UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINE-
AR PARA PLANEJAMENTO UNIVERSITÁRIO

por

João Fernando Ata de Oliveira Pantoja

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovado por:

Nelson Maculan Filho

Ronaldo Cesar Marinho Persiano

Clóvis Caesar Gonzaga

José Manuel Carvalho de Mello

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MARÇO DE 1979

PANTOJA, JOÃO FERNANDO ATA DE OLIVEIRA

Um Modelo de Programação Não Linear Para Planejamento Universitário (Rio de Janeiro), 1979.

IV, 78 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc. , Engenharia de Sistemas e Computação, 1979).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. COPPE

I. Otimização I. II. Título (Série).

R E S U M O

A partir do estabelecimento de uma função objetivo que expresse o relacionamento Universidade-Sociedade e da identificação de necessidades do processo de ensino, procura-se, para cada curso, através de métodos de Programação Não Linear, o número ótimo anual de graduados assim como a melhor distribuição de recursos.

ABSTRACT

From stabilishing an objective function to reflect the relationship University-Society and from identifying necessities on the teaching process, we want to know, for every graduation course, throughout non-linear programing methods, the yearly optimum number of graduated studients as well as the better allocation of resources.

I N D I C E

I. INTRODUÇÃO ....

II. MÉTODOS ....

III. RESULTADOS COMPUTACIONAIS ....

IV. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO ....

BIBLIOGRAFIA ....

I. INTRODUÇÃO

Estudando-se a realidade mundial constata-se uma grande mudança na idéia universitária a partir dos anos sessenta.

Ao invés de regras rígidas que facilitavam um pseudo-planejamento mas coibiam as potencialidades estudantis, vê-se hoje a administração como ponto de apoio ao elemento central da Universidade, o aluno.

O sistema de ensino evolui para tornar-se apto a descobrir e dar devido valor aos dons de um maior número de indivíduos fugindo-se à padronização do ensinamento.

Em alguns países esta transformação se deu por vezes de modo violento e seria mesmo uma das causas da revolta estudantil de 1968 na França e outros países europeus.

Uma das instituições em que não houve distúrbios foi a UNIVERSIDADE CATÓLICA DE LOUVAIN onde parece ter havido uma revolução tranquila (Debelle [1]). O principal responsável por esta paz seria o perfeito entendimento cúpula-professor-aluno ali existente e que é atribuído pelos funcionários ao sistema não burocrático de administração empregado. Isto permite a formação de uma rápida corrente AÇÃO-INFORMAÇÃO-CORREÇÃO o que evidentemente requer ativa participação de professores e alunos nas tomadas de decisões tornando-os co-responsáveis pelas mesmas.

No Brasil houve o surgimento da Lei de Reforma Universitária. O Grupo de Trabalho incumbido de traçar as diretrizes da reforma assim justifica o seu trabalho |[2]|.

"Pensou o problema da reforma universitária em função do aluno, unicamente porque o aluno é o destinatário imediato de todo esforço educacional de uma nação consciente de que, no jovem, repousam todas as suas esperanças de continuidade na realização de seu próprio destino.

Procurando sempre pautar a sua ação por esta inspiração primordial, julgou dever ganhar altura, para não se deixar envolver em uma temática conjuntural e efêmera e poder reformular, em novas bases, o problema da própria presença e participação do estudante no contexto universitário. Esta, longe de ser apenas tolerada, passou a ser explicitamente solicitada, como um fator sem o qual muitas das inovações introduzidas perderiam eficácia. Cabe com efeito ao estudante uma permanente função crítica, seja do sistema no qual se processa a sua formação, seja da estrutura social global na qual se desenvolve. Mas para que esta função crítica não se deteriore em uma atitude estéril de permanente contestação, é indispensável a criação de condições que garantam a institucionalização do diálogo, em um clima de lealdade e cooperação".

Em termos práticos medidas como a criação de ciclos básico e profissional, crescimento de importância de atividade departamental, matrícula por disciplina, sistema de créditos e ênfase na integração do ensino através da construção em rítmo acelerado de diversos "CAMPI", vieram salientar o caráter inter-disciplinar do novo ideal universitário, com o que se procura facilitar a passagem do conhecimento de um ramo para o outro.

Nota-se mesmo em recentes estudos (Onushkin[3]) uma preocupação em retardar a escolha pelo aluno da futura carreira de modo a permiti-lo, sob orientação adequada, selecionar qual adapta melhor suas tendências naturais às necessidades da sociedade em que vive. Assim teríamos no Cíclo Básico as disciplinas de Ensino Geral e Orientação formando o contexto das disciplinas de Especialização oferecidas no Cíclo Profissional. Não existe antagonismo algum entre os dois objetivos pois a especialização e o ensino geral devem ser considerados um e outro como elementos intrínsecos ao ensino Universitário.

Ressalte-se ainda que a mobilidade de currículos e possibilidade de oferecer cursos de curta duração, abertas às Universidades pela Lei da Reforma Universitária, se bem aproveitadas, levam a uma maior identificação entre os objetivos da IES e os da comunidade permitindo que o ensino acompanhe as evoluções de condições locais.

Entretanto alguns entraves ocorreram, pelo descompasso entre os métodos requeridos para a eficaz execução das reformas e aqueles tradicionalmente adotados na administração universitária. Como se vê em Azevedo[4]:

"*Mas, para as transformações que se requerem, neste vasto domínio de estudos, ensino e pesquisas, é condição igualmente indispensável a reestruturação do Ministério da Educação e Cultura e das respectivas Secretarias em todos os Estados. Ministérios e Secretarias dessa natureza regem-se ainda por uma concepção política e administrativa e dentro de uma organização, aquela e esta, arcaicas e absoletas, e, além disso, solapadas pela burocracia, tão emperrada como a das universida-*

des e faculdades que não puderam ou não quiseram ainda subtrair-se às influências das velhas estruturas tradicionais. A administração pública não é, como se sabe, nem deve ser senão um meio ou instrumento não só para o andamento rápido de processos de rotina, em que ela, ainda hoje, se esgota, como também para iniciativa, planejamento e promoção de reformas substanciais. Quando bem organizada não se exaurem suas atividades na elaboração rotineira de propostas, pareceres, nomeações e de toda espécie de atos, a requerimento de interessados ou de funcionários, para a escolha e movimentação destes nas diversas áreas de ensino. Ela é e deve ser também, e, cada vez mais, um centro de estudos, pesquisa e planificação, e, mais do que isso, uma força geradora de energias e estímulos, para levar adiante suas iniciativas e secundar as que provenham de sindicatos, associações e congressos, e mereçam, por suas altas qualidades, a atenção dos poderes públicos. Ela é e tende a ser pelo aperfeiçoamento constante de suas técnicas de ação, um poder criador e um foco de convergências de aspirações e de irradiação de idéias novas. Não é apenas para MANTER os serviços, mas para RENOVÁ-LOS e pô-los em dia, que se organiza a administração. Ora, o que infelizmente temos no setor de educação pública , no Ministério e nas Secretarias de Estado (como em outros Ministérios e Secretarias), é uma velha máquina burocrática, já gasta, e, utilizada mais como um sistema de freios do que de pistões, mais como um fator de conservação do "status quo" do que de provocação e desencadeamento de atividades criadoras".

Não obstante uma intensificação da Pesquisa Institucional voltada para o Planejamento Universitário, vemos que este ressente-se da ausência de racionais critérios decisórios de médio e longo prazo. Talvez porque problemas básicos envolvendo medidas de rendimento do ensino ainda não estejam totalmente equacionados (Fortier[5]).

Corre-se ainda o risco de cair em um círculo vicioso pois se por um lado a administração sofre com a falta de informações, veja-se que a relativamente pouco tempo era quase impossível acompanhar-se criticamente o histórico financeiro das IES, já que a real utilização das verbas escondia-se sob rubricas pouco esclarecidas |[6]|, por outro lado a escassez de decisões administrativas que realmente sejam calcadas em critérios técnicos, substituídas por instituições pessoais ou injunções políticas, inibe o estabelecimento de uma linha mais definida para a Pesquisa Institucional.

É óbvio portanto, que a aplicação de modelos como o aqui apresentado, ao tentar resolver as dificuldades oriundas desta falta de dados, notadamente sobre o encaminhamento de alunos no sistema de ensino e sobre o mercado de trabalho regional, gera informações que muitas vezes facilitarão o desenvolvimento de outros estudos.

Trataremos aqui de procedimentos que levam a uma aplicação adequada dos recursos disponíveis. Não ao nível de metodologia para divisão dos orçamentos anuais, como por exemplo as propostas em Queiroz[7] e Pantoja[8], mas sim de estudar investimentos de médio e longo prazo.

Antes de entrarmos no detalhamento do problema em pauta, resta-nos dizer que, embora um frio processo matemático não deva ser encarado como regra absoluta, a obtenção de indicadores é muito útil. Na verdade a utilização da metodologia proposta permite identificar um mínimo de parâmetros subjetivos a partir dos quais se tenta objetivamente estabelecer uma boa política.

Sem esquecer as importantes influências que o meio universitário troca com a vida cultural de uma sociedade, aqui enfocaremos a Universidade mais sob o aspecto do papel ativo que representa na economia da região por si atingida. Não fugindo à justificadas críticas que tal enfoque possa sofrer, parece-nos ser este procedimento muito defensável ao tratar-se de países em vias de desenvolvimento, sub-desenvolvidos e de todos aqueles nos quais a escassez de recursos desaconselha dispendidos com erudições gratuitas, de interesses restritos ou de utilidade indefinida. De qualquer modo, o conhecimento não profissionalizante deve ficar assegurado pela valorização do Ciclo Básico.

Considerando-se como "produtos finais" do processo, o graduado de cada curso surgem perguntas do tipo: Numa certa região o que interessa mais formar no momento? Engenheiros? Médicos?

Além de depender dos custos para a formação dos profissionais, e dos recursos disponíveis a resposta destas perguntas exige uma avaliação dos correspondentes benefícios prestados à comunidade pelo profissional. O que vale mais neste momento para a região, um engenheiro ou um médico?

Por motivos sociológicos, nenhum sistema econômico pré-capitalista permitia a comparação de trabalhos distintos, ou seja:

"O que impedia ARISTÓTELES de ver na forma valor das mercadorias, que todos os trabalhos se exprimem aqui como trabalho humano indistinto e por conseguinte, iguais, é que a sociedade grega repousava sobre o trabalho dos escravos e tinha por base natural a desigualdade dos homens e de suas forças de trabalho. O segredo da expressão do valor - a igualdade e a equivalência entre todos os trabalhos que existem porque são trabalhos humanos - só pode ser decifrado quando a idéia da igualdade humana já adquiriu a tenacidade de um preconceito popular. Mas isto só passa a acontecer em uma sociedade em que a forma mercadoria tornou-se a forma geral dos produtos do trabalho, em que, por conseguinte, a relação dos homens entre si como produtores e permutadores de mercadorias é a relação social dominante. O que demonstra o gênio de ARISTÓTELES é que ele descobriu na expressão do valor das mercadorias uma relação de igualdade. O estado particular da sociedade em que ele vivia impediu-o apenas de descobrir o conteúdo real desta relação" (Marx[9]).

Tomaremos aqui como indicador do "valor de uso" de cada graduado, o valor de seu trabalho, este por sua vez assumido como sendo diretamente proporcional ao salário médio do profissional na região em estudo. Distorções salariais podem existir devido à tendência existente em economias de capitalismo liberal de desvincular o "valor de mercado" do "valor de uso" (Goldman[10]). Mesmo assim, mercê de uma crescente planificação nas economias e consequentes medidas regularizadoras nos níveis salariais, oriundas de ações dos órgãos de classe e do próprio Estado, estas distorções a cada dia tornam-se menos críticas.

Evidentemente o valor do profissional está estreitamente ligado à qualidade do ensino que lhe foi ministrado qualidade esta que por sua vez é função dos recursos aplicados.

A escassez de recursos nas universidades brasileiras é um fato e como consequência imediata surge a perda na qualidade de ensino. Aqui procuraremos alocar os recursos disponíveis, em termos de área, equipamentos e professores de modo a minimizar os efeitos danosos de sua falta. Para isto, e como já é comum em trabalhos de planejamento acadêmico |[11]| , usaremos índices do tipo aluno/m^2 para medir disponibilidade de área e relações semelhantes para os outros recursos.

Sugerimos então que se tome para cada ramo profissional uma IES modelo e aí levante-se o nível de utilização de cada recurso. Os valores encontrados serão considerados os índices de excelência para o curso. Com esta disponibilidade não haveria queda na qualidade de ensino.

A partir deste ponto uma "função penalização" cresce linearmente com a piore do índice de utilização de recurso, até um limite superior (Vide figura 1). A este último ponto associa-se o valor de "máxima penalização".

