = -\frac{a_8}{a_7} \neq 0$ já foi analisado na carta $x = 1$, portanto não precisamos repetir. Mas em $x = 0$, a matriz é nula, e portanto deveremos efetuar uma explosão (*blow-up*) nesta singularidade. Isto é necessário para resolver a singularidade (já que segundo o teorema de Seidenberg, existe uma sequência de resoluções que resultam em uma singularidade reduzida - ver [14]). Nosso desejo é, ao longo da sequência, não encontrar qualquer singularidade dicrítica.

(1) Realizando a explosão na primeira carta, isto é, fazendo $x := zt$, e $z := z$:

$$z(a_7z^2t^2 + a_8zt + z\hat{R})(tdz + zdt) + (tz^2 + bz^3 - a_7z^3t^3 - a_8z^2t^2 - z^2t\hat{R})dz$$

$$= z^2(a_7z^2t^2 + a_8zt + z\hat{R})dt + z^2(t + bz)dz,$$

onde $\hat{R} = \bar{R}|_{x=zt}$. Como a 1-forma não está saturada, cancelamos z^2, obtendo a forma $\bar{\omega}_y$:

$$\bar{\omega}_y = (a_7z^2t^2 + a_8zt + z\hat{R})dt + (t + bz)dz.$$

O campo dual é

$$d = -(t + bz)\frac{\partial}{\partial t} + (a_7z^2t^2 + a_8zt + z\hat{R})\frac{\partial}{\partial z},$$

cujas singularidades em $z = 0$ ocorrem em $t = 0$. A matriz jacobiana em $z = 0 = t$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & -b \\ 0 & \hat{R}(0,1,0) \end{bmatrix}$$

Em $z = 0$, temos $\hat{R}(0,1,0) = R_2(0,1)$, onde R_2 é o componente homogêneo de grau 2 em R. Se x divide R_2, então $\hat{R}(zt,1,0) = 0$ em $t = 0$ e temos uma singularidade reduzida. Senão, lembremos que estamos estudando derivações onde um dos polinômios constituintes, q, é um dos casos exibidos na lista da seção 3.2.2, onde não há múltiplos constantes de x^3 ou y^3, e numa rápida consulta vemos que o único caso em que x não divide R_2 é tal que $R_2 = a_4xy + a_5y^2$. Assim, $R_2(0,1) = a_5$, com $x = zt$. Como $a_5 > 0$ e racional, o quociente entre -1 e a_5 é um número racional negativo. Logo, a singularidade é reduzida.

(2) Explodindo a forma ω_y na segunda carta, isto é, fazendo $x := x$ e $z := xt$,

temos:

$$xt(a_7x^2 + a_8x + xt\hat{R})dx + (x^2t + bx^3t^3 - a_7x^3 - a_8x^2 - x^2t\hat{R})(xdt + tdx)$$

$$= x^2(t^2 + bxt^4)dx + x^2(xt + bx^2t^3 - a_7x^2 - a_8x - xt\hat{R})dt,$$

onde $\hat{R} = \bar{R}|_{z=xt}$. Saturamos a forma cancelando x^2.

$$\tilde{\omega}_y = (t^2 + bxt^4)dx + (xt + bx^2t^3 - a_7x^2 - a_8x - xt\hat{R})dt,$$

cujas singularidades em $x = 0$ ocorrem em $t = 0$. Seu campo dual é

$$d = -(xt + bx^2t^3 - a_7x^2 - a_8x - xt\hat{R})\frac{\partial}{\partial x} + (t^2 + bxt^4)\frac{\partial}{\partial t}.$$

Sua matriz jacobiana em $x = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -t + a_8 + t(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} + \hat{R}) & 0 \\ bt^4 & 2t \end{bmatrix}$$

que fica, em $t = 0$, igual a

$$\begin{bmatrix} a_8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, um autovalor é $a_8 \neq 0$ e o outro é nulo. Logo a singularidade é reduzida. □

Portanto, podemos usar o teorema de Carnicer para garantir que o grau de possíveis soluções é limitado. Verificaremos, a seguir, que estas soluções não existem, fazendo uso do Singular e do teorema 2.8, corolário do teorema de Carnicer: sendo as singularidades destes campos todas reduzidas, as derivações d só podem ter soluções algébricas f em $\mathbb{Q}[x, y]$ de grau máximo 4, já que o grau das folheações induzidas por nossas derivações é 3. No programa, testaremos as soluções de grau no máximo 4 em formato mais geral possível, e verificaremos a impossibilidade das mesmas.

3.4 Testando os ideais de altura 1

O objetivo desta seção é usar o resultado obtido na seção anterior e a construção de linhas unimodulares no `Singular` para obter o seguinte:

Teorema 3.3. *A família de derivações*

$$d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (a_7x^2y + a_8xy^2 + S(x, y))\frac{\partial}{\partial y},$$

tais que $a_i, b \in \mathbb{Q}$, $b, a_7, a_8 \neq 0$, $\deg(S) \leq 2$, e $a_5 > 5$ (no caso em que aparece a_5y^2 em S), são derivações simples de $\mathbb{C}[x, y]$.

É interessante enunciar seu equivalente na linguagem de folheações holomorfas:

Teorema 3.4. *A família de folheações projetivas de grau* 3 *induzidas pelas* 1*-formas duais de derivações descritas acima satisfazem:*

i. Suas singularidades pertencem ao conjunto de pontos tais que $z = 0$*;*

ii. não possuem soluções algébricas.

Consideramos aqui, apenas para efeito descritivo, o polinômio $q = a_7x^2y+a_8xy^2+a_4xy+a_5y^2+ba_7x+ba_8y+ba_4$, um dos polinômios exibidos na subseção 3.2.2, e que não possui x^3 ou y^3. O mesmo raciocínio pode ser utilizado em todas as derivações d tais que o polinômio q, que multiplica a derivada parcial em y, seja da forma $a_7x^2y + a_8xy^2 + S(x, y)$, com as restrições do enunciado do teorema 3.3 acima.

Pelo que nos mostrou a análise de singularidades em $z = 0$, as singularidades são reduzidas sob as hipóteses de que $b, a_7, a_8 \neq 0$, $a_5 > 0$, $a_i, b \in \mathbb{Q}$. Assim, podemos usar o teorema 2.8 (corolário do teorema de Carnicer) para este caso. Logo, se existir solução f para $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, então $\deg(f) \leq 4$, pois o campo tem grau 3.

Para agilizar os cálculos que serão realizados pelo programa, fazemos uma análise e verificamos que, não apenas neste exemplo, mas em todos os casos produzidos que não possuem x^3 ou y^3, ocorre o descrito a seguir.

Suponhamos que d tenha uma solução algébrica f de grau n. Pela proposição 2.2, podemos supor que existe f polinômio de grau n em $\mathbb{Q}[x, y]$ tal que,

$$d(f) = p\frac{\partial}{\partial x}(f) + q\frac{\partial}{\partial y}(f) = gf$$

para algum polinômio g em $\mathbb{Q}[x, y]$. Observa-se que g deve ter grau no máximo igual a 2. Escrevemos $\lambda = a_7x + a_8y$, e assim $q = xy\lambda + a_4xy + a_5y^2 + b\lambda + ba_4$.

Lema 3.5. *Se* f_n *é o termo homogêneo de grau* n *do polinômio* f*, então* $f_n \notin \mathbb{Q}[x]$*.*

Demonstração. Suponhamos $f_n = c_nx^n$, onde $c_n \in \mathbb{Q}$ é não-nulo. Portanto, $\frac{\partial f_n}{\partial y} = 0$. Comparando os termos de grau $n+2$ da equação $d(f) = gf$, obtemos $xy\lambda.0 = g_2f_n$, donde $g_2 = 0$. Assim, os termos de grau mais alto têm grau $n + 1$ em $d(f) = gf$, e satisfazem a equação

$$xy\frac{\partial f_n}{\partial x} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1f_n. \tag{3.1}$$

Sustituindo f_n na equação (3.1), temos

$$nc_nyx^n + xy\lambda\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1c_nx^n, \tag{3.2}$$

donde y divide g_1. Logo $g_1 = \alpha y$, para alguma constante α. Substituindo isto na equação (3.2), e cancelando y, temos

$$x\lambda\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = (\alpha - n)c_n x^n. \tag{3.3}$$

Portanto, λ divide $(\alpha - n)c_n x^n$, e assim $\alpha = n$. Daí, da equação (3.3), temos que $\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = 0$ e, portanto, $f_{n-1} = c_{n-1}x^{n-1}$.

Agora comparemos os termos de grau n:

$$xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = g_1 f_{n-1} + g_0 f_n. \tag{3.4}$$

Substituindo os termos conhecidos na equação acima, temos

$$(n-1)c_{n-1}yx^{n-1} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = nyc_{n-1}x^{n-1} + g_0 c_n x^n, \tag{3.5}$$

donde concluímos que y divide g_0, e portanto que $g_0 = 0$. Substituindo isto em (3.5) e cancelando y,

$$(n-1)c_{n-1}x^{n-1} + x\lambda\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = nc_{n-1}x^{n-1} \tag{3.6}$$

ou, equivalentemente,

$$x\lambda\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = c_{n-1}x^{n-1}. \tag{3.7}$$

Portanto, λ divide o membro direito da equação (3.7), e daí temos $c_{n-1} = 0$. Pela mesma equação, o membro direito ser nulo implica que $\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = 0$, ou ainda que $f_{n-2} = c_{n-2}x^{n-2}$.

Agora estudamos os termos de grau $n-1$.

$$xy\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x} + b\frac{\partial f_n}{\partial x} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} + (a_4 xy + a_5 y^2)\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + b\lambda\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1 f_{n-2} \tag{3.8}$$

Substituindo os termos conhecidos, ficamos com

$$(n-2)c_{n-2}yx^{n-2} + bnc_n x^{n-1} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} = nc_{n-2}yx^{n-2} \tag{3.9}$$

Rearrumando a equação acima, temos

$$bnc_n x^{n-1} + xy\lambda\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} = 2c_{n-2}yx^{n-2} \tag{3.10}$$

Pela equação (3.10), temos que y divide $bnc_n x^{n-1}$, e como $c_n \neq 0$ e $n \neq 0$, então $b = 0$. Absurdo.

□

Por causa do Lema 3.5, podemos analisar os componentes líderes homogêneos em ambos os lados, sabendo que estes termos têm grau $n+2$ (já que os componentes de grau $n+2$ não se anulam na derivação com relação a y). Lembremos que o grau de g é, no máximo, igual 2. Escrevendo a equação apenas para os termos de grau $n+2$,

$$q_3 \frac{\partial f_n}{\partial y} = g_2 f_n, \tag{3.11}$$

onde $q_3 = a_7x^2y + a_8xy^2 = xy\lambda$, $\lambda = a_7x + a_8y$. Seja $f_n = p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_t^{n_t}$ a decomposição de f_n em seus fatores irredutíveis p_i. Assim,

$$\frac{\partial f_n}{\partial y} = \sum_{i=1}^{t} n_i p_i^{n_i-1} \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1^{n_1}...\widehat{p_i}^{n_i}...p_t^{n_t}$$

$$= p_1^{n_1-1}...p_t^{n_t-1} \sum_{i=1}^{t} n_i \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1...\widehat{p_i}...p_t$$

Na equação acima, $\widehat{p_i}^{n_i}$ denota o fato de $p_i^{n_i}$ não ocorrer no respectivo termo do somatório, no produto.

Assim, substituindo isto na equação (3.11) e cancelando os termos comuns, temos

$$xy\lambda \sum_{i=1}^{t} n_i \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1...\hat{p}_i...p_t = g_2 p_1...p_i...p_t \tag{3.12}$$

Na equação (3.12), nenhum dos fatores p_i divide o somatório no lado esquerdo. Assim, cada p_i deve dividir $xy\lambda$. Como x, y e λ são irredutíveis, então podemos supor, sem perda de generalidade que $p_1 = x$, $p_2 = y$ e $p_3 = \lambda$. Portanto, concluímos que o componente homogêneo líder de f é da forma $f_n(x,y) = \lambda^{e_1}x^{e_2}y^{e_3}$, onde $e_1, e_2, e_3 \geq 0$ e $e_1 + e_2 + e_3 \geq 1$.

Agora, procedemos como descrito abaixo. Cada forma possível para f, com todas as variações de graus até 4, foi considerada com coeficiente líder 1, já que o programa não conseguiu realizar os cálculos com coeficientes gerais. Pelo que foi dito acima, o termo líder de f deve ser da forma $f_n(x,y) = \lambda^{e_1}x^{e_2}y^{e_3}$, onde $\lambda = a_7x + a_8y$. Por isso, precisamos realizar quatorze operações para cada polinômio como descreveremos no exemplo a seguir, onde $e_1 = e_3 = 1$ e $e_2 = 2$:

```
 ring r = (0,a(0..9), b(1)), (c(0..14), e(1..6),(x,y)), dp;
 poly lambda = a(7)*x + a(8)*y;
 poly f = lambda*y^2*x + c(9)*x^2*y + c(8)*x*y^2 + c(7)*x^3 + c(6)*y^3 +
c(5)*x^2 + c(4)*y^2 + c(3)*x*y + c(2)*x + c(1)*y + c(0);
 poly p = x*y+b;
 poly q =  a(7)*x^2*y + a(8)*x*y^2 + a(4)*x*y + a(5)*y^2
+ b*a(7)*x + b*a(8)*y + b*a(4);
```

Determinamos nos comandos acima os polinômios envolvidos nos cálculos a seguir.

