

"SOBRE O CONTROLE DA SAÍDA EM SISTEMAS LINEARES MULTIVARIÁVEIS"

AFONSO CELSO DEL NERO GOMES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

S.P.Bhattacharyya  
Presidente  
José Antônio Orléans  
Martin Diamond

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
DEZEMBRO DE 1972

## RESUMO

Este trabalho tenta coletar toda informação disponível sobre problemas de controle da saída em sistemas lineares. Apresentamos as definições de controlabilidade de saída e sugerimos um método para construir um controle de malha aberta que conduz a saída a um valor especificado em um instante arbitrário de tempo.

Discutimos as relações entre esses conceitos e os métodos de solução usando realimentação de estado. Para um sistema linear invariante no tempo, com uma só saída, mostramos que controlabilidade de saída é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma realimentação linear das variáveis de estado que designa arbitrariamente os autovalores do sistema de malha fechada que são observáveis na saída. A aplicação deste resultado ao servomecanismo linear com uma saída mostra que a capacidade de tal sistema para seguir qualquer sinal de comando com erro de regime nulo e uma resposta transitória arbitrária é equivalente à controlabilidade de saída da planta e é independente da classe de perturbações.

Comentamos as vantagens e inconvenientes dos métodos apresentados e direções para futura pesquisa são indicadas.

## ABSTRACT

This work tries to collect all the available information on output control problems for linear systems. The definitions of output controllability are presented and a method for constructing an open loop input that drives the output to a specified value at a specified time instant is suggested.

The relations between these concepts and the solution methods using state feedback are discussed. For a single output linear time invariant system, output controllability is shown to be a necessary and sufficient condition for the existence of linear state variable feedback that freely assigns the eigenvalues of the closed loop system that are observable from the output. An application of this result to the single output linear servomechanism shows that the ability of such a system to track with zero steady-state error and an arbitrary transient response is equivalent to output controllability of the plant and is independent of the class of command signals and disturbances.

Advantages and drawbacks of the shown methods are discussed and directions for further research are indicated.

ÍNDICE

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	ii
ÍNDICE .....	iii
CAPÍTULO 1 .....	1
1.1 Introdução .....	1
1.2 Sumário da Tese .....	1
CAPÍTULO 2 .....	4
2.1 Sistemas Lineares .....	4
2.2 Definições .....	5
2.3 Critérios de Controlabilidade .....	8
2.4 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo ..	18
2.5 Construção de uma Entrada .....	25
CAPÍTULO 3 .....	33
3.1 Introdução .....	33
3.2 Sistemas com uma Entrada e uma Saída ...	36
3.3 Sistemas Multivariáveis .....	43
3.4 Zerando a Saída .....	48
3.5 Controlabilidade de Saída e Localização de Polos .....	51
3.6. Aplicação .....	55
CAPÍTULO 4 .....	61
4.1 Introdução .....	61
4.2 Reprodutibilidade Funcional .....	63
4.3 Energia Limitada .....	66

4.4 Lei de Controle Robusta .....	72
4.5 Conclusões Finais .....	75
REFERÊNCIAS .....	78

## C A P I T U L O 1

### 1.1. INTRODUÇÃO

Apesar da grande ênfase dada ao conceito de controlabilidade do estado no desenvolvimento da teoria moderna de controle, na maioria das situações práticas o interesse maior é o de controle das saídas e não do estado.

No problema dos servomecanismos, por exemplo, desejamos que a saída apresente um certo comportamento e, normalmente, o estado do sistema considerado não é controlável, ou mesmo estabilizável. A literatura deste problema tem aumentado nos últimos anos: Bhattacharyya<sup>1</sup>, Bhattacharyya<sup>2</sup>, Bhattacharyya<sup>3</sup>, Anderson e Moore<sup>4</sup> e outros.

Intimamente relacionado com o problema do servomecanismo é o problema de "zerar a saída de um sistema", completamente resolvido para o caso linear em Bhattacharyya<sup>5</sup>, por intermédio de realimentação de estado.

Embora as soluções atuais desses problemas sejam baseadas em controle do estado, eles podem ser encarados como problemas de controle da saída. Este trabalho tenta coletar todo o material disponível em controlabilidade de saída e relacioná-lo com as soluções conhecidas dos mencionados problemas.

### 1.2. SUMÁRIO DA TESE

As primeiras considerações sobre controle de saída

parecem ser devidas a Kreindler e Sarachik<sup>6</sup>. No Capítulo 2 apresentamos as definições e critérios desenvolvidos por eles para o caso linear. Sempre que possível usaremos as versões geométricas e algébricas (matriciais). É então mostrado como construir um controle de malha aberta que transfira a saída a um valor especificado em um instante arbitrário do tempo.

No Capítulo 3 o problema de controlar a saída no intervalo de tempo  $[0 \infty)$  por realimentação das variáveis de estado é estudado. As soluções disponíveis e suas relações com controlabilidade de saída são apresentadas. Estas relações são utilizadas para provar que a capacidade de um servomecanismo linear com uma saída para seguir assintoticamente uma classe de sinais de comando em presença de uma classe de perturbações é uma propriedade da planta e é independente da classe dos sinais e perturbações.

No Capítulo 4 o problema de se conseguir uma função arbitrária do tempo como saída é considerado, e os mais importantes resultados disponíveis são apresentados. Mostramos também que a solução para o problema de regulação da saída vista no Capítulo 3 possui o inconveniente de ser muito sensível a variações nos ganhos da realimentação. Condições evitando a ocorrência de leis de controle sensíveis são apresentadas.

É salientado o fato de que a condição para pequena sensibilidade é a mesma que a condição para regulação da saída com energia limitada.

Finalmente mencionamos várias questões abertas relacionadas com o controle da saída.

## C A P I T U L O    2

### 2.1. SISTEMAS LINEARES

Os conceitos de controlabilidade de estado, ou de saída, são importantes em qualquer problema de controle, mas a teoria atual dispõe de condições construtivas apenas para o caso linear. Assim consideremos nesta tese somente sistemas lineares.

Seja  $S$  o sistema linear variante no tempo dado por:

$$S \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \end{array}$$

onde o estado  $x$ , a entrada  $u$ , e a saída  $y$  são vetores de dimensões  $n$ ,  $m$  e  $r$  respectivamente ( $r \leq n$ ).  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  são matrizes de ordens compatíveis e funções do tempo contínuas por partes.  $x$ ,  $y$  e  $u$  podem ser encarados como pontos dos espaços euclidianos  $X$ ,  $Y$ , e  $U$ , os espaços de estado, de saída e de entrada respectivamente.

A solução de (1) é:

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2a)$$

$$y(t) = C(t)\phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2b)$$

As equações (2) podem ser escritas em forma mais compacta:

$$x(t) = x^0(t) + \int_{t_0}^t H_x(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3a)$$

$$y(t) = y^0(t) + \int_{t_0}^t H_y(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3b)$$

onde  $H_x(t, \tau) = \phi(t, \tau) B(\tau)$ ;  $H_y(t, \tau) = C(t) H_x(t, \tau)$ ;

$x^0(t) = \phi(t, t_0) x(t_0)$  e  $y^0(t) = C(t) x^0(t)$  é a solução homogênea  
(resposta do sistema livre à condição inicial  $x(t_0)$ ).

Os elementos  $h_{ij}(t, \tau)$  da matriz  $H_y(t, \tau)$  podem ser interpretados como a resposta impulsiva do sistema para  $t > \tau$  e são funções contínuas por partes em  $t$  e  $\tau$ .

## 2.2 DEFINIÇÕES

As definições apresentadas nesta seção foram primeiramente dadas em Kreindler e Sarachik<sup>6</sup>.

### DEFINIÇÃO 2.2.1.

"S é dito completamente saída controlável em  $[t_0, t_f]$  se, dados  $t_0$  e  $t_f$ , e  $x(t_0)$  arbitrário, qualquer valor final da saída,  $y(t_f)$ , em  $Y$  pode ser alcançado por algum controle  $u(t), t \in [t_0, t_f]$ ".

A frase "algum controle  $u$ " indica que nenhuma restrição (por exemplo em amplitude ou energia) é colocada em  $u$ . No que segue a única hipótese feita é serem as variáveis de controle funções do tempo contínuas por partes. A palavra "completamente" dá ênfase ao fato de ser arbitrária a escolha dos valores inicial e final.

O conceito acima pode se tornar independente do intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$  através da seguinte

#### DEFINIÇÃO 2.2.2.

" $S$  é dito completamente saída controlável se, para qualquer  $t_0$ , qualquer valor final da saída,  $y(t_f)$ , pode ser alcançado em um tempo finito  $t_f$ ,  $t_f \geq t_0$ , para condições iniciais arbitrárias em  $t = t_0$ ".

O exemplo abaixo mostra que um sistema pode ser completamente saída controlável e não ser completamente saída controlável em certos intervalos.

#### EXEMPLO 2.2.1.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

$$\text{onde } b(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 1 & \text{para } t > T \end{cases}$$

Para este caso  $\phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1+t-t_0 \end{bmatrix} x(t_0) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1+t-t_0 \end{bmatrix} x(t_0) + \int_{t_0}^t (1+t-\tau) u(\tau) d\tau \quad \text{para } t > T$$

Em qualquer intervalo  $[t_0, t_f]$  com  $t_f \leq T$  a saída é unicamente determinada pela condição inicial  $x(t_0)$  sendo assim impossível de se alcançar um  $y(t_f)$  arbitrário. Mas para algum  $t_f > T$ ,  $t_f$  finito, a integral  $\int_{t_0}^{t_f} (1+t_f-\tau) u(\tau) d\tau$  pode assumir qualquer valor por uma escolha apropriada de  $u(\tau)$ . Portanto o sistema é completamente saída controlável embora não seja completamente saída controlável em intervalos contidos em  $[0, T]$ . O exemplo mostra também que controlabilidade completa da saída em algum intervalo  $[t_0, t_1]$  não implica necessariamente que a propriedade seja válida em um intervalo menor  $[t_0, t_2]$ ,  $t_2 < t_1$ .

Em alguns problemas práticos a saída  $y(t_f) = \lambda$  deve ser alcançada para cada  $t_f$ . A seguinte definição é útil:

#### DEFINIÇÃO 2.2.3.

"S é dito totalmente saída controlável se for completamente saída controlável em cada intervalo  $[t_0, t_f]$ ".

Às vezes, quando lidamos com plantas com várias entradas, uma distinção é feita entre controlar a saída por meio de todas as entradas simultaneamente e por meio de cada uma em particular.

#### DEFINIÇÃO 2.2.4.

"Um sistema saída controlável é dito fortemente saída controlável (no sentido completo ou total) se for saída controlável para cada variável de controle separadamente, enquanto as outras são zero; se não é dito fracamente saída controlável".

