PLANEJAMENTO INDUSTRIAL POR PROGRAMAÇÃO LINEAR

COM OBJETIVOS MÚLTIPLOS

Carlos Alejandro Tejada Pazmiño

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Carlos Augusto Perlingeiro

Presidente

Clóvis Caesar Gonzaga

Affonso Carlos Seabra da Silva Telles

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1983

TEJADA, CARLOS ALEJANDRO

Planejamento Industrial por Programação Linear com Objetivos Múltiplos (Rio de Janeiro). 1983.

IX, 126p. 29,7cm (COPPE-UFRJ,M.Sc., Engenharia de Sistemas, 1983)

Tese - Univ.Fed.Rio de Janeiro,Fac. de Engenharia.

1. Utilização de Modelos Recursivos e de Programação Linear com Objetivos Múltiplos no planejamento da indústria do Metano no Equador. I. COPPE/UFRJ II. Planejamento Industrial por Programação Linear com Objetivos Múltiplos.

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Carlos Augusto Perlingeiro e Clóvis Caesar Gonzaga pela cooperação, incentivo e valiosas sugestões como orientadores desta tese.

Ao Engenheiro Luis Román L., cujo apoio e estímulo possibilitaram minha vinda à COPPE.

Ao Engenheiro Marco Salvador O., pela cooperação e ensinamentos.

À COPPE que me ofereceu a oportunidade de especializar-me.

À Corporación Estatal Petrolera Ecuatoriana (CEPE) pela ajuda financeira e pela confiança em mim depositada.

À todos aqueles que direta ou indiretamente contribuiram para que este trabalho fosse realizado.

RESUMO

Este trabalho objetiva mostrar a utilidade dos Modelos Recursivos de Planejamento e da Programação Liner com Objetivos Múltiplos (PLOM), na análise e resolução do problema de planejamento do desenvolvimento da indústria do metano no Equador.

Mostra-se ainda como a Programação Linear com objetivos múltiplos consegue conjugar num modelo, vários objetivos conflitantes e obter uma solução que os satisfaz segundo uma escala de prioridades previamente estabelecida.

Apresenta-se um algoritmo para a resolução de problemas de PLOM e um programa computacional baseado nesse algoritmo.

Finalmente, analisam-se os resultados das diferentes alternativas e cenários considerados, e são propostas algumas idéias úteis para a escolha final das capacidades das plantas industriais.

ABSTRACT

This work shows the utility of Recursive Planning Models and of Goal Linear Programming in the analysis and solution of the problem of planning the development of the methane industry in Equador.

It also shows how Goal Linear Programming deals with competitive objectives and obtains results following priorities given in advance.

An algorithm for the solution of PLOM problems is presented together with its computer program.

Finally, the results for different alternatives and scenarios have been described and analyzed. At the same time, useful ideias on how to choose the capacities in the industrial plants are proposed.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

No litoral equatoriano, e especificamente no Golfo de Guayaquil, têm sido detectada a existência de uma importante fonte de gás natural com alto conteúdo de metano (aproximadamente 98%). Assim sendo, existe a possibilidade de que a produção normal deste recurso natural, possa iniciar-se ainda no próximo quinqüênio. Por esta razão, tem especial importância a realização do planejamento do desenvolvimento industrial em face à disponibilidade desta matéria-prima.

Até hoje, têm sido definidas algumas utilizações industriais deste gás natural, que são consideradas prioritárias para o desenvolvimento do país, como é o caso da amônia e a uréia. Neste trabalho serão respeitadas estas produções já definidas, objetivando ampliar a gama das aplicações industriais desta matéria prima através de uma abordagem sistêmica do processo de planejamento industrial.

É importante mencionar, que além do enfoque puramente técnico e financeiro, é também objetivo deste trabalho, que os projetos a serem implementados tendo como matéria prima o gás natural, ajudem a resolver os crônicos problemas sócio-econômicos do Equador.

A resolução deste problema, envolve a tomada de um conjunto de decisões, cuja principal dificuldade, está relacionada com o cumprimento de vários objetivos conflitantes entre si, num ambiente de interesses diversos, informações incompletas e recursos limitados.

Até a pouco tempo, este processo era eminentemente intuitivo, baseado na experiência ou no bom senso dos responsáveis pelas decisões. Ainda na atualidade, a moderna tecnologia da decisão, não substitui completamente este enfoque subjetivo. Porém, a cada dia que passa percebe-se melhor a necessidade e as vantagens de um enfoque científico para a tomada das decisões.

Neste trabalho, procura-se sistematizar a visão subjetiva da tomada de decisões dentro de um processo de planejamento industrial, a fim de oferecer aos responsáveis pelas decisões, alternativas mais concretas para sua escolha. Para isso, são adotados critérios da moderna Análise das Decisões que propõe a utilização do método científico para realizar uma análise sistemática do processo de decisão (15).

Nestes termos, são realizadas as seguintes ações:

- Identificação dos objetivos a serem cumpridos com a utilização industrial do gás natural.
- Definição de um modelo de planejamento industrial que permite quantificar as possíveis conseqüências dos diferentes cursos de ação.
- Proposição de algumas idéias úteis para sistematizar o processo da escolha de melhor alternativa.

No que se refere à organização e apresentação do trabalho, tem-se que após o primeiro Capítulo meramente introdutório, realiza-se no Capítulo II uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento industrial e o seu planejamento.

No Capítulo III, define-se um modelo para o planejamento da indústria do metano no Equador.

No capítulo IV, apresenta-se o algoritmo de resolução de problemas de Programação Linear com Objetivos Múltiplos, cujo modelo foi adotado para descrever o operador de decisão do modelo de planejamento.

No Capítulo V, descreve-se o programa computacional implementado para resolver problemas de Programação Linear com Objetivos Múltiplos e níveis de prioridade pré-estabelecidos.

No Capítulo VI, são definidas as utilizações do gás natural, e define-se o modelo geral do operador de decisão.

No Capítulo VII, são analisados os resultados das diferentes alternativas e cenários considerados, propondo-se uma metodologia para a escolha final das capacidades.

No Capítulo VIII apresentam-se as conclusões do trabalho.

No Anexo A, é descrita a proposta para uma utilização industrial ampliada do metano.

No Anexo B, é feita uma revisão teórica sobre o método de Programação Linear com Objetivos Múltiplos.

No Anexo C, apresentam-se os dados utilizados e os resultados numéricos obtidos.

O Anexo D, corresponde ao programa computacional.

CAPÍTULO II

O PLANEJAMENTO INDUSTRIAL

II.1. Introdução

Neste Capítulo apresenta-se um resumo da bibliografia especializada em matéria de planejamento do desenvolvimento da Indústria Petroquímica.

II.2. O Desenvolvimento Industrial e o seu Planejamento

O objetivo fundamental do planejamento do desenvolvimento industrial é a elaboração de um plano coerente para o futuro, baseado na experiência passada e na compreensão das forças em jogo dentro de um determinado ambiente econômico. Da exatidão na percepção destas variáveis, dependerá o sucesso no desenvolvimento de uma nova indústria ou a manutenção de um vigoroso desenvolvimento de uma indústria já instalada (1).

Com relação ao desenvolvimento industrial, deve-se distinguir sua descrição e sua teoria. A descrição é a primeira fase para a compreensão, mas a simples coleta de dados estatísticos e séries históricas fornece apenas uma pequena idéia sobre o futuro da indústria. Por sua vez, a teoria do desenvolvimento industrial serve para integrar as forças que atuam num determinado meio dentro de uma simulação dinâmica, e permite obter uma idéia global sobre as principais características da indústria.

O curso do desenvolvimento industrial, é controlado pela interação das forças econômicas, técnicas e ambientais. A compreensão de cada uma delas separadamente resulta ineficiente para modelar o desenvolvimento de uma indústria,daí a importância do seu conhecimento e integração num modelo global.

Os problemas que enfrenta o planejamento do desenvolvimento industrial em nossos dias são muito grandes, devido principalmente à atual crise econômica mundial e à dificuldade para determinar as possíveis situações futuras num ambiente de alta incerteza.

Daí, a importância da metodologia proposta por Day e Nelson[14], segundo o qual a tomada de decisões sobre o desenvolvimento industrial pode ser feita com base em resultados de otimizações a curto prazo e de análises de pós-otimização que simulem as situações futuras.

II.2.1. Modelo Recursivo do Planejamento Industrial

Geralmente, as decisões referentes ao planejamento industrial são tomadas com base em planos de longo prazo que procuram otimizar determinados parâmetros. Porém, também é conhecido que após algum tempo, novas informações são obtidas e consequentemente aparecem novos planos, e são descartados os planos iniciais diante da atual concepção de "alternativa ótima".

Os modelos recursivos de planejamento procuram otimizar este comportamento. Para isso , utilizam recursivamente dois operadores básicos:

- operador de decisão;
- operador de realimentação.

O primeiro operador corresponde, em sua forma mais geral, a um algoritmo qualquer de seleção de valores ótimos das variáveis de decisão consideradas. Por sua vez, o operador de realimentação gera novos dados para o operador de decisão.

II.2.1.1. Formulação Matemática dos Modelos Recursivos (14)

Sejam:

x : n-vetor das variáveis de decisão a serem determinadas no ano t.

a_t : n-vetor dos coeficientes correspondentes às variáveis de decisão no ano t.

B_t : matriz (n x k) dos coeficientes das restrições para o ano t.

c_t : k-vetor correspondente aos limites superiores das restrições no ano t.

O conjunto de soluções viáveis para o ano t, será:

$$\Gamma(B_t, c_t) = \{x | B_t\, x \leq c_t \ , \ x \geq 0\} \qquad \text{(II.1)}$$

Se a função objetivo para o ano t é:

$$\gamma_t = \langle a_t, x \rangle \qquad \text{(II.2)}$$

Então, a seqüência de programas lineares será:

$$\gamma^*(a_t, B_t, c_t) = \min\{\langle a_t, x\rangle | x \in \Gamma(B_t, c_t)\} \qquad \text{(II.3)}$$

onde $t = 1,2,3,...$

Definindo-se $(a_t, B_t, c_t) = W_t$ como dados de planejamento para o ano t, o conjunto de soluções ótimas, para cada membro da seqüência definida na equação (II-3), será:

$$\Psi(W_t) = \{x | \langle a_t, x\rangle \leq \gamma^*(a_t, B_t, c_t)\} \cap \Gamma(B_t, c_t) \qquad \text{(II.4)}$$

No caso em que o algoritmo de seleção considere as decisões anteriores, a forma geral do operador de decisão será:

$$X_t = F(X_{t-1}, W_t) \subset \Psi(W_t) \tag{II.5}$$

Se para a definição do operador de realimentação são levadas em conta as decisões e os dados anteriores e também as variáveis exógenas, então a sua forma geral será a seguinte:

$$W_t = W({}_{t_0}X_{t-1}, {}_{t_0}W_{t-1}, Z_t) \tag{II.6}$$

onde:

${}_{t_0}X_{t-1}$: corresponde às decisões tomadas desde o ano inicial do período considerado (t_0) até o ano anterior (t-1).