Supõe-se, nesta operação específica, que a solução f tem a forma $\lambda y^2x + c_9x^2y + c_8xy^2 + c_7x^3 + c_6y^3 + c_5x^2 + c_4y^2 + c_3xy + c_2x + c_1y + c_0$, onde $c_i \in \mathbb{C}$.

```
poly f1 = diff(f, x);
poly f2 = diff(f, y);
poly d = p*f1 + q*f2;
poly g = e(1)*x^2 + e(2)*x*y + e(3)*y^2 + e(4)*x + e(5)*y + e(6);
poly w = d - g*f;
matrix m = coef(w,x*y);
int k= 1;
ideal i = m[2,1];
while (k < ncols(m)) {k = k+1; i = i, m[2,k];}
```

Acima, descrevemos d e o cofator g em $d(f) = g.f$, que sabemos ter grau no máximo 2. O polinômio $w = d(f) - g.f$ é nulo se f realmente é solução de d. Assim, vamos estudar as relações entre seus coeficientes gerando um ideal com eles e analisando sua estrutura, via seus geradores, a seguir.

```
 i;
i[1]=(-a(7))*e(1)+(2*a(7)^2)
i[2]=(-a(8))*e(1)+(-a(7))*e(2)+(5*a(7)*a(8))
i[3]=(-a(8))*e(2)+(-a(7))*e(3)+(3*a(8)^2)
i[4]=(-a(8))*e(3)
(...)
i[25]=-c(0)*e(6)+(a(4)*b(1))*c(1)+(b(1))*c(2)
```

Aqui interrompemos a exibição dos geradores, mas há vinte e cinco deles. Com o comando std(i), abaixo, verificamos que o ideal em forma padrão (isto é, considerando-se a base de Groebner criada para ele) gerado por eles é todo o anel (o único gerador é 1).

```
std(i);
_[1]=1
>
```

Isto é, não existe relação entre os coeficientes de forma que w possa ser nulo. Portanto, mostramos que $f = \lambda_1y^2x + c_9x^2y + c_8xy^2 + c_7x^3 + c_6y^3 + c_5x^2 + c_4y^2 + c_3xy + c_2x + c_1y + c_0$ não é solução polinomial para a equação $d(f) = g.f$. Isto se repete em todas as variações possíveis para e_1, e_2 e e_3 no termo homogêneo líder das possíveis soluções, nos casos em que o polinômio q não tem como termo homogêneo líder múltiplos constantes de x^3 ou y^3. Desta forma, com repetidas operações do Singular e sob as hipóteses assumidas sobre os coeficientes de p e q, mostramos que $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ não tem solução algébrica.

Capítulo 4

Um exemplo com singularidade dicrítica

Lembremos que a linha unimodular (p, q), com $p(x, y) = xy + b$ e $q(x, y) = a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 + a_4xy + ba_7x + ba_8y + ba_4$ foi produzida pelo programa `Singular`, como descrito no Capítulo 3, com $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. Consideremos o campo $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$. Vamos escrever $q(x, y)$ como

$$y(a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2) + a_4xy + ba_7x + ba_8y + ba_4.$$

Fazendo a troca de notação $a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2 = \alpha$, temos

$$q = y\alpha + a_4xy + ba_7x + ba_8y + ba_4.$$

Lembremos que uma condição fundamental para que a linha (p, q) seja unimodular é que $b \neq 0$. Suponhamos também que $a_7, a_8, a_9 \neq 0$.

Como veremos neste capítulo, a folheação induzida pela forma dual da derivação acima possui singularidade dicrítica no infinito ($z = 0$), e isto significa que não podemos aplicar o teorema de Carnicer para limitar o grau de uma curva invariante a partir do grau da folheação. Por isso teremos que usar métodos diversos dos utilizados nos capítulos anteriores para tratar deste exemplo. Mostraremos que d não possui solução algébrica. Isto é: não existe $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$d(f) = g.f$$

para $g \in \mathbb{C}[x, y]$.

Lema 4.1. *O polinômio $\alpha = a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2$ é genericamente irredutível sobre $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Observemos que $\alpha = a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se, e somente se $\bar{\alpha} = a_7t^2 + a_8t + a_9$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Se $\alpha = p_1(x, y)p_2(x, y)$, onde p_1 e p_2 são polinômios homogêneos de grau 1, então fazendo $t = x/y$, temos:

$$\alpha(ty, y) = p_1(ty, y)p_2(ty, y) = y^2 p_1(t, 1)p_2(t, 1),$$

onde a segunda desigualdade vem de uma conhecida propriedade geral dos polinômios homogêneos de grau n: $F(sx, sy) = s^n F(x, y)$. Assim, teríamos que $\bar{\alpha} = p_1p_2$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$. Usando o mesmo raciocínio de trás para a frente verifica-se a recíproca. Desta forma, basta vermos que $a_7t^2+a_8t+a_9$ é genericamente irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Temos que, sendo um polinômio com coeficientes racionais de grau 2, é redutível somente se seu discriminante $\Delta = a_8^2 - 4a_7a_9$ for um quadrado perfeito em $\mathbb{Q}$, ou melhor,

$$a_8^2 - 4a_7a_9 = u^2,$$

onde $u \in \mathbb{Q}$. Mas isto não é satisfeito por todas as escolhas de coeficientes: $a_7 = a_8 = a_9 = 1$, por exemplo, não satisfaz esta condição.

Assim, conseguimos um exemplo que não satisfaz a condição necessária para que α seja redutível em $\mathbb{Q}$. Observemos que a relação $a_8^2 - 4a_7a_9 = u^2$ é satisfeita por pontos (a_7, a_8, a_9, u) de um fechado na topologia de Zariski de $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$. Assim, os coeficientes que não satisfazem tal condição determinam um aberto do tipo Zariski em $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ para cada u, e por sua vez polinômios α irredutíveis em $\mathbb{Q}$. Assim, os coeficientes que não satisfazem a condição para redutibilidade em geral determinam uma interseção enumerável de abertos Zariski em $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$. Por isso, α é genericamente irredutível sobre $\mathbb{Q}$. $\square$

Lema 4.2. *A folheação induzida pela forma cujo campo dual é d possui uma singularidade dicrítica em $z = 0$.*

Demonstração. À derivação $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ está associada a 1-forma $\omega = qdx - pdy$. A homogeneização de ω é dada por

$$q(x/z, y/z)d(x/z) - p(x/z, y/z)d(y/z).$$

Como o polinômio de grau mais alto é q e tem grau 3, no denominador desta forma aparece $z^3.z^2$, onde o fator z^2 vem de $d(x/z)$ e $d(y/z)$. Assim a forma acima precisa ser multiplicada por z^5 (para que desapareçam os pólos), o que nos dá a 1-forma projetiva abaixo:

$$\Omega = \bar{q}z\mathrm{dx} - \bar{p}z^2\mathrm{dy} + (yz\bar{p} - x\bar{q})\mathrm{dz},$$

onde $\bar{p}$ e $\bar{q}$ são os polinômios p e q homogeneizados. O termo que não é divisível por z ocorre no produto com dz e é $x(a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3)$, vindo de $x\bar{q}$. Fazemos

$z = 0$ na forma acima e obtemos as singularidades em: $x = 0$ e nos pontos tais que $a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 = 0$.

Analisemos a singularidade $(0 : 1 : 0)$, desomogeneizando a forma em $y = 1$.

$$\Omega|_{y=1} = \omega_y = \tilde{q}z\text{dx} + (xz + bz^3 - x\tilde{q})\text{dz},$$

onde $\tilde{q} = a_7x^2 + a_8x + a_9 + a_4xz + ba_7xz^2 + ba_8z^2 + ba_4z^3$. Assim, o campo associado à forma acima é $d_y = -(xz + bz^3 - x\tilde{q})\frac{\partial}{\partial x} + z\tilde{q}\frac{\partial}{\partial z}$, que possui a seguinte matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} -z + \tilde{q} + x\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} & -(x + 3bz^2) + x\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} \\ z\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} & \tilde{q} + z\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

A matriz acima fica, em $z = x = 0$, igual a

$$\begin{bmatrix} a_9 & 0 \\ 0 & a_9 \end{bmatrix}$$

A matriz é diagonal, e portanto seus autovalores são iguais a $a_9 \neq 0$. Logo, a razão entre os autovalores é 1, o que nos dá uma singularidade não-reduzida. Mas, além disso, a matriz acima pode ser escrita como $a_9 \cdot I$, onde I é a matriz identidade 2×2. Isto significa que o campo tem multiplicidade algébrica 1 sendo que o termo linear é da forma

$$a_9(x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}).$$

Portanto, de acordo com a Proposição 2.4, da seção 2.1.2, temos que a singularidade é dicrítica.

□

Portanto, neste caso não podemos aplicar o teorema de Carnicer e utilizar ferramentas computacionais para verificar de imediato a inexistência de soluções algébricas para d. Vamos analisar a possibilidade de uma solução e exibir um exemplo de campo sem solução algébrica utilizando estratégias diferentes das utilizadas no caso não-dicrítico.

Seja $f = f(x, y)$ uma solução algébrica de d de grau n em $\mathbb{Q}[x, y]$, isto é, existe $g \in \mathbb{Q}[x, y]$ de grau no máximo 2 tal que

$$d(f) = g.f.$$

Nossos esforços serão maiores no caso em que f_n é da forma $c_nx^iy^j$, $c_n \in \mathbb{Q}$, $c_n \neq 0$, $i, j > 0$. Assim, vamos mostrar primeiro que f não possui termo líder da forma c_nx^n.

Lema 4.3. *Se f é solução da derivação d, então $f \notin \mathbb{Q}[x]$.*

Demonstração. Se $f \in \mathbb{Q}[x]$, então de $d(f) = f.g$ concluímos que $\deg(g) \leq 1$, pois $d(f) = (xy + b)\frac{\partial f}{\partial x}$ possui grau $n + 1$ e gf possui grau $\deg(g) + n$. Além disso, $d(f) = f.g$ nos dá:

$$(xy + b)\frac{\partial f}{\partial x} = g.f,$$

donde temos um absurdo, pois $xy+b$, de grau 2, deve dividir o membro direito (pois $b \neq 0$), mas g possui grau 1, e $f \in \mathbb{Q}[x]$, ou seja, f não é divisível por um polinômio em $\mathbb{Q}[x, y]$.

□

Lema 4.4. *Seja α um polinômio irredutível como no Lema 4.1. Então o polinômio linear $f = vy + s$, com $v, s \in \mathbb{Q}$, não é uma solução de d.*

Demonstração. Se $f = vy + s$ fosse solução, então por $d(f) = g.f$ teríamos $vq = g(vy + s)$, onde s e v são constantes. Assim, $\deg(g) = 2$. Portanto pode-se escrever g como soma de seus componentes homogêneos como a seguir: $g = g_2 + g_1 + g_0$. Logo, comparando os termos de grau 3 de $vq = g(vy + s)$ temos

$$vy\alpha = vyg_2,$$

donde $g_2 = \alpha$. Comparando os termos de grau 2 da mesma equação, temos

$$va_4xy = g_2s + g_1vy = s\alpha + g_1vy.$$

Assim, concluímos que y divide α, impossível já que α é irredutível e $v \neq 0$. □

Lema 4.5. *Se $f = f(x, y)$ é solução do campo d, então f possui grau* $\deg(f) > 1$.

Demonstração. Suponha $n = 1$. Isto é, $f(x, y) = ux + vy + s$, para u, v e $s \in \mathbb{C}$, e $v \neq 0$ como consequência do Lema 4.3. Pelo Lema 4.4, $u \neq 0$. Escrevemos $g(x, y) = g_2(x, y) + g_1(x, y) + g_0$ como soma de seus componentes homogêneos. Assim, podemos comparar os termos de grau 3 da equação $d(f) = gf$, obtendo

$$vy(a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2) = vy\alpha = (ux + vy)g_2. \tag{4.1}$$

Temos que y divide g_2, pois não pode dividir $ux+vy$, já que $u \neq 0$. Assim, $g_2 = y\lambda$, onde λ é homogêneo de grau 1 e não divisível por y. Substituindo de volta g_2 na equação (4.1), cancelamos y e assim obtemos

$$\lambda(ux + vy) = v\alpha,$$

donde λ divide α, impossível já que α é irredutível e $v \neq 0$.

□

Definição 4.6. *Seja i_0 o menor índice tal que $f_i \in \mathbb{Q}[x]$ para todo $i > i_0$, $i \in \{1 \cdots n\}$.*

Lema 4.7. *Se $i_0 < n$, então $i_0 = n-1$ ou $i_0 = n-2$, e o cofator g de f tem grau no máximo 1.*

Demonstração. Pelo Lema 4.3, temos $i_0 > 0$. Agora, suponhamos $i_0 < n-2$ qualquer (isto é, pelo menos f_n, f_{n-1} e $f_{n-2} \in \mathbb{Q}[x]$). Seja $g = g_2 + g_1 + g_0$. Mas, sendo $i_0 < n$, então $f = c_n x^n + R$, onde R possui grau no máximo igual a $n-1$ e $c_n \neq 0$. Portanto, temos $d(f) = g.f$ igual a

$$(xy + b)\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = g.f.$$

Mas a equação acima nos diz que $g_2 = 0$, pois o membro esquerdo é a soma de $(xy+b)\frac{\partial f}{\partial x}$, que possui grau $n+1$, com $q\frac{\partial f}{\partial y} = q\frac{\partial R}{\partial y}$, que possui grau no máximo igual a $3 + (n-2) = n+1$.

Comparando os termos homogêneos de mais alto grau (no caso, $n+1$) em $d(f) = gf$:

$$xy\frac{\partial f_n}{\partial x} = g_1 f_n$$

Substituindo acima $f_n = c_n x^n$ obtemos $g_1 = ny$.

Comparando termos de grau n:

$$xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} = g_1 f_{n-1} + g_0 f_n$$

Como $f_{n-1} = c_{n-1}x^{n-1}$,

$$xyc_{n-1}(n-1)x^{n-2} = c_{n-1}x^{n-1}ny + g_0 c_n x^n$$

e assim

$$-yc_{n-1} = g_0 c_n x$$

A única possibilidade oferecida pela equação acima é $g_0 = c_{n-1} = 0$.