É claro que controlabilidade de estado é um caso especial de controlabilidade de saída; quando  $C(t)$  é inversível qualquer que seja a controlar a saída é equivalente a controlar o estado.

### 2.3. CRITÉRIOS DE CONTROLABILIDADE

Seja

$$y^d(t) = y(t) - y^0(t) \quad (4)$$

A equação (3b) torna-se

$$y^d(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} H_y(t_f, \tau) u(\tau) d\tau \quad (5)$$

e o problema de mover a saída até  $y(t_f)$  a partir de alguma condição inicial  $x(t_0)$  transforma-se no de colocá-la em  $y^d(t_f)$  partindo de condições iniciais nulas.

LEMA 2.3.1.

"S é completamente saída controlável em  $[t_0, t_f]$  se e somente se, para todo  $\lambda$  não nulo em  $\mathcal{Y}$  existir um  $N_\lambda \subset [t_0, t_f]$ , com  $\mu(N_\lambda) \neq 0$ , tal que

$$H'_y(t_f, \tau)\lambda \neq 0 \quad \text{para } \tau \in N_\lambda \quad " \quad (6)$$

onde a linha indica transposição.

PROVA 6

Seja  $R(t_0, t_f)$  o conjunto de todos os pontos  $y^d(t_f)$  dados por (5) que podem ser alcançados da origem.

A planta é completamente saída controlável em  $[t_0, t_f]$  se e somente se cada ponto  $y^d(t_f) \in \mathcal{Y}$  pode ser alcançado da origem, ou, equivalente, se e somente se

$$R(t_0, t_f) = \mathcal{Y} \quad (7)$$

Mostremos que  $R(t_0, t_f)$  é convexo.

Se os pontos  $y_1(t_f)$  e  $y_2(t_f)$  em  $R(t_0, t_f)$  são alcançados pelos controles  $u_1 \begin{bmatrix} t_0 & t_f \end{bmatrix}$  e  $u_2 \begin{bmatrix} t_0 & t_f \end{bmatrix}$  então qualquer ponto  $y_3(t_f)$  dado por  $y_3(t_f) = a y_1(t_f) + (1-a) y_2(t_f)$ ,  $0 \leq a \leq 1$  é alcançado por  $u_3 = a u_1 + (1-a) u_2$ . Assim, todos os pontos do segmento de reta unindo cada par de pontos do conjunto também pertencem ao conjunto.

Como  $R(t_0, t_f)$  é convexo, para que (7) se verifique basta mostrar que  $R(t_0, t_f)$  é não limitado em cada direção de  $\mathbb{Y}$ , ou seja, que o produto escalar de  $y^d(t_f)$  por cada vetor  $\lambda$  não nulo, de comprimento fixo em  $\mathbb{Y}$  pode ser feito tão grande quanto se queira por uma escolha apropriada de  $u \begin{bmatrix} t_0 & t_f \end{bmatrix}$  (La Salle<sup>20</sup>).

Fazendo o produto escalar de (5) por  $\lambda$ :

$$\lambda \cdot y^d(t_f) \triangleq \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^d(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \lambda \cdot H_y(t_f, \tau) u(\tau) d\tau \quad (8)$$

Escolhendo  $u(\tau) = k H'_y(t_f, \tau) \lambda$ ,  $k > 0$  torna-se

$$\lambda \cdot y^d(t_f) = k \int_{t_0}^{t_f} \left[ H'_y(t_f, \tau) \lambda \right] \cdot \left[ H'_y(t_f, \tau) \lambda \right] d\tau \quad (9)$$

A condição é suficiente: (6) implica que a integral em (9) é positiva e  $\lambda \cdot y^d(t_f)$  pode ser feito tão grande quanto se queira aumentando-se  $k$ .

A condição é necessária: se para algum  $\lambda = \lambda^*$  (6) é falsa então  $\lambda^* \cdot y^d(t_f) = 0$  não importando a maneira de escolhermos  $u(t)$  em (8) e nenhum ponto  $y^d(t_f)$  na direção de  $\lambda^*$  pode ser alcançado.

C.Q.D.

### COMENTÁRIOS

- Note que  $H_y'(t_f, \tau) \lambda$  pode se anular para alguns valores de  $\tau$  no intervalo  $[t_0, t_f]$ .

- Se o sistema não é completamente saída controlável em  $[t_0, t_f]$  então somente os vetores de  $\mathcal{Y}$  ortogonais ao vetor  $\lambda^*$  que viola a condição (6) podem ser alcançados a partir da origem. Todos estes pontos formam o subespaço vetorial  $\mathcal{Y}_c(t_0, t_f)$  controlável em  $[t_0, t_f]$ .  $y(t_f)$  pode ser alcançado se e somente se  $y^d(t_f) \in \mathcal{Y}_c(t_0, t_f)$ .

- Condição (6) expressa a independência linear das linhas de  $H_y(t_f, \tau)$  para  $t_0 \leq \tau \leq t_f$  e uma condição necessária e suficiente para isto é que a matriz Gramiana

$$P(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} H_y(t_f, \tau) H_y'(t_f, \tau) d\tau \quad (10)$$

seja não singular . Kreindler e Salachik <sup>6</sup>.

- Para controlabilidade completa da saída , (6) e (10) devem ser verdadeiras para cada  $t_0$  e algum  $t_f > t_0$  ( $t_f$  pode depender de  $t_0$ ). Para controlabilidade total da saída (6) e (10) devem ser verdadeiras para qualquer  $t_0$  e qualquer  $t_f > t_0$ .

## LEMA 2.3.2.

"  $S$  é fortemente completamente saída controlável em  $[t_0, t_f]$  se e somente se para todo  $\lambda$  não nulo em  $\gamma$  existir  $N_\lambda \subset [t_0, t_f]$  com  $\mu(N_\lambda) \neq 0$  tal que

$$\lambda \cdot h_j(t_f, \tau) \neq 0 \quad \text{para } \tau \in N_\lambda \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

onde  $h_j(t_f, \tau)$  é a  $j$ ésima coluna de  $H_y(t_f, \tau)$

## PROVA 6

(8) pode ser escrita como

$$\lambda \cdot y^d(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^m \lambda \cdot h_j(t_f, \tau) u_j(\tau) d\tau \quad (12)$$

usando somente a  $j$ ésima variável de controle e o mesmo argumento do lema 2.3.1. a prova segue facilmente.

COMENTÁRIOS

- Observando que  $t_f$  aparece como um parâmetro em (6) e (11) vemos que, se uma planta for completamente saída controlável em algum  $[t_0, t_1]$  ela pode não ser completamente saída controlável em  $[t_0, t_2]$ ,  $t_2 \neq t_1$ .

- Como os elementos de  $H_y(t, \tau)$  são funções arbitrárias de  $t$  e  $\tau$ , contínuas por partes, as funções escalares  $\lambda \cdot h_j(t, \tau)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  podem se anular em regiões arbitrárias do plano  $(t, \tau)$ . Daí as seguintes definições:

#### DEFINIÇÃO 2.3.1.

"  $S$  é dito saída próprio\* se para cada  $\lambda \neq 0$  em  $Y$ ,  $H_y(t, \tau) \lambda \neq 0$  em cada região do plano  $(t, \tau)$ ".

#### DEFINIÇÃO 2.3.2.

"  $S$  é dito saída normal\*\* se para todo  $\lambda \neq 0$  em  $Y$ ,  $\lambda \cdot h_j(t, \tau) \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  em cada região do plano  $(t, \tau)$ ".

Então, saída própria e saída normal são propriedades mais fortes do que controlabilidade total da saída e forte controlabilidade total da saída respectivamente.

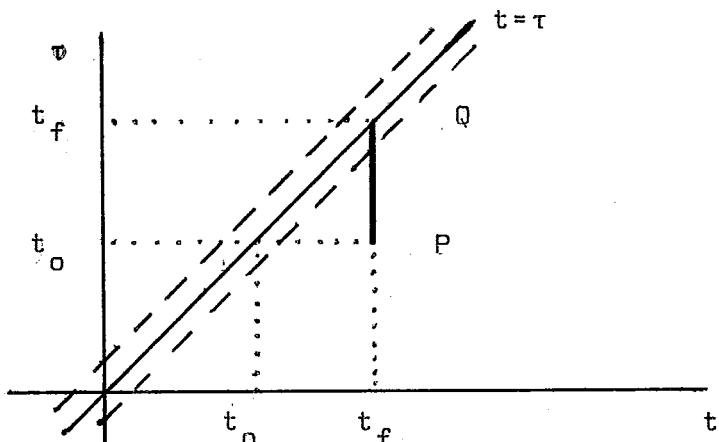
Antes de dar um exemplo é interessante ilustrar a seguinte

\* output proper no original

\*\* output normal no original

PROPRIEDADE 2.3.1.

"Se para todo  $\lambda \neq 0$  em  $\mathbb{Y}$ ,  $H'_y(t, \tau)\lambda$  não se anula na faixa do plano  $(t, \tau)$  dada por  $|t - \tau| < \epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$  então o sistema é totalmente saída controlável".