${}_{t_0}W_{t-1}$: Dados utilizados entre o ano inicial (t_0) e o ano anterior (t-1).

Z_t : vetor das variáveis exógenas.

II.2.1.2. <u>Fluxo de informação de um modelo recursivo</u>

Na Fig.II-1, é apresentado o fluxo de informação de um modelo recursivo utilizado para simular o desenvolvimento da indústria química (1).

Primeiramente realiza-se a conversão da demanda dos diferentes produtos finais e das ofertas de materiais, em dados específicos de oferta-demanda de moléculas particulares.

Em seguida, aplica-se um determinado algoritmo de seleção para conseguir a curto prazo, uma distribuição ótima das capacidades de processamento existentes.

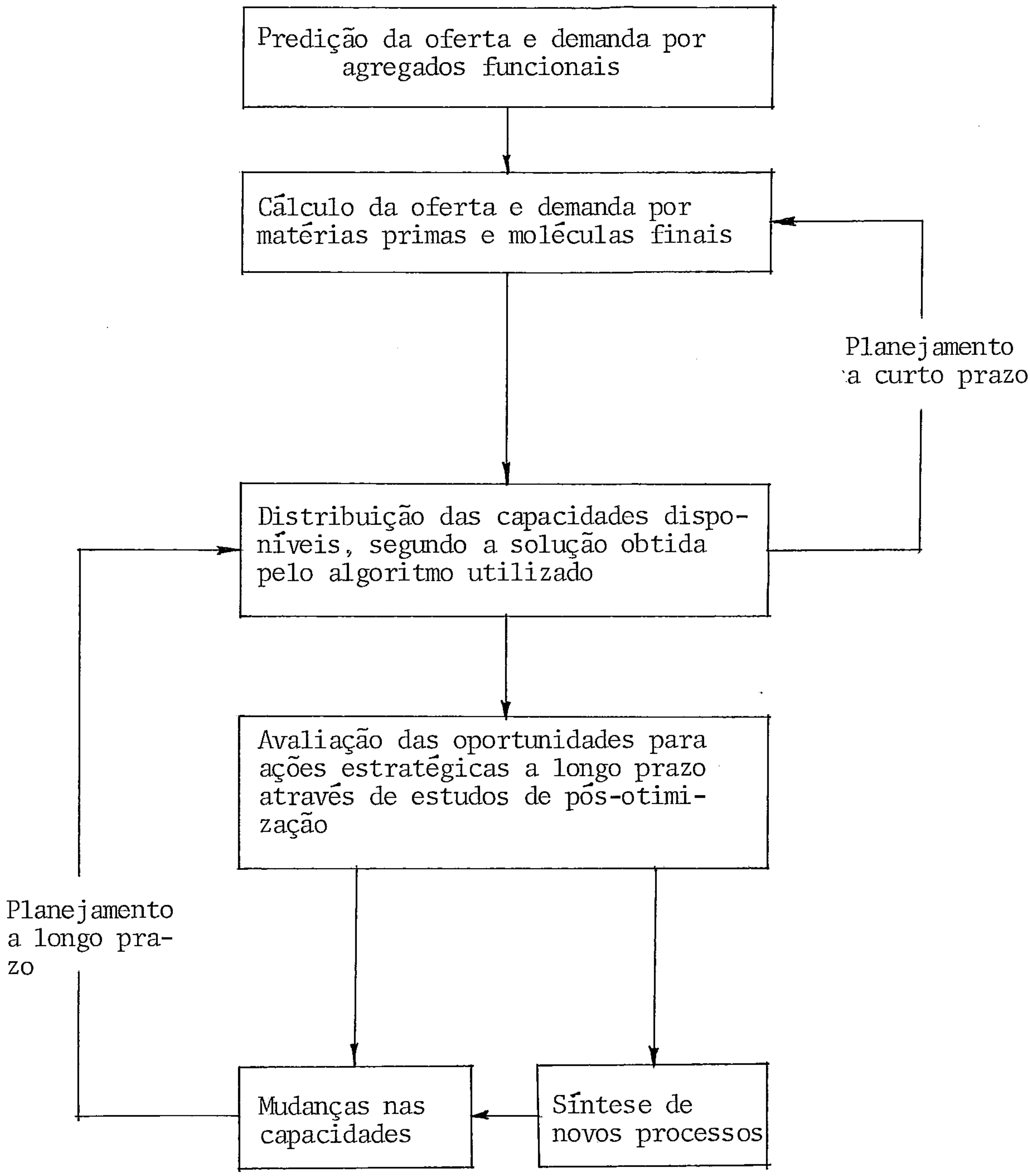

Fig.II-1. Fluxo de Informação de um Modelo Recursivo de Planejamento do Desenvolvimento Industrial.

Geralmente, para modelar e resolver o problema do planejamento a curto prazo tem sido utilizada a Programação Linear.

Posteriormente, realizam-se análises de pós-otimização para avaliar as oportunidades de ações estratégicas a serem executadas num horizonte de 5-10 anos. Estas ações estratégicas envolvem mudanças na capacidade de processamento, desenvolvimento de novos processos e mudanças nos padrões de oferta e demanda.

II.3. Natureza e Características da Indústria Petroquímica

Historicamente, a Indústria Petroquímica iniciou-se no ano de 1919, quando pela primeira vez foi produzido o isopropanol em quantidades comerciais a partir de um derivado do petróleo: o propileno (3).

O seu desenvolvimento foi muito rápido, até se converter neste relativamente curto período, numa das maiores e mais dinâmicas das indústrias.

As matérias primas básicas para esta indústria provêm, principalmente do gás e do petróleo. Porém, na atualidade, cresce a importância do carvão e do álcool devido à expectativa de uma futura escassez de gás e petróleo.

A Petroquímica toma as matérias primas e as transforma numa grande variedade de produtos básicos, intermediários e finais. Os produtos intermediários são utilizados pela própria Indústria Petroquímica. Por sua vez, os produtos finais são utilizados como matérias primas para a produção de bens como plásticos, fibras sintéticas, elastômeros etc.

Entre as características mais importantes desta indústria, podem-se mencionar as seguintes:

- Grandes tamanhos de plantas;
- Pouco intensiva em mão-de-obra;
- Intensiva em capital;
- Grande flexibilidade;
- Freqüente desenvolvimento de novas tecnologias.

A flexibilidade mencionada, refere-se ao fato de que as mudanças na disponibilidade de uma matéria prima ou na rentabilidade do processo, podem ser compensadas utilizando um conjunto completamente diferente de matérias primas e/ou processos para obter os mesmos produtos.

É um fato conhecido, que as tecnologias disponíveis para realizar uma determinada reação são semelhantes, tanto em nível de sofisticação como em intensidade de capital. Por sua vez, sabe-se que os custos das matérias primas nesta indústria, representam de 40% a 80% do custo de produção (2).

Pode-se concluir, então, que o comportamento desta indústria é guiado fundamentalmente pela flexibilidade referente às matérias primas e aos coprodutos.

Em resumo, temos que a Indústria Petroquímica, se encontra limitada por um lado pelas fontes de matérias primas derivadas do petróleo e do gás natural, e por outro lado pelo mercado. Dentro desses limites, a Petroquímica forma um sistema flexível e interdependente de reações químicas comprovadas comercialmente.

II.4. Visão Sistêmica da Indústria Petroquímica

Na atualidade, a Indústria Petroquímica tem-se convertido num complexo sistema econômico. Este sistema tem centenas de segmentos que ligam as matérias primas aos mercados. Se um segmento qualquer é analisado e melhorado, não se pode garantir que a sua melhora vai determinar a melhora do sistema em geral. De fato, podem existir ineficiências locais que não afetam a eficiente operação do sistema (2).

Consequentemente, a visão sistêmica da Indústria Petroquímica não concentra o seu interesse num segmento determinado, senão no funcionamento do sistema em geral.

Devido ao tamanho e à complexidade desta indústria, não é prático incluir os detalhes desta estrutura iterativa quando se constrói o modelo global do sistema. Daí, que a indústria petroquímica será analisada como um sistema de reações químicas que transformam as matérias primas em produtos finais.

Sem dúvida, este modelo pode não abranger importantes fatores tecnológicos e econômicos locais, mas ele fornece uma aproximação razoável do comportamento da indústria (2).

II.5. Modelos Matemáticos da Indústria Petroquímica

Os modelos a serem apresentados adiante, são modelos estáticos que resolvem o problema do planejamento a curto prazo e correspondem ao operador de decisão dos modelos recursivos já analisados.

II.5.1. Modelo de Programação Linear

II.5.1.1. Formulação Matemática do Modelo

Stadtherr e Rudd[2] apresentam a indústria petroquímica como um sistema composto de:

M : transformações (reações) químicas que produzem:

N : substâncias químicas

p_i : quantidade de substância química i, utilizada como matéria prima

q_i : quantidade de substância i, que sai como produto final

x_j : capacidade de transformação j, usada pela indústria

Se a substância química é produzida pela transformação j, então, a_{ij} é a quantidade de i, produzido por unidade de j. Se i é consumido pela transformação j, então, a_{ij} é a quantidade de matéria prima i, consumida por unidade de j. Se i não é nem entrada nem saída de j, então, $a_{ij} = 0$. Os a_{ij} são chamados de coeficientes de entrada - saída e $A = [a_{ij}]$ de matriz tecnológica.

Logo, os balanços materiais para cada substância, podem ser escritas da seguinte forma:

$$p_i + \sum_{j=1}^{M} a_{ij}\, x_j - q_i = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,N) \qquad \text{(II.7)}$$

A equação (II.7), a curto prazo, é restrita pela oferta de matérias primas:

$$p_i \leq s_i \qquad (i = 1,2,3,\ldots,N) \qquad \text{(II.8)}$$

pela demanda de produtos:

$$q_i \geq d_i \qquad (i = 1,2,3,\ldots,N) \qquad \text{(II.9)}$$

e pela capacidade de cada transformação química

$$x_j \leq c_j \qquad (j = 1,2,3,..,M) \qquad \text{(II.10)}$$

onde s_i e d_i são os dados de oferta e demanda e c_j representa a capacidade industrial.