Em termos de limitação financeira supõe-se conhecido o custo unitário de graduação para cada curso e o total da receita disponível para gastos com estas atividades no período em estudo.

Pressupõem-se também a existência de estudos de mercado de trabalho de modo a que se possua, por profis são, uma boa estimativa dos seguintes parâmetros:

NMAX (i) - Número acima do qual um novo graduado i teria mais de 90% de probabilidade de permanecer desempregado por período superior a 12 meses após a formatura.

NMIN (i) - Número tal que os empregos a serem oferecidos para a profissão i nos próximos 12 meses tenha 90% de probabilidade de lhe ser superior.

De uma maneira um tanto abstrata, a ser melhor explicada quando da formulação matemática, pode-se dizer que o problema a ser abordado consiste em:"PARA UMA REGIÃO, DIMENSIONAR O NÚMERO DE PROFISSIONAIS DE CADA ESPECIALIDADE A SER GRADUADO EM UM CERTO PERÍODO E ALOCAR OS RECURSOS DISPONÍVEIS, EM TERMOS DE ÁREA, EQUIPAMENTO E PROFESSORES, PROCURANDO SE OBTER A MAIOR "SATISFAÇÃO SOCIAL".

II. MÉTODOS

Transformando-se para linguagem matemática o problema vamos inicialmente estabelecer o que chamamos "satisfação social". Na realidade a função objetivo de nosso modelo.

II.1. FUNÇÃO OBJETIVO

Chamemos:

N (i) = número de graduados no curso i(i = 1,S)

V (i) = valor social do graduado em i, caso não haja deficiência de ensino (i = 1,S).

Se todos os cursos pudessem dispor dos recursos em quantidade igual à disponível pelas IES escolhidas para modelo, não haveria penalização por deficiência de ensino e poderíamos dizer que:

$$\text{Satisfação Social} = F = \sum_{i=1}^{S} N(i) \times V(i) \qquad 1$$

Na prática sempre haverá deficiência de ensino em algum curso e chamaremos:

PIS (i) = parcela do ensino perdido por deficiência de espaço por curso i

PE (i) = parcela do ensino perdido por de ficiência de equipamento no curso $\underline{i}$

PP (i) = parcela do ensino perdida por deficiência de professores no curso $\underline{i}$.

Então, uma melhor expressão seria obtida com a inclusão de penalizações. Ou seja:

$$\text{Satisfação Social} = F = \sum N(i) \times V(i) \times (1 - PIS(i) - PE(i) - PP(i)) \qquad 3$$

O significado de V(i) permanece obscuro mas afirma-se que:

$$\frac{V(i)}{V(j)} = \frac{SM(i)}{SM(j)} \qquad 2$$

onde:

SM (i) = previsão da média salarial a ser obtida por graduados do curso $\underline{i}$, a partir da análise de períodos anteriores, caso não haja perda na qualidade do ensino.

II.2. PENALIZAÇÕES

Vamos estabelecer medidas para as perdas na qualidade de ensino por insuficiência de recursos.

Para ÁREA CHAMAMOS,

IS^* (i) = índice aluno/m^2 existente na IES escolhida como modelo para o curso i.

$\overline{IS}$ (i) = índice aluno/m^2 da pior condição admissão para funcionamento do curso i.

IS (i) = variável que medirá a relação aluno/m^2 no curso i.

MPS (i) = parcela do ensino perdida quando IS (i) = $\overline{IS}$ (i).

Como penalização teríamos então:

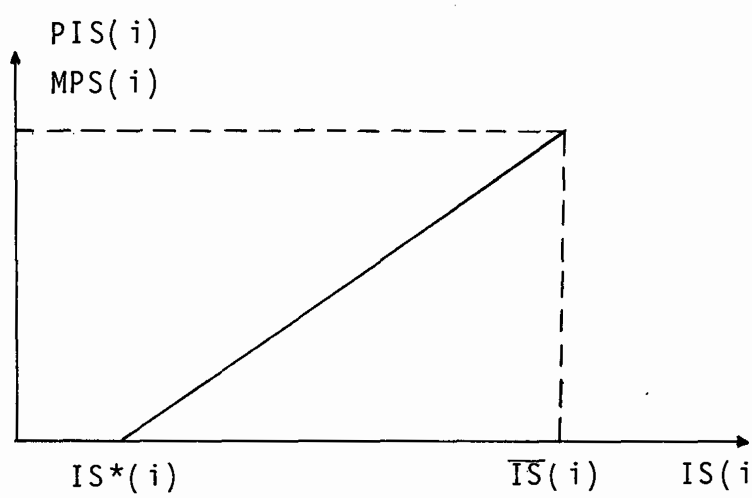


FIGURA 1

Analiticamente,

$$\frac{PIS\ (i)}{IS(i) - IS^*(i)} = \frac{MPS\ (i)}{\overline{IS}(i) - IS^*(i)} \quad \therefore$$

$$PIS\ (i) = \frac{MPS\ (i)}{\overline{IS} - IS^*(i)}\ (IS(i) - IS^*(i)).$$

A obtenção dos IS (i) é feita através da utilização das IES tomadas como modelo para cada curso.

A estimativa dos $\overline{IS}(i)$ e MPS(i) é feita em consulta a professores.

Antes de iniciar-se a resolução do problema já se conhece portanto:

$IS^*(i)$, $\overline{IS}(i)$, $MPS(i)$

Logo pode-se fazer:

$$\frac{MPS\ (i)}{\overline{IS}(i) - IS^*(i)} = K1(i); \quad \frac{MPS(i).IS^*(i)}{\overline{IS}(i) - IS^*(i)} = K2(i)$$

e então teríamos:

$$PIS\ (i) = K1\ (i)\ .\ IS\ (i) - K2\ (i)$$

ou

$$PIS\ (i) = K1\ (i)\ .\ \frac{N(i)}{A(i)} - K2\ (i) \qquad 4$$

onde

A(i) = área destinada ao curso i.

Analogamente teríamos para EQUIPAMENTO

VE*(i) = índice aluno/cruzeiro de equipamento existente na IES escolhida como modelo para o curso $\underline{i}$.

$\overline{VE}$ (i) = índice aluno/cruzeiro de equipamento da pior condição admissível para funcionamento do curso $\underline{i}$.

VE (i) = variável que medirá a relação aluno/cruzeiro de equipamento no curso $\underline{i}$.

MPE(i) = parcela de ensino perdida quando VE(i) = $\overline{VE}$ (i).

Chamado,

$$K3(i) = \frac{MPE\ (i)}{\overline{VE}(i) - VE^*(i)} \quad e \quad K4(i) = \frac{MPE(i).VE^*(i)}{\overline{VE}(i)-VE^*(i)}$$

teríamos:

$$PE(i) = \frac{N(i)}{E(i)} \ .\ K3\ (i) - K4\ (i) \qquad 5$$

onde

E(i) = valor do equipamento destinado ao curso $\underline{i}$. Para PROFESSORES teríamos de modo análogo:

IP(i)= índice aluno/professor, existente na IES escolhida como modelo para o curso $\underline{i}$.

$\overline{IP}$(i)= índice aluno/professor, na pior condição admissível para funcionamento do curso $\underline{i}$.

$IP(i)$ = variável que mede a relação aluno/professor no curso $\underline{i}$.

$MPP(i)$ = parcela de ensino perdida quando $IP(i) = \overline{IP}(i)$.

$$K5(i) = \frac{MPP(i)}{\overline{IP}(i) - IP^*(i)} \quad \text{e} \quad K6(i) = \frac{MPP(i) \times IP^*(i)}{\overline{IP}(i) - IP^*(i)}$$

teríamos

$$PP(i) = K5(i) \times \frac{N(i)}{P(i)} - K6(i) \qquad 6$$

onde

$P(i)$ = número de professores destinados ao curso $\underline{i}$.

$$\text{Satisfação Social} = F = \sum_{i=1}^{s} N(i) \times V(i) \times$$

$$\left(1 - K1(i) \times \frac{N(i)}{A(i)} - K2(i) - K3(i) \times \frac{N(i)}{E(i)} - \right.$$

$$\left. - K4(i) - K5(i) \times \frac{N(i)}{P(i)} - K6(i)\right).$$

fazendo

$K2(i) + K4(i) + K6(i) = KK(i)$ temos:

$$F = \sum_{i=1}^{s} N(i) \times V(i) \times \left(1 - K1(i) \times \frac{N(i)}{A(i)} - \right.$$

$$\left. K3(i) \times \frac{N(i)}{E(i)} - K5(i) \times \frac{N(i)}{P(i)} - KK(i)\right).$$

onde:

$$\frac{V(i)}{V(j)} = \frac{SM(i)}{SM(j)}$$

II.3. RESTRIÇÕES

As limitações dos recursos podem ser expressas em função dos seguintes dados:

RECEI = receita disponível a ser gasta diretamente com o corpo discente de graduados no período em estudo.

ATOTA = total de área disponível, no período (em m^2).

EQPTO = total do equipamento disponível, no período (em cruzeiros).

PTOTA = total de professores disponíveis, no período, em equivalente de professores em tempo integral (Ex: 10 professores de 20 horas = 5 professores).

C(i) = custo por graduado no curso i. para o período.

Teríamos então:

$$\sum_{i=1}^{s} A(i) \leq ATOTA$$

$$\sum_{i=1}^{S} E(i) \leq EQPTO$$

$$\sum_{i=1}^{S} P(i) \leq PTOTA$$

$$\sum_{i=1}^{S} C(i) \times N(i) \leq RECEI$$

onde os C(i) são diferentes do "custo-aluno" pois, para que se formem um certo número de alunos, é necessário que se tenha nos períodos precedentes despesas com um número significativamente maior de alunos dado as evasões, repetições, trancamentos, etc.

De um estudo do mercado de trabalho regional obteriam-se, conforme citado anteriormente, os seguintes parâmetros.

NMAX(i) = número máximo de graduados

NMIN(i) = número mínimo de graduados

E as quatro restrições já estabelecidas somariam-se $\underline{S}$ do tipo

$$N(i) \leq NMAX(i) \qquad i = 1, S$$

e $\underline{S}$ do tipo:

$$N(i) \geq NMIN(i) \qquad i = 1, S.$$

Por outro lado, ao alocarmos os recursos teremos de cuidar para que, no caso de ÁREA,

$$IS^*(i) \leq \frac{N(i)}{A(i)} \leq \overline{IS}(i)$$

se fizermos:

$$AMAX(i) = \frac{N(i)}{IS^*(i)} \quad e \quad AMIN = \frac{N(i)}{\overline{IS}(i)}$$

ficaremos com mais $\underline{S}$ restrições do tipo

$$A(i) \leq AMAX(i) \qquad i = 1, S$$

e mais $\underline{S}$ do tipo:

$$A(i) \geq AMIN(i) \qquad i = 1, S$$

analogamente teríamos em EQUIPAMENTO:

$$E(i) \leq VEMAX(i) \qquad i = 1, S$$

$$E(i) \geq VEMIN(i) \qquad i = 1, S$$

onde $$VEMAX(i) = \frac{N(i)}{E^*(i)}$$

$$VEMIN(i) = \frac{N(i)}{E(i)}$$

e para PROFESSORES:

$$P(i) \leq PMAX(i)$$

$$P(i) \geq PMIN(i)$$

onde

$$PMAX(i) = \frac{N(i)}{P^*(i)}$$

$$PMIN(i) = \frac{N(i)}{\overline{P}(i)}$$

O nosso problema seria então:

<u>PROBLEMA I</u>

$$MAX\ F = \sum_{i=1}^{S} N(i) \times V(i) \times (1 - K1(i) \times N(i) -$$

$$- K3(i) \times N(i) - K5(i) \times N(i) - KK(i))$$

$$N(i),\ A(i),\ E(i),\ P(i)$$

sujeito a:

$$N(i) \leq NMAX(i) \qquad i = 1, S$$

$$N(i) \geq NMIN(i) \qquad i = 1, S$$

$$\sum_{i=1}^{S} C(i) \times N(i) \leq RECEI$$

$$A(i) \leq AMAX(i) \qquad i = 1, S$$

$$A(i) \geq AMIN(i) \qquad i = 1, S$$

$$\sum_{i=1}^{S} A(i)\ ATOTA$$

$$E(i) \leq VEMAX(i) \qquad i = 1, S$$

$$E(i) \geq VEMIN(i) \qquad i = 1, S$$

$$\sum_{i=1}^{S} E(i) \leq EQPTO$$

$$P(i) \leq PMAX(i) \qquad i = 1, S$$

$$P(i) \geq PMIN(i) \qquad i = 1, S$$

$$\sum_{i=1}^{S} P(i) \leq PTOTA$$

OBSERVAÇÕES:

1. Os V(i) obtidos fazendo-se V(1) = 1 e $\frac{V(i)}{V(1)} = \frac{SM(i)}{SM(1)}$, 1 = 2, S. Como conhece-se de antemão os SM(i), i = 1, S, no início do problema teremos todos os (V(i)).