Analisando os termos de grau $n-1$:

$$xy\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x} + b\frac{\partial f_n}{\partial x} + y\alpha\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} = g_1 f_{n-2} + g_0 f_{n-1} + g_2 f_{n-3}$$

Mas como $g_2 = g_0 = 0$, a equação acima fica igual a

$$c_{n-2}(n-2)yx^{n-2} + bnc_n x^{n-1} + y\alpha\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} = g_1 f_{n-2} = nc_{n-2}yx^{n-2}$$

Fazendo as substituições necessárias, obtemos

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y} = x^{n-2}(2yc_{n-2} - nbc_n x),$$

mas α, sendo irredutível, deve dividir algum fator do membro direito, impossível, já que não divide o termo de grau 1 e nem pode dividir x^{n-2}. Logo, se supusermos $i_0 < n-2$, obtemos uma contradição. Portanto, se $f_n \in \mathbb{Q}[x]$, temos $i_0 \in \{n-1, n-2\}$.

□

Proposição 4.8. *Se d possui solução algébrica de grau n em $\mathbb{Q}[x,y]$, então seu componente homogêneo líder f_n não pertence a $\mathbb{Q}[x]$.*

Demonstração. Segundo o Lema 4.7 acima, se $f_n = c_n x^n$ ($c_n \in \mathbb{Q}$) então temos duas possibilidades para o índice i_0 descrito anteriormente.

(a) $i_0 = n-1$;

Neste caso, o grau mais alto na equação $d(f) = g.f$ será $n+1$, como visto na demonstração do Lema 4.7. Estes termos satisfazem

$$xy\frac{\partial f_n}{\partial x} + y\alpha\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1 f_n$$

Lembremos que, de acordo com a demonstração do Lema 4.7, $g_2 = 0$. Se substituirmos os termos conhecidos, teremos

$$xync_n x^{n-1} + y\alpha\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1 c_n x^n$$

Por esta equação, vemos que x^n deve dividir $\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}$, que tem grau $n-2$ e não pode ser 0 por hipótese, absurdo. Logo, este item não se realiza.

(b) $i_0 = n-2$;

Portanto, os termos de grau mais alto, $n+1$, em $d(f) = g.f$, satisfazem uma equação envolvendo apenas a derivada em x, como no Lema 4.7, e analogamente concluímos que $g_1 = ny$.

Analisando os termos de grau n, temos:

$$xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + y\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + a_4 xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = g_1 f_{n-1} + g_0 f_n.$$

Mas $f_{n-1} = c_{n-1}x^{n-1}$. Logo a equação acima fica

$$y(n-1)c_{n-1}x^{n-1} + y\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = nyc_{n-1}x^{n-1} + g_0 c_n x^n$$

Como em (a), x^{n-1} divide $\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y}$, que não é 0 e possui grau $n-3$. Absurdo.

□

Agora estudaremos o caso em que $f_n \notin \mathbb{Q}[x]$. Desejamos provar que há exemplo de campo satisfazendo nossas condições que não possui tal solução. Lembremos que, se $f_n \notin \mathbb{Q}[x]$, então $g_2 \neq 0$. Além disso, α é irredutível em $\mathbb{Q}[x,y]$, e $b, a_7, a_8, a_9 \neq 0$.

Seja $f_n = p_1^{l_1} \cdots p_t^{l_t}$ a fatoração de f_n em seus componentes irredutíveis p_i distintos. Então

$$\frac{\partial f_n}{\partial y} = \sum_{i=1}^{t} l_i p_i^{l_i - 1} \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1^{l_1} ... \widehat{p_i^{l_i}} ... p_t^{l_t},$$

onde $\widehat{p_i^{l_i}}$ indica a ausência do fator no respectivo produto. Substituindo isto na equação dos termos de grau mais alto, $n+2$, dada por

$$y\alpha \frac{\partial f_n}{\partial y} = g_2 f_n,$$

cancelamos os fatores excedentes e ficamos com

$$y\alpha \sum_{i=1}^{t} l_i \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_t = g_2 p_1 \cdots p_t.$$

Nesta equação, podemos dizer, para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$, que p_i não divide o somatório, e como cada um dos fatores é irredutível, sendo α irredutível sobre $\mathbb{Q}$, temos, sem perda de generalidade na escolha das componentes, que $p_1 = y$ e $p_2 = \alpha$. Logo,

$$f_n = y^k \alpha^m,$$

com $k + m \geq 1$.

Observação: se $k \geq 1$, da equação $y\alpha \frac{\partial f_n}{\partial y} = g_2 f_n$ concluímos que

$$g_2 = k\alpha + my\frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Assim, temos que y não divide g_2, pois não divide α e $k \neq 0$.

Objetivo: vamos mostrar, para uma instância do polinômio q, que não podemos ter $k = 0$, isto é, que y não divide g_2. Usaremos esta conclusão num argumento para concluir que o campo $d = (xy+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y\alpha + x + y)\frac{\partial}{\partial y}$, onde $\alpha = x^2 + xy + y^2$. não possui solução algébrica.

Lema 4.9. *O polinômio $q(x,y) = y\alpha + x + y$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x,y]$.*

Demonstração. Suponhamos que $q(x,y) = y\alpha + x + y = (\beta + \lambda + c)(l + c')$, onde β é homogêneo de grau 2, λ e l são lineares e c, c' constantes. Temos, assim, o seguinte:

1. $cc' = 0$, donde $c = 0$ ou $c' = 0$;

2. $l\beta = y\alpha$, e como α é irredutível, temos $\beta = e\alpha$ e $l = \frac{y}{e}$, onde e é alguma constante não-nula.

Se $c' = 0$, então, comparando os termos de grau 1, temos o seguinte:

$$x + y = cl = \frac{c}{e}y,$$

o que é claramente falso. Se tivermos simultaneamente $c' = c = 0$, a equação acima também nos dá um absurdo, $x = -y$. Logo, tomemos $c' \neq 0$ e $c = 0$. Comparando termos de grau 2, obtemos

$$0 = c'\beta + l\lambda,$$

mas usando o item (2), temos que isto é equivalente a

$$0 = c'e\alpha + \frac{y\lambda}{e},$$

o que implica que y divide α, contradizendo a irredutibilidade de α.

□

Lema 4.10. *Se o termo líder de f for da forma $f_n = \alpha^m$, então $m > 2$.*

Demonstração. Inserimos estes dados no `Singular` de acordo com o que foi explicado na seção 3.3.2, e o programa mostrou que tal d não possui solução algébrica de grau menor ou igual a 2 com termo líder $f_n = \alpha^m$. □

Proposição 4.11. *$k > 0$, isto é, y não divide g_2.*

Demonstração. Consideremos f solução algébrica de d, com grau n . Suponhamos que y divida g_2, isto é, $k = 0$. Assim, analisando os termos de grau $n + 2$ de $d(f) = g.f$, concluímos que $f_n = \alpha^m$, com $m \geq 1$, e $g_2 = my\frac{\partial\alpha}{\partial y} = my(x + 2y)$.

Analisamos os termos de grau $n + 1$ da equação $d(f) = gf$:

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + xy\frac{\partial f_n}{\partial x} = g_2 f_{n-1} + g_1 f_n.$$

Substituindo os termos conhecidos:

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + xy(m\alpha^{m-1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}) = my\frac{\partial\alpha}{\partial y}f_{n-1} + g_1\alpha^m \tag{4.2}$$

Desta equação, vemos que y divide g_1. Logo, existe constante c_1 tal que $g_1 = c_1 y$. Cancelando y e substituindo $x\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ por $2\alpha - y\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ (pela relação de Euler, $nf = x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$, onde f é polinômio homogêneo de grau n):

$$\alpha\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} + m\alpha^{m-1}(2\alpha - y\frac{\partial\alpha}{\partial y}) = m\frac{\partial\alpha}{\partial y}f_{n-1} + c_1\alpha^m \tag{4.3}$$

Pela equação (4.3), α divide $m\frac{\partial\alpha}{\partial y}(f_{n-1} + \alpha^{m-1}y)$. Como $m > 2$ pelo Lema 4.10, então α divide f_{n-1}. Logo, $f_{n-1} = Q\alpha^t$, com $t \geq 1$ e $\text{mdc}(\alpha, Q) = 1$.

Substituindo f_{n-1} na equação (4.3):

$$\alpha^t(t\frac{\partial\alpha}{\partial y}Q + \alpha\frac{\partial Q}{\partial y}) + m\alpha^{m-1}(2\alpha - y\frac{\partial\alpha}{\partial y}) = m\frac{\partial\alpha}{\partial y}\alpha^t Q + c_1\alpha^m \tag{4.4}$$

Temos que $t \leq m-1$, pois caso contrário, na equação acima teríamos α dividindo $y\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, absurdo.

Se $t < m-1$, então pela mesma equação concluímos que α divide $\frac{\partial\alpha}{\partial y}Q(m-t)$, o que é impossível. Logo, $t = m-1$ e $\deg(Q) = 1$. Cancelando então $\alpha^t = \alpha^{m-1}$ da equação anterior:

$$((m-1)\frac{\partial\alpha}{\partial y}Q + \alpha\frac{\partial Q}{\partial y}) + m(2\alpha - y\frac{\partial\alpha}{\partial y}) = m\frac{\partial\alpha}{\partial y}Q + c_1\alpha \tag{4.5}$$

Pela equação acima, α divide $-\frac{\partial\alpha}{\partial y}(Q + my)$. Como α é irredutível de grau 2, então $Q = -my$. Logo, $f_{n-1} = -\alpha^{m-1}my$. Substituindo Q na equação (4.5), concluímos que $\alpha\frac{\partial Q}{\partial y} + 2m\alpha = c_1\alpha$, ou melhor, $c_1 = 2m + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2m - m = m$.

Até o momento, temos:

- $f_n = \alpha^m$, ou seja, $n = 2m$;
- $g_2 = my\frac{\partial\alpha}{\partial y}$;
- $f_{n-1} = -\alpha^{m-1}my$;
- $g_1 = my$.

Analisando os termos de grau n:

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial f_n}{\partial y} + xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} = g_2 f_{n-2} + g_1 f_{n-1} + g_0 f_n$$

Susbtituindo os termos conhecidos:

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + (x+y)(m\alpha^{m-1}\frac{\partial\alpha}{\partial y}) + xy(-m(m-1)y\alpha^{m-2}\frac{\partial\alpha}{\partial x})$$

$$= my\frac{\partial\alpha}{\partial y}f_{n-2} - m^2y^2\alpha^{m-1} + g_0\alpha^m \tag{4.6}$$

Nesta equação, vemos que y divide

$$mx\frac{\partial\alpha}{\partial y} - g_0\alpha = mx(x+2y) - g_0(x^2 + xy + y^2),$$

ou melhor, y divide $mx^2 - g_0x^2$. Assim, devemos ter $g_0 = m$. Reescrevendo $mx\frac{\partial\alpha}{\partial y} - g_0\alpha$ com $g_0 = m$, temos $my\alpha^{m-1}(x-y)$. Substituindo a mesma de volta na equação

(4.6):

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + my\alpha^{m-1}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + my\alpha^{m-1}(x-y) - m(m-1)xy^2\alpha^{m-2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$= my\frac{\partial \alpha}{\partial y}f_{n-2} - m^2y^2\alpha^{m-1} \tag{4.7}$$

Rearrumando, cancelando y e substituindo em (4.7) a expressão $x\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ por $2\alpha - y\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ (relação de Euler):

$$\alpha\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} + m\alpha^{m-1}(2x+y) - m(m-1)y\alpha^{m-2}(2\alpha - y\frac{\partial \alpha}{\partial y}) = \tag{4.8}$$

$$= m\frac{\partial \alpha}{\partial y}f_{n-2} - m^2y\alpha^{m-1}$$

Pela equação acima, α divide $m\frac{\partial \alpha}{\partial y}((m-1)y^2\alpha^{m-2} - f_{n-2})$. Como $m > 2$, então α divide f_{n-2}. Portanto existe um polinômio R com $\mathrm{mdc}(R, \alpha) = 1$ tal que $f_{n-2} = \alpha^s R$, $s > 1$.

Como $2m - 2 = n - 2 = 2s + \deg(R)$, então $s \leq m - 1$. Substituímos f_{n-2} na equação (4.8):

$$\alpha^s(s\frac{\partial \alpha}{\partial y}R + \alpha\frac{\partial R}{\partial y}) + m\alpha^{m-1}(2x+y) - 2m(m-1)y\alpha^{m-1} +$$

$$m(m-1)y^2\alpha^{m-2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = m\frac{\partial \alpha}{\partial y}\alpha^s R - m^2y\alpha^{m-1}$$

Se $s = m - 1$, na equação acima poderíamos cancelar α^{m-2} e assim α dividiria $m(m-1)y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, impossível. Se $s < m - 2$, cancelaríamos α^s, e assim α dividiria $(m-s)\frac{\partial \alpha}{\partial y}R$, também impossível, pois $m - s \neq 0$. Logo, $s = m - 2$, donde $f_{n-2} = \alpha^{m-2}R$, com $\mathrm{mdc}(\alpha, R) = 1$ e $\deg(R) = 2$. Relembrando os dados obtidos até aqui:

- $f_n = \alpha^m$, ou seja, $n = 2m$;
- $g_2 = my\frac{\partial \alpha}{\partial y}$;
- $f_{n-1} = -\alpha^{m-1}my$;
- $g_1 = my$;
- $g_0 = m$;
- $f_{n-2} = \alpha^{m-2}R$, onde $\mathrm{mdc}(\alpha, R) = 1$ e $\deg(R) = 2$.

Analisando os termos de grau $n - 1$.