As equações (II.7) - (II.10) formam um sistema de restrições lineares que, junto com uma função objetivo linear determinado, constituem um modelo de Programação Linear. Da resolução deste modelo pode-se determinar os valores de p_i, q_i e x_j que satisfazem ao objetivo pré-determinado.

Geralmente, não são consideradas as restrições de capacidade, permitindo-se dispor de uma capacidade ilimitada para qualquer transformação. Neste caso, a solução do problema de Programação Linear corresponde à estrutura ótima da indústria em relação de um determinado conjunto de dados de oferta e demanda (4).

II.5.1.2. Construção do Modelo

A primeira fase para a construção do modelo já formulado, é a seleção das substâncias e das transformações químicas que participam do modelo.

Para cada substância escolhida, o modelo deve incluir transformações químicas paralelas. Assim, se assegura que o modelo não está orientado para um determinado ambiente econômico e que pode se adaptar a diferentes padrões de oferta e demanda (2).

O coração do modelo é a matriz tecnológica.Daí, que uma estimativa correta dos coeficientes de entrada-saída é a base para um bom modelo. Para isso, é necessário conhecer os dados sobre rendimento de cada transformação química, os quais podem ser procuradas na literatura especializada.

Para completar o modelo, é necessário conhecer os dados de oferta e demanda das matérias primas, as demandas dos produtos e as capacidades industriais disponíveis no meio geográfico onde será aplicado o modelo.

II.5.1.3. Funções Objetivo

A definição da função objetivo a ser incluida no problema de Programação Linear, corresponde ao critério de otimização que o planejador deseja utilizar.

O critério mais aconselhado seria a maximização do lucro (minimização dos custos). Infelizmente, este critério é difícil de se implementar, já que não se dispõe de dados econômicos detalhados para todas as transformações químicas.

Como já foi dito, na fabricação de produtos petroquímicos, os custos das matérias primas dominam os custos totais de produção. Então, parece razoável utilizar o critério proposto por Stadtherr e Rudd[4] de minimizar o consumo da matéria prima e, mais exatamente, minimizar o consumo em termos de conteúdo de carbono. Neste caso, se Wc_i é a fração em peso de carbono na matéria prima i , o algoritmo de resolução procurará os valores de p_i, q_i e x_j que minimizem o somatório:

$$\sum_{i=1}^{N} Wc_i \, p_i \quad ,$$

sujeito às restrições (II.7)-(II-10). Se as restrições das capacidades não são consideradas, então a solução corresponde à estrutura ótima da indústria em relação ao consumo de matéria prima.

Este critério foi testado com os dados da indústria petroquímica dos EEUU nos últimos 30 anos (4). Os resultados obtidos permitem concluir que o critério de minimização do consumo da matéria prima é plausível, e pode ser utilizado para modelar o desenvolvimento industrial.

Outro critério já testado, é a minimização de custo da matéria prima (4). Mas os resultados foram menos satisfatórios do que aqueles obtidos com o critério anterior, devido, aparentemente, ao fato de que os preços das matérias primas no mercado não correspondem a seu verdadeiro valor.

Outras funções objetivo utilizadas neste tipo de modelos foram as seguintes (8):

- Maximização da variação de exergia, ou seja, o trabalho útil que um sistema ideal (reversível) troca com o ambiente.

$$\max \Phi_{ideal} = \sum_{j=1}^{M} x_j \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \, \beta_i \right)_j \qquad (j = 1,2,\ldots,M)$$

onde:

Φ_{ideal} - variação total de exergia

x_j - nível de operação da transformação j

w_i - quantidade da substância química i

β_i - exergia específica de i

- Minimização da criação irreversível de entropia, ou seja o trabalho perdido

$$\min \Phi_{entro} = \sum_{j=1}^{M} (T_o R_s)_j$$

onde:

Φ_{entro} - criação total de entropia

T_o - temperatura

R_s - taxa de acréscimo da entropia

- minimização do calor de reação

$$\min \Phi_H = \sum_{j=1}^{M} x_j \, Hr_j$$

onde:

Φ_H - calor total da reação

x_j - nível de operação da transformação j

Hr_j - calor de reação da transformação j.

Neste caso, Rotstein[8] utiliza parâmetros energéticos intrínsecos das transformações químicas para determinar estruturas tecnológicas ótimas. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade dos critérios propostos. Porém, o autor explica que os resultados são parciais, já que os sistemas analisados são de pequeno porte.

II.5.2. Modelo de Programação Mixta

Neste modelo, procura-se levar em conta a não-linearidade das inversões em relação às capacidades, ou seja, tenta-se refletir a economia de escala que é um fator decisivo na seleção de processos químicos e em geral no planejamento do desenvolvimento industrial.

II.5.2.1. Formulação Matemática do Modelo

Neste caso, Jimenez e Rudd[7] também apresentam à indústria petroquímica como um sistema composto de:

M - transformações químicas (reações)

N - substâncias químicas.

Para a formulação do modelo parte-se das seguintes hipóteses:

- as expressões correspondentes aos balanços de massa e energia são lineares.
- as expressões dos custos são não-lineares.

Logo, em face à Programação Linear pode-se formular o seguinte modelo:

$$\min_{F,X,I} \sum_{i=1}^{N} F_i P_i + \sum_{j=1}^{M} C_j X_j + \sum_{i=1}^{N} I_i B_i$$

$$\text{sujeito a: } F_i + \sum a_{ij} X_j + I_i \geq D_i \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

$$0 \leq F_i \leq S_i \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

$$X_j \geq 0 \qquad (j = 1,\ldots,M)$$

$$I_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

onde:

F_i : matéria prima exógena i

P_i : preço unitário da matéria prima i

C_j : custo de operação unitário do processo j

X_j : nível de operação do processo j

I_i : quantidade de material importado

B_i : custo do material importado

D_i : demanda exógena da substância i

S_i : oferta disponível da matéria prima i

a_{ij} : coeficiente de entrada-saída (refletem o consumo/produção da substância i no processo j).

Segundo esta formulação do modelo, os custos operacionais das plantas são lineares. Então C_j corresponderia ao custo unitário devido às utilidades e investimentos para cada processo j. (o custo das matérias primas não se inclue em C_j)

Uma formulação mais exata do modelo, permite a modelagem dos custos operacionais face a uma função de incremento fixo (ver Fig.II.2)

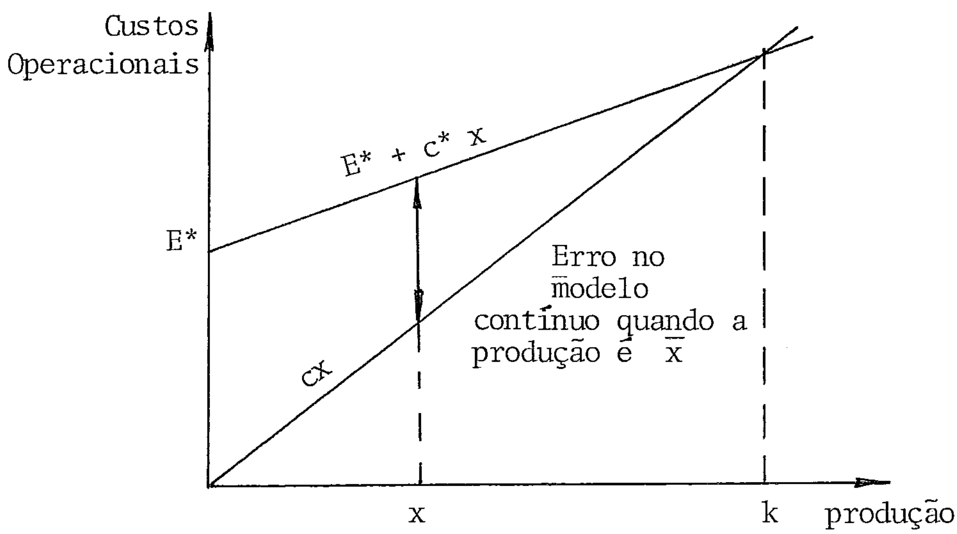

Fig.II.2. Modelagem dos Custos Operacionais Face a uma Função de Incremento Fixo.

Esta função de incremento fixo tem as seguintes características:

$$\text{custos operacionais} = \begin{cases} 0 \ , \ \text{se} \quad x = 0 \\ \\ E^* + C^* x \ , \ \text{se} \ x > 0 \end{cases}$$

onde E^* é o investimento fixo e C^* reflete o custo unitário da energia consumida como utilidades.

É conhecido que esta função não pode ser modelada com um modelo linear, mas pode ser representado pelo seguinte modelo:

$$\text{custos operacionais} = \min\ (E^{*}Y + C^{*}X)$$

sujeito a:

$$0 \leq X \leq K.Y$$

$$Y = 1 \text{ ou } 0$$

onde K é um limite superior válido (neste caso: a capacidade do processo químico). A variável linear Y , reflete o fato da planta ter sido construída (Y=1) ou não (Y=0). Então, o problema pode ser reformulado da seguinte forma mixta:

$$\min_{F,X,I,Y} \sum_{i=1}^{N} F_i P_i + \sum_{j=1}^{M} (E_j^{*} Y_j + C_j^{*} X_j) + \sum_{i=1}^{N} I_i B_i$$

sujeito a: $F_i + \sum_{j=1}^{M} a_{ij} X_j + I_i \geq D_i \qquad (i = 1,\ldots,N)$

$$0 \leq F_i \leq S_i \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

$$I_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ldots,N)$$

$$0 \leq X_j \leq K_j Y_j \qquad (j = 1,\ldots,M)$$

$$Y_j = 0 \text{ ou } 1 \text{ para todos os } j\ .$$

Com esta formulação, pode-se encontrar um ponto de equilíbrio a partir do qual se tomaria a decisão de importar ou produzir um determinado produto petroquímico (ver fig.II.3).

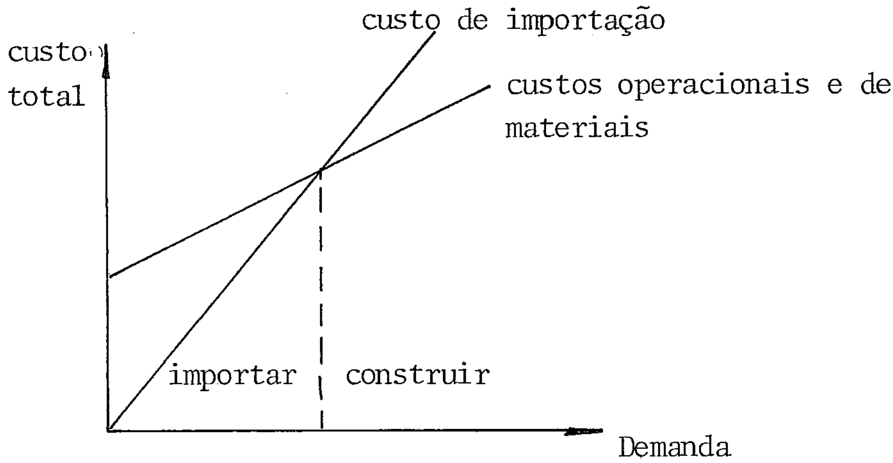

Fig.II.3. Comparação Econômica entre as Alternativas de Construir uma Planta ou Importar o Produto.