2. Os V(i) não são variáveis de decisão e embora afete o valor da função objetivo, o valor de V(1) assumido não mudará a região viável que depende apenas dos N(i), A(i), E(i) e P(i). Uma variação em V(1), mantidas as relações $V(i)/V(j) = \frac{SM(i)}{SM(j)}$, significaria uma translação do hiperplano tangente à superfície F no ponto de ótimo como mostra a figura a seguir.

Note-se ainda que o problema proposto possui função objetivo não linear em 4s variáveis de decisão sujeitas e 8s + 4 restrições sendo s o número de cursos.

Admitindo-se a possibilidade de serem formados na região em estudo mais de uma centena de tipos diferen -

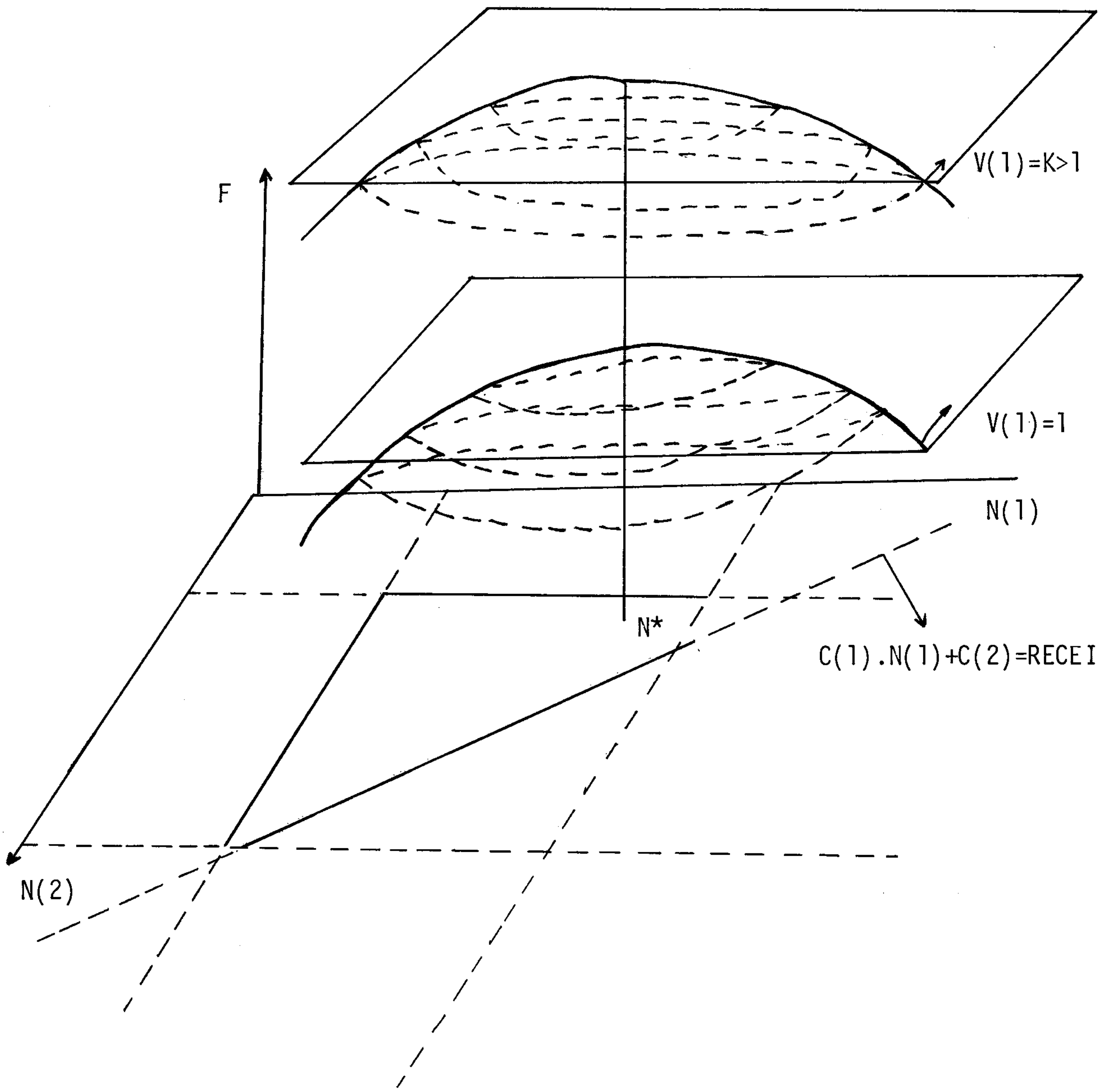


FIGURA 2

tes de profissionais de nível superior, embora aqui apliquemos o modelo a um conjunto de dezoito cursos, vemos que o problema pode atingir um tamanho razoavelmente grande.

Se associarmos a este aspecto uma análise de estrutura do problema, nitidamente multidivisional, somos levados a empregar técnicas de Programação Não Linear para Sistemas de Grande Porte.

Adotando-se a sistemática sugerida em Geoffrion ocuparemo-nos inicialmente com o "Tratamento do Problema" (Problem Manipulation) para em seguida apresentarmos as "Estratégias de Solução" (Solution Strategies). Utilizaremos na primeira fase uma "Partição" para gerar dois sub-problemas mais simples.

Como é comum em rotinas de partição, dividiremos as variáveis em dois sub-conjuntos nos quais fixaremos alternadamente os valores das variáveis correspondentes.

Os recursos ficarão no conjunto W1 e os graduados em W2. Ou seja:

$$W1 = \left\{ \begin{array}{c|l} A(i), E(i), P(i) & AMIN(i) \leq A(i) \leq AMAX(i) \\ i = 1, S & VEMIN(i) \leq E(i) \leq VEMAX(i) \\ & PMIN(i) \leq P(i) \leq PMAX(i) \\ & \sum\limits_{i \varepsilon S} A(i) \leq ATOTA \\ & \sum\limits_{i \varepsilon S} E(i) \leq EQPTO \\ & \sum\limits_{i \varepsilon S} P(i) \leq PTOTA \end{array} \right.$$

$$W2 = \left\{ \begin{array}{c|l} N(i) & NMIN(i) \leq N(i) \leq NMAX(i) \\ & \sum\limits_{i \varepsilon S} C(i) . N(i) \leq RECEI \end{array} \right.$$

Se fixarmos valores de recursos e procurarmos, para estes valores, o máximo da função objetivo em N(i) (i = 1, s) ε W2, ficaríamos com:

PROBLEMA II (Vide Problema I)

$$\underset{N(i)}{\text{Max}}\ F = \sum_{i \varepsilon S} - KK1(i) \ .\ N(i)^2 + KK2(i) \ .\ N(i)$$

s.a.

$$N(i) \leq NMAX(i)$$

$$- N(i) \leq - NMIN(i)$$

$$\sum_{i \varepsilon S} C(i) \ .\ N(i) \leq RECEI$$

onde:

$$KK1(i) = V(i) \ .\ (\frac{K1(i)}{A(i)} + \frac{K3(i)}{E(i)} + \frac{K5(i)}{P(i)}$$

$$KK2(i) = V(i) \ .\ (1 - KK(i))$$

Já ao fixarmos os números de graduados e procurarmos, para estes números, o máximo da função objetivo em A(i), E(i) e P(i) ε W1, ficaríamos com:

PROBLEMA III (Vide Problema I)

$$\text{Max}\ \overline{F} = \sum_{i \varepsilon S} - (\frac{\overline{KK1(i)}}{A(i)} + \frac{\overline{KK2(i)}}{E(i)} + \frac{\overline{KK3(i)}}{P(i)})$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l} A(i) \leq AMAX(i) \\ - A(i) \leq - AMIN(i) \end{array}\right. \quad i \ \varepsilon \ S$$

$$\sum_{i=1}^{s} A(i) \leq ATOTA$$

$$\left.\begin{array}{l} E(i) \leq VEMAX(i) \\ -\,E(i) \leq VEMIN(i) \end{array}\right. \quad i \in S$$

$$\sum_{i=1}^{s} E(i) \leq EQPTO$$

$$P(i) \leq PMAX(i)$$

$$-\,P(i) \leq PMIN(i)$$

$$\sum_{i=1}^{s} P(i) \leq PTOTA$$

onde:

$$\overline{KK1}(i) = N(i)^2 \times V(i) \times K1(i)$$

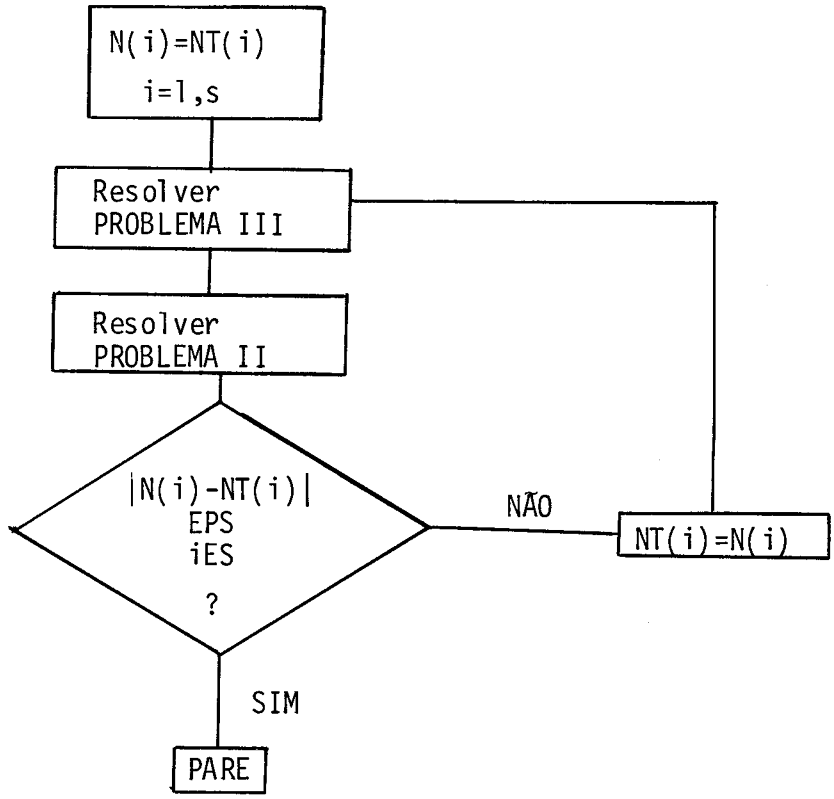
$$\overline{KK2}(i) = N(i)^2 \times V(i) \times K3(i)$$

$$KK3(i) = N(i)^2 \times V(i) \times K5(i)$$

O algoritmo para solução do PROBLEMA I encontra-se na página a seguir.

Vemos inicialmente que o Problema I possui pelo menos uma solução já que, por propriedade de conjuntos compactos, "toda função real e contínua (como nossa função objetivo) de um conjunto limitado e fechado de R^n (como nossa região de busca), atinge seus extremos".

Garantida a existência de pontos desejáveis, falta-nos mostrar que o algoritmo não leva a pontos não desejá



veis. Isto será feito através do Primeiro Teorema de Convergência (Pollack).

Para facilitar façamos:

$$\underset{(s \times 1)}{X} = \begin{vmatrix} N(1) \\ \vdots \\ N(s) \end{vmatrix} \qquad \underset{(3s\times 1)}{Y} = \begin{vmatrix} A(1) \\ \vdots \\ A(s) \\ E(1) \\ \vdots \\ E(s) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(s) \end{vmatrix}$$

Como se sabe o citado teorema estabelece duas condições suficientes de convergências:

- A função avaliação ser uniformemente contínua na região de busca.

- Dado um ponto não desejável $(\bar{x},\bar{y})$, existe um $\delta > 0$ e uma vizinhança V_ε de $(\bar{x},\bar{y})$, tais que para todo ponto pertencente a V_ε tenhamos:

$$F(a(x,y)) > F(x,y) + \delta, \forall (x,y) \in V_\varepsilon$$

A primeira condição fica assegurada, para a nossa função objetivo F, pela compacticidade dos conjuntos W1 e W2 consequentemente do produto cartesiano W1, W2. Na verdade "toda função contínua de um conjunto compacto em R^n em um subconjunto de R^m é uniformemente contínua".

Resta-nos preencher a segunda condição do teorema.

Observando-se que no nosso caso existem duas possíveis regras de busca, soluções dos dois subproblemas, vamos tomar um ponto não desejável genérico $(\bar{x},\bar{y})$ e procurar demonstrar que o algoritmo satisfaz à condição expressa acima com ambas as regras de busca.

Seja, inicialmente y^* a solução de max F $(\bar{x},y)$ $y \in W1$ ou seja, solução do subproblema III para x fixado em $\bar{x}$.