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}+xy\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial x}=$$

$$g_2f_{n-3}+g_1f_{n-2}+g_0f_{n-1}$$

Substituindo os termos conhecidos:

$$y\alpha\frac{\partial f_{n-3}}{\partial y}+(x+y)(-m\alpha^{m-1}-my(m-1)\alpha^{m-2}\frac{\partial\alpha}{\partial y})+$$

$$xy((m-2)\alpha^{m-3}\frac{\partial\alpha}{\partial x}R+\alpha^{m-2}\frac{\partial R}{\partial x})+m\alpha^{m-1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=$$

$$my\frac{\partial\alpha}{\partial y}f_{n-3}+my\alpha^{m-2}R-m^2y\alpha^{m-1}$$

A equação acima nos diz que y divide $m\alpha^{m-1}(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-x)=m\alpha^{m-1}(x+y)$. Vê-se que é impossível.

Portanto temos um absurdo. Assim, y não divide g_2.

□

Proposição 4.12. *O campo induzido por* $d=(xy+1)\frac{\partial}{\partial x}+(y\alpha+x+y)\frac{\partial}{\partial y}$ *não possui solução algébrica em* $\mathbb{C}[x,y]$.

Demonstração. Suponha que $f(x,y)=a_m(x)y^m+\cdots+a_1(x)y+a_0(x)$ seja estável por d, onde $a_j(x)\in\mathbb{Q}[x]$, i.e., $d(f)=gf$ para algum $g\in\mathbb{Q}[x,y]$. Temos $\deg(g)\leq 2$. Pelos Lema 4.5 e Proposição 4.8, sabemos que $m\geq 1$. Como $a_m\neq 0$, temos

$$d(\frac{f}{a_m})=\frac{f}{a_m}(g-\frac{d(a_m)}{a_m}).$$

Logo, $\widehat{f}=\frac{f}{a_m}$ é estável por d em $\mathbb{Q}(x)[y]$. Seja

$$\widehat{f}=y^m+b_{m-1}y^{m-1}+\cdots+b_0,$$

onde $b_j=\frac{a_j}{a_m}\in\mathbb{Q}(x)$. Denotamos $b_j'=\frac{db_j}{dx}$ e $a_j'=\frac{da_j}{dx}$.

O termo de maior grau possível em y em $d(\hat{f})$ é

$$my^3.y^{m-1}=my^{m+2}.$$

Como o grau de $\widehat{f}$ é m em y, então $\deg_y(g-\frac{d(a_m)}{a_m})=2$, e como $a_m\in\mathbb{C}[x]$, então $\deg_y(g)=2$. Por sua vez, o termo de mais alto grau em $d(f)$ também é a_my^{m+2}.

Agora, escrevemos

$$f(x,y)=a_m(y)x^m+a_{m-1}(y)x^{m-1}+...+a_0(y).$$

Vamos utilizar o mesmo raciocínio usado acima. Se $m = 0$, então temos

$$q\frac{\partial f}{\partial y} = gf.$$

Mas q é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, logo deve dividir gf. Como $f \in \mathbb{C}[y]$, então $y\alpha + x + y$ divide g. Absurdo, já que g tem grau exatamente 2, pelo que foi mostrado no início desta demonstração. Logo, $m > 0$. De forma análoga ao que foi dito acima, tomando $\widehat{f} = \frac{f}{a_m}$, e $b_j = \frac{a_j}{a_m} \in \mathbb{C}(y)$, temos

$$d(\hat{f}) = (g - \frac{d(a_m)}{a_m})\widehat{f}.$$

O termo de mais alto grau em x em $d(\widehat{f})$ é

$$yb'_{m-1}x^{m+1}.$$

Como $\deg_x(\widehat{f}) = m$ e $\frac{d(a_m)}{a_m} \in \mathbb{C}(y)$, então $\deg_x(g) = 1$. Assim já que $\deg(g) = 2$ e pelas duas análises acima temos simultaneamente que $\deg_x(g) = 1$ e $\deg_y(g) = 2$, então concluímos que g é da forma $ay^2 + bxy + cx + dy + e$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Mas pela Proposição 4.11, y não pode dividir g_2. Portanto d não possui solução algébrica em $\mathbb{Q}[x, y]$, e consequentemente não possui solução algébrica em $\mathbb{C}[x, y]$, pela Proposição 2.2.

□

Capítulo 5

Um caso genérico de grau maior do que 3

Agora estudamos um campo da forma $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, onde $p(x,y) = xy + b$, como antes, mas $q(x,y) = xQ(x,y) + R(x,y)$, com $\deg(Q) = n-1 > 2$ e $\deg(R) \leq n-1$, sendo Q homogêneo e irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Notemos que, neste capítulo, trataremos de campos que admitem singularidades no aberto $z \neq 0$. Vejamos que isto é verdade. Seja (x_0, y_0) tal que $p(x_0, y_0) = 0$, isto é,

$$y_0 = -b/x_0.$$

Se $\tilde{Q} = Q(x, -b/x)$ e $\tilde{R} = R(x, -b/x)$, temos que

$$x^{n-1}q(x, -b/x) = x^n\tilde{Q}(x) + x^{n-1}\tilde{R}(x) = \tilde{q}(x)$$

é um polinômio em x, e portanto possui zeros. Como $x_0 \neq 0$, então $x_0^{n-1} \neq 0$, e daí $q(x_0, -b/x_0) = 0$ na equação acima.

Assim, o que poderemos mostrar é a ausência de soluções algébricas de d em $\mathbb{C}[x,y]$, não sua d-simplicidade, pois esta requer a inexistencia de singularidades em $z = 1$. Mas, como veremos, a construção de um tal campo sem solução pode ser relativamente trabalhosa, apesar da densidade do conjunto de folheações sem solução em $\mathbb{F}ol(d)$, de acordo com o teorema de Jouanolou. Ainda estamos interessados na utilização do Teorema de Carnicer, e para tanto precisaremos analisar as singularidades finitas e em L_∞. Garantindo que estas singularidades satisfazem as condições do Teorema de Carnicer, será possível limitar o grau das soluções, se estas existirem.

5.1 Estudo de singularidades

5.1.1 Singularidades em $z = 0$

Mostraremos, nesta subseção, o seguinte fato:

Proposição 5.1. *A folheação induzida pela forma $\omega = qdx - pdy$ dual do campo $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, onde $p = p(x,y) = xy + b$, $b \neq 0$, e $q = q(x,y) = xQ(x,y) + q_0(x,y)$, com Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e homogêneo de grau $n-1$, q_0 um polinômio homogêneo de grau $n-1$, satisfazendo $q_0(0,1) \neq 0$ e $n > 5$, possui apenas singularidades reduzidas em $z = 0$.*

Considere a forma $\omega = qdx - pdy$ associada ao campo $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ descrito no enunciado acima. Notemos que, nesta subseção, estamos estudando um caso restrito, $R = q_0$.

Homogeneizamos ω em z:

$$\Omega = (xQ + z\bar{q}_0)(zdx - xdz) - z^{n-2}(xy + bz^2)(zdy - ydz).$$

Aqui, denotamos por $\bar{q}$ o polinomio q homogeneizado, isto é, $\bar{q} = xQ + zq_0$. Arrumando os termos na expressão acima,

$$\Omega = z\bar{q}dx - z^{n-1}(xy + bz^2)dy + (yz^{n-2}(xy + bz^2) - x\bar{q})dz.$$

Assim, as singularidades nos pontos tais que $z = 0$ são dadas por:

$$x = 0 \text{ ou } \bar{q}|_{z=0} = xQ = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Análises nos abertos U_x e U_y

(a) Desomogeneizando a forma relativamente a x ($x := 1$).

$$\omega_x = -z^{n-1}(y + bz^2)dy + (z^{n-2}y(y + bz^2) - \tilde{q})dz,$$

com $\bar{q}|_{x=1} = \tilde{q}$, sendo ω_x a forma dual de

$$d_x = -(z^{n-2}y(y + bz^2) - \tilde{q})\frac{\partial}{\partial y} - z^{n-1}(y + bz^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

A singularidade de interesse neste caso em $z = 0$ é dada por $\tilde{q} = 0$, isto é, $\tilde{Q} = Q|_{x=1} = 0$.

A matriz Jacobiana em um ponto para o qual $z = 0$ é

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\tilde{q})}{\partial y} & \frac{\partial(\tilde{q})}{\partial z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em $z = 0$, $\frac{\partial(\tilde{q})}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}$. Temos que $\tilde{Q} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} = 0$ não pode ocorrer, pois $\tilde{Q}$ é irredutível. Logo, as singularidades em $x = 1$, $z = 0$, $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ são todas reduzidas.

(b) Agora desomogeneizamos Ω com relação a y ($y := 1$). Usaremos a notação: $\hat{q} = \bar{q}|_{y=1} = x\hat{Q} + z\hat{q_0}$, onde $\hat{Q} = Q(x, 1)$ e $\hat{q_0} = q_0(x, 1)$.

$$\omega_y = z\hat{q}dx + (z^{n-2}(x + bz^2) - x\hat{q})dz,$$

cujo campo correspondente é

$$d_y = -(z^{n-2}(x + bz^2) - x\hat{q})\frac{\partial}{\partial x} + z\hat{q}\frac{\partial}{\partial z}.$$

A matriz Jacobiana deste campo nos pontos tais que $z = 0$ é:

$$J = \begin{bmatrix} x\frac{\partial(\hat{q})}{\partial x} + \hat{q} & x\frac{\partial(\hat{q})}{\partial z} \\ 0 & \hat{q} \end{bmatrix}$$

- **Caso 1:** $Q(x_0, 1) = 0$ onde $(x_0 : 1 : 0)$ é singularidade do campo.

Não precisamos analisar este caso, pois supomos $x_0 \neq 0$ aqui, e isto já foi contemplado no item (a) (desomogeneização com relação a x).

- **Caso 2:** $x = 0$. Aqui o jacobiano é nulo e precisaremos efetuar *blow-up* na singularidade $(0 : 1 : 0)$.

(a) $x := zt$ e $z := z$;

$$\hat{\omega}_y = z\hat{q}(zt, z)(zdt + tdz) + (z^{n-2}(zt + bz^2) - zt\hat{q}(zt, z))dz$$
$$= z^2\hat{q}(zt, z)dt + z^{n-2}(zt + bz^2)dz.$$

Como $\hat{q} = xQ(x, 1) + zq_0(x, 1)$ (q_0 é homogêneo de grau $n - 1$), temos

$$\hat{q}(zt, z) = z(tQ(zt, 1) + q_0(zt, 1)).$$

Logo a 1-forma $\hat{\omega}_y$ não-saturada é dada por

$$z^3\hat{q}(zt, z)dt + z^{n-1}(t + bz)dz.$$

Obtemos, depois de dividir a forma por z^3, e usando a mesma notação sem prejuízo na compreensão do texto,

$$\hat{\omega}_y = (tQ(zt,1) + q_0(zt,1))dt + z^{n-4}(t+bz)dz,$$

de modo que temos singularidade nos pontos $(t_0 : 1 : 0)$ tais que $t_0Q(0,1)+q_0(0,1) = 0$. Para observar o que ocorre no jacobiano, calculemos algumas derivadas. Denotando a derivada parcial de $F(x,y)$ com relação a x por $\frac{\partial F}{\partial x}$, e sabendo que $x = u(z,t) = zt$ é função de z e t, temos, pela regra da cadeia, que $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = z\frac{\partial F}{\partial x}$. Aplicando isto abaixo, ao calcularmos a derivada de $\hat{q}$ com relação a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}(tQ(zt,1) + \hat{q_0}(zt,1)) = Q(zt,1) + zt\frac{\partial Q}{\partial x}(zt,1) + z\frac{\partial q_0}{\partial x}(zt,1),$$

e assim

$$\frac{\partial}{\partial t}(tQ(zt,1) + q_0(zt,1))|_{z=0} = Q(0,1).$$

Analogamente, derivando $\hat{q}$ com relação a z e tomando $z = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial z}(tQ(zt,1) + q_0(zt,1))|_{z=0} = t^2\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1) + t\frac{\partial q_0}{\partial x}(0,1).$$

Na singularidade temos $t_0Q(0,1) + q_0(0,1) = 0$, e portanto

$$t_0 = -\frac{q_0(0,1)}{Q(0,1)},$$

já que $Q(0,1) \neq 0$ (Q é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, e portanto não é divisível por x). O jacobiano em $z = 0$ do campo $d = -z^{n-4}(t+bz)\partial/\partial t + (tQ(zt,1) + q_0(zt,1))\partial/\partial z$ é

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q(0,1) & t^2\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1) + t\frac{\partial q_0}{\partial x}(0,1) \end{bmatrix}$$

Para obtermos a singularidade reduzida, o termo $t^2\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1) + t\frac{\partial q_0}{\partial x}(0,1)$ não pode ser nulo em t_0. Observemos que, como $t_0 = -\frac{q_0(0,1)}{Q(0,1)} \neq 0$, pois por hipótese $q_0(0,1) \neq 0$, temos que a condição para o não anulamento de ambos os autovalores do jacobiano acima é

$$\left(Q\frac{\partial \hat{q}_0}{\partial x} - \hat{q}_0\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(0,1) \neq 0.$$

Tomemos o seguinte exemplo:

$$\bar{q_0} = (x^{n-1} + y^{n-1})$$

Temos $\hat{q_0} = \bar{q_0}(zt, 1) = (zt)^{n-1} + 1$ e assim $\hat{q_0}(0, 1) = 1$. Além disso,

$$\frac{\partial \bar{q_0}}{\partial x} = (n-1)x^{n-2},$$

o que nos dá

$$\frac{\partial \bar{q_0}}{\partial x}(zt, 1)|_{z=0} = 0.$$

Assim,

$$\left(Q\frac{\partial \hat{q_0}}{\partial x} - \hat{q_0}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(0, 1) = 0 \Longrightarrow -\frac{\partial Q}{\partial x}(0, 1) = 0.$$

Mas isto não ocorre, por exemplo, se $Q(x, y) = x^{n-1} + xy^{n-2} + y^{n-1}$, já que aí $\frac{\partial Q}{\partial x}(0, 1) = 1$. Logo, a singularidade $(0, 0) \times [t_0 : 1]$ é reduzida.