II.6. Estudos Complementares

Estes estudos têm sido feitos para avaliar as possibilidades de ações estratégicas a longo prazo em face das análises de pós-otimização nos modelos a curto prazo.

Até hoje, foram estudados ajustes a longo prazo do modelo inicial nas seguintes direções (1),(2):

a) variações nas ofertas e nas demandas;

b) alterações nas capacidades instaladas;

c) desenvolvimento de novas tecnologias.

II.6.1. Perturbações na Oferta e na Demanda

Neste caso, costuma-se considerar alguns cenários, ou seja: um conjunto de suposições razoáveis sobre o comportamento da oferta de matérias primas ou da demanda de produtos finais. Obtém-se, assim, uma rápida percepção das possíveis situações no futuro desenvolvimento da indústria. Sobre este tema tem sido feito um importante estudo por Stadtherr e Rudd[2] sobre a eliminação do gás natural como matéria prima na indústria petroquímica dos EEUU.

II.6.2. Alterações na Capacidade Industrial

As análises, neste caso, referem-se às mudanças nas capacidades dos processos de tecnologias conhecidas como em mecanismo adaptativo da indústria numa futura conjuntura econômica , norteada especialmente pelas variações na demanda de produtos. Neste caminho, as tecnologias passam pelas seguintes fases de desenvolvimento (1):

- Adoção;
- Ajuste;
- Declíneo;
- Obsolecência.

Estes conceitos são de grande importância, especialmente na seleção e na negociação das tecnologias a serem adquiridas ou ampliadas.

Especial interesse nesta área, tem o estudo realizado por Trevino e Rudd[6] sobre políticas para a instalação de novas (ou ampliação das antigas) capacidades industriais para a produção de básicos, intermediários e produtos finais petroquímicos, no México.

Para o caso de um modelo cuja função objetivo é a minimização do consumo de matéria prima, foi proposto o uso dos índices de conservação da matéria prima, que refletem a quantidade de matéria prima poupada por unidade de processo utilizado. Daí, que os processos com índice de conservação da matéria prima relativamente menores, serão prováveis candidatos à decadência, e suas capacidades instaladas diminuirão sensivelmente nos anos posteriores. Esta hipótese foi testada com sucesso na indústria americana para os anos 1940, 1950, 1960 e 1970 (4).

II.6.3. Desenvolvimento de Novos Processos

A simples expansão ou redução das capacidades de processamento, como já foi dito, é só um mecanismo adaptativo que não traz grandes surpresas na atividade industrial. Porém, o desenvolvimento de uma nova tecnologia pode ter um efeito revolucionário e mudar a estrutura básica da indústria. É por isso que, às vezes, é difícil implementar mudanças deste tipo.

Importantes avanços têm sido feitos na simulação de novas tecnologias, como resultado do considerável progresso alcançado pela Síntese de Processos, que permite dispor de um conjunto de características técnicas e econômicas sobre a nova tecnologia que possibilitarão com suficiente exatidão determinar o impacto de sua introdução na indústria (1).

É importante salientar que para os novos processos, a viabilidade técnica é condição necessária mas não suficiente, pois deve-se assegurar primeiramente a viabilidade econômica.

M. Stadther propõe um método para estimar as possibilidades de sucesso de uma nova tecnologia a longo prazo. O modelo básico é o de Programação Linear analisado em II.5.1.,e como função objetivo tem-se a minimização do consumo de matéria prima. Associado a este problema tem-se o seu dual. No caso particular das restrições de capacidade, as variáveis duais, ou também chamadas preços sombra refletem a variação marginal no consumo de matéria prima como resultado da introdução do novo processo na indústria. Logo, os processos com preços sombra negativos, são aqueles cuja introdução daria como resultado, uma utilização mais eficiente das matérias primas e,assim, teriam maiores possibilidades de sucesso nos próximos anos.

CAPÍTULO III

MODELO PARA O PLANEJAMENTO DA INDÚSTRIA DO METANO

III.1. Introdução

Neste Capítulo descreve-se um modelo recursivo a ser adotado no planejamento do uso industrial do gás natural equatoriano.

Quanto ao operador de decisão do modelo recursivo, será justificado a adoção da Programação Linear com Objetivos Múltiplos (PLOM) para modelá-lo (a revisão teórica deste método é feita no Anexo B). Por último será feita uma referência à forma geral do operador de realimentação.

III.2. Visão Sistêmica da Indústria do Metano

Neste trabalho adota-se uma visão sistêmica, similar à utilizada para a Indústria Petroquímica (II.4), com a finalidade de descrever o conjunto de produtos gerados a partir do gás natural. Assim sendo, teremos um sistema de reações ou processos químicos que utilizam ou transformam o metano em bens finais ou serviços. Esta adoção é feita, já que a dita representação é considerada como uma aproximação razoável, para fins de modelagem, do verdadeiro comportamento da indústria petroquímica em geral (2).

Na Figura III.1 apresenta-se um esquema que corresponde a esta visão sistêmica da indústria do metano.

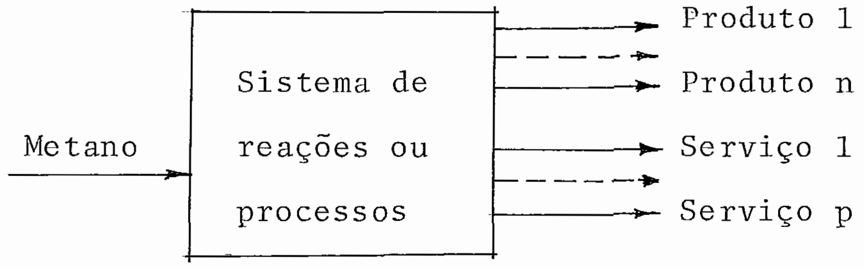

Figura III.1. Visão Sistêmica da Indústria do Metano

III.3. <u>Modelo para o Planejamento do Desenvolvimento da Indústria do Metano</u>

Para o modelos em questão, será adotado, em termos gerais o modelo recursivo já descrito em (II.2.1), pelas seguintes considerações:

a) Atualmente continua sendo um fator determinante no planejamento industrial a incerteza nos dados a longo prazo.

b) Este modelo recursivo tem sido testado com sucesso por vários pesquisadores: Rudd[1], Stadther e Rudd[2], Stadther[3].

c) O operador de decisão, que até hoje correspondia a modelos de Programação Linear ou Programação Mixta, é suficientemente flexível para permitir a utilização de outros tipos de modelos (9), como o modelo de Programação Linear com objetivos múltiplos por exemplo.

Para o caso particúlar do desenvolvimento industrial a partir do metano, o fluxo de informação do modelo é representado na Figura III.2.

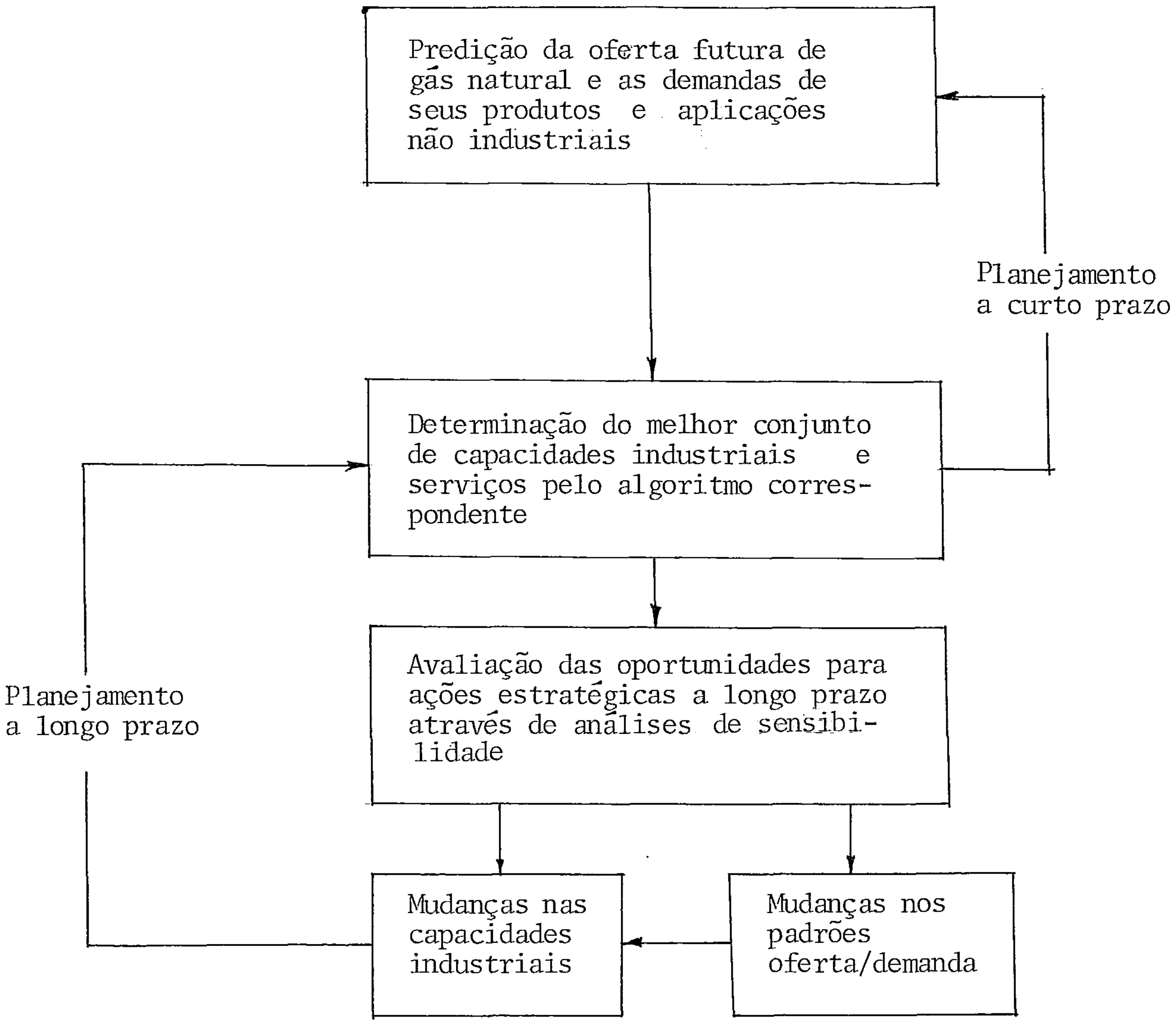

Figura III.2. Fluxo de Informação do Modelo Recursiva para o Planejamento Industrial do Metano.