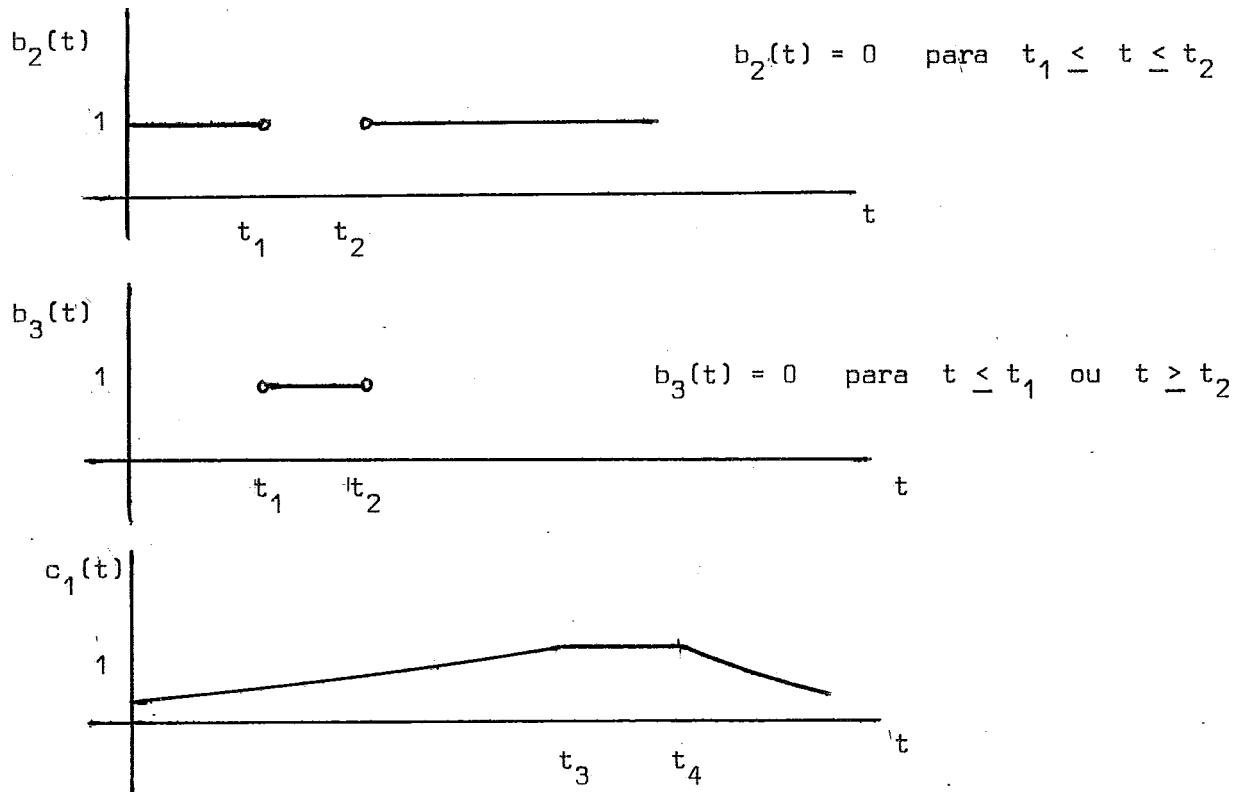
Supomos que o sistema não é totalmente saída controlável. Então para algum  $\lambda \neq 0$ ,  $H'_y(t_f, \tau)\lambda = 0$  para todos os valores de  $\tau$  no intervalo  $[t_0, t_f]$  e assim  $H'_y(t, \tau)\lambda$  se anula na linha PQ mostrada na figura.

EXEMPLO 2.3.1.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

A variação no tempo dos coeficientes é dada por



Em nosso caso  $H_y(t, \tau) = h_y(t, \tau) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ (t-\tau) b_2(\tau) + b_3(\tau) \end{bmatrix}$

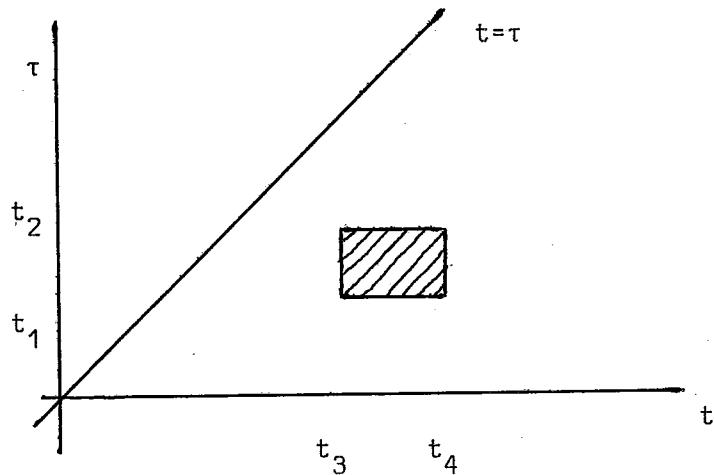
Para qualquer vetor  $\lambda^* \neq 0$  no subespaço  $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$  temos

$$H'_y(t, \tau)^{\lambda^*} = \lambda^* \cdot h_y(t, \tau) = k c_1(t) - k(t-\tau) b_2(\tau) - k b_3(\tau)$$

$$k \neq 0$$

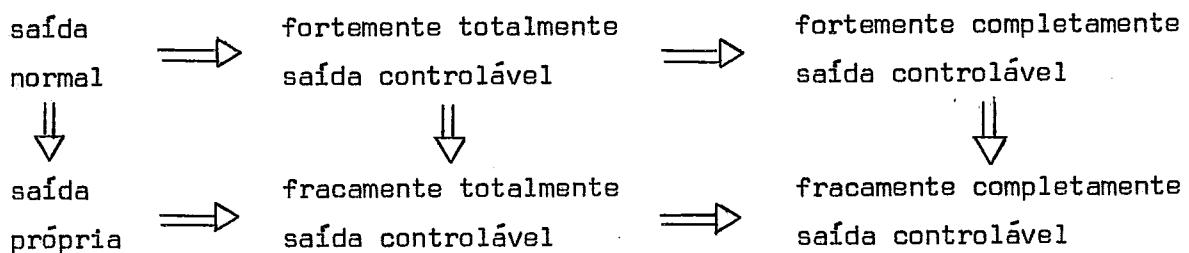
Observe que para pontos no retângulo hachurado temos

$c_1(t) = 1$  ;  $b_2(\tau) = 0$  ;  $b_3(\tau) = 1$  e portanto  $\lambda^* \cdot h_y(t, \tau) = 0$  nesta região.



Assim o sistema não é saída normal, embora seja totalmente saída controlável porque  $\lambda \cdot h_y(t, \tau)$  não se anula nas vizinhanças da linha  $t = \tau$ .

A hierarquia dos tipos de controlabilidade de saída é dada abaixo com as respectivas implicações



O Lema 2.3.1. é válido para controlabilidade de estado também, trocando-se  $H_y(t_f, \tau)$  por  $H_x(t_f, \tau)$ . Há entretanto algumas diferenças entre controlabilidade de estado e de saída, que serão apenas mencionadas aqui. Se uma planta é totalmente fortemente estado controlável (totalmente estado controlável) então ela é estado normal (estado própria). Ainda, se uma planta é completamente estado controlável em  $[t_0, t_1]$  ela será completamente estado controlável em qualquer intervalo mais longo  $[t_0, t_2]$ ,  $t_2 \geq t_1$ . Mais detalhes podem ser encontrados em<sup>6</sup>.

### LEMA 2.3.3.

"Controlabilidade completa do estado em  $[t_0, t_f]$  implica controlabilidade completa da saída em  $[t_0, t_f]$  se e somente se

$$C'(t_f) \lambda \neq 0 \quad \nabla \lambda \neq 0 \text{ em } Y \quad (13)$$

### PROVA

"Se o sistema é completamente estado controlável em  $[t_0, t_f]$  então, para todo  $x \neq 0$  em  $X$  existe  $N_x$ , com  $\mu(N_x) \neq 0$  tal que

$$H'_x(t_f, \tau)x \neq 0 \quad \text{para } \tau \in N_x \quad (14)$$

(14) implica que  $N_\lambda$  com  $\mu(N_\lambda) \neq 0$  tal que

$$H'_x(t_f, \tau) C'(t_f) \lambda \neq 0 \quad \text{para } \tau \in N_\lambda \quad (15)$$

se e somente se  $C'(t_f) \lambda$  é um vetor não nulo de  $X$ .

Desde que  $H'_y(t_f, \tau) = H'_x(t_f, \tau) C'(t_f)$  temos  $H'_y(t_f, \tau) \lambda \neq 0$  para  $\tau \in N_\lambda$  se e somente se  $C'(t_f) \lambda \neq 0$   $\lambda \neq 0$  em  $y$ .

CQD

A condição (13) é equivalente à independência linear das  $r$  linhas de  $C(t_f)$

#### 2.4. SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO

De agora em diante consideraremos o sistema linear  $S$  invariante no tempo dado pelas equações (1a) e (1b) quando  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  são matrizes constantes.

##### LEMA 2.4.1.

" $S$  é completamente saída controlável se e somente se

$$Q = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (16)$$

tiver rank  $r$ ".

##### PROVA:

Sem perda de generalidade façamos  $t_0 = 0$ . Pelo teorema de Cayley Hamilton a matriz  $A'$  satisfaz sua equação característica

tica

$$A'^n + c_1 A'^{n-1} + \dots + c_n I = 0 \quad (17)$$

Pre e post multiplicando (17) por  $B'$  e por  $e^{A't} C' \lambda$   
respectivamente temos:

$$B' \left[ A'^n e^{A't} C' + c_1 A'^{n-1} e^{A't} C' + \dots + c_n e^{A't} C' \right] \lambda = 0 \quad (18)$$

desde que  $A'^k e^{A't} = \frac{d^k}{dt^k} (e^{A't})$

$$e^{A't} = \phi'(t) \quad (18) \text{ torna-se}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} H'_y(t) \lambda + c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} H'_y(t) \lambda + \dots + c_n H'_y(t) \lambda = 0 \quad (19)$$

Para que  $H'_y(t) \lambda \neq 0$  em qualquer intervalo é necessário e suficiente que pelo menos uma das condições iniciais de (19) seja não nula, isto é:

$$\frac{d^k}{dt^k} H'_y(t) \lambda \Big|_{t=0} = B' A'^k C' \lambda \neq 0 \text{ para pelo menos um } k, k=0,1,\dots,n-1$$

Como isto é independente da escolha de  $t_f$ , (6) é equivalente ao fato de que, para cada  $\lambda \neq 0$  em  $\mathcal{Y}$  pelo menos um dos vetores

res  $B' A'^k C' \lambda$ ,  $k=0,1,\dots n-1$  seja não nulo. Ou, sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} B' C' \\ B' A' C' \\ \vdots \\ B' A'^{n-1} C' \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 0 \text{ em } y$$

o que é verdadeiro se e somente se  $\text{rank } Q = r$

C Q D

Nota-se que quando  $C = I_n$  (16) torna-se a conhecida condição de controlabilidade de estado.

Como pode ser visto na demonstração acima, para sistemas lineares invariantes no tempo todas as sutilezas desaparecem. Sem perda de generalidade  $t_0$  pode ser feito igual a zero e, se (6) ou (11) são válidas para algum  $t_f > t_0$ , serão válidas para qualquer  $t_f > t_0$ .

LEMA 2.4.2. 6

"Se  $S$  é completamente saída controlável em algum intervalo, é também completamente saída controlável, totalmente saída controlável e saída próprio (ou saída normal se as propriedades consideradas forem fortes)".

Portanto, quando lidamos com sistemas lineares invariantes no tempo podemos utilizar as expressões mais simples: controlabilidade de saída e controlabilidade de estado.

## LEMA 2.4.3.

" Para  $S$ , controlabilidade de estado implica controlabilidade de saída se e somente se  $\text{rank } C = r$ "

A prova é uma consequência direta do lema 2.3.3.

## EXEMPLO 2.4.1.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad x(0) = x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{rank } Q = \text{rank } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 2 = r$$

O autovalor  $\lambda = 1$ , não controlável, é observável.