Façamos $F(\bar{x}, y^*) - F(\bar{x}, \bar{y}) = 2\,\delta > 0$ 7

Pela continuidade de F temos:

$$\exists\ B_{\varepsilon_1}(\bar{x}, \bar{y}) \text{ tal que } |F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) \leq \delta/2,$$

$\forall\ (x,y) \in B_{\varepsilon_1}\ (\bar{x},\bar{y})$

$B_{\varepsilon_2}(\bar{x},\ y^*)$ tal que $|F(x,y) - F(\bar{x},\ y^*)| \leq$

$\leq \delta/2,\ \forall\ (x,y) \in B_{\varepsilon_2}\ (\bar{x},\ y^*)$

Seja $(\tilde{x},\tilde{y}) \in B_{\varepsilon}\ (\bar{x},\bar{y})$, onde $\varepsilon = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$.

Apliquemos ao ponto $(\tilde{x},\tilde{y})$ a busca do subproblema III.

Seja $(\tilde{x},y^{**})$ o resultado de $\max\limits_{y \in W1} F(\tilde{x},y)$.

Logo $F(\tilde{x},y^{**}) \geq F(\tilde{x},y^*)$ 8

Mas $(\tilde{x},y^*) \in B_{\varepsilon}\ (\tilde{x},y^*)$ e, sendo F contínua,

$F(\tilde{x},y^*) \geq F(\bar{x},y^*) - \delta/2$ 9

Substituindo 9 em 8 temos:

$F(\tilde{x},y^{**}) \geq F(\bar{x},y^*) - \delta/2$ 10

Substituindo 7 em 10 temos:

$F(\tilde{x},y^{**}) \geq F(\bar{x},\bar{y}) + 2\delta - \delta/2$ 11

Por outro lado sabemos que $(\tilde{x},\tilde{y}) \in B_{\varepsilon}\ (\bar{x},\bar{y})$ e portanto, ainda por continuidade de F:

$F(\bar{x},\bar{y}) \geq F(\tilde{x},\tilde{y}) - \delta/2$ 12

Substituindo 12 em 11, temos finalmente,

$F(\tilde{x},y^{**}) \geq F(\tilde{x},\tilde{y}) + \delta$, o que satisfaz à condição de convergência.

Analogamente mostraríamos que a partir de $(\bar{x},\bar{y})$, genérico não desejável, se fizermos a aplicação da regra de busca do Problema II procurando max $F(x,\bar{y})$ chegaríamos ao resultado

$x_\varepsilon\ w_2$

$$F(x^{**},\tilde{y}) \geq F(\tilde{x},\tilde{y}) + \delta$$

onde

$$x^{**} = \max F(x,\tilde{y}),\ (\tilde{x},\tilde{y})\ \varepsilon\ V_\varepsilon\ (\bar{x},\bar{y})$$

$x_\varepsilon\ w_2$

satisfazendo também a condição do teorema.

Assim sendo, mostramos que o algoritmo converge, desde que possamos a cada passo encontrar soluções para os dois subproblemas.

Vamos detalhar a estratégia de solução para o Problema II.

A função objetivo pode ser escrita na forma:

$$F = \frac{1}{2} N' CN + g' N \qquad \text{onde:}$$

$$\underset{(sxs)}{C} = \begin{bmatrix} -2KK1(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2KK1(s) \end{bmatrix}; \quad \underset{(sx1)}{N} = \begin{bmatrix} N(1) \\ \\ \\ N(s) \end{bmatrix}; \quad g' = [KK2(1) \dots KK2(s)]$$

A matriz diagonal C, com todos os KK1(i) 0 e positivos, é evidentemente <u>negativa definida</u> e consequentemente F é <u>estritamente concavo</u>.

Este fato possibilita aplicação de algoritmos eficientes como o de Wolf (reduzido) e outros, a maioria dos quais utiliza, de uma maneira ou de outra, resultados de Programação Linear.

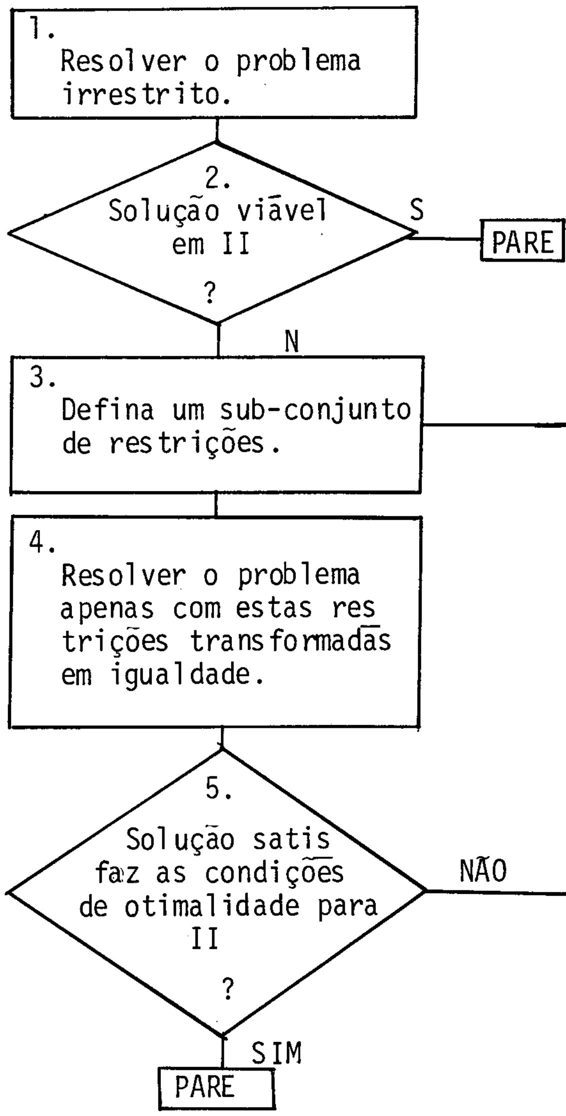
Neste trabalho adotaremos o método proposto por Van de Panne que se limita a casos, como o nosso, de concavidade estrita e não aplica o Simplex.

O procedimento consiste em resolver sucessivos problemas em que se desprezam algumas restrições e consideram-se outras como igualdades.

Um fluxo resumido encontra-se na página a seguir.

Ao partir-se de um problema em que se desprezam restrições a serem depois convenientemente incluídas ou suprimidas, estamos adotando um procedimento semelhante à clássica estratégia de RELAXAÇÃO.

Por outro lado ao transformarmos em igualdade as desigualdades originais estaremos na maioria das vezes definindo valores para as variáveis, a exemplo da estratégia de RESTRIÇÃO, complementar da RELAXAÇÃO.



A convergência fica garantida por termos um número finito de subconjunto de restrições a serem examinadas. Não obstante é necessário cuidado para não examinar-se mais de uma vez o mesmo subconjunto e ter capacidade de identificar a inexistência de solução.

Para melhor compreensão do algoritmo vamos detalhar as iterações.

Reescrevamos o PROBLEMA II.

$$\max_{N(i)} F = \sum_{i \varepsilon S} - KK1(i) \cdot N(i)^2 + KK2(i) \cdot N(i)$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l} N(i) \leq NMAX(i) \\ - N(i) \leq - NMIN(i) \end{array}\right. \quad i \varepsilon S$$

$$\sum_{i \varepsilon S} C(i) \cdot N(i) \leq RECEI$$

Passo 1.

No ótimo irrestrito $\delta F/\delta N(i) = 0$, $i \varepsilon S$.

$$\text{Sendo} \quad N^* = \begin{bmatrix} N^*(1) \\ \vdots \\ N^*(s) \end{bmatrix} \quad , N^*(i) = KK2(i)/2 \ .$$

KK1 (i).

Passo 2.

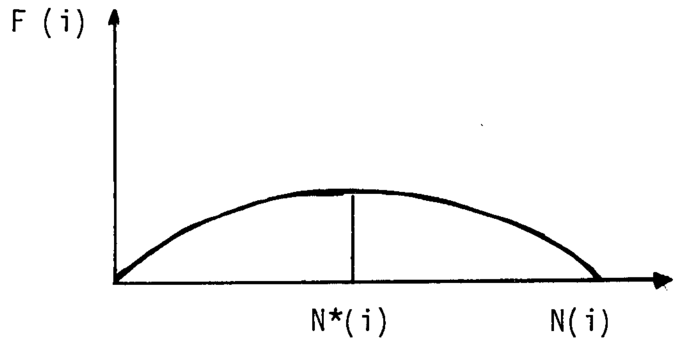
Se todas as restriçoes do PROBLEMA II forem satisfeitas estamos no ótimo.

Caso apenas a restrição da receita for violada vai-se direto ao passo 3.

Mas se algumas restrições de máximo e mínimo forem violadas deve-se continuar o passo 2, observando-se um detalhe obtido pelo tratamento de SEPARAÇÃO.

$$F = \sum_{i=1}^{s} - KK1(i) \; . \; N(i)^2 + KK2(i)$$

A forma geral das parcelas componentes de F está esquematizada a seguir.

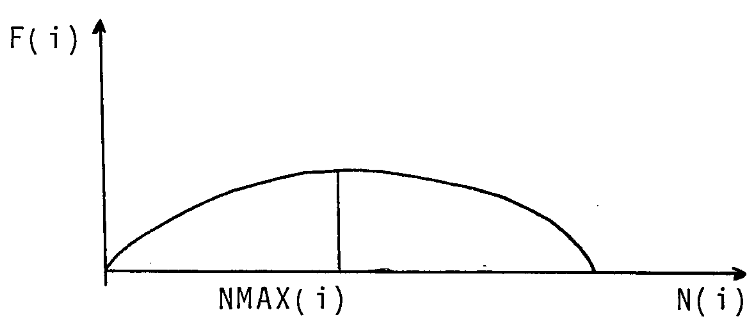


Na hipótese em análise um dos dois conjuntos abaixo descritos, é não vazio.

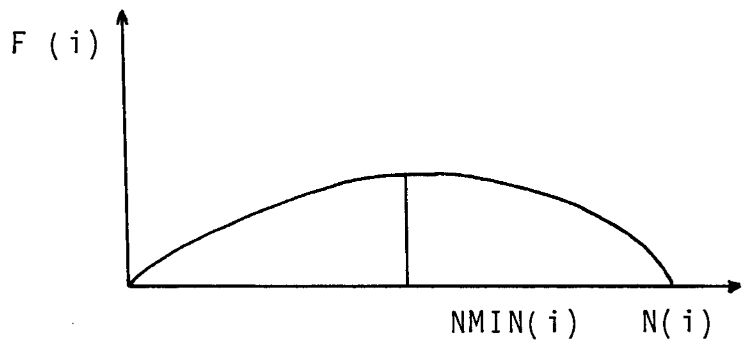
$$T = i \in S \; \{N(i)^* > NMAX(i)\}$$

$$V = i \in S \; \{N(i)^* < NMIN(i)\}$$

Em T ocorre:



Em V ocorre:



Antes de passar-se ao passo 3 testa-se a viabilidade da solução a seguir:

$N(i) = KK2(i)/2 \,.\, KK1(i)$, $i \in S - V - T$

$N(i) = NMAX(i)$, $i \in T$

$N(i) = NMIN(i)$, $i \in V$

Se a restrição da receita for satisfeita , para-se.

A concavidade de f garante que

para $i \in T$, $f(NMAX(i)) > f(N(i))$, $\forall\, N(i) <$

$< NMAX(i)$

para $i \in V$, $f(NMIN(i)) > f(N(i))$, $\forall\, N(i) >$

$> NMIN(i)$

Logo estamos no ótimo pois a solução é viável e é impossível melhorá-la.

Caso contrário, ou seja, $\sum_{i=1}^{S} C(i) \,.\, N^*(i) >$ RECEI, passa-se ao passo 3.

Passo 3.

Se chegamos aqui é porque as soluções encontradas infringiam a restrição de receita.

Passamos então a resolver:

$$\underset{N(i)}{\text{Max}} \quad F = \sum_{i=1}^{s} - KK1(i) \;.\; N(i)^2 + KK2(i) \;.\; N(i)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{s} C(i) \;.\; N(i) = RECEI$$

Passo 4.

Para resolver o problema acima aplica-se o fato de que por ser a função objetivo concava e o conjunto de restrições convexo, as condições de Kuhn-Tucker, abaixo relacionadas, são necessárias e suficientes.

$$A. \frac{\delta F}{\delta N(i)} \quad (N^*(i) + ALAMD.\ C(i)) = 0 \;,\; i \in S$$

$$B. \sum_{i=1}^{s} C(i) \;.\; N(i) = RECEI$$

$$C.\ ALAMD.\ \left(\sum_{i=1}^{s} C(i) \;.\; N(i) - RECEI\right) = 0$$

$$D.\ ALAMD. \leq 0$$

As condições A e B estabelecem um sistema de equações lineares em s + 1 incógnitas e s + 1 equações indepen dentes.