(b) $x := x$ e $z := xt$;

A forma fica como abaixo, a princípio:

$$xt\bar{q}(x, 1, xt)dx + ((xt)^{n-2}(x + bx^2t^2) - x\bar{q}(x, 1, xt))(xdt + tdx) =$$

$$(xt)^{n-1}(1 + bxt^2)dx + x^2((xt)^{n-2}(1 + bxt^2) - \bar{q}(x, 1, xt))dt.$$

Mas, sabendo que

$$\bar{q}(x, 1, xt) = xQ(x, 1) + xt\bar{q_0}(x, 1),$$

a 1-forma após a explosão é, de fato, igual a

$$(xt)^{n-1}(1 + bxt^2)dx + x^3(x^{n-3}t^{n-2}(1 + bxt^2) - (Q(x, 1) + t\bar{q_0}(x, 1)))dt$$

Saturando a forma (dividindo-a por x^3), temos

$$\tilde{\omega}_y = x^{n-4}t^{n-1}(1 + bxt^2)dx + (x^{n-3}t^{n-2}(1 + bxt^2) - Q(x, 1) - t\bar{q_0}(x, 1))dt.$$

Observemos que a explosão (*blow-up*) aqui é realizado em $x = z = 0$, projetando $(x, y) \times [u : t]$, com $u \neq 0$, em $(x, z) = (0, 0)$, de modo que $z = xt$. Assim, resta que a única singularidade possível ocorre se $x = t = 0$. Mas na forma acima, isto só seria possível se $Q(0, 1) = 0$. Isto é falso. Logo, não há qualquer nova singularidade a ser analisada nesta carta do *blow-up*.

Provamos assim que a folheação induzida pela forma $\omega = qdx - pdy$ dual do campo $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ possui apenas singularidades reduzidas em $z = 0$, se $p = p(x, y) = xy + b$ e $q = q(x, y) = xQ(x, y) + q_0(x, y)$, com Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e homogêneo de grau $n - 1$, q_0 um polinômio homogêneo de grau $n - 1$, satisfazendo $q_0(0, 1) \neq 0$ e $n > 5$.

5.1.2 Singularidades em $z = 1$

Vamos mostrar que as singularidades do campo $d = (xy+b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ+c)\frac{\partial}{\partial y}$, onde $b \neq 0$, $b, c \in \mathbb{Q}$, Q irredutível de grau $n-1$, são reduzidas. Observamos que este campo não é o mesmo estudado na subseção anterior, 5.1.1.

A matriz Jacobiana do campo é dada por

$$J = \begin{pmatrix} y & x \\ Q + xQ_x & xQ_y \end{pmatrix}$$

Notação: por brevidade, usaremos $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e $Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Consideremos as funções traço e determinante da matriz J:

$$\mathrm{tr}(J) = y + xQ_y$$

e

$$\det(J) = xyQ_y - xQ - x^2Q_x = xyQ_y - xQ - x((n-1)Q - yQ_y)$$

$$= 2xyQ_y - nxQ,$$

onde na segunda igualdade usamos a relação de Euler.

Vamos considerar uma singularidade qualquer $p = (x_0, y_0)$ do campo. Vamos usar a notação $Q_0 = Q(x_0, y_0)$ e J_0 para a matriz J calculada no ponto p. Assim, teremos $x_0y_0 + b = 0$, logo $y_0 = -b/x_0$, e também $x_0Q_0 = -c$. Portanto,

$$\det(J_0) = -2bQ_y(x_0, y_0) + nc.$$

Se λ_1 e λ_2 são os autovalores de J, então

$$\frac{(\mathrm{tr}(J))^2}{\det(J)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1.\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

Vamos mostrar que este quociente não pode ser racional. Assim, não há como λ_1/λ_2 ser racional, e poderemos dizer que a singularidade é reduzida, e portanto não dicrítica. Logo, enunciamos o seguinte:

Suponhamos que o quociente acima seja um número racional. Assim, existem α e $\beta \neq 0 \in \mathbb{Z}$ tais que $\frac{(\mathrm{tr}(J))^2}{\det(J)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Daí,

$$0 = \beta\mathrm{tr}^2(J) - \alpha\det(J) = \beta(y_0 + x_0Q_y(x_0, y_0))^2 - \alpha(-2bQ_y(x_0, y_0) + nc)$$

$$= \beta(y_0^2 + 2x_0y_0Q_y(x_0, y_0) + x_0^2Q_y^2(x_0, y_0)) + 2\alpha bQ_y(x_0, y_0) - \alpha nc$$

Rearrumando a equação acima e lembrando que $x_0y_0 = -b$:

$$0 = \beta(y_0^2 - 2bQ_y(x_0,y_0) + x_0^2Q_y^2(x_0,y_0))) + 2\alpha bQ_y(x_0,y_0) - \alpha nc =$$
$$= (\beta y_0^2 - \alpha nc) + 2b(\alpha-\beta)Q_y + \beta x_0^2Q_y^2$$

Agora substituímos $y_0 = -b/x_0$ acima e obtemos

$$0 = (\beta(-b/x_0)^2 - \alpha nc) + 2b(\alpha-\beta)Q_y(x_0,-b/x_0) + \beta x_0^2 Q_y^2(x_0,-b/x_0) \qquad (5.1)$$

Como $\deg(Q_y) = n-2$, temos que

$$\Psi(x) = x^{n-2}Q_y(x,-b/x) \in \mathbb{Q}[x].$$

Portanto, multiplicando a equação (5.1) por $x^{2(n-3)}$, obtemos:

$$0 = \frac{b^2\beta}{x_0^2}x_0^{2(n-3)} - (\alpha nc)x_0^{2(n-3)} + 2b(\alpha-\beta)x_0^{n-4}x_0^{n-2}Q_y(x_0,-b/x_0) + \beta(x_0^{n-2}Q_y(x_0,-b/x_0))^2$$
$$= b^2\beta x_0^{2(n-4)} - \alpha nc x_0^{2(n-3)} + 2b(\alpha-\beta)x_0^{n-4}\Psi(x_0) + \beta\Psi^2(x_0)$$

que é um polinômio (aqui, em $x := x_0$) sempre que $n \geq 4$. Ou seja, podemos afirmar que a abscissa de uma singularidade que tem quociente de autovalores racional deve anular o polinômio

$$\theta(x) = b^2\beta x^{2(n-4)} - \alpha nc x^{2(n-3)} + 2b(\alpha-\beta)x^{n-4}\Psi(x) + \beta\Psi^2(x)$$

para alguma escolha de $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Sabe-se que as raízes de um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ sofrem ação transitiva de seu grupo de Galois. Isto é, se $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e $\sigma \in \mathrm{Gal}(p,\mathbb{Q})$, então $\sigma(a_i) = a_i$ e, para toda raiz α de p, existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(p,\mathbb{Q})$ tal que $\alpha = \sigma(x_0)$. Para mais detalhes, ver [22], pag. 173. Assim, as singularidades do campo, da forma $(x_0, -b/x_0)$, são permutadas pela ação do grupo de Galois de

$$\Phi(x) = x^{n-2}(xQ(x,-b/x) + c)$$

se $\Phi(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Se isto ocorrer, temos que os valores de α e β serão os mesmos para todas as singularidades. Isto implica que $\Phi(x)$ deve dividir $\theta(x)$. Vamos mostrar como escolher coeficientes para Φ de forma que isto não ocorra em geral.

Definição 5.2. *Seja* $\chi(x) = a_{n-1}x^n + c \in \mathbb{Q}[x]$.

Vamos escolher o grau $n = q$, onde q é um número primo.

Lema 5.3. *É possível escolher dois primos p e $\bar{p}$, onde $p > 2q^2 - q$, e tais que $\bar{p} \not\equiv \alpha^q \pmod{p}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. O primo q está fixado. O Teorema de Dirichlet para progressões aritméticas afirma que, se a e b são inteiros positivos tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então a progressão aritmética $a_k = a + b.k$ contém infinitos números primos (para mais detalhes, ver [17]). Escolhemos então $p = 1 + kq$ primo desta sequência, para algum $k \in \mathbb{N}$, onde $k > 3(q-1)$. Observemos que para obter $1 + kq = p > 2q^2 - q = q + 2(q-1)q$, precisamos ter $k > \frac{(q-1)(1+2q)}{q}$, e para isto basta tomar $k > 3(q-1)$. Além disso, todo $m \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito de forma única como produto de potências inteiras positivas de números primos, isto é, $m = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$, onde $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1 \cdots t$. Se fosse verdade que, para todo primo $\bar{p}$ distinto de p, existisse $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $\bar{p} \equiv \alpha^q \pmod{p}$, então, teríamos o seguinte: tomando $m \not\equiv 0 \pmod{p}$, existiriam $\beta_1, \cdots, \beta_t \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t} \equiv \beta_1^{qn_1} \cdots \beta_t^{qn_t} = (\beta_1^{n_1} \cdots \beta_t^{n_t})^q = \beta^q \pmod{p},$$

onde $\beta = \beta_1^{n_1} \cdots \beta_t^{n_t} \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$m^k \equiv \beta^{kq} \equiv \beta^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

pelo Teorema de Fermat. Logo, todo elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ teria ordem $k < p-1$, o que é falso. Logo existe $\bar{p}$ satisfazendo nosso requisito com relação ao primo p escolhido de acordo com o Teorema de Dirichlet, com q fixado no início. Desta forma, podemos afirmar que o par de primos distintos requisitados p e $\bar{p}$ existe. □

Utilizaremos o próximo Teorema mais adiante.

Teorema 5.4. *Sejam k um corpo e $m \geq 2$ um número inteiro. Considere $c \in k, c \neq 0$. Se para todo primo q tal que q divida m tivermos $c \notin k^q$, então $x^m - c$ é irredutível em $k[x]$.*

Demonstração. Ver [13], página 297. □

Lema 5.5. *Se $n = q$, os coeficientes de Q, b e c podem ser escolhidos de forma que $\Phi(x)$ seja irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e $\chi(x) = a_{n-1}x^n + c$ seja irredutível sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Precisamos entender como é $\Phi(x)$. Para isto, vejamos que

$$Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{n-1-k}.$$

Daí,

$$Q_y(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (n-1-k) x^k y^{n-2-k}.$$

Assim,

$$\Phi(x) = x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k(-b/x)^{n-1-k} + cx^{n-2} =$$

$$\sum a_k(-b)^{n-1-k}x^k x^{n-1}x^{k-n+1} + cx^{n-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(-b)^{n-1-k}x^{2k} + cx^{n-2} \tag{5.2}$$

Podemos escolher os coeficientes b, c e a_k da seguinte forma: escolhemos números primos $\bar{p} \neq p$ como no Lema 5.3, e os coeficientes a_k, b, c como abaixo:

- $n = q$ (já escolhido e fixado)
- $a_{n-1} = 1$ e $a_k = p\bar{p}l_k$ $\forall k = 0, ..., n-2$, com $\mathrm{mdc}(\bar{p}, l_k) = \mathrm{mdc}(p, l_k) = 1$;
- $c = \bar{p}$;
- $b = q$,
- $a_0 = p\bar{p}$ e
- $a_{n-1} \not\equiv 0 \bmod(\bar{p})$ e $a_{n-1} \not\equiv 0 \bmod(p)$.

Assim, pelo critério de Eisenstein, Φ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, pois o primo $\bar{p}$ divide todos os coeficientes de Φ exceto a_{n-1} e $\bar{p}^2$ não divide $a_0(-b)^{n-1}$. Temos também que χ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_p$, pelo Lema 5.3 e pelo Teorema 5.4.

□

Proposição 5.6. *Se a fração $\frac{\alpha}{\beta}$ é reduzida, então Φ não divide θ, com os coeficientes escolhidos de acordo com o Lema 5.5.*

Demonstração. Temos

$$\Psi(x) = x^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-1-k)a_k x^k(-b/x)^{n-2-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-1-k)a_k(-b)^{n-2-k}x^{2k}.$$

Mas no segundo somatório, se $k = n-1$ teremos o fator correspondente igual a 0. Portanto,

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)a_k(-b)^{n-2-k}x^{2k}.$$

Seja

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(-b)^{n-1-k}t^k.$$

Então, da equação (5.2),

$$\Phi(x) = \eta(x^2) + cx^{n-2}$$

e

$$(-b)\Psi(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k)a_k(-b)^{n-1-k}x^{2k}$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{n-2} a_k(-b)^{n-1-k}x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-2} ka_k(-b)^{n-1-k}x^{2k}$$

$$= (n-1)(\eta(x^2) - a_{n-1}x^{2(n-1)}) - \big(\sum_{k=1}^{n-2} ka_k(-b)^{n-1-k}x^{2k-2}\big)x^2$$

Como

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k(-b)^{n-1-k}t^{k-1},$$

então

$$(-b)\Psi(x) = (n-1)(\eta(x^2) - a_{n-1}x^{2(n-1)}) - \eta'(x^2)x^2$$

Reduzindo esta equação módulo $\Phi(x) = \eta(x^2) + cx^{n-2}$, obtemos

$$(-b)\Psi(x) \equiv (n-1)(-cx^{n-2} - a_{n-1}x^{2(n-1)}) - \eta'(x^2)x^2 \pmod{\Phi},$$

já que $\Phi(x) \equiv 0$ implica que $\eta(x^2) \equiv -cx^{n-2}$.