Por isso poderíamos pensar na impossibilidade de controlar a saída. Mas o teste garante a controlabilidade de saída. Isso é porque  $\lambda = -2$ , controlável, também aparece em  $y_2$ . Se tivéssemos  $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$  a variável de saída  $y_2$  seria não controlável.

Para o que segue consideremos  $B$  como o subespaço de  $X$  gerado pelas colunas de  $B$ ;  $A^k B$  como a imagem de  $B$  pela transformação linear representada pela matriz  $A^k$  e a soma de subespaços como usualmente definida.

LEMMA 2.4.4.

"  $S$  é saída controlável se e somente se

$$R + N = X \quad (20)$$

onde  $R = B + AB + \dots + A^{n-1}B$  e  $N$  é o espaço nulo de  $C'$ .

PROVA:

Supondo-se  $\text{rank } C = r$ , existe uma transformação

$$x = T \tilde{x} \text{ tal que } CT = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{bmatrix} .$$

Como mudanças de coordenadas não afetam as propriedades de controlabilidade envolvidas no lema utilizaremos o sistema

$$\tilde{S} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} \tilde{x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{com } \tilde{x} = T^{-1} x \\ \text{e } T \text{ tal que } \tilde{C} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A condição é suficiente:

Seja  $\tilde{N} = \ker \tilde{C}$

$$\tilde{R} + \tilde{N} = X \Rightarrow \text{rank } \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{AB} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{N} \end{bmatrix} = n$$

onde  $\tilde{N}$  é uma base para  $\tilde{N}$

O produto  $\tilde{C} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{AB} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{N} \end{bmatrix}$  é igual às  $r$  primeiras linhas da matriz  $\tilde{B} \tilde{AB} \dots \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \tilde{N}$ . Como as  $n$  linhas dessa matriz são linearmente independentes, porque seu rank é  $n$  temos:

$$\text{rank } \tilde{C} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{AB} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{N} \end{bmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \text{rank } \begin{bmatrix} \tilde{CB} & \tilde{CAB} & \dots & \tilde{CA}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = r$$

$\Rightarrow$  controlabilidade de saída.

A condição é necessária:

$$\text{rank } \begin{bmatrix} \tilde{CB} & \tilde{CAB} & \dots & \tilde{CA}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank } \tilde{C} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = r$$

Pela forma particular de  $\tilde{C}$  podemos concluir que as  $r$  primeiras linhas de  $\tilde{B} \dots \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}$  são linearmente independentes, e também que o subespaço  $\tilde{N}$  possui uma base na forma

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ I_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} R_r & \\ & \tilde{N} \\ R_{n-r} & \end{bmatrix}$$

onde  $R_r$  é constituída pelas  $r$  primeiras linhas de  $\begin{bmatrix} \tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix}$  e  $R_{n-r}$  pelas  $n-r$  linhas restantes. É fácil ver que as  $n$  linhas desta matriz são linearmente independentes.

Então

$$\text{rank } \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{AB} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{N} \end{bmatrix} = n$$

$$\implies \tilde{R} + \tilde{N} = X$$

C Q D

(20) nos diz que controlabilidade de saída é equivalente ao fato de o subespaço dos modos controláveis mais o espaço nulo de  $C$  varrerem todo o espaço de estados.

Naturalmente quando os modos não controláveis estão em  $N$  a controlabilidade de saída é assegurada, mas esta não é uma condição necessária como pode ser visto no exemplo 2.4.1.

Esta formulação geométrica fornece uma fácil demonstração para o lema 2.4.3.

#### EXEMPLO 2.4.2.

Para o sistema do exemplo 2.4.1. :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e claramente } R + N = X$$

Se tivéssemos

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \quad \text{então } N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e } R + N = R \subset X$$

e o sistema é não saída controlável.

## 2.5. CONSTRUÇÃO DE UMA ENTRADA

Para um sistema linear invariante no tempo, supondo-se  $\text{rank } Q = r$  vamos procurar um segmento de entrada que coloque a saída em um valor arbitrariamente especificado  $y(T)$  para  $t = T$ .

Nosso procedimento segue estreitamente aquele apresentado por Vidyasagar para o caso do estado - Vidyasagar<sup>7</sup>.

Para  $t_0 = 0$  e  $x(t_0) = x_0$ , (2b) fica

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (20)$$

Para qualquer matriz  $A$  nxn,  $e^{At}$  pode ser escrito, pelo teorema de Cayley Hamilton, como:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \quad (21)$$

As funções escalares  $\alpha_i(t)$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  são obtidas<sup>7</sup> da seguinte maneira:

$$\dot{\alpha}(t) = A \alpha(t) \quad (22a)$$

$$\alpha(0) = [1 \ 0 \dots 0]^\top \quad (22b)$$

onde

$$\alpha(t) = [\alpha_0(t) \ \alpha_1(t) \ \dots \ \alpha_{n-1}(t)]^\top$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & -c_1 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$c_i$ ,  $i=0,1, \dots n-1$  são os coeficientes do polinômio característico de

A:

$$\Psi(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

#### LEMA 2.5.1.

" O conjunto de funções  $\{\alpha_j(t)\}$  é linearmente independente em qualquer intervalo não nulo  $[0 T]$  " .

Encontra-se uma prova deste lema em <sup>7</sup>.

Sejam  $b_j$ ,  $j=1, \dots m$  as colunas de B e  $u_j(\tau)$ ,  $j=1,2, \dots m$  as componentes do vetor  $u(\tau)$ .

$$B u(\tau) = \sum_{j=1}^m u_j(\tau) b_j \quad (24)$$

(24) e (21) em (20):

$$y(t) - C e^{At} x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m C A^i b_j \int_0^t \alpha_i(t-\tau) u_j(\tau) d\tau \quad (25)$$

Seja

$$\int_0^t \alpha_i(t-\tau) u_j(\tau) d\tau = f_{ij} \quad (26)$$

com  $f_{ij}$  dependendo do tempo

Então

$$y(t) - C e^{At} x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m C A^i b_j f_{ij} \quad (27)$$

A seguir apresentamos um algoritmo que fornece  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [0 T]$  tal que

$$y(T) = \lambda, \lambda \text{ arbitrário} \quad (28)$$

1 - Ache  $(Q Q')^{-1}$  (Q Q' tem inversa porque rank Q = r)

2 - Faça  $v = \lambda - C e^{At} x_0$

3 -  $p = Q' (QQ')^{-1} v$  ( $p$  é um vetor nm)

$$4 - R_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 10 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 10 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 10 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Os elementos da  $k$ -ésima linha da matriz  $R_j$  ( $n \times mn$ ) são nulos exceto o  $\left[(k-1)m + j\right]$ -ésimo que é 1.

$$5 - p_j = R_j p \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$6 - M = \int_0^T \alpha(T-\tau) \alpha' (T-\tau) d\tau$$

$$7 - u_j(\tau) = \alpha' (T-\tau) M^{-1} p_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Note que  $M$  é inversível porque as  $\alpha_i(T-\tau)$  são linearmente independentes.

Mostremos agora que  $u(\tau)$  como definido pela etapa 7- realmente acarreta  $y(T) = \lambda$ :

(28) é equivalente a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m c A^i b_j f_{ij} = v \quad (29)$$

(29) diz que  $v$  pode ser expresso como uma combinação linear das colunas de  $Q$

$$v = Q f \quad (30)$$

onde

$$f = \begin{bmatrix} f_{01} & \dots & f_{0m} & \dots & f_{i1} & \dots & f_{im} & \dots & f_{(n-1)m} \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

Precisamos escolher algum vetor  $f$  de dimensão  $m \cdot n$   
tal que (30) se verifique. Uma possível solução é:

$$f = Q' (QQ')^{-1} v \quad (32)$$

Resta ser mostrado que a etapa 7- fornece  $u(\tau)$  tal  
que o  $f$  achado pela equação (26) satisfaz (32).

$$R_j f = \begin{bmatrix} f_{0j} \\ f_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{(n-1)j} \end{bmatrix}$$

$$\text{e como } f_{ij} = \int_0^T \alpha_i(T-\tau) u_j(\tau) d\tau$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

$$R_j f = \int_0^T \alpha(T-\tau) u_j(\tau) d\tau$$

Usando a etapa 7-

$$R_j f = \int_0^T \alpha(T-\tau) \alpha'(\tau) d\tau M^{-1} p_j$$

$$R_j f = p_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Pela definição de  $p_j$ , e como

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

é não sin-

gular, temos que  $f = p$  e portanto (32) é satisfeita.

### COMENTÁRIOS

- a entrada obtida é "de malha aberta" e nada é dito a respeito de sua unicidade.

- a discussão é válida  $\forall T > 0$ . Mais estudos sobre o método devem ser feitos para o caso de convergência assintótica , i.e.,  $T \rightarrow \infty$ .

### EXEMPLO 2.5.1.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Queremos que  $y(1) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank } Q = 2 = r$$

$$1 - (Q \ Q') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 - v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$3 - p = \begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4 - R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5 - p_1 = \begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6 - \alpha(1-t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\tau \\ (1-\tau)^2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$7 - \rightarrow u(\tau) = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1-\tau & (1-\tau)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -12 & 10 \\ -12 & 64 & -60 \\ 10 & -60 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

para simplicidade façamos  $b=6$  e  $a=1$

Então

$$u(\tau) = 24\tau - 6$$

Verificamos que

$$x_1(t) = 4t^3 - 3t^2$$

$$x_2(t) = 12t^2 - 6t \implies y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_3(t) = 0$$

## C A P I T U L O    3

### 3.1. INTRODUÇÃO

No último capítulo vimos como construir uma função do tempo que, quando usada como a entrada de um sistema linear conduziria sua saída até um valor especificado em um certo instante. Este procedimento não é muito interessante em problemas práticos de controle, onde devemos usar leis de controle "de malha fechada", ou com realimentação e, além disso, a saída deve apresentar um determinado comportamento ao longo de um intervalo de tempo e não em um instante isolado.

Como exemplo, podemos citar o problema do servomecanismo, que é representativo da maioria das situações encontradas em controle. Trata-se de uma planta sujeita a perturbações pertencentes a uma certa classe. O objetivo é achar uma lei de controle por realimentação que faça a saída da planta seguir sinais de comando de uma certa classe com erro de regime nulo e uma resposta transitória adequada.

Para o caso linear invariante no tempo seja a planta perturbada descrita por:

$$\dot{p}(t) = E p(t) + G u(t) + D \xi(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = H p(t) + W \xi(t) \quad (1b)$$

onde  $p, u, y$  são o estado, entrada e saída da planta, e  $\xi$  é a perturbação dada por

$$\dot{\xi}(t) = Q \xi(t) \quad (2)$$

O sinal de comando  $r$  a ser seguido é gerado por

$$\dot{z}(t) = M z(t) \quad (3a)$$

$$r(t) = S z(t) \quad (3b)$$

sendo  $z$ =estado do gerador de sinais de comando.