III.4. O Operador de Decisão

III.4.1. Vantagens Comparativas da Programação Linear com Objetivos Múltiplos (PLOM)

A escolha da Programação Linear com Objetivos Múltiplos para modelar o operador de decisão, foi feita pelas seguintes razões:

- A análise de vários objetivos conflitantes, que se precisa fazer ao mesmo tempo nos estudos sobre planejamento industrial, pode ser realizado com ajuda da PLOM.
- Pode-se pré-estabelecer a ordem das prioridades para o cumprimento dos objetivos e consequentemente, analisar o impacto sobre os projetos, das mudanças na ordenação destas prioridades.
- Comparativamente, apresenta diversas vantagens sobre outros métodos de programação matemática que poderiam ser utilizados, neste caso para modelar o operador de decisão.

É necessário notar que para a decisão de utilizar PLOM para modelar e resolver o problema de planejamento industrial proposto, também foram levadas em conta suas limitações, como por exemplo a necessidade de pré-estabelecer as prioridades do cumprimento dos objetivos ou de estabelecer a preferência no cumprimento de um determinado objetivo dentro de um nível de prioridade.

A seguir procede-se a uma análise comparativa das vantagens da PLOM sobre outros métodos, sem incluir porém, uma análise profunda das diferenças fundamentais.

Pretende-se apenas, apresentar algumas vantagens formais do método de Programação Linear com Objetivos Múltiplos e Níveis de Prioridade Pré-estabelecidos.

III.4.1.1. Programação Linear com um Objetivo e Programação Linear com Objetivos Múltiplos

Uma formulação padrão do problema de Programação Linear com um objetivo é a seguinte:

Encontrar $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_J)$ tal que:

maximize ou minimize:

$$Z = \sum_{j=1}^{J} d_j \, x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{J} c_{ij} \, x_j \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \qquad (1,2,\ldots,M) \qquad \text{(III.1)}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \qquad \text{(III.2)}$$

onde:

d_j : coeficiente da variável de decisão x_j na função objetivo,

c_{ij}: coeficientes da variável de decisão x_j na restrição i ,

b_i : lado direito da restrição i .

Neste caso somente é possível encontrar a solução ótima x* se as restrições (III.1) e (III.2) são totalmente cumpridas.

Agora, em termos de PLOM, o modelo equivalente seria o seguinte (ver detalhes no Anexo B):

Encontrar: $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_J)$ que minimize

$$\bar{a} = \{ | g_1(\bar{n},\bar{p}) \, , \; g_2(\bar{n},\bar{p}) | \}$$

tal que:

$$\sum_{j=1}^{J} c_{ij}\, x_j + n_i - p_i = b_i \qquad (i=1,2,\ldots,M) \qquad \text{Prioridade 1}$$

$$\sum_{j=1}^{J} d_j\, x_j + n_{M+1} - p_{M+1} = b_{M+1} \qquad \text{Prioridade 2}$$

$$\bar{x},\ \bar{p},\ \bar{n} \geq \bar{0}$$

Desta nova formulação, pode-se observar a inflexibilidade típica da Programação Linear com um objetivo, que exige o cumprimento total do conjunto completo de restrições para cumprir a função objetivo.

O exemplo seguinte, baseado num caso apresentado por Ignizio[11] , mostra um problema não viável, que pode ter solução quando é enunciado em termos de Programação Linear com Objetivos Múltiplos.

Exemplo III.1:

Um investidor dispõe de Cr$ 60.000 e o seu objetivo é maximizar o retorno mensal sobre o investimento. Com este fim, dispõe-se a fazer o seguinte:

- Comprar no mínimo Cr$ 20.000 em bonus do governo, que tem juros de 6% mensais.
- Investir entre Cr$ 5.000 e Cr$ 15.000 na caderneta de poupança que tem juros de 5% mensais.
- Destinar até Cr$ 10.000 à compra de ações com juros de 8% mensais.

- Investir no mínimo Cr$ 30.000 num novo empreendimento industrial com juros de 7% mensais.

Teremos, então, as seguintes variáveis de decisão:

x_1 - investimento em bonus de governo

x_2 - investimento em caderneta de poupança

x_3 - investimento em ações

x_4 - investimento no empreendimento industrial.

Modelo em termos de Programação Linear com um objetivo:

Encontrar $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ que maximize:

$$Z = 0{,}06\ x_1 + 0{,}05\ x_2 + 0{,}08\ x_3 + 0{,}07\ x_4$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 50.000 \\
x_1 &\geq 20.000 \\
x_2 &\geq 5.000 \\
x_2 &\leq 15.000 \\
x_3 &\leq 10.000 \\
x_4 &\geq 30.000
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ao tentarmos resolver este problema encontraremos que não existe solução. Isto é óbvio se analisarmos a primeira, a segunda, terceira e a sexta restrições, ou seja, o investidor não teria dinheiro suficiente para investir segundo as suas intenções.

Agora, procuraremos resolver este problema através da Programação Linear com Objetivos Múltiplos:

Admite-se que o investidor tem as seguintes prioridades:

P_1 - Não investir mais de Cr$ 50.000 num mês (objetivo absoluto).

P_2 - Investir, se possível, mais de Cr$ 20.000 em bonus e entre Cr$ 5.000 e Cr$ 15.000 na caderneta de poupança.

Ademais, ele considera duas vezes mais importante poupar que investir em bonus. (sobre a possibilidade de atribuir pesos aos objetivos dentro de cada nível de prioridade pode-se consultar em VI.3.3.2).

P_3 - Investir no novo empreendimento uma quantia maior ou igual a Cr$ 30.000.

P_4 - (a) Investir até Cr$ 10.000 em ações;

(b) Obter, se possível, um retorno total mensal de Cr$ 4.000.

O modelo de PLOM, neste caso, será o seguinte:

Encontrar $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ que minimize:

$$\overline{a} = \{(p_1), (n_2 + 2n_3 + 2p_4), (n_6), (p_5 + n_7)\}$$

tal que:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + n_1 - p_1 = 50.000 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + n_2 - p_2 = 20.000 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad\quad + n_3 - p_3 = 5.000 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad\quad + n_4 - p_4 = 15.000 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad\; + n_5 - p_5 = 10.000 \\
\qquad\qquad\qquad x_4 + n_6 - p_6 = 30.000
\end{array}
$$

$$0{,}06\ x_1 + 0{,}05\ x_2 + 0{,}08\ x_3 + 0{,}07\ x_4 + n_7 - p_7 = 4.000$$

$$\overline{x},\ \overline{n},\ \overline{p} \geq \overline{0}$$

A solução obtida para o problema é a seguinte:

$x_1^* = \text{Cr\$ } 20.000$

$x_2^* = \text{Cr\$ } 5.000$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = \text{Cr\$ } 25.000$

$\overline{a}^* = (0,\ 0\ ,\ \text{Cr\$ } 5.000\ ,\ \text{Cr\$ } 800)$

E o investidor ao final consiguirá um retorno total mensal de Cr$ 3.200 (6%).

Em resumo, pode-se indicar as seguintes vantagens de PLOM sobre a Programação Linear com uma função objetivo:

- Permite uma flexibilidade maior na procura das soluções ótimas.

- Podem-se analisar vários objetivos ao mesmo tempo.

III.4.1.2. Programação Linear Multicritério e PLOM

Para realizar essa comparação, lembremos que o problema de multicritério, também conhecido como o problema do vetor máximo, consiste num problema de Programação Linear com mais de uma função objetivo (ou critério). A formulação padrão pode ser apresentada da seguinte forma:

Minimizar Dx

Sujeito a:

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

onde:

D - matriz p x n

A - matriz m x n

$x \in R^n$

$b \in R^m$

p - número de objetivos

Se V é o conjunto de soluções viáveis, resolver o problema significa encontrar um $\bar{x} \in V$ tal que não existe outro $x \in V$ que "melhore" os valores vetoriais das soluções, como será explicado adiante.

Deseja-se, então, encontrar o conjunto:

$$E = \{\bar{x} \in V | \nexists\, x \in V \text{ com } Dx \leq D\bar{x} \text{ e } Dx \neq D\bar{x}\}$$

chamado conjunto das soluções eficientes.

Explicando melhor o conjunto E, temos que, se

$\overline{x} \in E$, então não existe nenhum $x \in V$ tal que $d^i x \leq d^i \overline{x}\ \forall i$, e $d^j x < d^j \overline{x}$ para algum j . Aqui, considera-se d^i uma linha da matriz D , correspondendo, portanto, aos coeficientes de uma das funções objctivo.

Então, para resolver o problema linear de multicritério, o ideal seria encontrar uma solução que otimize simultaneamente, todas as funções objetivo. Esta seria indubitavelmente a solução ótima do problema. Acontece que, para a maioria dos problemas, esta solução não existe, ou então, é muito difícil de ser determinada. Cabe, então, se contentar com um resultado bem mais modesto, qual seja, encontrar uma solução viável $\overline{x}$, tal que não exista outra solução viável x que apresente valores menores (caso que o problema seja de minimização) ou iguais para todas as funções objetivo, e um valor menor para ao menos uma função objetivo. Ou seja, cabe encontrar uma solução viável $\overline{x}$ tal que todas as demais soluções viáveis tenham um valor maior para ao menos uma função objetivo, ou então, tenham valores iguais para todas as funções objetivo. Uma solução $\overline{x}$ que satisfaz a estas condições e chamado solução eficiente (12).

Como os valores vetoriais nas soluções eficientes não são totalmente ordenados, dificulta-se grandemente a escolha final da "melhor" das soluções eficientes. Devendo-se adotar para isso, um critério complementar.

Em relação à resolução do problema, observa-se a mesma estrutura inflexível na procura das soluções, já analisada para a Programação Linear com uma função objetivo.

Em resumo, pode-se concluir que, também com respeito à Programação Linear Multicritério, a PLOM apresenta algumas vantagens como:

- A procura das soluções é bem mais flexível, o que permite a solução de uma maior quantidade de problemas.
- Facilita a tomada de decisões, já que se trabalha com vetores estritamente ordenados de acordo com as prioridades pré-estabelecidas.