Temos

$$\Phi(x) \equiv a_{n-1}x^{2(n-1)} + cx^{n-2} \equiv x^{n-2}(a_{n-1}x^n + c) \pmod{p}$$

e

$$\eta'(x^2) \equiv (n-1)a_{n-1}x^{2(n-1)} \pmod{p}.$$

Logo,

$$(-b)\Psi(x) \equiv (n-1)(-cx^{n-2} - a_{n-1}x^{2(n-1)}) - (n-1)a_{n-1}x^{2(n-1)} \pmod{p, \Phi},$$

ou ainda

$$(-b)\Psi(x) \equiv -(n-1)(c + 2a_{n-1}x^n)x^{n-2} \pmod{p, \Phi}.$$

Lembremos que $\chi(x) = a_{n-1}x^n + c$ é irredutível módulo p. Além disso, observemos que $\Phi \equiv \chi \cdot x^{n-2} \pmod{p}$. Temos, então, que

$$-b\Psi(x) \equiv -(n-1)x^{n-2}(c - 2c) \equiv c(n-1)x^{n-2} \pmod{p, \chi}$$

Daí, o polinômio $\theta(x) = b^2\beta x^{2(n-4)} - \alpha ncx^{2(n-3)} + 2b(\alpha - \beta)x^{n-4}\Psi(x) + \beta\Psi^2(x)$ é, de fato, congruente módulo p e χ a

$$b^2\beta x^{2(n-4)} - \alpha ncx^{2(n-3)} - 2(\alpha - \beta)x^{n-4}(n-1)cx^{n-2} + \beta(n-1)^2(c/b)^2x^{2(n-2)},$$

(pois $b = q$, e portanto $\mathrm{mdc}(b, p) = 1$) ou ainda a

$$x^{2(n-4)}(b^2\beta - nc\alpha x^2 - 2(\alpha - \beta)c(n-1)x^2 + \beta(n-1)^2(c/b)^2x^4).$$

Como χ é irredutível módulo p, o ideal (χ, p) é primo. Logo $\theta \equiv 0 \pmod{p, \chi}$ se, e somente se

$$x^{2(n-4)} \equiv 0 \Longrightarrow x \equiv 0 \pmod{p, \chi},$$

o que é impossível, ou

$$b^2\beta - nc\alpha x^2 - 2b(\alpha - \beta)c(n-1)x^2 + \beta(n-1)^2(c/b)^2x^4 \equiv 0 \pmod{p, \chi}.$$

Lembremos que $\Phi(x) \equiv 0 \pmod{p, \chi}$. Além disso, o termo $\beta(n-1)^2c^2x^4$ de θ na última equivalência acima tem grau 4, e χ possui grau n. Assim, se $n > 4$, $\theta \not\equiv 0 \pmod{p, \chi}$ a menos que $\theta \equiv 0 \pmod{p}$. Mas assim teríamos

$$b^2\beta \equiv -nc\alpha - 2b(\alpha - \beta)c(n-1) \equiv \beta(n-1)^2(c/b)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mas $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ pois $b = q \not\equiv 0 \pmod{p}$, já que $p > q$ e p é primo. Logo $\beta \equiv 0 \pmod{p}$. Portanto, da sequência de congruências acima, temos

$$\alpha(nc + 2bc(n-1)) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Se

$$c(n + 2b(n-1)) \equiv 0 \pmod{p},$$

então $c \equiv 0 \pmod{p}$ ou $n + 2b(n-1) = q + 2q(q-1) \equiv 0 \pmod{p}$. O primeiro caso é impossível pois $c = \bar{p}$, que é primo distinto de p. O segundo não ocorre pois sabemos do lema 5.3 que $p > q + 2q(q-1) = 2q^2 - q$. Portanto $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$. Mas não podemos ter $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{p}$, pois $\mathrm{mdc}(\alpha, \beta) = 1$.

$\square$

5.2 Inexistência de soluções

O objetivo desta seção é mostrar que o campo $d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ + c)\frac{\partial}{\partial y}$, o mesmo da seção anterior, não possui soluções algébricas em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau menor ou igual a $n + 1$, sendo n o grau da folheação induzida por d. Suponhamos que $f = f_k + f_{k-1} + ... + f_0$, com $k \leq n+1$, seja uma solução algébrica de d. A limitação do grau é permitida pelo teorema de Carnicer. Na próxima seção, utilizaremos as duas seções anteriores (sobre as singularidades em $z = 0$ e $z = 1$) e o argumento da prova do teorema de Jouanolou, além da demonstração feita nesta seção, para provar que d da forma $(xy+b)\frac{\partial}{\partial x}+(xQ+Q_{n-1}+\cdots+Q_1+Q_0)\frac{\partial}{\partial y}$ genericamente não possui qualquer solução algébrica.

Assim, suponhamos que

$$(xy+b)\frac{\partial f}{\partial x}+(xQ+Q_{n-1}+\cdots+Q_0)\frac{\partial f}{\partial y}=g.f,$$

onde $\deg(g)\leq n-1$. Vamos começar a realizar os cálculos sem supor que $Q_{n-1},\cdots,Q_1$ são nulos, pois acreditamos que a argumentação utilizada até o momento em que for necessária a imposição da restrição pode ser útil também na construção de outros exemplos.

Em primeiro lugar, observemos que pelo mesmo argumento usado na prova do Lema 4.3, temos $f\notin\mathbb{Q}[x]$. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$. Além disso, temos o

Lema 5.7. *O grau k de f, é maior do que* 1.

Demonstração. Se $k=1$, então $f(x,y)=e_1x+e_2y+e_0$ e assim $d(f)=g.f$ teria os termos de grau mais alto satisfazendo a equação abaixo:

$$xQe_2=g_{n-1}(e_1x+e_2y),$$

e como Q é irredutível, temos $g_{n-1}=\alpha Q$, α constante. Cancelando Q, temos

$$xe_2=\alpha(e_1x+e_2y),$$

e assim x divide e_1x+e_2y. Portanto $e_2=0$. Concluímos então que $f\in\mathbb{Q}[x]$. Absurdo. □

Teorema 5.8. *O campo $d=(xy+b)\frac{\partial}{\partial x}+(xQ+c)\frac{\partial}{\partial y}$, com Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$ de grau $n-1$, e $b\neq 0$, $c\neq 0$ e $n>5$ primos distintos, não possui solução algébrica de grau $k\leq n+1$.*

Demonstração. Tomemos, a princípio, $d=(xy+b)\frac{\partial}{\partial x}+(xQ+Q_{n-1}+\cdots+Q_0)\frac{\partial}{\partial y}$. Os termos de grau mais alto, $n+k-1$, satisfazem:

$$xQ\frac{\partial f_k}{\partial y}=g_{n-1}f_k. \tag{5.3}$$

Seja $f_k=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}$ a decomposição de f_k em seus fatores irredutíveis p_i. Assim,

$$\frac{\partial f_k}{\partial y}=\sum_{i=1}^{t}n_ip_i^{n_i-1}\frac{\partial p_i}{\partial y}p_1^{n_1}\cdots\widehat{p_i}^{n_i}\cdots p_t^{n_t}$$

$$=p_1^{n_1-1}\cdots p_t^{n_t-1}\sum_{i=1}^{t}n_i\frac{\partial p_i}{\partial y}p_1\cdots\widehat{p_i}\cdots p_t$$

Na equação acima, $\widehat{p_i}^{n_i}$ denota o fato de $p_i^{n_i}$ não ocorrer no respectivo termo do somatório.

Assim, substituindo isto na equação (5.3) e cancelando os termos comuns, temos

$$xQ\sum_{i=1}^{t} n_i \frac{\partial p_i}{\partial y} p_1 \cdots \hat{p_i} \cdots p_t = g_{n-1} p_1 \cdots p_i \cdots p_t \tag{5.4}$$

Na equação (5.4), nenhum dos fatores p_i divide o somatório no lado esquerdo. Desta forma, cada fator p_i divide xQ. Como Q é irredutível, temos $p_1 = x$ ou $p_1 = Q$, sem perda de generalidade. Portanto $f_k = x^v Q^u$, com $u, v \geq 0$, e $u + v \geq 1$. Além disso, Q divide o membro direito da equação (5.3). Assim obtemos dois casos a analisar.

Caso 1: Q divide $g_{n-1} \Rightarrow g_{n-1} = tQ$, com $t \in \mathbb{Q}$.

Caso 2: Q divide $f_k \Rightarrow f_k = Q.\rho$, e $\deg(\rho) \leq 2$.

I. Vamos começar estudando o caso 1.

Da equação (5.3) obtemos

$$x\frac{\partial f_k}{\partial y} = tf_k \Rightarrow f_k = x^l \lambda,$$

onde $l > 0$ e $\mathrm{mdc}(x, \lambda) = 1$.

Logo,

$$x^{l+1}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = tx^l \lambda,$$

donde x divide λ, absurdo. Portanto, $t = 0$. Assim $f_k = c_k x^k$ e $g_{n-1} = 0$.

Analisando os termos de grau $n + k - 2$, levando em conta que $n > 5$:

$$Q_{n-1}\frac{\partial f_k}{\partial y} + xQ\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} = g_{n-2} f_k + g_{n-1} f_{k-1}$$

$$\Rightarrow xQ\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} = g_{n-2} x^k$$

$$\Rightarrow Q\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} = g_{n-2} x^{k-1}.$$

Como Q é irredutível, então Q divide g_{n-2} ou divide x^{k-1}. Por um lado, $\deg(Q) = n - 1 > n - 2 = \deg(g_{n-2})$. Logo Q divide x^{k-1}, absurdo já que Q é irredutível de grau $n - 1 > 1$ (estamos considerando $n > 5$). Portanto, $g_{n-2} = 0$ e $\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} = 0 \Rightarrow f_{k-1} = c_{k-1} x^{k-1}$.

Agora analisemos os termos de grau $n + k - 3$:

$$Q_{n-1}\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} + Q_{n-2}\frac{\partial f_k}{\partial y} + xQ\frac{\partial f_{k-2}}{\partial y} = g_{n-3} f_k$$

$$\Rightarrow xQ\frac{\partial f_{k-2}}{\partial y} = g_{n-3}x^k$$

Como no caso anterior, isto implica que $g_{n-3} = 0$ e $f_{k-2} = c_{k-2}x^{k-2}$, com c_{k-2} constante.

Notemos que $xy\frac{\partial f_k}{\partial x}$ tem grau $k+1$. Por outro lado, $j-1+n = k+1$ se $j = k-(n-2)$. É a partir deste valor de j que a derivada parcial com relação a x passará a fazer parte da análise.

Verificaremos por indução que $f_j = c_jx^j$ e $g_{j-1} = 0$ $\forall j \geq k-(n-3)$. Seja $j = k-i$, onde $0 \leq i \leq n-1$. Suponhamos que $f_t = c_tx^t$ e $g_{n-(k-t+1)} = 0$ para todo $t \geq j+1$. Vamos mostrar que $f_j = c_jx^j$ e $g_{n-(i+1)} = 0$. Analisemos os termos de grau $n+j-1$:

$$xQ\frac{\partial f_j}{\partial y} + Q_{n-1}\frac{\partial f_{j+1}}{\partial y} + \cdots + Q_{2n-k+j}\frac{\partial f_k}{\partial y} = g_{n-1}f_j + g_{n-2}f_{j+1} + \cdots + g_{2n-k+j-1)}f_k.$$

Notemos que $2n-k+j = n-(k-n-j)$. Assim, $2n-k+j-1 = n-(k-n-j+1)$.

Usando a hipótese de indução, temos a equação

$$xQ\frac{\partial f_j}{\partial y} = g_{2n-k+j-1}f_k = g_{2n-k+j-1}c_kx^k.$$

Então

$$Q\frac{\partial f_j}{\partial y} = g_{n-(i+1)}c_kx^{k-1}.$$

Como Q é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, temos, pela última equação, que Q divide o segundo membro, que é o produto $g_{2n-k+j-1}$ e uma potência de x. Isso somente é possível se o segundo membro for 0, ou seja, $\frac{\partial f_j}{\partial y} = 0$ e $g_{2n-k+j-1} = 0$. Portanto está provada a indução.

Tomemos $j = k-(n-2)$. Analisemos os termos de grau $k+1$.

$$xy\frac{\partial f_k}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_{k-(n-2)}}{\partial y} = f_kg_1$$

$$\Rightarrow xy\frac{\partial f_k}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_{k-(n-2)}}{\partial y} = x^kg_1$$

$$\Rightarrow y\frac{\partial f_k}{\partial x} + Q\frac{\partial f_{k-(n-2)}}{\partial y} = x^{k-1}g_1$$

$$\Rightarrow ykx^{k-1} + Q\frac{\partial f_{k-(n-2)}}{\partial y} = x^{k-1}g_1$$

$$\Rightarrow Q\frac{\partial f_{k-(n-2)}}{\partial y} = x^{k-1}(g_1 - ky)$$

Q não pode dividir x^{k-1} nem $g_1 - ky$, portanto $g_1 = ky$ e $f_{k-(n-2)} = c_{k-(n-2)}x^{k-(n-2)}$.

Consideremos, agora, os termos de grau k:

$$xy\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_{k-(n-1)}}{\partial y} = g_0 f_k + g_1 f_{k-1}$$

$$\Rightarrow xyc_{k-1}(k-1)x^{k-2} + xQ\frac{\partial f_{k-(n-1)}}{\partial y} = g_0 x^k + kyc_{k-1}x^{k-1},$$

que fica

$$yc_{k-1}(k-1)x^{k-1} + xQ\frac{\partial f_{k-(n-1)}}{\partial y} = g_0 x^k + kyc_{k-1}x^{k-1}. \tag{5.5}$$

Vê-se na equação (5.5) que x divide $x^{k-1}(kyc_{k-1} - (k-1)yc_{k-1}) = x^{k-1}yc_{k-1}$. Assim, temos $k \geq 2$ ou $c_{k-1} = 0$. Pelo Lema 5.7, temos $k \geq 2$. Assim, cancelemos x na equação (5.5):

$$Q\frac{\partial f_{k-(n-1)}}{\partial y} = x^{k-2}(xg_0 + c_{k-1}y).$$

Novamente Q não divide x^{k-2} nem o termo linear do membro direito. Logo $f_{k-(n-1)} = c_{k-(n-1)}x^{k-(n-1)}$ e $xg_0 + kyc_{k-1} = 0 \Rightarrow xg_0 = -c_{k-1}y$.