Seja

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (4)$$

o erro a ser regulado para todas as condições iniciais  $p(0)$ ,  $\xi(0)$ ,  $z(0)$  por um controle da forma  $u = F_1 p + F_2 \xi + F_3 z$

As equações acima podem ser reescritas como:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (5a)$$

$$e(t) = C x(t) \quad (5b)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} E & D & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} H \\ W \\ -S \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$x' = \begin{bmatrix} p & \xi & z \end{bmatrix} \quad (6b)$$

Uma pergunta surge. Quando é possível achar uma matriz  $F$  tal que, com  $u=Fx$  em (5a) as seguintes condições se verificam qualquer que seja a condição inicial  $x(0)$ :

a- se  $e(0) = 0$  então  $e(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$  (7a)

b- se  $e(0) \neq 0$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  (7b)

c- a convergência de  $e(t) \rightarrow 0$  pode ser feita arbitrariamente rápida por escolha de  $F$ . (7c)

Satisfazer as condições a-, b-, c- é, talvez, o mais importante problema de controle clássico. Embora seja um problema de controle de saída, é difícil estabelecermos relações com o que vimos no Capítulo 2, porque a-, b-, c- consideram o comportamento da saída no intervalo  $[0 \infty)$  e não em um instante específico do tempo.

A primeira tentativa de solução de um problema

ma do tipo a-, parece ser devida a Sivan<sup>8</sup>, que achou condições satisfazendo (7a) para sistemas com uma entrada e uma saída; seus resultados estão na seção 3.2.

A seção 3.3. trata de uma generalização da idéia de Sivan, descoberta por Wonham e Morse<sup>9</sup> quando trabalhavam no problema de rejeição de perturbações.

A solução completa do problema de "zerar a saída" foi encontrada em 1971 por Bhattacharyya, Pearson e Wonham<sup>5</sup>. Nas últimas seções deste capítulo apresentaremos os novos resultados e suas relações com o conceito de controlabilidade da saída. Estas relações serão utilizadas para resolver o problema do servomecanismo delineado acima, para o caso de uma planta com uma só saída. Esta aplicação leva à interessante conclusão que controlabilidade da planta é equivalente à condição de solução do problema, que é, assim, independente da classe de perturbações e sinais de comando presentes.

### 3.2. SISTEMAS COM UMA ENTRADA E UMA SAÍDA

Considere o sistema linear  $S$  invariante no tempo:

$$S \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \\ y(t) = c x(t) \end{array} \right. \quad (8a)$$

(8b)

onde  $b$  e  $c$  são vetores coluna e linha respectivamente, constantes e de dimensão  $n$ .

Se  $x(0)$  pertencer ao espaço nulo de  $c$ ,  $x_0 \in N$ , então  $y(0) = 0$ , mas em geral não é possível manter a saída em zero, porque  $\dot{y}(0)$ ,  $\ddot{y}(0)$ , etc não são necessariamente nulos.

### DEFINIÇÃO 3.2.1.

" $N$  é o conjunto de todos os estados iniciais  $x_0$ , para os quais existe uma entrada  $u_{[0 \infty)}$  não necessariamente zero tal que  $y_{[0 \infty)} \equiv 0$ ".

Sivan mostrou que  $N$  é um subespaço cuja dimensão depende dos zeros da função de transferência dada por

$$H(s) = c(sI - A)^{-1} b \quad (9)$$

### TEOREMA 3.2.1.

"Para  $S$  dado por (8a), (8b),

$$N = \{ x_0 \in X \mid c A^i x_0 = 0, i = 0, 1, \dots, d \} \quad (10)$$

onde  $d$  é o menor inteiro  $j, 0 \leq j \leq n-1$ , tal que

$$c A^j b \neq 0 \quad (11)$$

### PROVA

Derivando (8b), obtemos:

$$\begin{aligned} y &= c x \\ \dot{y} &= c A x + c b u \\ \ddot{y} &= c A^2 x + c A b u + c b \dot{u} \\ \vdots & \\ y^{(k)} &= c A^k x + c A^{k-1} b u + \dots + c A b u^{(k-2)} + \\ &\quad + c b u^{(k-1)} \end{aligned} \quad (12)$$

(11) implica que

$$y^{(k)} = c A^k x + c A^{k-1} b u + \dots + c A^d b u^{(k-d-1)} \quad (13)$$

PARTE a):

se  $x_0 \in N$ , i.e.,  $x_0$  satisfaz (10) então

$$y^{(k)}(0) = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, d \quad (14)$$

Escolhemos

$$u(t) = F x(t) \quad \text{com} \quad F = -\frac{c A^{d+1}}{c A^d b} \quad (15)$$

(15) em (12) acarreta que

$$y^{(k)}(t) = 0, \quad t \in [0, \infty) \quad \text{para } k = d+1, d+2, \dots \quad (16)$$

(16) nos diz que  $y(t)$  deve ser um polinômio em  $t$  de grau no máximo igual a  $d$ . Este polinômio satisfaz (14) somente se seus coeficientes são todos zero. Assim, com  $u(t)$  dado por (15) teremos  $y[0, \infty) \equiv 0$ .

PARTE b) :

Se  $x_0 \neq N$ , i.e.,  $c A^i x_0 \neq 0$  para algum  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ , então  $y^{(i)}(0) \neq 0$  e portanto  $y[0, \infty) \neq 0$  para qualquer escolha de  $u$ .

C Q D

Lembramos que  $d = n-m-1$  onde  $n$  é a dimensão do espaço de estados e  $m$  é o número de zeros de  $H(S)$  sem haver cancelações.

### COMENTÁRIOS

- Para reduzir a saída de  $S$  a zero e lá mantê-la, devemos tentar controlar o estado de tal maneira que ele alcance algum ponto em  $N$ . Se  $x(T) \in N$  seremos capazes de manter a saída em zero. Nada foi dito sobre como alcançar  $N$ .

- A existência de  $d$  é equivalente a controlabilidade da saída.

- Zeramos a saída de  $S$  usando realmenteção de estado. Sivan e Levy<sup>10</sup> estudaram a estabilidade do sistema de malha fechada e descobriram que ele nem sempre é estável, e nunca é assintoticamente estável.

Colocando (15) em (8a) temos:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) \text{ onde } \tilde{A} = A - \frac{bcA^{d+1}}{cA^d b} \quad (17)$$

TEOREMA 3.2.2.<sup>10</sup>

Supondo  $S$  controlável (estado) a equação característica da matriz  $\tilde{A}$  é

$$\lambda^{n-m} (p_0 \lambda^m + \dots + p_{m-1} \lambda + p_m) = 0 \quad (18)$$

onde  $p_0 \lambda^m + \dots + p_m$  é o numerador de  $H(S)$ ".

PROVA:

Se no sistema original  $S$  fizermos uma mudança de coordenadas dada por  $x = Tz$  é fácil verificar que (17) fica

$$\dot{z} = T^{-1} \tilde{A} T z \quad (19)$$

Como (17) e (19) tem as mesmas propriedades de estabilidade podemos supor o sistema original dado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ -q_n & \dots & \dots & \dots & q_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$c = [p_m \dots p_0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

onde

$s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_n$  é o denominador da função de transferência  $H(s)$ .

De (20) aplicada em (17) segue, por manipulação direta que

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -p_m/p_o & \dots & -p_1/p_o \end{bmatrix}$$

É surpreendente notar que  $\tilde{A}$  depende somente dos zeros do sistema original: a estabilidade do sistema de malha fechada não depende da estabilidade de  $S$ .

O resto da demonstração segue facilmente e nos fornece um critério de análise da estabilidade de  $\tilde{A}$  baseado nos zeros de  $S$ .

Este método é a primeira tentativa conhecida na literatura para resolver um problema de controle de saída através de realimentação de estado.

### 3.3 SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Para sistemas com várias entradas e várias saídas Wonham e Morse<sup>9</sup> encontraram o maior subespaço  $V^*$  para o qual existe  $F$  tal que com  $u = Fx$ ,  $x_0 \in V^* \Rightarrow y \in \mathbb{R}^\infty \equiv 0$

No que segue apresentamos o desenvolvimento de<sup>9</sup> conduzindo à caracterização do subespaço  $V^*$ .

LEMA 3.3.1.<sup>9</sup>

"Seja o subespaço  $V \subseteq X$ . Existe uma matriz  $F$  ( $m \times n$ ) tal que  $(A + BF) V \subseteq V$  se e somente se  $AV \subseteq B + V$ "

DEFINIÇÃO 3.3.1.

" $H$  é o conjunto de todos os subespaços contidos em  $N$  que podem ser tornados invariantes por meio de realimentação de estado. Em outras palavras:

$H = \{ V \subseteq X \mid V \subseteq N \text{ e } (A + BF) V \subseteq V \text{ para algum } F \}$   
ou ainda

$H = \{ V \subseteq X \mid V \subseteq N \text{ e } AV \subseteq B + V \} \dots$

Claramente  $H$  contém o subespaço zero e, pelo lema 3.3.1., é fechado sob a operação de soma de subespaços. Portanto  $H$  contém um único elemento máximo  $V^*$ .

Assim  $V^*$  é o maior subespaço não observável que pode ser feito invariante por realimentação de estado. Em linguagem corriqueira, qualquer movimento dentro de  $V^*$  pode, por meio de uma realimentação de estado apropriada, ser mantido lá, porque  $V^*$  é  $(A + BF)$  invariante, e qualquer movimento ocorrendo em  $V^*$  não será sentido pela saída, porque  $V^*$  está contido no espaço nulo de  $C$ .

Se  $x(0) \in V^*$  seremos capazes de achar um  $F$  tal que, se  $u = Fx$  então  $x(t) \in V^*$  para todo  $t \geq 0$  porque  $(A + BF)V^* \subset V^*$  e a saída, que era zero, será mantida em zero satisfazendo assim a condição (7a). Como na definição de  $V^*$  não há restrições quanto ao número de entradas ou saídas, percebemos a relação de  $V^*$  com  $N$ .

Wonham e Morse apresentaram um algoritmo para a construção de  $V^*$ . Dado um suaespaço  $M \subset X$  definimos  $A^{-1}M$  como

$$A^{-1}M = \{ x \in X \mid Ax \in M \}$$

## ALGORITMO 3.3.1.

$$V^0 = N$$

$$V^1 = V^0 \cap A^{-1}(B + V^0)$$

⋮

$$V^{i+1} = V^i \cap A^{-1}(B + V^i)$$

⋮

$$V^\mu = V^* \quad \text{onde } \mu = \dim N$$

Para vermos que  $V^* = V^\mu$  observemos que  $V^* \subset V^0$  e se  $V^* \subset V^{i-1}$  então  $V^* = V^* \cap A^{-1}(B + V^*) \subset V^i = V^{i-1} \cap A^{-1}(B + V^{i-1})$ . Assim  $V^* \subset V^i \forall i$ . Como  $V^i \subset V^{i-1}$  existe um inteiro  $j$  tal que  $V^j = V^i$  para  $i \geq j$ . Mas  $V^* \subset V^j$  e  $V^j \subset H$  então  $V^* = V^j$ . Claramente  $0 \leq j \leq \mu$ .