III.4.1.3. Programação Linear com Vários Objetivos Ponderados numa Função Objetivo e Programação Linear com Objetivos Múltiplos e Níveis de Prioridade Pré-estabelecidos

Basicamente a idéia nestes dois tipos de programação é a mesma: incluir objetivos como restrições, procurando minimizar os somatórios dos valores absolutos dos desvios negativos e/ou positivos relativos a estes objetivos.

No caso da função objetivo única, ela corresponde a uma função linear das variáveis de desvio que serão minimizadas, associando-se a cada uma delas um peso que, supostamente, garante uma ordenação na minimização das diferentes parcelas da função objetivo (15).

Logicamente, esta concepção simplifica o problema em termos da resolução, já que se pode utilizar diretamente o algoritmo SIMPLEX da Programação Linear. Porém, surgirá o seguinte problema:

As variáveis de desvio, podem não ser comensuráveis, dificultando-se assim, a determinação dos pesos para as diferentes parcelas da função objetivo.

Pode-se argumentar que também a PLOM agrupa, nos níveis de prioridade um (P_1), variáveis de desvio não comensuráveis. Mas, neste caso, tem-se que todos os objetivos desse nível, por serem absolutos, precisam ser executados completamente, senão a solução não será aceita. Logo não tem importância se na função linear que corresponde ao primeiro nível de prioridade encontram-se desvios não comensuráveis.

Alguns autores propõem substituir os citados pesos associados às variáveis de desvio por valores numéricos arbitrários. Geralmente, o primeiro desses valores é um número muito grande, o seguinte é menor e assim por diante. Com este processo, praticamente se volta à formulação inicial, com a desvantagem adicional de que o erro nos cálculos vai ser maior devido aos grandes valores utilizados como pesos.

Em resumo, as vantagens da Programação Linear com Objetivos Múltiplos e Níveis de Prioridade Pré-estabelecidas em relação ao método analisado são as seguintes:

- Ao se ter como função de execução um vetor ordenado, assegura-se também um cumprimento ordenado dos objetivos em ordem decrescente das prioridades.
- Não existe o risco de se incluir (exceto na prioridade um) numa mesma prioridade, objetivos não comensuráveis.
- Não existe a dificuldade adicional da determinação dos pesos para cada uma das parcelas da função objetivo única.
- Não se tem os problemas de instabilidade numérica que pode aparecer como resultado de se associar aos pessos valores muito grandes.

III.5. O Operador de Realimentação

Lembremos a expressão matemática definida no Capítulo anterior, para o Operador de Realimentação do modelo geral para o planejamento do desenvolvimento industrial.

$$W_t = W({}_{t_0}X_{t-1} \,,\, {}_{t-1}W_{t-1} \,,\, Z_t)$$

onde:

${}_{t_0}X_{t-1}$ - decisões tomadas entre os períodos inicial (t_0) e o anterior ao considerado (t-1).

${}_{t_0}W_{t-1}$ - seqüência histórica dos dados.

Z_t - fatores exógenos no período t .

Em outras palavras, este operador tem a função de criar uma nova massa de dados para um determinado tempo t , em dependência do histórico das decisões tomadas, dos dados utilizados e dos atuais fatores exógenos.

No nosso caso, propõe-se a geração de diversos cenários, que levarão em conta os fatores já mencionados, para substituir à função W cuja formulação resultaria muito complicada devido à quantidade de variáveis envolvidas nesse tipo de problemas. Esta simplificação é feita pois, segundo Day[9], o operador de realimentação pode tomar outra forma diferente daquela estritamente matemática, sempre que tenha uma apresentação adequada e corresponda aos desejos do formulador do modelo.

CAPÍTULO IV

ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

IV.1. Introdução

Neste Capítulo, apresenta-se o algoritmo de resolução dos problemas de Programação Linear com Objetivos Múltiplos e níveis de prioridade pré-estabelecidos. São analisados também, alguns problemas específicos na utilização do algoritmo e as correspondentes soluções. Além disso, procura-se ilustrar os conceitos teóricos apresentados, com exemplos gráficos e numéricos.

IV.2. Análise Gráfica

O método para resolver modelos de Programação Linear com Objetivos Múltiplos e níveis de prioridade pré-estabelecidos, poderá ser compreendido com mais facilidade se, inicialmente, realiza-se a análise gráfica dos passos seguidos para procurar a solução ótima.

Esta análise, serve somente para problemas com no máximo de três variáveis de decisão e tem a seguinte metodologia para a resolução dos problemas:

a) Representar com linhas retas , ou planos, todos os objetivos em termos das variáveis de decisão.

b) Determinar a(s) solução(ões) para os objetivos pertencentes ao nível de prioridade 1.

c) Toma-se o(s) objetivo(s) do nível de prioridade seguinte, e determina-se a melhor solução(ões) para este(s) objetivo(s), tomando cuidado para não degradar a(s) solução(ões) já determinadas para as prioridades anteriores.

d) Repete-se (c) até que todos os níveis de prioridade tenham sido analisados.

A seguir apresenta-se um exemplo da resolução gráfica:

Considere o modelo: Procurar x_1, x_2 que minimize $\bar{a} = \{(2p_1 + 3p_2), (n_3), (p_4)\}$

tal que:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + n_1 - p_1 = 10 & & G_1 \\ x_1 + n_2 - p_2 = 4 & & G_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + n_3 - p_3 = 56 & & G_3 \\ x_1 + x_2 + n_4 - p_4 = 12 & & G_4 \\ \bar{x},\ \bar{n},\ \bar{P} \geq 0 & & \end{array}$$

a) Representação dos objetivos (Figura IV.1)

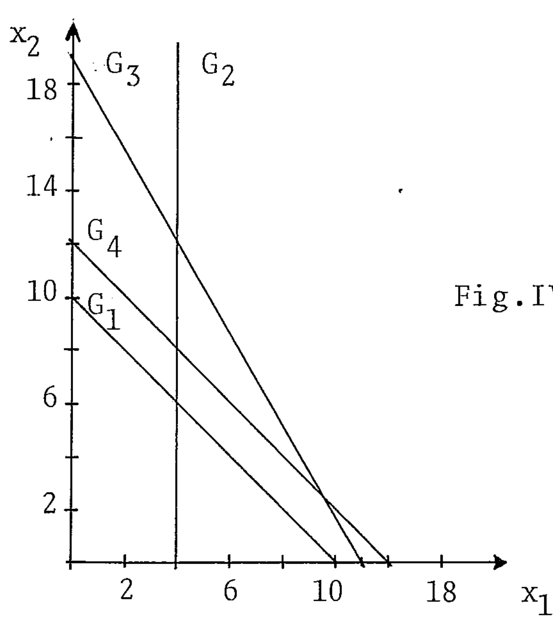

Fig.IV.1

b) São consideradas, inicialmente, os objetivos G_1 e G_2 pertencentes ao nível de prioridade 1.

A primeira prioridade é cumprida quando a função linear $2p_1 + 3p_2$ é minimizada, levando em conta, também, que $\overline{x}$, $\overline{p}$ e $\overline{n}$ são não-negativas.

Pode-se igualar a zero a função linear:

$2p_1 + 3p_2 = 0$

Logo, $p_1 = p_2 = 0$, e a região hachurada (Fig.IV.2) corresponde às soluções viáveis do primeiro nível de prioridade.

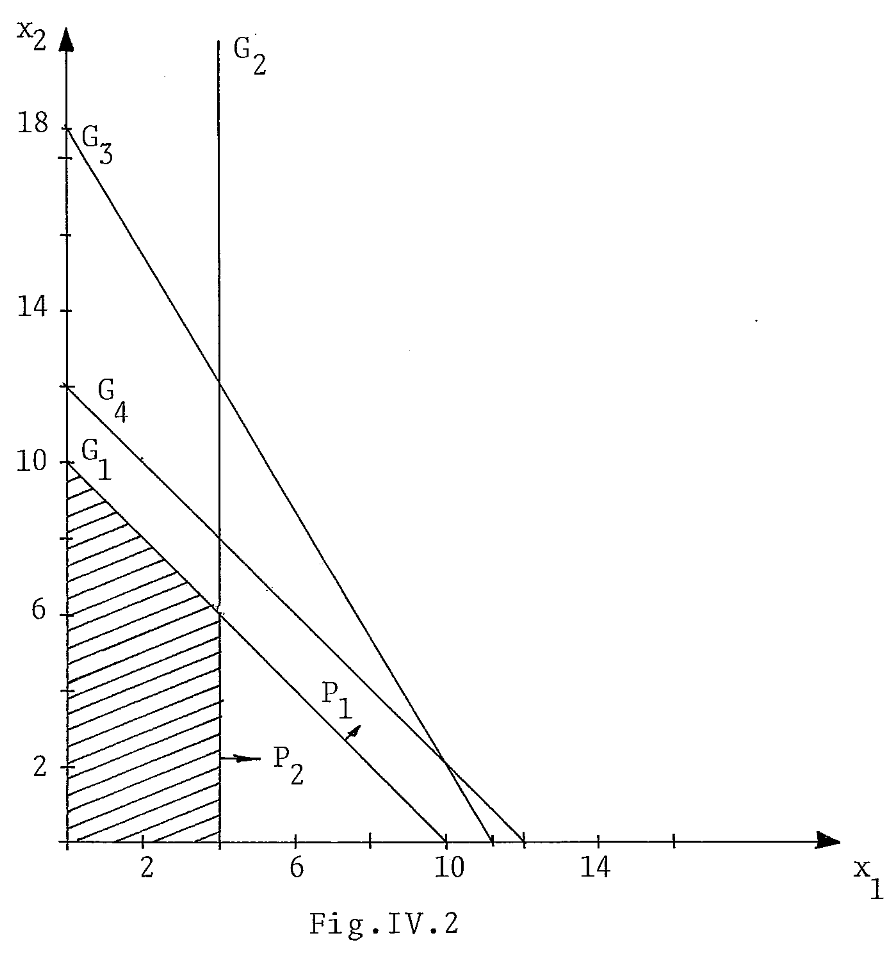

Fig.IV.2

c) Em seguida, analisa-se o nível de prioridade seguinte (P_2). Esta prioridade somente tem um objetivo: G_3 . E para cumprilo é preciso minimizar n_3 . Porém, é necessário observar que n_3 não pode ser levado ao seu nível mínimo ($n_3 = 0$) sem degradar as soluções obtidas para o nível de prioridade superior. Então, o valor mínimo de n_3 que não afeta as soluções anteriores, corresponde ao ponto $x_1 = 4$, $x_2 = 6$; ver Figura IV.3