Mas y não divide o membro esquerdo da última equação. Portanto, $g_0 = 0$ e $c_{k-1} = 0$.

Passando aos termos de grau $k-1$:

$$xy\frac{\partial f_{k-2}}{\partial x} + b\frac{\partial f_k}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_{k-n}}{\partial y} = g_1 f_{k-2}$$

$$\Rightarrow xy(k-2)c_{k-2}x^{k-3} + bkx^{k-1} + xQ\frac{\partial f_{k-n}}{\partial y} = kyc_{k-2}x^{k-2},$$

que é

$$xQ\frac{\partial f_{k-n}}{\partial y} = x^{k-2}(c_{k-2}ky - (k-2)yc_{k-2} - bkx) = x^{k-2}(2yc_{k-2} - bkx). \tag{5.6}$$

Observe que usamos o Lema 5.7 para garantir que $k > 1$. Na equação (5.6), x divide o membro direito apenas se $k \geq 3$ ou se $2yc_{k-2} - bkx = 0$. Suponhamos que $k \geq 3$ e cancelemos x em (5.6):

$$Q\frac{\partial f_{k-n}}{\partial y} = x^{k-3}(2yc_{k-2} - bkx).$$

Q não divide x^{k-3} nem o termo linear. Assim,

$$2c_{k-2}y = bkx \Rightarrow c_{k-2} = 0$$

$\Rightarrow b = 0$ ou $k = 0$, e ambas as possibilidades são um absurdo. Assim concluímos que o caso 1 não pode ser realizado.

II. Estudando o caso 2.

Supondo que Q divida f_k, temos $f_k = \rho.Q$, onde $\deg(\rho) \leq 2$. Além disso, obtemos com isso que $k \geq n-1$.

Substituindo f_k na equação (5.3):

$$xQ(\frac{\partial \rho}{\partial y}Q + \rho\frac{\partial Q}{\partial y}) = \rho.Q.g_{n-1}$$

$$\Rightarrow x(\frac{\partial \rho}{\partial y}Q + \rho\frac{\partial Q}{\partial y}) = \rho.g_{n-1} \tag{5.7}$$

Rearrumando a equação (5.7):

$$x\rho\frac{\partial Q}{\partial y} - \rho.g_{n-1} = -xQ\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \rho(x\frac{\partial Q}{\partial y} - g_{n-1}) = -xQ\frac{\partial \rho}{\partial y} \tag{5.8}$$

Q é irredutível de grau $n-1 > 4$, e assim ρ não pode dividir Q, mas seus fatores irredutíveis devem dividir o membro direito. Desta forma, temos três casos, variando-se o grau de ρ.

(a) ρ tem grau 2. Então, pela equação (5.8) acima, como ρ não pode dividir Q (que é irredutível), tendo que dividir o membro direito, tem-se $\rho = \alpha x\frac{\partial \rho}{\partial y}$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Assim, $\rho = \alpha x\gamma$, onde $\gamma = ax + by \in \mathbb{C}[x, y]$. Mas, assim, teremos $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \alpha bx$, e daí

$$\rho = \alpha x\frac{\partial \rho}{\partial y} = \alpha^2 bx^2 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 = \rho,$$

contradição, pois daí teríamos $f_k = 0$.

(b) Suponhamos então ρ com grau 1 (logo, $k = n$).

Aqui consideraremos $Q_{n-1} = \cdots = Q_1 = 0$, isto é, $d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ + c)\frac{\partial}{\partial y}$ com $b \neq 0$.

Daí, pela equação (5.8), temos

$$\rho = \alpha x$$

para α constante não-nula (que vamos supor, sem perda de generalidade, igual a 1). Em particular, isto implica que $\rho \in \mathbb{Q}[x]$. Assim, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$, e pela mesma equação (5.8) temos $g_{n-1} = x\frac{\partial Q}{\partial y}$. Temos portanto $f_k = f_n = xQ$.

Analisemos os termos de grau $n + k - 2 = 2n - 2$:

$$xQ\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = x\frac{\partial Q}{\partial y}f_{n-1} + xg_{n-2}Q \tag{5.9}$$

Cancelamos x na equação acima vemos que Q, sendo irredutível, divide $f_{n-1}\frac{\partial Q}{\partial y}$, e sendo Q de grau $n-1$, maior do que o grau de $\frac{\partial Q}{\partial y}$, então divide f_{n-1}. Portanto, existe uma constante $\beta \neq 0$ tal que $f_{n-1} = \beta Q$. Substituindo isto em (5.9), obtemos que $g_{n-2} = 0$.

Vamos então analisar os termos de grau $2n - 3$:

$$xQ\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = g_{n-1}f_{n-2} + g_{n-3}f_n = x\frac{\partial Q}{\partial y}f_{n-2} + g_{n-3}xQ \tag{5.10}$$

O termo com g_{n-2} foi omitido, já que ele é nulo. Da equação acima, vemos que Q divide f_{n-2}. Como Q possui grau $n-1$, então $f_{n-2} = 0$. Concluímos pela mesma equação que $g_{n-3} = 0$. Observemos que ocorrerá indutivamente, até o último passo antes de aparecer $xy\frac{\partial f_n}{\partial x}$ (termos de grau $n+1$), o seguinte:

$$xQ\frac{\partial f_j}{\partial y} = g_{n-1}f_j + 0 + 0 + \cdots + 0 + g_{j-1}f_n = x\frac{\partial Q}{\partial y}f_j + g_{j-1}xQ,$$

donde Q divide f_j de grau menor do que $n-1$, e assim $f_j = 0$ e $g_{j-1} = 0$.

Assim, vamos direto aos termos de grau $n+1$:

$$xQ\frac{\partial f_2}{\partial y} + xy\frac{\partial f_n}{\partial x} = g_{n-1}f_2 + g_1 f_n, \tag{5.11}$$

já que $f_j = 0 = g_{j-1}$ para todo $3 < j < n-2$. Substituindo os termos conhecidos,

$$xQ\frac{\partial f_2}{\partial y} + xy\big(Q + x\frac{\partial Q}{\partial x}\big) = x\frac{\partial Q}{\partial y}f_2 + g_1 xQ \tag{5.12}$$

Cancelamos x na equação acima e vemos que Q divide

$$y\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}f_2 = y\left((n-1)Q - y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{\partial Q}{\partial y}f_2,$$

onde usamos a relação de Euler

$$(n-1)Q = x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Vemos, assim, que Q divide

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\big(f_2 + y^2\big),$$

donde $f_2 = -y^2$. Substituindo esta conclusão na equação 5.12, sem x, obtemos

$$-2yQ + y\big(Q + x\frac{\partial Q}{\partial x}\big) = -y^2\frac{\partial Q}{\partial y} + g_1 Q \tag{5.13}$$

Daí, y divide g_1, e portanto $g_1 = \gamma y$, onde γ é uma constante. Vamos resumir o que obtivemos até aqui:

- $f_n = xQ$
- $f_{n-1} = \beta Q$
- $f_{n-2} = \cdots = f_3 = 0$
- $f_2 = -y^2$
- $g_{n-1} = x\frac{\partial Q}{\partial y}$
- $g_{n-2} = \cdots = g_2 = 0$
- $g_1 = \gamma y$

Agora vejamos os termos de grau n:

$$xQ\frac{\partial f_1}{\partial y} + xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} = g_{n-1}f_1 + g_1 f_{n-1} + g_0 f_n \tag{5.14}$$

Substituindo os termos conhecidos, obtemos

$$xQ\frac{\partial f_1}{\partial y} + xy\big(\beta\frac{\partial Q}{\partial x}\big) = x\frac{\partial Q}{\partial y}f_1 + \gamma y\beta Q + g_0\alpha xQ \tag{5.15}$$

Da equação (5.15) e da fórmula de Euler, temos que Q divide

$$xy\beta\frac{\partial Q}{\partial x} - x\frac{\partial Q}{\partial y}f_1 = \beta y\bigg((n-1)Q - y\frac{\partial Q}{\partial y}\bigg) - x\frac{\partial Q}{\partial y}f_1,$$

donde Q divide $\frac{\partial Q}{\partial y}(\beta y^2 + xf_1)$. Daí concluímos que $\beta y^2 = -xf_1$. Como x não divide o membro direito desta última equação, então $\beta = 0$, e daí $f_1 = 0$, e como $f_{n-1} = \beta Q$, temos também que $f_{n-1} = 0$. Substituímos estas conclusões na equação (5.15), obtemos que

$$g_0 x Q = 0 \Longrightarrow g_0 = 0.$$

Analisamos agora os termos de grau $n-1$:

$$c\frac{\partial f_n}{\partial y} + b\frac{\partial f_n}{\partial x} = g_{n-1} f_0 \tag{5.16}$$

Substituindo o que já conhecemos:

$$cx\frac{\partial Q}{\partial y} + b\left(Q + x\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f_0 x\frac{\partial Q}{\partial y} \tag{5.17}$$

Da equação (5.17), vemos que Q divide

$$cx\frac{\partial Q}{\partial y} + b\left(nQ - y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - f_0 x\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Logo, Q divide

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\left(cx - by - f_0 x\right).$$

Assim, temos que

$$(c - f_0)x = by.$$

Impossível, pois isto implica que $b = 0$, mas $b \neq 0$.

(c) ρ é constante. Logo, $f_k = \rho.Q$ tem grau $k = n-1$. Vamos supor, sem perda de generalidade, $\rho = 1$. Assim, $f_k = Q$.

Aqui também consideremos $q(x,y) = xQ + c$, com $c \neq 0$ constante. A equação dos termos de grau mais alto, $2n-2$, fica

$$xQ\frac{\partial Q}{\partial y} = g_{n-1} Q \tag{5.18}$$

o que implica $g_{n-1} = x\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Avaliando os termos de grau $2n-3$:

$$xQ\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} = x\frac{\partial Q}{\partial y} f_{n-2} + g_{n-2} Q. \tag{5.19}$$

Como Q é irredutível de grau $n-1 > 4$, pela equação acima vemos que Q divide xf_{n-2}, já que não pode dividir $\frac{\partial Q}{\partial y}$, que possui grau $n-2$. Mas sendo Q irredutível, então divide f_{n-2}, de grau $n-2$. Logo $f_{n-2} = 0$ e assim temos também $g_{n-2} = 0$.

Vejamos que, de um processo indutivo, conclui-se que $f_{n-k} = 0 = g_{n-k}$, com $k \leq n-2$. Basta observar que a equação de grau $n+j-1$, para $j \geq 2$, é

$$xQ\frac{\partial f_j}{\partial y} = x\frac{\partial Q}{\partial y} f_j + g_{n-2} f_{j+1} + \cdots + g_j f_{n-1}.$$

Por indução, os termos entre o primeiro e o último da soma no membro direito da equação são nulos. Portanto, como $f_{n-1} = Q$, então Q divide f_j, que possui grau menor do que $n-1$.

Observando a estrutura das equações envolvidas em cada análise de termos homogêneos, vemos que a derivação em x só pode entrar em questão se $k = n-1$, isto é, na análise dos termos de grau n:

$$xy\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_1}{\partial y} = g_1 f_{n-1} + g_{n-1} f_1 \tag{5.20}$$

Esta equação é, de fato,

$$xy\frac{\partial Q}{\partial x} + xQ\frac{\partial f_1}{\partial y} = g_1 Q + x\frac{\partial Q}{\partial y} f_1 \tag{5.21}$$

Utilizando a relação de Euler na equação acima,

$$y((n-1)Q - y\frac{\partial Q}{\partial y}) + xQ\frac{\partial f_1}{\partial y} = g_1 Q + x\frac{\partial Q}{\partial y} f_1 \tag{5.22}$$

Portanto, Q divide $\frac{\partial Q}{\partial y}(xf_1 + y^2)$. Isto é, divide $xf_1 + y^2$, termo de grau 2, que é menor do que $n-1$. Logo, $xf_1 = -y^2$, o que implica x dividindo y^2. Absurdo.

Logo, d não possui solução algébrica de grau menor ou igual a $n+1$.

$\square$

5.2.1 Aplicação do argumento de Jouanolou neste caso

Teorema 5.9. *Um campo genérico da forma*

$$d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ + Q_{n-1} + \cdots + Q_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

com Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e homogêneo de grau $n-1$, $n > 5$, $b \neq 0$, não tem solução algébrica em $\mathbb{C}[x, y]$.