Usando complementos ortogonais podemos modificar o algoritmo para uma forma algumas vezes mais conveniente. Sabendo que

$$M^\perp = \{x \in X \mid x' v = 0 \forall v \in M\}$$

temos:

$$\begin{aligned} V_0^\perp &= N^\perp \\ V_1^\perp &= V_0^\perp + A'(B + V_0^\perp)^\perp \\ \vdots & \\ V_{i+1}^\perp &= V_i^\perp + A'(B + V_i^\perp)^\perp \end{aligned}$$

Utilizando o algoritmo para o caso de uma entrada e uma saída verificamos que  $V^* \in N$ .

Rejeição de perturbações é uma interessante aplicação de  $V^*$  em um problema de controle de saída.

Considere o sistema perturbado  $S$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (21a) \\ (21b) \end{array}$$

onde  $x, u, y, A, B, C$ , são vetores de dimensões  $n, m, r$  e matrizes reais constantes de ordens compatíveis.  $D(n \times d)$  é uma matriz constante e  $\xi$  é a entrada de perturbação.

Lembramos que o subespaço controlável  $\mathcal{D}$  do par  $(A, B)$  é definido como

$$\mathcal{R} = \{ A | B \} = B + AB + \dots + A^{n-1}B$$

Se  $u = Fx$  em (21a), a saída  $y(t)$  não será afetada por qualquer  $\xi$  possível se e somente se  $\{(A+BF) | \mathcal{D}\} \subset N$ . O problema é: em que condições existe  $F$  tal que o efeito das perturbações se localize no espaço nulo  $N$ .

TEOREMA 3.3.1.

" Para  $S$  dado por (21a) e (21b), existe  $F(m \times n)$  tal que  $\{ A+BF \mid D \} \subset N$  se e somente se  $D \subset V^*$ ".

PROVA 9

A condição é suficiente

Por definição,  $V^* \subset N$  e  $AV^* \subset B+V^*$ ,  
e existe  $F$  tal que  $(A+BF)V^* \subset V^*$ .

Então

$$\{ A+BF \mid V^* \} = V^* \text{ e como } D \subset V^*$$

$$\{ A+BF \mid D \} \subset \{ A+BF \mid V^* \} \subset N.$$

A maximalidade de  $V^*$  não foi usada.

A condição necessária:

$$\text{Seja } \{ A+BF \mid D \} = \tilde{R}$$

Como  $\tilde{R}$  é o subespaço controlável do par  $(A+BF, D)$  temos  $(A+BF)\tilde{R} \subset \tilde{R}$  e ainda

$$\tilde{R} \subset N \text{ e } A\tilde{R} \subset B+\tilde{R} \quad (22)$$

A classe de  $\tilde{R}$  definida por (22) tem  $V^*$  como seu máximo elemento. Então

$$\mathcal{D} \subset \tilde{R} \subset V^*$$

C Q D

O teorema 3.3.1. nos diz que é possível rejeitar as perturbações se e somente se podemos encontrar uma realimentação de estado que mude a estrutura do sistema de tal maneira que as perturbações entrem no sistema através de  $V^*$ , tornando assim seu efeito não observável pela saída. Deve ser notado que, mesmo sendo as perturbações completamente desconhecidas devemos saber em quais partes do sistema elas estão atuando, isto é, a matriz  $D$ .

### 3.4. ZERANDO A SAÍDA

Nesta seção apresentamos os resultados que resolvem completamente o problema de controle de saída formulado por (7a) (7b) (7c) da seção 3.1.

(7a) se verifica se e somente se  $(A+BF)N \subset N$  geralmente não encontraremos uma matriz  $F$  com esta propriedade. O máximo subespaço de  $N$  que é  $(A+BF)$  invariante para

algum  $F \in V^*$ . É, assim, razoável modificarmos a formulação do problema.

Dados  $A, B, e V^* \subset X$  ache condições para a existência de um mapeamento  $F: X \rightarrow U$  tal que com  $u = Fx$  em (5a) as condições abaixo se verificam para qualquer condição inicial  $x(0)$ :

$$\text{se } x(0) \in V^* \text{ então } x(t) \in V^* \forall t, t \geq 0 \quad (23a)$$

$$\text{se } x(0) \notin V^* \text{ então } \min \{|x-z| \mid z \in V^*\} \rightarrow 0 \quad (23b)$$

quando  $t \rightarrow \infty$

Seja  $\alpha(\lambda)$  o polinômio mínimo de  $A$ , com a seguinte fatoração:

$$\alpha(\lambda) = \alpha^+(\lambda) \alpha^-(\lambda) \quad (24)$$

onde  $\alpha^+(\lambda)$  ( $\alpha^-(\lambda)$ ) tem todas suas raízes no semiplano direito fechado (semiplano esquerdo aberto) do plano complexo. O subespaço dos modos instáveis de  $A$  é definido como <sup>11</sup>:

$$X^+(A) \triangleq \text{kern } \alpha^+(A) \triangleq \{x \in X \mid \alpha^+(A)x = 0\} \quad (25)$$

#### COROLÁRIO 3.4.1.

"Existe  $F(m \times n)$  tal que com  $u = Fx$  em (5a) as condições (23a) e (23b) são satisfeitas se e somente se

$$X^+ (A) \subset R + V^* \quad " \quad (26)$$

Este corolário é uma consequência direta do teorema principal de <sup>5</sup> e diz que podemos levar a saída até zero e lá mantê-la por meio de uma lei de controle por m alha fechada se e somente se os modos instáveis de A forem varridos pelo subespaço controlável e  $V^*$ .

Lembramos que um conjunto de números complexos é chamado simétrico se contiver o complexo conjugado de cada elemento.

#### COROLÁRIO 3.4.2.

" Existe F tal que os autovalores de  $(A+BF)$  que são observáveis através de C podem ser livremente designados, em conjuntos simétricos, por escolha de F se e somente se

$$R + V^* = X \quad " \quad (27)$$

Este corolário é uma consequência direta da Proposição 2 em <sup>5</sup>, e fornece uma condição para que os

exponentes característicos que aparecem na resposta do sistema de malha fechada possam ser arbitrariamente escolhidos e sa - tisfazendo, portanto, a condição (7c).

Lembramos que, sendo  $C$  não singular, então o par  $(C, A+BF)$  é observável para qualquer  $F$  e o corolário acima se reduz ao fato de controlabilidade (de estado) ser equivalente a "designação de polos".

### 3.5. CONTROLABILIDADE DE SAÍDA E LOCALIZAÇÃO DE POLOS

Wonham<sup>11</sup> provou que controlabilidade de estado é equivalente à capacidade de livre designação dos autovalores de um sistema linear invariante no tempo por meio de realimentação de estado.

Na última seção vimos que a condição (27),  $R + V^* = X$  é equivalente à designação arbitrária dos autovalores que aparecem na resposta do sistema de malha fechada. Por outro lado, vimos que controlabilidade de saída é equivalente a

$$R + N = X \quad (28)$$

Como  $V^* \subset N$ , (27) implica (28), mas são elas equivalentes? A resposta é não, como veremos pelo exemplo seguinte

**EXEMPLO 3.5.1.**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1/2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$R = \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad N = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

o sistema não é controlável, mas é saída controlável ( $R+N=X$ ) e  $V^*$ , computado pelo algoritmo 3.4.1. é:

$$V^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

e obviamente pertence a  $\mathcal{R}$ : portanto (27) falha. Um simples cálculo mostra que o autovetor  $v$  de  $(A+BF)$  associado ao modo  $\lambda=1$  não controlável é da forma  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}'$ , com  $\gamma \neq 0$ . Então,  $Cv = \begin{bmatrix} \beta-\alpha & -\beta/2 + \gamma \end{bmatrix}'$ , que é um vetor não nulo para qualquer  $F$  mostrando assim que  $\lambda=1$  permanece observável na saída qualquer que seja a realimentação feita.

Entretanto, para sistemas com uma só saída temos o seguinte importante resultado:

#### TEOREMA 3.5.1.

" Para um sistema linear invariante no tempo com uma só saída ( $r=1$ ), controlabilidade da saída é um condição necessária e suficiente para a designação arbitrária (em conjuntos simétricos), por meio de realimentação de estados, do conjunto de autovalores observáveis do sistema de malha fechada ".

#### PROVA:

A necessidade vem do fato de que (27) implica (28). Para a suficiência, basta mostrar que, para a saída escalar  $y = cx$ , (28) implica (27). Para isto usaremos a caracterização de  $V^*$  para sistemas onde  $r=1$  dada no corolário 1 do teorema 1 em <sup>12</sup>. Neste caso:

$$V^* = \{c' A' c' \dots (A')^d c'\} \quad (29)$$

onde o símbolo  $\{M\}$  denota o subespaço gerado pela matriz  $M$  e  $d$  é o menor inteiro não negativo tal que

$$c' A^d B \neq 0 \quad (30)$$

Note que  $d$  existe se e somente se o terno  $(A, B, c)$  for saída controlável. Então (28) garante a existência de  $d$ .

Se  $x \in V^*$  existem escalares  $\alpha_i$ ,  $i=0, 1, \dots, d$ , não necessariamente únicos, tais que

$$x = \alpha_0 c' + \alpha_1 A' c' + \dots + \alpha_d A'^d c'$$

$$\text{Se } x \in R^\perp, x' A^i B = 0 \text{ para } i=0, 1, \dots$$

e, por ser  $d$  o menor inteiro satisfazendo (30) temos:

$$\alpha_d c' A^d B = 0$$

$$\alpha_{d-1} c' A^d B + \alpha_d c' A^{d+1} B = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{d-j} c' A^d B + \alpha_{d-j+1} c' A^{d+1} B + \dots + \alpha_d c' A^{d+j} B = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0 c' A^d B + \alpha_1 c' A^{d+1} B + \dots + \alpha_d c' A^{2d} B = 0 \quad (31)$$

O conjunto de equações (31) juntamente com (30) implicam que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$$

Então  $x=0$ . Como a escolha de  $x$  é arbitrária, temos que  $\overline{R} \cap \overline{V^*} = \{0\}$  que é equivalente a (27).