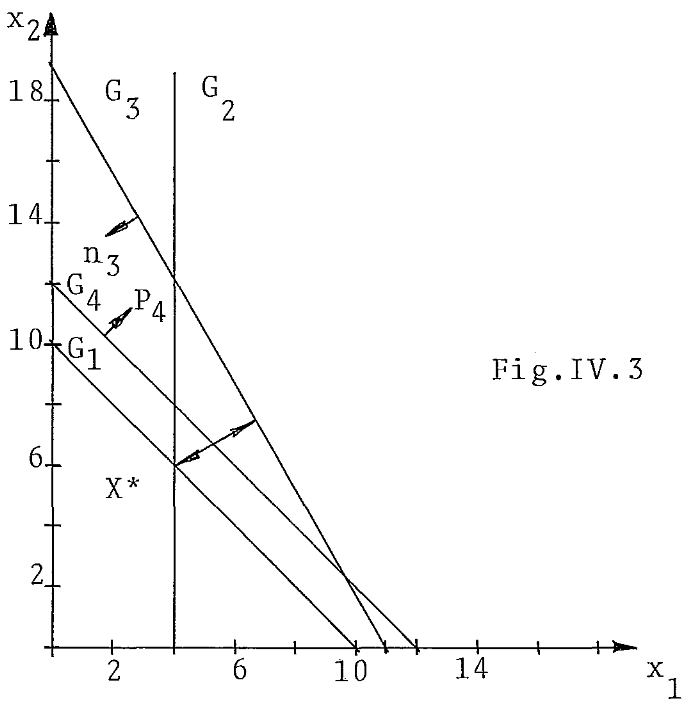

Fig.IV.3

d) Finalmente, analisa-se a nível de prioridade P_3 que tem um objetivo: G_4 , devendo ser minimizado p_4 para satisfazê-lo. Observa-se que, qualquer ponto que pertence ao triângulo limitado por G_n , $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, cumpre esta condição. Além disso, o ponto solução dos níveis anteriores também pertence a este triângulo. Então, este ponto corresponde à solução ótima do problema total.

Logo, a solução final do problema será:

$x_1^* = 4$; $x_2^* = 6$; $\bar{a}^* = (0,18,0)$

O vetor $\bar{a}^*$ indica que os níveis de prioridade P_1 e P_3 foram cumpridos totalmente, enquanto P_2 foi somente cumprido em forma parcial.

IV.3. Método do Simplex Modificado

Apresenta-se um procedimento para a resolução de problemas de Programação Linear com Objetivos Múltiplos, desenvolvido com base no conhecido método SIMPLEX de Programação Linear (11).

IV.3.1. O quadro inicial

O passo fundamental para uma rápida resolução de um problema de PLOM é o estabelecimento do quadro inicial (Quadro IV.1)

	P_k	$w_{k,1} \cdots w_{k,j}$	$w_{k,j+1} \cdots w_{k,j+m}$	Campo Superior
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
Campo Esquerdo	P_1	$w_{1,1} \cdots w_{i,j}$	$w_{1,j+1} \cdots w_{1,j+m}$	
$P_k \cdots P_1$	v	$x_1 \cdots\cdots x_j$	$p_1 \cdots p_m$	$\bar{b}$
$u_{1,k} \cdots u_{1,1}$	n_1	$e_{1,1} \cdots e_{1,j}$	$c_{1,j+1} \cdots c_{1,j+m}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u_{m,k} \cdots u_{m,1}$	n_m	$e_{m,1} \cdots e_{m,j}$	$e_{n,j+1} \cdots e_{n,j+m}$	b_m
	P_1	$I_{1,1} \cdots I_{1,j}$	$I_{1,j+1} \cdots I_{1,j+n}$	a_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	P_k	$I_{k,1} \cdots I_{k,j}$	$I_{k,j+1} \cdots I_{k,j+m}$	a_k

Quadro IV.1. Quadro inicial do método simplex modificado.

Os elementos deste Quadro são definidos da seguinte forma:

Cabeçalhos:

P_k = nível de prioridade k ($k = 1,2,...,k$)

v = variáveis do problema. À direita de v, estão o conjunto de variáveis não básicas (x_j e P_i); abaixo de v , está o conjunto inicial de variáveis básicas (n_i)

$\bar{b}$ = os elementos sob $\bar{b}$ são os valores dos lados direitos de cada objetivo.

Elementos:

$j = 1,2,...,J$; $i = 1,...,m$; $s = 1,...,S$; $k = 1,...,K$

$e_{i,s}$ = elementos na fila i sob a variável não básica s , ou seja, $e_{i,s}$ é o coeficiente da variável não básica s no objetivo i .

$w_{k,s}$ = peso associado à variável não básica s no nível de prioridade k .

$u_{i,k}$ = peso associado à variável básica i , no nível de prioridade k .

$I_{k,s}$ = Índice numérico de prioridade k , sob a variável não básica s .

a_k = nível de execução da prioridade k ; $\bar{a} = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

Todos os elementos, menos $I_{k,s}$ e a_k , são obtidos do modelo matemático; para o cálculo de $I_{k,s}$ e a_k utilizam-se as seguintes fórmulas:

$$I_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} (e_{i,s} \cdot U_{i,k}) - W_{k,s}$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot U_{i,k})$$

No Quadro inicial, as variáveis básicas correspondem (salvo em casos especiais a serem analisadas depois) ao conjunto das variáveis de desvio negativo (n_i) . As iterações do algoritmo consistem simplesmente na troca de uma variável pertencente à base por uma variável não básica, quando esta troca melhora a solução vigente.

As soluções em cada etapa são dadas em função de a_1, a_2, ..., a_k , onde a_k representa a nível de execução da prioridade k . Como a função de execução foi adotada na forma de minimização, a um menor valor de a_k corresponde um melhor nível de execução da prioridade k .

O valor de um $a_k = 0$ indica, em particular, que o nível de prioridade k foi completamente executado.

O conjunto das linhas dos índices no quadro geral, serve para indicar se a solução vigente é a ótima ou não.

IV.3.2. Algoritmo para a Resolução de Problemas de PLOM

Passo 1: Inicialização. Estabelecer o quadro inicial só com a primeira linha de índices numéricos, ou seja, para $k = 1$.

Passo 2: Comprovação da otimalidade. Examinar a_k . Se a_k é igual a zero, continuar com o passo 6. Se não, examinar cada valor positivo dos índices numéricos ($I_{k,s}$) na linha k . Escolher o maior positivo destes índices que não tenha índices negativos nas prioridades superiores na mesma coluna. Designar esta coluna como s' . No caso de existir empate entre vários índices, a escolha será feita arbitrariamente. Se não existir um índice numérico com essas características continuar com o passo 6, caso contrário prosseguir com o passo 3.

Passo 3 : Determinação da variável que entra na base. A variável não básica que corresponde à coluna s', é a variável que entra na base.

Passo 4 : Determinação da variável que sai da base. Determinar a linha associada com o mínimo valor não negativo de:

$$b_i / e_{i,s'}$$

No caso de empate, escolher a linha que tenha a variável básica com maior nível de prioridade. Designar esta linha como i' . A variável básica associada com a linha i' é a variável que sai da base.

Passo 5 : Estabelecimento do novo quadro

(a) trocar posições da variável básica associada à linha i' , junto com seus correspondentes coeficientes do campo esquerdo, com a variável não básica associada à coluna s' , também junto com seus coeficientes localizados no campo superior.

(b) a linha i' , no novo quadro, é obtida (exceto $e_{i',s'}$) dividindo a linha i' por $e_{i',s'}$.

(c) a coluna s' do novo quadro (exceto $e_{i's'}$) é obtida dividindo a coluna s' do quadro original por $-e_{i',s'}$.

(d) o novo elemento na posição de $e_{i',s'}$ é o recíproco de $e_{i',s'}$. Os elementos restantes são calculados da seguinte forma:

Seja $\hat{b}_i$ e $\hat{e}_{i,s}$ elementos do novo quadro e b_i e $e_{i,s}$ elemento do quadro original, então:

$$\hat{e}_{i,s} = e_{i,s} - \frac{(e_{i',s})(e_{i,s'})}{e_{i',s'}} \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{(b_{i'})(e_{i,s'})}{e_{i',s'}} \qquad \text{(IV.2)}$$

(e) o cálculo dos novos valores de $I_{k,s}$ e a_k se faz pelas fórmulas:

$$I_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} (e_{i,s} \cdot U_{i,k}) - w_{k,s} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot U_{i,k}) \qquad \text{(IV-4)}$$

Estes valores devem ser calculados para o nível de prioridade de k e para todos os níveis de prioridades anteriores.

(f) Retornar ao passo 2.

Passo 7 : Comprovação final da otimalidade.

Se todos os valores de a_k são iguais a zero, a solução é ótima. No caso de se ter algum $a_k > 0$,examinar os índices $I_{k,s}$ na linha correspondente. Se sobre os $I_{k,s}$ positivos existem somente valores negativos então esta solução é também ótima. No caso de existir valores não negativos sobre os índices $I_{k,s}$ da linha onde $a_k > 0$, a solução ainda não é ótima, devendo-se retornar ao passo 2.

IV.3.3. Complicações e sua resolução

Existem alguns casos especiais e complicações no estabelecimento do quadro inicial, durante a realização do algoritmo e na interpretação dos resultados. Destes, serão analisados os seguintes casos:

1 - Valores dos lados direitos dos objetivos.

Frequentemente, não existe um valor determinado para os lados direitos dos objetivos. Este problema pode ser resolvido colocando um valor razoável; em outras palavras um nível que se procura atingir. Alternativamente, pode-se utilizar um valor que corresponda ao maior valor que o lado direito possa atingir, para o caso de maximização, ou o menor dos valores, para o caso de minimização. É necessário procurar limites máximos ou mínimos que sejam realmente razoáveis, pois caso contrário pode-se degradar a solução resultante.

2 - Lados direitos negativos

O algoritmo da PLOM exige que todos os lados direitos das restrições sejam não positivos. Esta exigência pode ser facilmente cumprida para os objetivos com lado direito negativo, multiplicando por (-1) o respectivo objetivo. Neste caso, tem-se que levar em conta que para este objetivo, a variável de desvio negativo (n) será negativa e não poderá integrar mais a base inicial.

Deverá ser incluida nesta base, então, a variável de desvio positivo (p).