Demonstração. Seja Λ_n o conjunto das 1-formas projetivas associadas à família de derivações

$$d = (\alpha xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ + Q_{n-1} + \cdots + Q_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde Q é homogêneo de grau $n-1$, $n > 5$. Consideremos U o subconjunto de Λ_n das 1-formas projetivas θ induzidas por derivações como acima, que tenham singularidades reduzidas em $z = 1$, como estudado na subseção 5.1.2. Vimos, nesta seção, que para que as singularidades sejam não-reduzidas em $z = 1$, é necessário que seja satisfeita a equação abaixo:

$$\frac{(\mathrm{tr}(J))^2}{\det(J)} = q, \tag{5.23}$$

onde $q \in \mathbb{Q}^+$,

$$\mathrm{tr}(J) = \alpha y + x\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial Q_1}{\partial y}$$

é o traço da matriz Jacobiana do campo, e

$$\det(J) = \alpha y\big(x\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial Q_1}{\partial y}\big) - \alpha x\big(Q + x\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\big)$$

é o determinante desta matriz. O conjunto das formas induzidas por derivações que satisfazem a equação (5.23) acima para cada q é um fechado na topologia de Zariski. Portanto, U, que é o conjunto das formas que não satisfazem tais equações, para todo número $q \in \mathbb{Q}^+$, é o complementar de uma união enumerável de conjuntos fechados. Dizendo de outra maneira, U é uma interseção enumerável de abertos do tipo Zariski. Portanto, se $U \neq \emptyset$, podemos concluir, pelo Teorema de Baire, que é um conjunto denso. Mostramos na subseção 5.1.2 que $U \neq \emptyset$, pois exibimos um exemplo de campo que induz uma folheação cujas singularidades nos pontos tais que $z = 1$ são reduzidas, da forma $d = (xy + b)\frac{\partial}{\partial x} + (xQ + Q_{n-1})\frac{\partial}{\partial y}$, com $b \neq 0$, $Q_{n-1} \neq 0$, e Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Agora vejamos o que acontece em geral com as singularidades das folheações induzidas pelas 1-formas em Λ_n tais que $z = 0$. A forma projetiva é dada por

$$\Omega = -z\big(xQ + zQ_{n-1} + \cdots + z^n Q_0\big)dx + z\big(z^{n-2}xy + bz^n\big)dy$$

$$+\big(x^2 Q + zxQ_{n-1} + \cdots + xQ_0 z^n - xy^2 z^{n-2} - bz^n y\big)dz,$$

cujas singularidades em $z = 0$ são $[0 : 1 : 0]$ e $p = [1 : y_0 : 0]$ tais que $Q(p) = 0$. Na singularidade p, ou melhor, em $[1 : y_0 : 0]$, o mesmo cálculo realizado na subseção 5.1.1 mostra (pois mesmo o caso geral só depende dos termos xQ e Q_{n-1}) que temos uma singularidade reduzida, se $\frac{\partial Q}{\partial y}(1, y_0) \neq 0$. Isto determina um aberto W_1 do tipo Zariski, não vazio pelas condições para a construção de exemplos que impusemos em 5.1.1 (Q irredutível sobre $\mathbb{Q}$).

Vejamos o que ocorre na singularidade $[0 : 1 : 0]$. A forma Ω fica, em $y = 1$, como abaixo:

$$\omega_y = -z\big(x\hat{Q} + z\hat{Q}_{n-1} + z^2\hat{Q}_{n-2} + \cdots + z^n Q_0\big)dx +$$

$$(x^2\hat{Q} + zx\hat{Q}_{n-1} + \cdots + xQ_0 z^n - xz^{n-2} - bz^n\big)dz,$$

onde usamos a notação $\hat{q} = q(x, 1)$ em todas as funções polinomiais na forma ω_y. A matriz Jacobiana do campo associado a esta forma em $z = 0$ é

$$J=\begin{bmatrix} 2x\hat{Q}+x^2\hat{Q}_x & x\hat{Q}_{n-1} \\ 0 & x\hat{Q} \end{bmatrix}$$

Assim, vemos na matriz acima que se $x=0$, temos a matriz nula, e por isso é necessário efetuar *blow-up*.

Realizando o *blow-up* $x := zt$ e $z := z$, e saturando a 1-forma, temos

$$\tilde{\omega} = -(t\hat{Q}+\hat{Q}_{n-1}+z\hat{Q}_{n-2}+\cdots+z^{n-1}Q_0)dt+(bz^{n-3}-tz^{n-4})dz,$$

onde $\hat{f}=f(zt,1)$ para cada caso acima. A singularidade em $z=0$ aqui é dada pelos pontos tais que

$$t\hat{Q}+\hat{Q}_{n-1}=0.$$

A matriz jacobiana do campo correspondente em $z=0$ é

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q(0,1) & t^2\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1)+t\frac{\partial \hat{q_0}}{\partial x}(0,1) \end{bmatrix}$$

que é exatamente a matriz calculada na subseção 5.1.1. A condição para que não haja necessidade de nova explosão (*blow-up*) é que

$$t^2\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1)+t\frac{\partial \hat{q_0}}{\partial x}(0,1)\neq 0,$$

isto é,

$$t_0\big(t_0\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial \hat{q_0}}{\partial x}(0,1)\big)\neq 0.$$

Esta condição determina a interseção de dois abertos do tipo Zariski, o aberto W_2. Este aberto é não-vazio, pois exibimos um exemplo em 5.1.1.

Realizando agora a explosão $x := x$ e $z := xt$, temos a forma

$$\tilde{\omega}_y = x^{n-4}t^{n-1}(1+bxt^2)dx+(x^{n-3}t^{n-2}(1+bxt^2)-Q(x,1)-t\bar{q_0}(x,1))dt.$$

Como o blow-up é feito em $[0:1:0]$, só há singularidade na forma acima de $Q(0,1)=0$. Ou seja, não há qualquer singularidade nova a ser analisada se $Q(0,1)\neq 0$, o que determina um aberto do tipo Zariski W_3 (cujos pontos são k-uplas cujas coordenadas são os coeficientes de $Q(x,y)$). Este aberto é também não-vazio pois obtemos exemplos em 5.1.1.

Portanto, o aberto $W=W_1\cap W_2\cap W_3\neq\emptyset$ é constituído de 1-formas associadas a folheações com singularidades **reduzidas** em $z=0$.

Agora, retomemos os argumentos apresentados na seção 2.2 para este caso, análogos ao de Jouanolou para o espaço de todas as folheações. Seja $\mathbb{P}(\Lambda_m)$ a projetivização do espaço vetorial das 1-formas de Pfaff de grau $m \geq 2$ associadas a campos vetoriais da forma $(axy+b, xQ+Q_{n-1}+\cdots+Q_0)$. Seja Z_m o conjunto de tais equações de Pfaff sem solução. Sejam também W_{m-1} o espaço vetorial das 2-formas com coeficientes polinomiais homogêneos de grau $m-1$, $S^t = S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ o espaço vetorial complexo dos polinômios homogêneos de grau t, e $Y_t \subset \Lambda_m \times W_{m-1} \times S^t$ definido por

$$Y_t = \{(\omega, \alpha, f); \omega \wedge df = \alpha f, (\omega, \alpha) \neq (0,0), f \neq 0\}.$$

Da mesma forma que na seção 2.2, define-se uma subvariedade projetiva $\bar{Y}_t$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}\big(\Lambda_m \times W_{m-1}\big) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}\big(S^t_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)\big)$ da seguinte forma: se $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ e $(\omega, \alpha, f) \in Y_t$, temos que $(\lambda\omega, \lambda\alpha, \mu f) \in Y_t$ por causa da relação $\omega \wedge df = \alpha f$, donde pode-se definir $\bar{Y}_t$ como o quociente $Y_t/\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Toda a sequência de argumentos utilizados naquela seção pode apenas ser reproduzida aqui, o que não faremos. Temos, portanto, que

$$\bigcup_{t=1,\cdots,m+1} \pi_t(\bar{Y}_t)$$

é o conjunto de todas as equações de Pfaff induzidas por 1-formas de Λ_m com solução algébrica de grau menor ou igual a $m+1$, e o argumento de Jouanolou mostra que esta união é um fechado (pois aqui é a união finita). Assim, a conclusão é que

$$Z_m = V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\Lambda_m) - \bigcup_{t=1,\cdots,m+1} \pi_t(\bar{Y}_t)$$

é um aberto da topologia de Zariski. Mas poderíamos ter $V = \emptyset$, o que não ocorre porque exibimos um elemento de V na seção 5.2, mostrando que a forma associada ao campo $(xy+b, xQ+c)$ não possui solução de grau menor ou igual a $n+1$, se xQ tem grau n.

Assim temos que $U \cap W \cap V$ é um conjunto denso e não vazio. Concluindo: se θ pertence a esta interseção, então:

1. θ não tem singularidades dicríticas porque pertence a $U \cap W$;

2. θ não tem solução algébrica de grau menor ou igual a $n+1$ pois pertence a V.

Combinando (1) com o teorema de Carnicer, podemos afirmar que θ não tem solução algébrica de grau maior que $n+1$. Portanto, por (2), θ não pode ter nenhuma solução algébrica. Em outras palavras, uma folheação genérica de Λ_n não pode ter qualquer solução algébrica em $\mathbb{C}[x, y]$. $\square$

Capítulo 6

Conclusões

Estudamos neste texto, inicialmente, derivações da forma $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ onde $p = xy + b$, $b \neq 0$, e q é de grau 3 e sem múltiplos constantes de x^3 ou y^3, com o apoio da ferramenta computacional `Singular` e do Teorema de Carnicer. Um próximo passo pode ser estudar derivações onde p tenha grau 2 e forma mais geral. O caso p com grau 3 ainda é computacionalmente difícil de ser avaliado, e deve ser mantido em foco o objetivo, talvez distante, de classificar derivações de grau 3 em que ambos os coeficientes polinomiais tenham este grau.

Além disso, analisamos um dos campos onde q possui múltiplo constante y^3 em seu componente homogêneo de grau 3, obtendo singularidade não-reduzida, e apesar de não podermos utilizar o teorema de Carnicer, mostramos a simplicidade da derivação d. Os outros exemplos, incluindo os que contêm x^3, continuam em aberto. Vimos que estratégias para casos dicríticos devem ser adaptadas a cada um, dadas as suas particularidades. A abordagem deste caso mostrou um nível de dificuldade superior à dificuldade dos casos com singularidades reduzidas, o que é de se esperar quando há singularidades dicríticas envolvidas no problema. Uma questão imediata que se levanta, aparentemente muito difícil ainda de abordar, é:

Quais são as condições mínimas sobre os coeficientes de q de grau 3 exibidos na lista produzida pelo programa de computação algébrica que possuem múltiplos constantes de x^3 e/ou y^3 de modo que d seja simples, sem termos que apelar para exemplos concretos?

Passamos a seguir ao estudo de um campo da forma $d = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, onde p é tomado como acima e $q = xQ + Q_{n-1} + \cdots + Q_0$, com Q irredutível em $\mathbb{Q}[x, y]$ de grau $n - 1$, $n > 5$, e mostramos que, apesar da existência de singularidades (o que nos impediu de afirmar a simplicidade da derivação), tal campo é genericamente sem solução algébrica. Para isto, contamos com argumentos encontrados no trabalho de Jouanolou acerca das equações de Pfaff, [20]. O estudo específico em que o grau de q é igual a 4 ou 5, também mostrou-se mais trabalhoso do que parecia inicialmente por dificuldades para controlar-se o número de explosões necessárias nas resoluções de singularidades em $z = 0$, e para exibir exemplos de derivações sem solução algébrica. Assim, deixamos este estudo como mais um problema a ser resolvido. Um possível caminho é tentar construir exemplos diferentes de derivações com estes graus que tenham singularidades reduzidas, e exemplos distintos dos exibidos neste trabalho que não tenham solução algébrica de grau no máximo 6, usando o argumento da genericidade, de Jouanolou.

Ressaltamos a importância do programa de computação algébrica `Singular` e dos resultados da teoria das folheações holomorfas para este trabalho, sem os quais teria sido impossível sua realização.

Referências Bibliográficas

[1] J. Bernstein e V. Lunts, *On non-holonomic irreducible D-modules*, Inven. Math. **94** (1988), 223-243.

[2] M.N. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Ann.Math., **140**(1994), 289-294.

[3] S.C. Coutinho, *A primer in algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts No. 33, Cambridge University Press, 1995.

[4] S.C. Coutinho, *On the classification of simple quadratic derivations over the affine plane*, Journal of Algebra, **319** (2008) p. 4249-4274.

[5] S.C. Coutinho, *d-Simple rings and d-simple D-modules*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **125** (1999), 405-415.

[6] S.C. Coutinho, *On the differential simplicity of polynomial rings*, J.Algebra **264** (2002), 442-468.

[7] K. R. Goodearl e R. B. Warfield Jr, *An introduction to noncommutative noetherian rings*, London Mathematical Society Student Texts **16** (Cambridge University Press, 1989).

[8] G.-M. Greuel, G. Pfister, H.Schonemann. `Singular` 3.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005). `http://www.singular.uni-kl.de`

[9] D. Jordan, *Differentiably simple rings with no invertible derivatives*, Quart.J.Math. Oxford (2), **32** (1981), 417-424.

[10] Y. Lequain, D. Levcovitz e J.C. de Souza Junior, *D-Simple rings and principal maximal ideals of the Weyl algebra*, Glasgow Math. J. 47 (2005), 269-285.

[11] I.R. Shafarevitch, *Basic algebraic geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg (1977).

[12] S. Walcher, *On the Poincaré problem*, J.Diff.Equations, **166** (2000), 51-78.

[13] S. Lang, *Algebra*, terceira edição, Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differentla equation $Ady = Bdx$*, Amer. J. Math. **89** (1968), 248-269.

[15] J. T. Stafford, *Non-holonomic modules over the Weyl algebra and enveloping algebras*, Invent. math. **79** (1985), (619-638).

[16] I. Vainsencher, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitaria, IMPA, 2005.

[17] Apostol, Tom M., *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1976.

[18] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1999.

[19] Y.-K. Man and M. A. H. MacCallum, *A rational approach to the Prelle-Singer algorithm*, J. Symb. Computation 24 (1997), 31–43.

[20] J.P. Jouanolou, *Equations de Pfaff Algébriques*, Springer-Verlag, 1979.

[21] S.C. Coutinho, L.M. Schechter, *Algebraic solutions of holomorphic foliations: an algorithmic approach*, Journal of Symbolic Computation, v. 41, n. 5, p. 603-618, 2006.

[22] S. Roman, *Field Theory*, Springer, 2000.

[23] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Pub.Co. , 1969.

[24] J.-F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13, 1980.

[25] F. Cano, *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*, Ann.Math. 160, p. 907-1011, 2004.