C Q D

Lembramos que a exata delimitação da classe de todos os sistemas para os quais  $(27) \Leftrightarrow (28)$  não foi ainda encontrada.

### 3.6. APLICAÇÃO

Agora aplicaremos este último teorema para o caso do servomecanismo linear descrito pelas equações (1) - (6) considerando "y", "r" e "e" escalares, e as matrizes  $H$ ,  $W$ ,  $S$  como os vetores linha  $h$ ,  $w$  e  $s$  respectivamente.

As equações (5) podem ser reescritas:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (32a)$$

$$e(t) = c x(t) \quad (32b)$$

com  $A, B$ , como em (6a) e

$$c = [h, w, -s] \quad (33)$$

A capacidade do servomecanismo de seguir um sinal com erro de regime nulo e transitório arbitrário é equivalente à designabilidade, através de realimentação de estado em (32a), de um conjunto arbitrário de expoentes característicos no semiplano esquerdo para a resposta no tempo de  $e(t)$ .

Pelo teorema 3.5.1. isto é equivalente à controlabilidade de saída de  $(A, B, c)$ . Inspeção das matrizes  $A, B, c$ , mostra que  $cA^iB = hE^iG$ ,  $i=0, 1, \dots$  e assim, pelo teste matricial de controlabilidade da saída e pelo teorema de Cayley Hamilton,  $(A, B, c)$  é saída controlável se e somente se  $(E, G, h)$  é saída controlável. Acabamos de estabelecer a seguinte

### PROPOSIÇÃO

" Um servomecanismo linear com uma saída pode ser projetado para seguir uma classe de sinais de comando em presença de uma classe de perturbações com erro de regime nulo e res-

posta transitória arbitrária se e somente se a planta é saída controlável".

### COMENTÁRIOS

- A proposição salienta a interessante conclusão que a habilidade de seguir um sinal sem erro de regime e com transitório arbitrário é uma propriedade da planta e é independente da classe de sinais de comando e das perturbações. Se a restrição adicional de estabilidade da planta é imposta, este não será, geralmente, o caso, como pode ser visto pelos resultados de estabilização em <sup>13</sup>.

- Embora utilizemos realimentação de estado em (32a), é sabido <sup>13</sup>, que do ponto de vista de existência não se ganha em generalidade usando-se compensação dinâmica; entretanto, sob condições favoráveis de observabilidade, tal compensação pode sempre ser feita para eliminar a realimentação de quantidades não mensuráveis.

### EXEMPLO 3.6.1.

Seja a planta perturbada dada por:

$$\dot{p}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xi(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} p(t) + \xi(t)$$

Com

$$\dot{\xi}(t) = q \xi(t)$$

e

$$\dot{z}(t) = m z(t)$$

$$r(t) = -z(t)$$

O sistema composto é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$R = B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad N = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

Como  $R + N = B + N = X$  podemos concluir que,  
sendo o sistema de uma só saída,

$$V^* = N = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Um F genérico tal que  $(A+BF) V^* \subset V^*$  é dado por

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha-q-1 & 1+\alpha-m \end{bmatrix}$$

O sistema de malha fechada será:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha-q & 1+\alpha-m \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Fazendo  $x = T\tilde{x}$  onde  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  vem:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

Vemos que o comportamento de  $y$  pode ser livremente controlado pelo parâmetro  $\alpha$ .

Observamos também que, embora o critério de solução não dependa da classe de perturbações e sinais de comando, devemos conhecer  $q$  e  $m$  para construir  $F$ , e que o sistema de malha fechada não é necessariamente estável, pois as perturbações e os sinais de comando podem afetar modos não observáveis.

## C A P Í T U L O    4

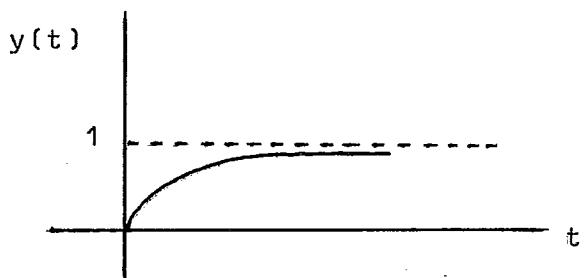
### 4.1. INTRODUÇÃO

O conceito de controlabilidade de saída, como visto no Capítulo 2, é uma propriedade pontual, porque considera a existência de uma função de entrada que conduz a saída a um ponto especificado do espaço de saídas em um instante de tempo especificado.

A habilidade de controlar a saída aumentou com a propriedade mais forte vista no Capítulo 3, ou seja  $R+V^*=X$ , que possibilita a designação arbitrária das raízes características que aparecem na resposta do sistema de malha fechada. Isto significa que a saída pode ser feita igual a qualquer função exponencial arbitrária escolhendo-se uma lei de controle por realimentação de estado adequada.

Supondo-se, agora, que a saída desejada seja:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t}{t+1}, \text{ para } t \in [0, \infty)$$



Com uma entrada do tipo  $u = Fx$ , a saída se-  
rá a solução de algum sistema homogêneo de equações diferenciais lineares ordinárias, com coeficientes constantes. Como a saída desejada não é uma função exponencial, não temos, até o presente momento, meios de controlar a saída para gerar funções do tipo acima.

A seção 4.2. trata da propriedade de reproduzibilidade funcional, a qual considera a existência de uma en-  
trada que produz qualquer função desejada de saída.

De um ponto de vista mais prático, as técni-  
cas para zerar a saída apresentam inconvenientes importantes . Se usarmos realimentação de estado para tornar não observável qualquer modo instável e não controlável, a energia de controle resultante será invariavelmente ilimitada. E além disso, o sis-  
tema de malha fechada obtido é muito sensível a pequenas varia-  
ções nos ganhos da matriz de realimentação.

Na seção 4.3. apresentamos alguns resulta-  
dos sobre leis de controle "robustas" (baixa sensibilidade) e de  
"energia finita".

Na seção 4.4. mostramos várias questões im-  
portantes relacionadas com problemas de controle da saída. Suas soluções trarão um melhor conhecimento das propriedades de en-  
trada e saída dos sistemas lineares multivariáveis tornando pos-

sível o aprimoramento de métodos de projeto.

#### 4.2. REPRODUTIBILIDADE FUNCIONAL

##### DEFINIÇÃO 4.2.1.

" Um sistema é dito funcionalmente reproduzível se, dada uma função arbitrária  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , sempre pode ser encontrada uma função  $u(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  tal que  $y(t) \equiv f(t)$  " .

A propriedade acima é, obviamente, funcional, porque considera a existência de uma entrada que produz uma função de saída especificada. Portanto, reprodutibilidade funcional pode ser encarada como "controlabilidade funcional da saída" e é uma propriedade mais forte do que as discutidas nos capítulos antecedentes.

Para o sistema linear invariante no tempo  $S$ , definido pela tripla  $(A, B, C)$  como de costume, sejam  $L\{u(t)\}$  e  $L\{y(t)\}$  as transformadas de Laplace dos vetores de entrada e saída respectivamente. Seja

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (1)$$

a matriz de transferência associada, assumindo condições iniciais nulas , i e,  $x(0) = 0$

DEFINIÇÃO 4.2.2. ( Brockett e Mesarovic <sup>14)</sup>)

" S é dito funcionalmente reproduzível se, da do  $L\{y(t)\}$  arbitrário sempre pode ser encontrado  $L\{u(t)\}$  tal que

$$L\{y(t)\} = G(s) L\{u(t)\} \quad (2)$$

Sendo r e m as dimensões da saída e da entrada, controlabilidade funcional da saída é simplesmente a condição de que  $G(s)$  tenha rank r no campo das funções racionais da variável s ou, em outras palavras, de que  $G(s)$  te nha uma inversa à direita. Assim vemos que  $m \geq r$  é sempre uma condição necessária para reproduutibilidade funcional.

Brockett e Mesarovic <sup>14</sup> apresentaram critérios para a propriedade baseados nas matrizes A,B,C. Sain e Massey <sup>15</sup> conseguiram testes mais simples usando a idéia de invertibilidade, que é o conceito dual de reproduutibilidade funcional.

TEOREMA 4.2.1. <sup>14</sup>

" S é funcionalmente reproduzível se e somente se

$$\text{rank } N_0 = (n+1)r \quad (3)$$

onde

$$N_0 = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B & \dots & CA^{2n-1}B \\ 0 & CB & \dots & CA^{n-2}B & \dots & CA^{2n-2}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & CB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para o critério definido em <sup>15</sup>, definimos

$$M_0 = 0$$

$$M_i = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{i-1}B \\ 0 & CB & \dots & CA^{i-2}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & CB \end{bmatrix} \quad (5)$$

TEOREMA 4.2.2. <sup>15</sup>

" S é funcionalmente reproduzível se e somente se, para algum inteiro  $L$ ,  $0 \leq L \leq n$ ,

$$\text{rank } M_L - \text{rank } M_{L-1} = r \quad (6)$$

Note que , por definição, rank  $M_{-1} = 0$

#### LEMA 4.2.1.

" Controlabilidade de saída é uma condição necessária para reproduzibilidade funcional" .

#### PROVA

A prova é uma consequência imediata das definições. Podemos também notar que rank  $Q = r$  segue imediatamente de (3) ou de (6).

#### 4.3. ENERGIA LIMITADA

As técnicas para zerar a saída de um sistema linear foram apresentadas no Capítulo 3. Entretanto, a lei de controle resultante frequentemente requer uma quantidade infinita de energia sendo, portanto, não realizável fisicamente.

#### EXEMPLO 4.3.1.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (7a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (7b)$$

Supondo  $\lambda=1$  teremos

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R+N=X$$

Como o sistema tem uma saída devemos ter

$$R + V^* = X \implies V^* = N$$

As matrizes  $F$  tais que  $(A+BF) V^* \subset V^*$  são da forma

$$F = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & 0 & f_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde } f_1 + f_2 = 1 \quad (8)$$

Para que  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  basta escolher  $f_1 < 0$  como mostraremos:

Fazendo  $u = f_1 x_2 + f_2 x_4$  vem: (8a)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & 0 & 1-f_1 \\ 0 & f_1 & 0 & 1-f_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (9b)$$

Seja  $x = T\tilde{x}$  onde  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1-f_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-f_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

(8a) pode ser escrita como  $u = f_1 y + x_4$

Então, com  $f_1 < 0$   $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  mas como  $\lambda = 1$ ,  $x_4$  é instável e  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ .

Bhattacharyya<sup>16</sup> resolveu o problema de zerar a saída com a restrição de que a energia de controle resultante seja finita. A seguir apresentamos os resultados principais.