3 - Soluções não implementáveis

Solução não implementável é aquela que tem o primeiro elemento do vetor $\bar{a}$ (a_1) positivo, o que significa que o nível de prioridade um (que corresponde aos objetivos absolutos) não foi executado completamente. Na prática, este problema se resolve reconsiderando os objetivos ou mudando os limites dos recursos.

4 - Soluções ótimas alternativas

Tem-se soluções ótimas alternativas quando dois ou mais conjuntos de valores das variáveis de decisão têm exatamente o mesmo vetor $\bar{a}$ que corresponde ao nível de execução das prioridades. A existência de soluções ótimas alternativas é determinada pelos seguintes fatos:

(a) Todos os elementos de uma coluna de índices $I_{k,s}$ são iguais a zero.

(b) Existe pelo menos um valor positivo na correspondente coluna dos elementos $e_{i,s}$. Outra possibilidade para se ter soluções ótimas alternativas é quando todos os elementos do vetor $\bar{a}$ são iguais a zero e se tem um ou mais índices $I_{k,s}$ positivos que não têm valores negativos na sua coluna das prioridades superiores.

IV.3.4. Exemplo de aplicação do algoritmo de PLOM

Encontrar $\bar{x} = (x_1, x_2)$ que minimize:

$\bar{a} = \{(2p_1 + 3p_2), (n_3), (p_4)\}$

tal que:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + n_1 - p_1 &= 10 \\
x_1 \qquad + n_2 - p_2 &= 4 \\
5x_1 + 3x_2 + n_3 - p_3 &= 56 \\
x_1 + x_2 + n_4 - p_4 &= 12 \\
\bar{x}, \bar{n}, \bar{p} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Passo 1 : Estabelecimento do quadro inicial (Quadro IV.2)

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	x_1	x_2	p_1	p_2	p_3	p_4	$\bar{b}$
0	0	0	n_1	1	1	-1	0	0	0	10
0	0	0	n_2	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	5	3	0	0	-1	0	56
0	0	0	n_4	1	1	0	0	0	-1	12
			P_1	0	0	-2	-3	0	0	0

Passo 2 : $a_1 = 0 \rightarrow$ então prossegue-se com o passo 6.

Passo 6 : $k = k + 1 = 1 + 1 = 2$, $k < K$ $(K = 3) \rightarrow$ então, calcula-se a linha dos índices $I_{k,s}$ para a prioridade P_2 , (Quadro IV.3)

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	x_1	x_2	p_1	p_2	p_3	p_4	$\bar{b}$
0	0	0	n_1	1	1	-1	0	0	0	10
0	0	0	n_2	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	5	3	0	0	-1	0	56
0	0	0	n_4	1	1	0	0	0	-1	12
			P_1	0	0	-2	-3	0	0	0
			P_2	5	3	-2	-3	-1	0	56

Quadro IV.3

continua-se com o passo 2.

Passo 2 : $a_2 = 56 \rightarrow$ então examinar todos os índices positivos da linha 2. $I_{2,1}$ é o maior valor positivo (+5) e não tem na sua coluna valores negativos. Então s'=1, prosseguir com o passo 3.

Passo 3 : x_1 é a variável que entra na base.

Passo 4 : Calculando $b_i/e_{i,s'}$, obtém-se:

$$b_1/e_{1,1} = 10/1 = 10$$

$$b_2/e_{2,1} = 4/1 = 4 \text{ (valor mínimo)}$$
$$b_3/e_{3,1} = 56/5 = 11{,}2$$
$$b_4/e_{4,1} = 12/1 = 12$$

Logo a variável que sai é n_2 ($i' = 2$).

Passos 5(a),5(b) e 5(c): Trocam-se as posições das variáveis que entram e saem da base e calculam-se as linhas $i' = 2$ e $s' = 1$ do novo Quadro (Quadro IV.4).

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	n_2	x_2	p_1	p_2	p_3	p_4	$\bar{b}$
0	0	0	n_1	-1						
0	0	0	x_1	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	-5						
0	0	0	n_4	1						
			P_1							
			P_2							

Quadro IV.4

Passos 5(d) e 5(e) : Calculam-se os elementos restantes $e_{i,s}$ com as fórmulas (IV.1) e (IV.2) e todos os índices $I_{k,s}$ e a_k (para $k = 1,2$) utilizando as fórmulas (IV.3) e (IV.4) (Quadro IV.5).

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	n_2	x_2	p_1	p_2	p_3	p_4	$\bar{b}$
0	0	0	n_1	-1	1	-1	1	0	0	6
0	0	0	x_1	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	-5	3	0	5	-1	0	36
0	0	0	n_4	-1	1	0	1	0	-1	8
			P_1	0	0	-2	-3	0	0	0
			P_2	-5	3	0	5	-1	0	36

Quadro IV.5

Passo 2 : $a_2 = 36 \rightarrow$ logo, ainda não se satisfez completamente o nível de prioridade 2. Examina-se todos os índices positivos na linha 2 e encontra-se que o maior é $I_{2,4} = 5$. Porém, este elemento tem um índice negativo na sua coluna. Então, toma-se $I_{2,2} = 3$, que não tem índices negativos na coluna. Logo $s' = 2$ e prosseguimos com o passo 3.

Passo 3 : x_2 é a variável que entra.

Passo 4 : Calculam-se todos os $b_i/e_{i,s'}$ não-negativos:

$b_1/e_{1,2} = 6/1 = 6$ (valor mínimo)

$b_3/e_{1,3} = 36/3 = 12$

$b_4/e_{1,4} = 8/1 = 8$

Então $i' = 1$ e n_1 é a variável que sai da base.

Passo 5 : O novo Quadro com as variáveis x_2 e n_1 trocadas e todos os novos elementos calculados, mostra-se no (Quadro IV.6) e prossegue-se com o passo 2.

Passo 2 : $a_2 = 18 \rightarrow$ logo, o nível de prioridade não está completamente satisfeito. Porém todos os índices positivos $I_{2,5}$ tem elementos negativos nas respectivas colunas. Então prossegue-se com o passo 6.

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	n_2	n_1	p_1	p_2	p_3	p_4	$\overline{b}$
0	0	0	x_2	-1	1	-1	1	0	0	6
0	0	0	x_1	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	2	-3	3	2	-1	0	18
0	0	0	n_4	0	-1	1	0	0	-1	2
			P_1	0	0	-2	-3	0	0	0
			P_2	-2	-3	3	2	-1	0	18

Quadro IV.6

Passo 6 : $k = k+1 = 2 + 1 = 3$. $k \leq K$ $(K = 3)$ então, calcula-se a linha dos índices $I_{k,s}$ para P_3 (Quadro IV.7) e continua-se com passo 2.

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	2	3	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	n_2	n_1	p_1	p_2	p_3	p_4	$\overline{b}$
0	0	0	x_2	-1	1	-1	1	0	0	6
0	0	0	x_1	1	0	0	-1	0	0	4
0	1	0	n_3	-2	-3	3	2	-1	0	18
0	0	0	n_4	0	-1	1	0	0	-1	2
			P_1	0	0	-2	-3	0	0	0
			P_2	-2	-3	3	2	-1	0	18
			P_3	0	0	0	0	0	1	0

Quadro IV.7

Passo 2 : $a_3 = 0 \rightarrow$ então, prossegue-se com o passo 6.

Passo 6 : $k = k + 1 = 3 + 1 = 4 > K$, já que $k > K$. Continua-se com o passo 7.

Passo 7 : Embora $a_2 > 0$, a solução é a ótima.

A solução para este exemplo é, então:

$x_1^* = 4$; $x_2^* = 6$

$\overline{a}^* = (0,18,0)$

```
C          LEITURA DO LADO DIREITO OU SEJA O VETOR TB
      READ (5,31)  (TB(NO),NO=1,NOBJ)
      NMAR=NVAR+1
      DO 50 NO=1,NOBJ
      DO 51 NV=1,NVAR
   51 TK(NO,NV)=TE(NO,NV)
   50 TK(NO,NMAR)=TB(NO)
      WRITE  (6,312)((TK(NO,NV),NV=1,NMAR),NO=1,NOBJ)
C           ZERAMOS OS CAMPOS SUPERIOR E IZQUERDO
      DO 6 NP=1,NPRI
      DO 4 NO=1,NOBJ
    4 TL(NO,NP)=0
      DO 5 NC=1,NCOL
    5 TT(NP,NC)=0
    6 CONTINUE
C           LEITURA DOS VALORES DOS CAMPOS SUPERIOR E IZQUERDO
      WRITE (6,333)
      DO 7 NT=1,NTAF
      READ (5,32)IPRI,ISUB,WHTF
      WRITE (6,332)IPRI,ISUB,WHTF
C            A SUBROUTINE 'COLOCA' UBICA OS VALORES NOS CAMPOS
      CALL COLOCA (IPRI,ISUB,WHTF)
    7 CONTINUE
       WRITE(6,240)
C          ZERA-SE O CONTADOR DAS IMPRECOES DE RESULTADOS
      NPRT=0
C          PARA INICIAR O ALGORITMO ZERA-SE O CONTADOR DAS LIHAS
    8 NFIL=0
C          QUANDO NFIL=NPRI O ALGORITMO TERMINA
    9 IF(NFIL.EQ.NPRI) GO TO 11
C          NFIL E O NUMERO DA LINHA QUE ESTA OTIMIZANDO-SE
      NFIL=NFIL+1
C          CHAMADA A 'CINDX(0)' PARA CALCULAR OS I(K,S) DE NFIL
      CALL CINDX(0)
C          CHAMADA A ENSAL PARA DETERMINAR A COLUNA DA VARIAVEL
C          QUE ENTRA NA BASE E A LINHA DA VARIAVEL BASICA QUE SAI
   10 CALL ENSAL(NEVC,NDVR)
C          SE 'ENSAL' RETORNA O VALOR NEVC=0, A LINHA NAO PODE
C          SER MAIS OTIMIZADO
      IF(NEVC.LE.0)GO TO 9
C          CHAMADA A'NOVTAB' PARA CALCULAR O NOVO TABLEAU
      CALL NOVTAB(NEVC,NDVR)
      GO TO 10
C          CHAMADA A 'IMPSOL'PARA IMPRIMIR AS SOLUCOES
   11 CALL IMPSOL (NPRT)
C          CHAMADA A'SOLALT' PARA PROCURAR SOLUCOES ALTERNATIVAS
C          VALIDAS E IMPRIMIR-AS CASO EXISTAM
      CALL SOLALT(NPRT)
C          'IMPSOL' E 'SOLALT' INCREMENTAN NPRT+1 CADA VEZ QUE
C           IMPRIMEN SOLUCOES.SE NPRT=0 QUER DECIR QUE NAO
C           EXISTE SOLUCAO
```