O sistema a ser resolvido é:

$$A \begin{cases} 2KK1(1).N(1) = ALAMD.C(1) + KK2(1) \\ 2KK1(2).N(2) = ALAMD.C(2) + KK2(2) \\ 2KK1(s).N(s) = ALAMD.C(s).KK2(s) \end{cases}$$

$$B \{ C(1).N(1) + C(2).N(2) \ldots + C(s).N(s) = RECEI$$

Multiplicando-se os dois membros de cada i gualdade do primeiro tipo por - C(i)/2KK1(i) e somando-se à última fica-se com:

$$ALAMD.\left(\sum_{i=1}^{s} C(i)^2/2KK1(i)\right) + \sum_{i=1}^{s} C(i).KK2(i)/2.KK1(i) =$$

$$= RECEI$$

donde

$$ALAMD. = \frac{\left(RECEI - \sum_{i=1}^{s} (C(i).KK2(i)/2KK1(i)\right)}{\sum_{i=1}^{s} (C(i)^2/2.KK1(i))}$$

e

$$N^*(i) = KK2(i)/2.KK1(i) + ALAMD.\ C(i)$$

A condição de complementaridade, (C), será sempre satisfeita pois só existirão restrições de igualdade.

Resta-nos verificar a condição D.

Na realidade a negatividade dos multiplicadores é o teste final na solução obtida para o sistema gerado em A e B.

Se todos forem negativos encontramos uma solução ótima para um problema reduzido e podemos seguir ao Passo 5 para testá-la no problema total.

Caso haja um ou mais multiplicadores positivos "relaxam-se" as restrições correspondentes e volta-se a resolver o sistema.

Passo 5.

Ao chegar-se neste passo conta-se com uma solução ótima para um problema em que foram desprezadas algumas restrições.

Testa-se a solução contra estas restrições.

Se as restrições forem todas satisfeitas, para-se pois estamos no ótimo, já que as condições de Kuhn-Tucker para o PROBLEMA II são obedecidas com os multiplicadores das restrições inativas iguais a zero.

Se pelo menos uma restrição for violada, volta-se ao passo 3.

Passo 3.

Redefina o subconjunto T (vide passo 2).

Vamos fixar $N(i) = NMAX(i)$, $i \in T$.

Fica-se com o problema:

$$\underset{N(i)}{\text{Max}} \ F = \sum_{i=1}^{s} - KK1(i) \cdot N(i)^2 + KK2(i) \cdot N(i)$$

s.a.

$$N(i) = NMAX(i),\ i \in T$$

$$\sum_{i=1}^{s} C(i) \,.\, N(i) = RECEI$$

Note-se que a última restrição só existirá caso tenhamos encontrado ALAMD negativo no passo 4 da itera - ção anterior.

Passo 4.

Aplicando-se Kuhn-Tucker chega-se a um novo sistema linear em s + t + 1 incógnitas e s + t + 1 equações independentes, sendo t o cardinal do conjunto T.

O sistema seria:

$$A \begin{cases} -2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.C(i)+ALAMD(i)=0 \\ \quad i \in T \\ -2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.C(i) = 0 \\ \quad i \in S - T \end{cases}$$

$$B \begin{cases} N(i) = NMAX(i),\ i \in T \\ \sum_{i=1}^{s} C(i) \,.\, N(i) = RECEI \end{cases}$$

Observa-se que se substituirmos na última restrição os valores conhecidos de N(i), para i $\in$ T, e associarmos com as equações do tipo A para i $\in$ S - T ficaremos com um sub - sistema em s-t incógnitas e s-t lineares independentes.

$$-2KK1(i).N(i)+KK2(i) + ALAMD.C(i)= 0 \quad i \in S-T$$

$$\sum_{i \in S-T} C(i).N(i) = RECEI - \sum_{i \in T} C(i).N(i)=RECC$$

Aplicando-se procedimento idêntico ao da iteração anterior chega-se a:

$$ALAMD = (RECC - \sum_{i \in S-T} C(i).KK2(i)/2.KK1(i))/$$

$$\sum_{i \in S-T} C(i)^2/2.KK1(i)$$

$$N(i)=KK2(i)/2.KK1(i)+ALAMD.C(i)/2.KK1(i), i \in S-T$$

$$N(i)=NMAX(i), \ i \in T$$

$$ALAM(i)=2.KK1(i).N(i)-KK2(i)-ALAMD.C(i), \ i \in T$$

A condição C, de complementaridade, será sempre satisfeita pois só existirão restrições de igualdade.

Como na iteração anterior, a condição D é testada.

Se algum dos multiplicadores (ALAMD, ALAM(i), i $\in$ T) for positivo "relaxa-se" a restrição correspondente e resolve-se o novo problema. Caso todos os t + 1 multiplicadores sejam negativos vamos ao passo 5.

Pelas mesmas razões apresentada no passo 5 da iteração anterior, se todas as restrições do PROBLEMA II foram satisfeitas, para-se pois estamos no ótimo.

Se pelo menos uma restrição for violada

volta-se ao passo 3.

Passo 3.

Se ainda existirem restrições do tipo $N(i) \leq NMAX(i)$ sendo violada repete-se o procedimento da última iteração.

Caso só estejam sendo violadas as restri - ções de mínimo, definimos o conjunto V.

$$V = \{i / N(i) < NMIN(i)\}$$

Vamos fixar $N(i) = NMIN(i), \forall\ i \varepsilon V$ além de $N(i) = NMAX(i), \forall\ i \varepsilon T$.

Fica-se com o problema:

$$\text{Max } F = \sum_{i \varepsilon s} - KK1(i).N(i)^2 + KK2(i) \,.\, N(i)$$

s.a.

$$N(i) = NMAX(i), \quad i \varepsilon T$$

$$N(i) = NMIN(i), \quad i \varepsilon V$$

$$\sum_{i \varepsilon s} C(i) \,.\, N(i) = RECEI$$

Passo 4.

Aplicando-se Kuhn-Tucker chega-se ao sistema abaixo em s + t + v + 1 incógnitas e s + t + v + 1 equações lineares independentes, sendo v o cardinal do conjunto V.

$$A \begin{cases} -2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.((i)+ALAM(i)=0, & i\varepsilon T \\ -2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.((i)-ALAM(i)=0, & i\varepsilon V \\ -2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.((i) = 0, & i\varepsilon S\text{-}V\text{-}V\text{-}T \end{cases}$$

$$B \begin{cases} N(i) = NMAX(i), & i \ \varepsilon \ T \\ N(i) = NMIN(i), & i \ \varepsilon \ V \\ \sum\limits_{i\varepsilon S} C(i) \ . \ N(i) = RECEI & \end{cases}$$

Com procedimento análogo ao do passo 4 da última iteração chega-se a um subsistema em s-v-t incógnitas e s-v-t equações. Ou seja,

$$-2KK1(i).N(i)+KK2(i)+ALAMD.C(i) = 0, \quad i\varepsilon S\text{-}T\text{-}V$$

$$\sum_{i\varepsilon S-T-V} C(i).N(i)=RECEI - \sum_{i\varepsilon TUV} C(i) = RECC$$

logo,

$$ALAMD=(RECC- \sum_{i\varepsilon S-T-V} C(i).KK2(i)/2.KK1(i))/ \sum_{i\varepsilon S-T-V} C(i)^2/2.KK1(i)$$

$$N(i)=KK2(i)/2.KK1(i)+ALAMD.C(i)/2.KK1(i), \quad i\varepsilon S\text{-}T\text{-}V$$

$$N(i)=NMAX(i), \quad i \ \varepsilon \ T$$

$$N(i)=NMIN(i), \quad i \ \varepsilon \ V$$

$$ALAM(i)=2.KK1(i).N(i)-KK2(i)-ALAMD.C(i), \quad i \ \varepsilon \ T$$

ALAM(i)=KK2(i)-2.KK1(i).N(i)+ALAMD.C(i), $i \in V$

Aqui também a condição C, de complementaridade, satisfeita.

Repete-se os testes no sinal dos multiplicadores, "relaxando-se" as restrições cujos multiplicadores tenham resultado positivo.

Caso todos os t+v+1 multiplicadores sejam negativos vamos ao passo 5.

Passo 5.

Se todas as restrições do PROBLEMA II forem satisfeitas, para-se pois estamos no ótimo.

Caso pelo menos uma restrição for violada , volta-se ao passo 3.

Ao final desta rotina, se existir solução , nós a teremos encontrado.

A inexistência de solução configura o caso em que

$$\sum_{i \in S} C(i) \;.\; NMIN(i) > RECEI.$$

Isto é testado antes de iniciarmos a rotina que acabamos de detalhar.

Reescrevamos o PROBLEMA III.

$$\underset{A(i),E(i),P(i)}{\text{Max } \overline{F}} = \sum_{i \in S} -\left(\frac{\overline{KK1(i)}}{A(i)} + \frac{\overline{KK2(i)}}{E(i)} + \frac{\overline{KK3(i)}}{P(i)}\right.$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l} A(i) \leq AMAX(i) \\ -A(i) \leq -AMIN(i) \end{array}\right\} \quad i \in S$$

$$\sum_{i \in S} A(i) \leq ATOTA$$

$$\left.\begin{array}{l} E(i) \leq VEMAX(i) \\ -E(i) \leq -VEMIN(i) \end{array}\right\} \quad i \in S$$

$$\sum_{i \in S} E(i) \leq EQPTO$$

$$\left.\begin{array}{l} P(i) \leq PMAX(i) \\ -P(i) \leq -PMIN(i) \end{array}\right\} \quad i \in S$$

$$\sum_{i \in S} P(i) \leq PTOTA$$

Como se vê o problema é passível de SEPARAÇÃO completa já que não há restrição alguma ligando diferentes tipos de variáveis.

Assim resolveríamos independentemente três subproblemas.

III.1. $$\underset{A(i)}{\text{Max}}\ \overline{F}_1 = \sum_{i \in S} -\frac{KK1(i)}{A(i)}$$

s.a.

$$A(i) \leq AMAX(i)$$

$$-A(i) \leq -AMIN(i)$$

$$\sum_{i=1}^{S} A(i) \leq ATOTA$$

III.2. $$\underset{E(i)}{\text{Max}} \ \overline{F}_2 = \sum_{i\varepsilon S} - \frac{\overline{KK2}(i)}{E(i)}$$

s.a.

$$E(i) \leq VEMAX(i)$$

$$-E(i) \leq -\ VEMIN(i)$$

$$\sum_{i\varepsilon S} E(i) \leq EQPTO$$

III.3. $$\underset{P(i)}{\text{Max}} \ \overline{F}_3 = \sum_{i\varepsilon S} - \frac{\overline{KK3}(i)}{P(i)}$$

s.a.

$$P(i) \leq PMAX(i)$$

$$-P(i) \leq -\ PMIN(i)$$

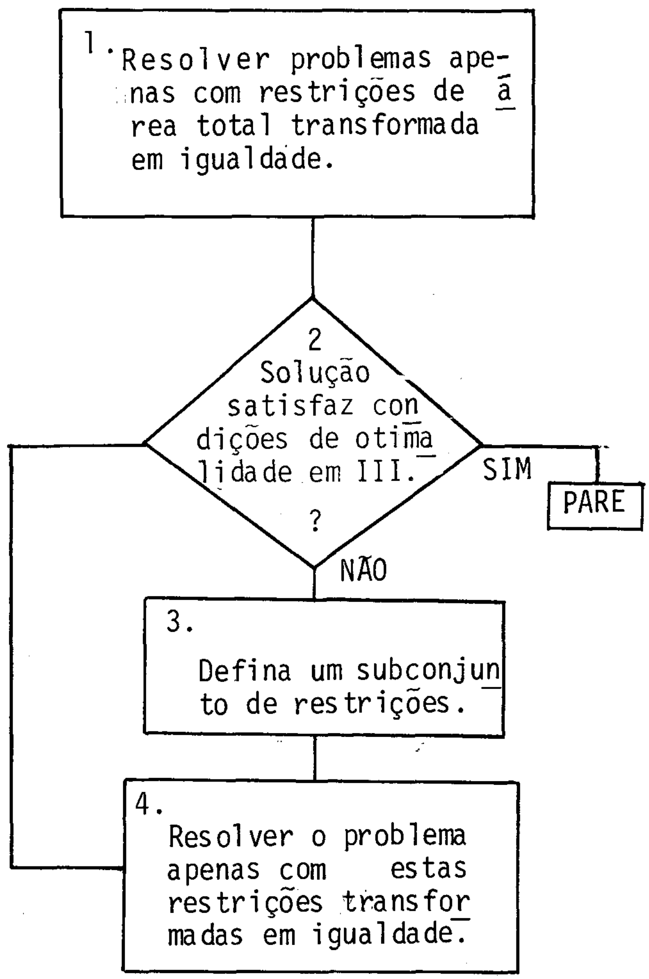
$$\sum_{i\varepsilon S} P(i) \leq PTOTA$$

As soluções ótimas destes três subproblemas, comporão a solução ótima do PROBLEMA III.

A estratégia adotada para os três novos problemas é semelhante à do PROBLEMA II. Inicia-se "relaxando" algumas restrições e obrigando a igualdade de outras até que, após convenientes supressões e inclusões encontre-se uma solução para o subproblema que satisfaça às condições de otimalidade para o PROBLEMA III.

Note-se que a função objetivo é concava e o conjunto de restrições é convexo o que nos garante serem as condições de Kuhn-Tucker necessárias e suficientes.

Apresenta-se a seguir um fluxo resumido do procedimento adotado.



As mesmas observações feitas quando da apresentação de fluxo semelhante para o PROBLEMA II são válidas neste novo caso.

Reescrevamos o PROBLEMA III.1.

$$\max_{A(i)} \overline{F}_1 = \sum_{i \in S} - \frac{\overline{KK1(i)}}{A(i)}$$

s.a.

$$A(i) \leq AMAX(i)$$

$$-A(i) \leq - AMIN(i)$$

$$\sum_{i=1}^{S} A(i) \leq ATOTA$$

Para melhor compreensão do algoritmo vamos detalhar as iterações.

Passo 1.

Trata-se de resolver:

$$\max_{A(i)} \overline{F}_1 = \sum_{i \in S} - \frac{KK1(i)}{A(i)}$$

s.a.

$$\sum_{i \in S} A(i) = ATOTA$$

A razão básica de termos selecionado inicialmente a restrição de área total para teste de solução é que na realidade esta restrição usualmente será ativa pois cada parcela de $\overline{F}_1$ cresce com o aumento de área e assim sendo a única possibilidade da restrição de área total ser inativa no ótimo ocorre se $\sum_{i \in S} AMAX(i) < ATOTA$, isto é preliminarmente testado. Se for o caso a solução é trivial.

$A^*(i) = AMAX(i),\ i \in S$

Aplicando-se Kuhn-Tucker,

A. $\nabla \overline{F}_1 + ALAM = 0$

ou

$$\frac{\delta\, \overline{F}_1}{\delta A(i)} + ALAM = 0,$$

$$\frac{KK1(i)}{A(i)^2} + ALAM = 0,\ i = 1, s$$

B. $\sum_{i \in S} A(i) = ATOTA$

C. $ALAM.\ (\sum_{i \in S} A(i) - ATOTA) = 0$

D. $ALAM \leq 0$

As condições A e B estabelecem um sistema de equações em s+1 incōgnitas e s+1 equações independetes.

O sistema a ser resolvido ē:

$$A \begin{cases} \dfrac{\overline{KKT}(i)}{A(1)^2} & & & + ALAM = 0 \\ & \dfrac{\overline{KK}(2)}{A(2)^2} & & + ALAM = 0 \\ & & \dfrac{KK(s)}{A(s)^2} & + ALAM = 0 \end{cases}$$

B $\quad A(1) + A(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + A(s) = ATOTA$

Cada equação do tipo A leva a:

$$A(i) = \sqrt{\frac{\overline{KK1}(i)}{-ALAM}}$$

Só existirá solução se ALAM for negativo o que não contradiz a condição D.

Substituindo-se a raiz positiva na última restrição fica-se:

$$\sqrt{\frac{\overline{KK}(1(1)}{-ALAM}} + \sqrt{\frac{\overline{KK2}(2)}{-ALAM}} + \ldots + \sqrt{\frac{\overline{KK1}(s)}{-ALAM}} = ATOTA$$

logo

$$ALAM = - \frac{\left(\sum_{i=1}^{s} \overline{KK1}(i)^2\right)}{ATOTA^2}$$

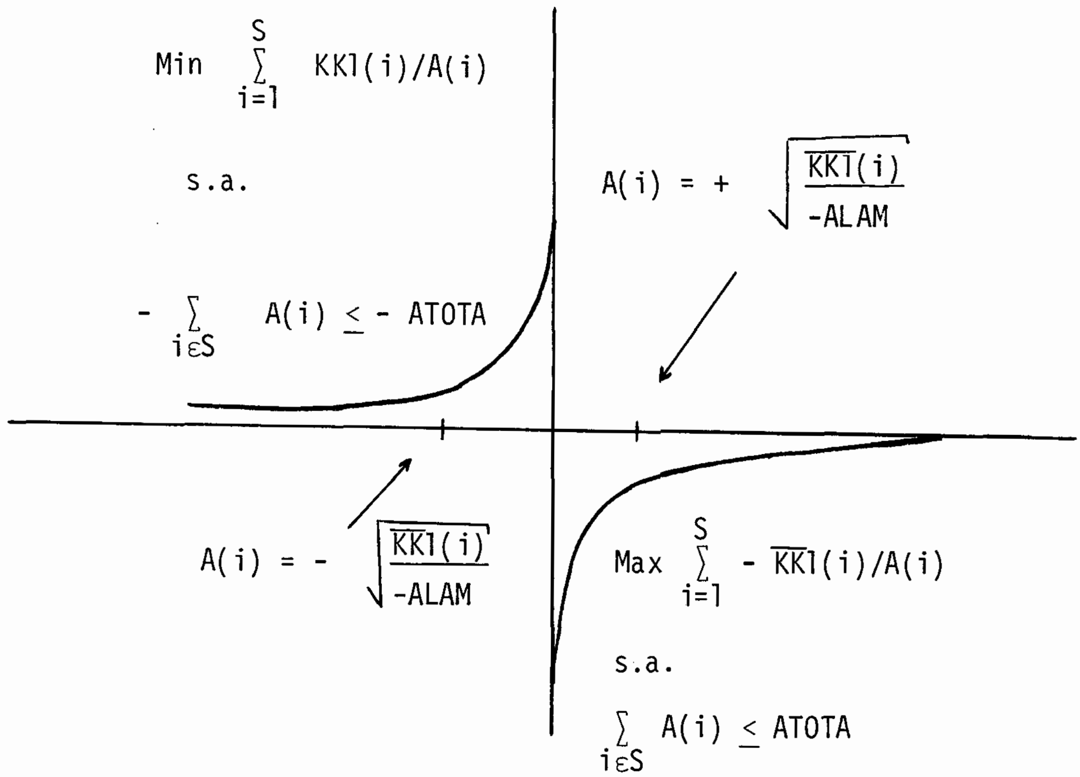
e

$$A(i) = \sqrt{\frac{\overline{KK1}(i)}{-ALAM}}, \quad i = 1,s$$

Como só existe restrição igualdade a condição C fica automaticamente satisfeita.

Pela expressão de ALAM vê-se que a condição D será sempre satisfeita pois ALAM é negativo para quaisquer valores de $\overline{KK1}(i)$ e ATOTA, o que vem confirmar a idéia de que sendo cada parcela de $\overline{F}_1$ crescente com A(i) no ponto de máximo $\overline{F}_1$ a restrição de área total, para o problema acima em que ainda não se considera restrições individuais, (A(i) $\leq$ AMAX(i)) se rã ativa.

A raiz negativa desprezada seria a solução de mínimo para um problema simétrico, como esquematizado a seguir.



Note-se que se adotarmos referido procedimento para o problema de minimização chega-se ao mesmo ALAM pois fazermos $- \sum_{i\varepsilon S} A(i) = - ATOTA$, é idêntico à $\sum_{i\varepsilon S} A(i) = ATOTA$.

Passo 2.

Se a solução encontrada for viável no PROBLEMA III.1. para-se pois estamos no ótimo já que se acrescentando multiplicadores (ALX(i)) nulos para as restrições inativas as condições de Kuhn-Tucker são obedecidas.

Passo 3.

Caso seja inviável definamos:

$$T = \{i \in S / A(i) > AMAX(i)\}$$

Observa-se que como AMAX(i) e AMIN(i) dependem de N(i) (vide Modelo Matemático), seus valores são calculados a cada nova resolução do PROBLEMA III.1.

Fixamos primeiro todas variáveis que ultrapassaram o máximo.

Passamos então a resolver:

$$\underset{A(i)}{\text{Max}} \sum_{i \in S} - \overline{KK1}(i)/A(i)$$

s.a.

$$\sum_{i \in S} A(i) = ATOTA$$

$$A(i) = AMAX(i), \; i \in T$$

Passo 4.

Aplicando-se Kuhn-Tucker:

$$A - \begin{cases} \dfrac{\overline{KK1}(i)}{A(i)^2} + ALAM = 0, \; \forall i \in S - T \\[2ex] \dfrac{KK1(i)}{A(i)^2} + ALAM + ALX(i) = 0, \; \forall \; i \in T \end{cases}$$

$$B - \begin{cases} A(i) = AMAX(i), \; \forall \; i \in T \\[1ex] \sum_{i \in S} A(i) = ATOTA \end{cases}$$

De onde tira-se o subsistema abaixo:

$$\frac{\overline{KK1(i)}}{A(i)^2} + ALAM = 0, \forall\ i \in S - T$$

$$\sum_{i \in S-T} A(i) = ATOTA - \sum_{i \in T} AMAX(i) = ATT$$

Logo,

$$ALAM = - \frac{\left(\sum_{i \in S-T} \overline{KK1}(i)\right)^2}{ATT^2}$$

$$A(i) = + \sqrt{\frac{KK1(i)}{-\ ALAM}}, \quad \forall\ i \in S-T$$

$$A(i) = AMAX(i), \ i \in T$$

$$ALX(i) = -\ ALAM - KK1(i)/A(i)^2, \ i \in T$$

A condição de complementaridade será evidentemente sempre satisfeita.

A condição D, de não positividade dos multiplicadores, é também sempre satisfeita para ALAM. Resta-nos testar se todos os ALX(i) são negativos.

Caso afirmativo voltamos ao passo 2. Caso pelo menos um dos ALX(i) seja positivo, "relaxa-se" a restrição correspondente e volta-se a calcular o sistema do passo 4.

Passo 2.

São testadas todas as restrições do PROBLEMA III.1. se forem satisfeitas, para-se. Senão continue.

Passo 3.

Se persistirem existindo restrições do tipo $A(i) \leq AMAX(i)$ sendo violadas redefine-se o conjunto T da iteração anterior e repete-se o procedimento descrito.

Caso existam violações de restrições de mínimo definimos

$$V = \{i \in S/A(i) < AMIN(i)\}$$

e redefinimos T. Passamos então a resolver:

$$\underset{A(i)}{\text{Max}} \sum_{i \in S} - \overline{KK1}(i)/A(i)$$

s.a.

$$\sum_{i \in S} A(i) = ATOTA$$

$$A(i) = AMAX(i), \; i \in T$$

$$A(i) = AMIN(i), \; i \in V$$

Passo 4.

Aplicando-se Kuhn-Tucker,

$$A \begin{cases} \dfrac{\overline{KK}(i)}{A(i)^2} + ALAM = 0 \;, \; i \in S-T-V \\[2ex] \dfrac{KK1(i)}{A(i)^2} + ALAM + ALX(i) = 0, \; i \in T \\[2ex] \dfrac{KK1(i)}{A(i)^2} + ALAM - ALX(i) = 0, \; i \in V \end{cases}$$

$$B \begin{cases} A(i) = AMAX(i), \ i \in T \\ A(i) = AMIN(i), \ i \in V \\ \sum_{i \in S} A(i) = ATOTA \end{cases}$$

De onde tira-se o subsistema abaixo:

$$\frac{KK1(i)}{A(i)^2} + ALAM = 0, \ i \in S\text{-}T\text{-}V$$

$$\sum_{i \in S-T-V} A(i) = ATOTA - \sum_{i \in T} AMAX(i) - \sum_{i \in V} AMIN(i) = ATT$$

Logo,

$$ALAM = - \frac{\left(\sum_{i \in S-T-V} \overline{KK1(i)} \right)^2}{ATT^2}$$

$$A(i) = + \sqrt{\frac{\overline{KK1(i)}}{-ALAM}} \quad i \in S\text{-}T\text{-}V$$

$$A(i) = AMAX(i), \ i \in T$$

$$A(i) = AMIN(i), \ i \in V$$

$$ALX(i) = - ALAM - KK1(i)/A(i)^2, \ i \in T$$

$$ALX(i) = ALAM + KK1(i)/A(i)^2, \ i \in V$$

Como a condição C é sempre satisfeita, resta-nos testar a condição D para os ALX(i), $i \in V \cup T$.

Se todos os ALX(i) são negativos vamos ao passo 2. Caso pelo menos um deles for positivo, "relaxa-se" a restrição correspondente e volta-se a calcular o sistema do passo 4.

Passo 2.

São novamente testadas todas as restrições do PROBLEMA III.1. Se persistirem restrições sendo violadas, vamos ao passo 3.

Caso estejam sendo obedecidas todas as restrições então estamos no ótimo pois com multiplicadores nulos para as restrições não ativas, as condições de Kuhn-Tucker para o PROBLEMA III.1. são satisfeitas.

A inexistência de solução para o PROBLEMA III.1. ocorre se $\sum_{i \varepsilon S}$ AMIN(i) > ATOTA. Isto é testado preliminarmente. Assim o procedimento que acabamos de descrever nos leva fatalmente a solução ótima do PROBLEMA III.1.

Analogamente resolve-se III.2. e III.3., de modo a compormos finalmente a solução do PROBLEMA III que junto com a solução do PROBLEMA II, nos levam à solução do PROBLEMA I, conforme indicado no fluxo.

A solução encontrada será fracionária, o que não tem sentido físico para número de graduados, AN(i).

Vamos então proceder à descoberta de uma "solução" com os AN(i) inteiros.

Chamamos [AN*(i)] a parte inteira de AN*(i).

Procuraremos saber para que cursos deve-se fazer:

$$\overline{AN}^*(i) = [AN^*(i)] + 1$$

ou

$\overline{AN}^*(i) = [AN^*(i)]$.

sendo

$\overline{AN}^*(i)$, a "solução" inteira.

Fixando-se inicialmente $\overline{AN}^*(i)$, $\forall$ $i \varepsilon S$ teremos que decidir que cursos devem ter o número de graduados aumentado de uma unidade de modo a continuar-se com uma solução viável e tal que maximize a função objetivo F.

Ao resolver o problema vamos linearizar a função objetivo nas imediação de cada AN*(i).

Seja,

$$D = \frac{\delta F(AN^*(i))}{\delta AN(i)} = \begin{vmatrix} D(1) \\ \vdots \\ D(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\delta F}{AN(1)} (AN^*(1)) \\ \vdots \\ \frac{\delta F}{\delta AN(s)} (AN^*(s)) \end{vmatrix}$$

$$D(i) = - 2.KK1(i).[AN^*(i)] + KK2(i)$$

A função objetivo linearizada seria:

$$F' = \sum_{i=1} D(i).X(i)$$

Sendo $X((i)) = 1$ quando $\overline{AN}^*(i) = [AN^*(i)] + 1$ e $X(i) = 0$ quando $\overline{AN}^*(i) = [AN^*(i)]$.

A restrição de receita ficaria:

$$\sum_{i=1}^{S} C(i).X(i) \leq RECEI - \sum_{i=1}^{S} AN^*(i).C(i) = RSS$$

Nosso problema seria então:

PROBLEMA IV

$$\operatorname*{Max}_{X(i)} \sum_{i \varepsilon S} D(i).X(i)$$

s.a.

$$\sum_{i \varepsilon S} C(i) \, . \, X(i) \leq RSS$$

$$X(i) \varepsilon \{0,1\}$$

Como todos os C(i) são positivos estamos diante do clássico "KNAPSACK PROBLEM" para o qual existem muitos algoritmos eficientes.

Aproveitando-se do fato de serem inteiros os C(i), i ε S, vamos utilizar o algoritmo primal viável de YOUNG (Maculan[12]), que só se aplica a casos em que a matriz de coeficientes das restrições é toda inteira.

Trata-se de um método de corte em que se evita a cada pivoteamento do Simplex, encontrar resultados fracionários através de um corte aplicado sobre a linha do "pivot" descoberta pelo método tradicional (fracionário).

Seja esta linha

$$X(M) = b(M) - \sum_{i \varepsilon J} a(i).X(i), \; J = \begin{cases} \text{variáveis} \\ \text{não básicas} \end{cases}$$

O corte seria:

$$s = \frac{b(i)}{a(k)} - \sum_{i \varepsilon J} \frac{a(i)}{a(k)} \cdot X(i)$$

Sendo K a coluna referente à variável selecionada para entrar na base.

Ao invés de pivotearmos sobre a linha m, vamos pivotear no corte, o que nos garante um "pivot" unitário e consequentemente a manutenção dos resultados inteiros.

O correspondente problema desprezando-se as restrições de inteiro seria:

PROBLEMA IV.1.

$$\text{Max } F' \sum_{i=1}^{S} - D(i) \cdot (-X(i))$$

s.a.

$$\sum_{i=1} C(i) \cdot X(i) + Yo = RSS$$

$$X(i) + y(i) = 1, \forall i \in S$$

$$X(i), y(i) \geq 0$$

Utilizaremos o método primal viável para encontrarmos os "pivot" do Simplex aplicado ao Problema IV.1.

Caso o "pivot" encontrado já seja unitário continuamos o procedimento normal do SIMPLEX.

Caso encontremos como "pivot" o elemento aik $\neq$ 1, aplicamos o corte descrito anteriormente.

$$\text{Encontrado } X = \begin{vmatrix} X^*(1) \\ \vdots \\ X^*(s) \end{vmatrix}, \quad X^*(i) \in \{0,1\}, \; i \in S$$

a "solução" inteira do PROBLEMA I seria então:

$$\overline{AN}^*(i) = [AN^*(i)] + X^*(i)$$

Observa-se que antes de iniciarmos a solução do Problema IV, alguns testes são feitos de modo a reduzi-lo.

Assim fixamos $X^*(i) = 0$ para todos os i que estiverem em algum dos dois conjuntos.

$$\{i/D(i) < 0\}$$

$$\{i/[N^*(i)] + 1 > NMAX(i)\}$$

E fixamos $X^*(i) = 1$ para os i do conjunto a baixo:

$$\{i/[N^*(i)] < NMIN(i)\}$$

III. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Foi feita uma aplicação de método apresentado para uma região em que se oferecem 18 (dezoito) cursos superiores diferentes.

Como referido anteriormente, alguns dos parâmetros utilizados pelo modelo foram estimados a partir de conversa com professores.

Outros dados, como cursos por graduados(C(i), foram levantados a partir de dados reais existentes na FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DO MARANHÃO.

Na oportunidade de definirmos neste trabalho que instituições deveriam ser tomadas como paradigma de cada curso, os dados que viriam deste levantamento foram aqui estimados subjetivamente.

Também a realização de uma pesquisa do mercado de trabalho regional foge aos nossos objetivos mediatos e portanto as informações relativas a mercado de trabalho foram por nós simuladas.

Foi utilizado um sistema IBM-1130 de configuração mínima.

A função objetivo passou, logo no primeiro passo, do valor inicial de 239.7407 para 382.256 e no segundo passo atingiu 387,6937. No décimo passo já houve uma variação muito menor com a função objetivo passando de 399,293 para 400,521.

Como regra de parada para a solução não in teira utilizou-se a própria função objetivo. Quando a variação de um passo para o outro foi de 0,001 (403,862 para 403,863) . Parou-se e entrou-se no algoritmo de busca da "solução" inteira.

Observa-se que após encontrada a primeira "solução" inteira para o número de alunos, voltou-se a otimizar os recursos e encontrou-se nova solução real. Quando procurou-se a nova "solução" inteira, encontrou-se exatamente a mesma solução já atingida anteriormente, o que reforça a regra de parada.

O sistema consiste de 03 (três) programas "linkados".

- Programa OTM que resolve o problema II (Otimização de Alunos).

- Programa A que resolve o problema III(Otimização de Recursos).

- Programa INT que encontra a solução inteira para número de alunos.

IV. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Sobre o resultado do dimensionamento do número de graduados para cada curso, $N^*(i)$, cabem algumas análises.

Existem três possibilidades para cada valor de $N^*(i)$ encontrado:

a) $N^*(i) = NMIN(i)$

b) $NMIN(i) < N^*(i) < NMAX(i)$

c) $N^*(i) = NMAX(i)$

Em qualquer um dos três casos deparamos, ao comparar $N^*(i)$ com a situação real da IES, $\overline{N}(i)$, com duas possibilidades:

1) $N^*(i) \leq \overline{N}(i)$

2) $N^*(i) > \overline{N}(i)$

Analisemos as alternativas combinadas.

a1) $N^*(i) = NMIN(i)$

$N^*(i) \leq \overline{N}(i)$

Embora isto aconselhe congelamento ou mesmo redução no número de vagas, principalmente quando a diferença $\overline{N}(i) - N^*(i)$ e o multiplicador da restrição de mínimo tiverem grande valor absoluto, necessita-se apurar se não estamos em uma região onde a necessidade por este tipo de profissional e a demanda por vagas no curso estejam crescendo, caso em que talvez se justifique uma pressão da IES no sentido de abrir espa -

ços.

$$a2)\ N^*(i) = NMIN(i)$$

$$N^*(i) > \overline{N}(i)$$

A IES não estaria atendendo à parcela mínima necessária pelo mercado de trabalho. Como no caso anterior, apenas uma análise mais acurada permitiria avaliar a ação da IES.

Tanto pode se tratar de uma profissão pouco produtiva mas com grande necessidade fixa no mercado, caso das profissões burocráticas, quanto pode ser uma política excessivamente cautelosa da IES.

Ainda aqui a análise do valor absoluto dos multiplicadores ajuda uma tomada de decisão. Enquanto um grande valor pode justificar a cautelosa prática da IES, valores pequenos associados a grandes diferenças $N^*(i) - N(i)$ ou a eventual existência de elevada demanda por vagas sugerem acréscimo no número de vagas.

$$b1)\ NMIN(i) < N^*(i) < NMAX(i)$$

$$N^*(i) \leq \overline{N}(i)$$

Neste caso a IES tem formado profissionais em quantidade maior do que seria desejável, deixando-se assim de melhor utilizar a receita disponível.

Embora uma redução no número de vagas nem sempre seja aconselhável, face a eventual prejuízos políticos advindo de reprimir-se grandes camadas por vagas, grandes diferenças $\overline{N}(i) - N^*(i)$ servem, ainda que menos do que em a1, como indicador da necessidade de pelo menos congelar-se o número de vagas para este curso.

Na hipótese de existirem mais de um curso nesta situação, a comparação dos valores de $\frac{\delta F}{\delta N(i)}$ nos pontos $N(i) = \overline{N}(i)$ servirá como indicador em quais cursos seria mais desejável uma redução.

b2) $NMIN(i) < N^*(i) < NMAX(i)$

$N^*(i) > \overline{N}(i)$

Neste caso a IES estaria formando menos profissionais do que seria desejável.

Em cursos onde a diferença $N^*(i) - \overline{N}(i)$ seja grande e a demanda de vagas permita, aconselha-se uma expansão na oferta de vagas.

Mesmo com eventuais reduções em outros cursos, existindo mais de um curso na situação b2, a escassez de receita obriga o estabelecimento de prioridades, o que poderá ser feito através do cálculo dos $\frac{\delta F}{\delta N(i)}$ nos pontos $N(i) = \overline{N}(i)$.

É mais difícil a definição de prioridades quando se compara cursos na situação b2 com cursos na situação a2 pois se em a2 o não atendimento às necessidades mínimas do mercado pressionam a elevação das vagas, em b2 obtemos com esta elevação um reflexo positivo na função objetivo.

c1) $N^*(i) = NMAX(i)$

$N^*(i) \leq \overline{N}(i)$

A IES estaria assim formando mais profissionais que seria desejável e mesmo mais do que o limite máximo do mercado.

Quando a diferença $\overline{N}(i) - N^*(i)$ for grande, apenas se o valor absoluto do multiplicador da restrição for elevado é que se poderia justificar a ação da IES pois estaríamos diante de uma profissão muito produtiva para a "satisfação social". De qualquer modo uma redução no caso c1 é menos necessária, em geral, do que no caso b1 e portanto muito menos do que em a1.

$$c2)\quad N^*(i) = NMAX(i)$$

$$N^*(i) > \overline{N}(i)$$

Neste caso, mais do que b2, aconselha-se um aumento no número de vagas oferecidas para o curso, principalmente se a diferença $N^*(i) - \overline{N}(i)$ e o valor absoluto do multiplicador forem grandes.

Na hipótese da demanda por vagas não comportar o acréscimo pretendido pode até mesmo ser justificável a realização, em conjunto com órgãos governamentais, de uma campanha de motivação para a profissão.

Note-se que a relação entre número de graduados e números de vagas no vestibular exige prévios e anteriores estudos estatísticos sobre evasão, trancamento, reprovação e todas as demais variáveis correlatas e que também agem no sentido de diferenciar o custo/graduado do custo/aluno.

Também a otimização de recursos comporta comentário.

Em geral as restrições dos recursos disponíveis são ativas, caracterizando-se uma situação de escassez.

Um primeiro indicador do grau de escassez nos recursos seria, portanto, o valor dos multiplicadores. Ocorre que por estarem os recursos dimensionados em unidades diferentes, é necessário, para um estudo comparativo, uma normalização de unidades.

O quadro seguinte mostra a normalização pretendida.

TIPO DE RESTRIÇÃO	UNIDADES ORIGINAIS DO RECURSO	FATOR DE TRANSFORMAÇÃO PARA CRUZEIROS/ANO	MULTIPLICADOR ORIGINAL	MULTIPLICADOR NORMALIZADO
Receita	cruzeiros/ano	1	$-1,5 \times 10^{-6}$	$-1,5 \times 10^{-6}$
Área Total	m^2	1/100*	$-2,9 \times 10^{-2}$	$-2,9 \times 10^{-4}$
Valor Total de Equipamento	cruzeiros	1/15**	$-4,5 \times 10^{-5}$	$-6,7 \times 10^{-6}$
Total de Professores	equivalente de 40 horas	1/160.000***	-1,2	$-7,0 \times 10^{-6}$

* Custo por m^2 de área construída igual a Cr$ 5.000,00 (cinco mil cruzeiros), em média , e desvalorização do imóvel em 50 anos.

** Desvalorização do equipamento em 15 anos.

*** Salário anual do professor recém-contratado estimado em Cr$ 160.000,00 (cento e sessenta mil cruzeiros) incluíndo encargos.

É interessante notar que enquanto o acréscimo na Receita faz subir o valor de função objetivo por permitir maior quantidade de graduados, aumentos de ÁREA, EQUIPAMENTO e PROFESSORES levam, no modelo, a uma redução nas penalizações e consequentemente MELHORIA NO VALOR DO GRADUADO.

O resultado encontrado no exemplo do quadro sugere prioridade para investimentos em Área. Já investir em Equipamentos ou Professores é quase igualmente atraente sendo ambos investimentos mais produtivos do que aumentar os gastos diretos com a manutenção do corpo discente (Receita) que serviram de base para definir-se o valor dos custos/graduados, c(i).

Agora consideraremos as restrições dos tipos:

$$AMIN(i) \leq A(i) \leq AMAX(i)$$

$$EMIN(i) \leq E(i) \leq EMAX(i)$$

$$PMIN(i) \leq P(i) \leq PMAX(i)$$

Tomando como exemplo o número de professores vamos desenvolver algumas análises que também poderão ser aplicadas à Área de Equipamento.

Existe três possibilidades para o número de professores por curso, P*(i), encontrado ao final da aplicação do modelo:

a) $P^*(i) = PMIN(i)$

b) $PMIN(i) < P^*(i) < PMAX(i)$

c) $P^*(i) = PMAX(i)$

Comparando-se P*(i) com a situação real na IES, $\overline{P}(i)$, temos duas possibilidades:

1) $P^*(i) \leq \overline{P}(i)$

2) $P^*(i) > \overline{P}(i)$

Analisemos alternativas combinadas.

a1) $P^*(i) = PMIN(i)$

$P^*(i) \leq \overline{P}(i)$

Um grande valor absoluto para o multiplicador da restrição de mínimo indicaria pouco interesse em alocar mais professores no curso que o estritamente necessário. Caso haja , nesta hipótese uma grande diferença $\overline{P}(i) - P^*(i)$, aconselha-se um remanejamento de professores que reduzisse a carga horária docente alocada neste curso.

De qualquer modo a constatação de uma situação a1) sugere cautela na contratação de novos professores para o curso.

a2) $P^*(i) = PMIN(i)$

$P^*(i) > \overline{P}(i)$

Neste caso a IES mantém no curso uma carga horária docente inferior à mínima necessária. Recomenda-se um aumento na carga horária docente alocado no curso i, tanto mais quando a diferença $P^*(i) - \overline{P}(i)$ for grande.

Na eventualidade de existir mais de um curso nesta situação e a escassez de recursos obrigar o estabelecimento de prioridades, deve-se dar acréscimo de professores preferencialmente nos cursos que tenham os menores valores absolutos de multiplicadores da restrição de mínimo.

b1) $PMIN(i) < P^*(i) < PMAX(i)$

$P^*(i) \leq \overline{P}(i)$

Embora esta situação configure um caso menos crítico do que a1), uma grande diferença entre $\overline{P}(i)$ e $P^*(i)$ aconselha-se um remanejamento de professores.

A comparação dos valores de $\frac{\delta F}{\delta P(i)}(\overline{P}(i))$, indicaria em que cursos seria mais necessária uma redução na carga horária docente de modo a melhor utilizar o total disponível de professores.

b2) $PMIN(i) < P^*(i) < PMAX(i)$

$P^*(i) > \overline{P}(i)$

Aqui, como em a2, é aconselhável um acréscimo na carga horária docente colocada no curso i. Se em a2 o acréscimo visava satisfazer às condições mínimas, em b2 obtém-se com o acréscimo uma melhoria na função objetivo.

Se a existência de mais de um curso nesta situação obrigar uma seleção de que cursos devem ter preferência para um aumento de carga horária docente, um bom indicador seria o valor assumido pela derivada parcial de F em relação a P(i) no ponto $P(i) = \overline{P}(i)$.

c1) $P^*(i) = PMAX(i)$

$P^*(i) \leq \overline{P}(i)$

Ainda que com menos intensidade do que nos casos a1 e b1, uma diferença significativa entre $\overline{P}(i)$ e $P^*(i)$ aconselharia uma redução na carga horária docente.

Na verdade a manutenção de recursos em nível superior ao existente na IES modelo apenas poderia ser justificável em cursos altamente produtivos (casos em que o multiplicador da restrição de máximo teria um valor absoluto relativamente grande) nos quais houvesse grande interesse, por parte da Administração Superior da IES em estudo, de investir na qualidade de seu ensino.

c2) $P^*(i) = PMAX(i)$

$P^*(i) > \overline{P}(i)$

Neste caso, mais do que em b2, uma grande diferença $P^*(i) - \overline{P}(i)$ sugeriria a necessidade de aumentar-se a carga horária docente alocada no curso.

Se a escassez de recursos obrigar uma seleção entre os cursos nesta mesma situação, um bom indicador seria o valor absoluto do multiplicador da restrição de máximo.

Vamos analisar a "solução" inteira.

Duas considerações assumidas no método apresentado impedem que se garanta, "a priori", não existir solução inteira melhor.

Primeiro a linearização da função objetivo e segundo a limitação da busca no conjunto $\{|N^*(i)|;\ |N^*(i)|+ + 1\}$, sendo $N^*(i)$ a solução ótima não inteira.

Consideremos a diferença no valor da função entre a solução ótima, $F(N^*(i))$, e uma solução inteira qualquer $F(\overline{N}(i))$.

$$DF = \sum_{i \in S} - AK1(i).(N^*(i)^2)+AK2(i).(N^*(i)-N(i))$$

Como nenhuma solução inteira pode atingir valores superiores a $F(N^*(i))$, uma idéia para encontrar-se a melhor solução inteira seria encontrar a que levasse a um valor de F o mais próximo possível de $F(N^*(i))$.

Ou seja, resolvermos:

$$\min_{\overline{N}(i)} DF$$

s.a.

$$NMIN(i) \leq \overline{N}(i) \leq NMAX(i), \quad \forall \; i \varepsilon S$$

$$\sum_{i \varepsilon S} \overline{N}(i) \, . \, C(i) \leq RECEITA$$

$$\overline{N}(i) \; \varepsilon \; Z, \quad \forall \; i \varepsilon S$$

O problema que se tornaria trivial se a função DF fosse linear.

Tomemos uma aproximação linear para cada fi nas imediações de N*(i). Seja,

$$F = \sum_{i \varepsilon S} fi(N^*(i) + \Delta(i)) = \sum_{i \varepsilon S} fi(\overline{N}(i))$$

A aproximação pretendida seria:

$$F(\overline{N}) = \sum_{i \varepsilon S} fi(N^*(i)) + \sum_{i \varepsilon S} \frac{\delta fi}{\delta N(i)} (N^*(i)) . \Delta(i)$$

logo,

$$DF = F(N^*(i)) - F(\overline{N}(i)) = \sum_{i \varepsilon S} \frac{\delta fi}{\delta N(i)} (N^*(i)) . \Delta(i)$$

onde $\frac{\delta fi}{\delta N(i)} (N^*(i))$ é o próprio D(i) do problema IV.

Assim poderíamos ter como sugestão alternativa para encontrar-se uma "solução" inteira, a resolução do seguinte problema:

$$\min_{\overline{N}(i)} \sum_{i \varepsilon S} D(i) \cdot (N^*(i) - \overline{N}(i))$$

s.a.

$$NMIN(i) \leq \overline{N}(i) \leq NMAX(i), \; i \; \varepsilon \; S$$

$$\sum_{i \varepsilon S} \overline{N}(i) \cdot C(i) \leq RECEITA$$

$$\overline{N}(i) \; \varepsilon \; z, \; i \; \varepsilon \; S.$$

Esta alternativa tem uma aparente vantagem sobre a adotada no trabalho pois não obrigamos $\overline{N}(i) \; \varepsilon \; \{[N^*(i)]; |N^*(i)| + 1\}$.

Vejamos entretanto o erro assumido pelo linearização, no ponto $\overline{N}(i) = N^*(i) + \Delta(i)$.

$$F \text{ linear} = \sum_{i \varepsilon S} - AK1(i).N^*(i)^2 + AK2(i).N^*(i) +$$

$$+ \sum_{i \varepsilon S} (-2AK1(i).N^*(i) + AK2(i) \cdot \Delta(i)$$

$$F \; \overline{n} \text{ linear} = \sum_{i \varepsilon S} -AK1(i).(N^*(i)+\Delta(i))^2 +$$

$$+ AK2(i) \cdot (N^*(i) + \Delta(i))$$

operando temos que:

$$\overline{Fn} \text{ linear} - F \text{ linear} = \sum_{i \varepsilon S} - AK1(i) \, . \, \Delta^2(i),$$

diferença que será sempre negativa pois F é concava. Vemos então que, a não ser que os AK1(i), todos positivos, sejam pequenos (caso em que F é quase linear), o erro cresce com o quadrado da diferença $\overline{N}(i) - N^*(i)$, o que desaconselha estendermos a região de busca a todo Z no problema linearizado.

No caso simulado, a função objetivo é aproximadamente linear conforme atesta a grande incidência de N*(i) em máximos ou mínimos, mas pensando-se em casos mais gerais resolvemos adotar a prática mais cautelosa de procurarmos uma boa solução inteira no entorno da solução real ótima encontrada.

A metodologia apresentada neste trabalho comporta ainda algumas modificações no estabelecimento do modelo. Destacamos dois tipos de restrições extras que podem ser introduzidas sem dificuldades.

- Restrições advindas de relacionamento entre profissões. Por exemplo, obrigarmos que o número de enfermeiras seja maios que o número de médicos $(N(i) > N(j))$.

- Restrições oriundas do estabelecimento de políticas mais globais definidas previamente. Por exemplo, obrigarmos que os gastos diretos com alunos da área médica seja maior que os com alunos da área humanística.

$$\left(\sum_{i \varepsilon \psi} C(i) \, . \, N(i) > \sum_{i \varepsilon \phi} C(i) \, . \, N(i) \right)$$

Para finalizar queremos enfatizar que a aplicação deste modelo deve ser dinâmica. Sempre que houverem mudanças nos fatores externos à IES ou quando já houverem sido tomadas decisões com relação à variáveis internas da IES, o modelo deve ser aplicado. Em todo ou em partes, pois a definição sobre número de alunos pode ser introduzida como dado de entrada no programa que otimiza a alocação de recursos.

B I B L I O G R A F I A

|1| Debelle, Jean - "Une Révolution Tranquille? - La Revue de L'AUPELF, Volume 7, Nº 1, Paris, 1969.

|2| Grupo de Trabalho para a Reforma Universitária, Relatório Final, DDD-MEC, Brasília, 1968.

|3| Onushkin, Victor - "La Planification du Développment des Universités" - Unesco, Institut International de Planification de l'Education, Paris, 1971.

|4| Azevedo, Fernando - Artigo na Revista Civilização Brasileira, Rio de Janeiro, 1969.

|5| Fortier, Jean - "La Mesure du Rendement de l'Enseignement Universitaire comme base d'un System Informatique de Gestion" - La Revue de L'AUPELF, Volume 7, Nº 1, Paris, 1969.

|6| Conselho de Reitores das Universidades Brasileiras - "Reformulação do Sistema Estatístico das Universidades Brasileiras" - CRUB, Brasília, 1968.

|7| Queiroz, Rubens - Planejamento Orçamentário de Universidades, Brasília, 1977.

|8| Pantoja, Fernando - "Orçamento Programa", Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 1978 (em equipe).

|9| Marx, Karl - "O Capital".

|10| Goldman, Lucien - "A Refinação", Artigo da Revista Civilização Brasileira, Rio de Janeiro, 1969.

|11| University of Houstoun - "A Guide to the University Planning Process", Houston, 1970.

|12| Maculan Filho, Nelson - "Programação Inteira", COPPE/UFRJ, 1978.