Para o sistema linear invariante no tempo  $S$ , dado pela tripla  $(A, B, C)$  como de costume sob que condições existe  $F$  tal que, com  $u = Fx$  as condições abaixo se verificam:

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \forall x_0 \in X \quad (11a)$$

$$b) \int_0^\infty u'(t) R u(t) dt < \infty, \quad R = R' > 0 \quad (11b)$$

A integral em (b) representa alguma medida de energia de controle.

Seja

$$\theta^* = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{kerne}ll \quad CA^i = \text{kerne}ll \quad \left[ \begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right] \quad (12)$$

e

$$X^+(A) = \text{kerne}ll \alpha^+(A) \quad (13)$$

$\alpha^+(A)$  como definido por (24) no Capítulo 3.

TEOREMA 4.3.1. (Bhattacharyya<sup>16</sup>)

" Existe  $F$  tal que (11a) e (11b) se verificam se e somente se

$$X^+ (A) \subset R + \theta^* " \quad (14)$$

A interpretação de (14) é que o subespaço dos modos instáveis é varrido pela soma dos subespaços dos modos controláveis e não observáveis. Esta é uma condição mais forte do que a condição correspondente do Capítulo 3, onde o subespaço  $\theta^*$  pode ser substituído por qualquer subespaço que pode ser feito não observável por realimentação de estado. Isto, sem dúvida, é por causa da restrição de energia limitada. De fato, se realimentação de estado é usada para tornar não observável qualquer modo instável e não controlável a energia de controle empregada será invariavelmente não limitada.

Se quisermos, ainda, que os autovalores de  $(A+BF)$  que são observáveis a partir de  $C$  sejam livremente designáveis em conjuntos simétricos por escolha de  $F$ , a condição necessária e suficiente torna-se

$$R + \theta^* = X \quad (15)$$

Por definição,  $A \theta^* \subset \theta^*$ , e como  $\theta^* \subset N$  temos que  $\theta^* \subset V^*$  e assim (15) e (14) são condições mais fortes do que  $R + V^* = X$  e  $X^+ (A) \subset R + V^*$  respectivamente.

#### EXEMPLO 4.3.2.

Supondo  $\lambda = -1$  no exemplo 4.3.2. segue que:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R + \theta^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) \quad \text{e} \quad \alpha^+(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$$

$$X^+(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv R + \theta^*$$

De fato, agora, a regulação da saída é conseguida com  $F = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & 0 & f_2 \end{bmatrix}$  com  $f_1 < 0$  e  $f_2$  arbitrário. O controle será  $u = f_1 y + (f_1 + f_2) x_4$  e como  $y(t) \rightarrow 0$  e  $x_4$  é estável, temos que

$$\int_0^\infty u^2(t) dt < \infty \quad \checkmark x(0).$$

#### 4.4. LEI DE CONTROLE ROBUSTA

EXEMPLO 4.4.1.

Para o exemplo 4.3.1., com  $\lambda=1$ :

A partir de (9b) obtemos

$$\dot{y} = \dot{x}_3 - \dot{x}_4 = f_1 x_3 + (1-f_1)x_4 - x_4 = f_1 y$$

Supondo-se uma pequena perturbação no ganho de realimentação  $f_2$  da forma  $f_2 = (1-f_1) + \varepsilon$  teremos

$$\dot{y} = f_1 y + \varepsilon x_4 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x_4(0) \neq 0$$

Isto mostra que a lei de controle é "não robusta", isto é, altamente sensível a pequenas variações nos elementos de  $F$ .

Davison e Wang<sup>17</sup> apresentaram condições necessárias e suficientes para a existência de uma lei de controle robusta.

Seu resultado é apresentado a seguir.

Seja  $(A, B, C)$  representado na forma canônica:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A_5 & 0 & A_6 \\ 0 & 0 & A_7 & A_8 \\ 0 & 0 & 0 & A_9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right\} \text{ é controlável}$$

e

$$\left\{ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ 0 & A_9 \end{bmatrix} \right\} \text{ é observável}$$

Se  $u = Kx$  é a lei de controle, seja  $K + \delta K$  uma perturbação de  $K$  e, por definição

$$\Omega(\varepsilon) = \{ \delta K \mid |\delta K_{ij}| < \varepsilon \text{ se } K_{ij} \neq 0 \text{ e } \delta K_{ij} = 0 \text{ se } K_{ij} = 0 \} \quad (17)$$

onde  $K_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $K$ .

#### TEOREMA 4.4.1. 17

" Dados  $(A, B, C)$  como em (16) , existe uma lei de controle  $u = Kx$  e um  $\epsilon > 0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \forall x_0 \in X$  para toda perturbação  $K + \delta K$  de  $K$  com  $\delta K \in \Omega(\epsilon)$  se e somente se

$$\text{espectro } A_g \subset \mathcal{C}^- \quad (18)$$

onde  $\mathcal{C}^-$  é o semiplano esquerdo aberto do plano convexo".

Em<sup>16</sup> prova-se que (18) é equivalente a (14) e então a seguinte interessante proposição pode ser estabelecida:

#### PROPOSIÇÃO

" Para o sistema linear invariante no tempo  $S$ , a regulação da saída, condição (11a), pode ser obtida por uma realimentação linear e robusta das variáveis de estado se e somente se ela pode ser alcançada por uma lei de controle satisfazendo a restrição de energia finita (11b) ".

A importância desta proposição reside no relacionamento estabelecido entre dois conceitos aparentemente distintos.

#### EXEMPLO 4.4.2.

Para o exemplo 4.3.1., considerando  $\lambda=1$  a lei de controle para conseguirmos regulação da saída será

$$u = f_1 y + (f_1 + f_2)x_4 \quad \text{com} \quad f_1 < 0 \quad \text{e} \quad f_2 \quad \text{arbitrário.}$$

É fácil verificar que  $y(t) \rightarrow 0$  para qualquer perturbação de  $F$  com  $\delta f_2$  arbitrário e  $\delta f_1$  tal que

$$f_1 + \delta f_1 < 0 .$$

#### 4.5. CONCLUSÕES FINAIS

Sob o ponto de vista teórico, a capacidade de controlar a saída de um sistema linear foi grandemente aumentada com a introdução do conceito de reproduzibilidade funcional. Sain e Massey<sup>15</sup> mostraram que invertibilidade é o conceito dual de controlabilidade funcional da saída e pode ser

chamado de observabilidade funcional da entrada. Uma nova propriedade definida em 15 e chamada observabilidade pontual da entrada, ou simplesmente observabilidade da entrada é o conceito dual de controlabilidade da saída. Pesquisa teórica ainda precisa ser feita para encontrar a exata significação física do conceito dual de  $R + V^* = X$  e suas relações com os outros conceitos mencionados.

Para sistemas com uma só saída, verificamos a equivalência entre controlabilidade da saída e  $R + V^* = X$  e a importante propriedade que resulta da aplicação deste fato ao problema do servomecanismo.

Um problema ainda aberto é o da exata delimitação da classe de sistemas lineares para os quais  $R + V^* = X$  é equivalente a controlabilidade de saída.

Outro problema aberto, e certamente relacionado com o acima, é o de acharmos a classe de perturbações e sinais de comando que uma dada planta pode "assimilar". Em particular, se para a planta considerada  $R + V^*$  é equivalente a controlabilidade de saída, sua saída poderá seguir qualquer sinal de comando sob qualquer tipo de perturbações.

Se, para um sistema com uma entrada e uma saída, usamos realimentação de estado para tornar algum modo não

não observável, haverá cancelamentos na função de transferência. Um conhecimento mais profundo de sistemas multivariáveis será obtido quando interpretarmos as diversas propriedades citadas nesta tese, por exemplo  $R + V^* = X$ ,  $R + \theta^* = X$  etc, em termos das matrizes de transferência.

Embora os conceitos de "robustez" e de "limitação da energia" sejam essenciais para qualquer aplicação prática, o fato de usarmos realimentação de estado deve ser encarado.

Para usarmos estimadores de estado, ou "observadores" <sup>18</sup> é óbvio que as constantes de tempo do sistema estimador do estado devem ser muito menores que as do sistema original.

Para a utilização de compensação dinâmica <sup>19</sup> há ainda alguns problemas a serem resolvidos. Sob que condições tal compensação pode ser utilizada para eliminar realimentação de quantidades não mensuráveis, qual a menor dimensão possível do compensador e outros.

Outra investigação a ser feita refere-se ao relacionamento entre o número de entradas e de saídas. Por exemplo, dado o par  $(A, C)$  qual é o menor número de entradas (rank B) tal que  $(A, B, C)$  seja saída controlável.

REFERE<sup>N</sup>CIAS

- 1 - S.P. Bhattacharyya and J.B.Pearson, "Digital Controller Design for Linear Systems", Proc. 21<sup>th</sup> SWIECO Record , April 1969, San Antonio , Texas.
- 2 - S.P.Bhattacharyya and J.B.Pearson, "On the Linear Servo mechanism Problem" , Int. J.Control, 1970, Vol.12. N°5, pp 795-806.
- 3 - S.P.Bhattacharyya, "On the Theory of Linear Servomechanisms", Ph.D. dissertation, Rice University, Houston, Texas, May , 1971.
- 4 - B.D.O. Anderson and J.B.Moore, "Linear Optimal Control" , Prentice Hall, 1971.
- 5 - S.P.Bhattacharyya, J.B.Pearson and W.M.Wonham , "On Zero- ing the Output of a Linear System" , Information and Control, March, 1972.
- 6 - E.Kreindler and P.E.Sarachik, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems", IEEE T-AC-

- 9 (2) , 1964.
- 7 - Mathukumally Vidyasagar, "A Characterization of  $e^{At}$  and a Constructive Proof of the Controllability Criterion" , IEEE T-AC , August/1971.
- 8 - Raphael Sivan, "On Zeroing the Output and Maintaining it Zero" , IEEE T-AC , April/1965.
- 9 - W.M. Wonham and A.S. Morse , "Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems : a Geometric Approach" SIAM J.Control, Vol.8, №1 , February/1970.
- 10- S.Levy and R.Sivan, "On the Stability of a Zero Output System", IEEE T-AC , April/1966.
- 11- W.M.Wonham, "On Pole Assignment in Multi Input Controllable Linear Systems", IEEE T-AC (12) pp 660-665 , 1967.
- 12- A.S.Morse e W.M.Wonham, "Status of non Interacting Control" IEEE , T-AC-12 (6) , 1967.
- 13- S.P.Bhattacharyya e J.B.Pearson, "Error Systems and the Linear Servomechanism Problem" , 5<sup>th</sup> Princeton Conf. on Information Sciences and Systems, March/1971 . Por apare

cer no Int. J. on Control.

- 14- R.W. Brockett and M.D. Mesarovic, "The Reproducibility of Multivariable Systems", J.Math. Anal. Appl. , Vol.11 , pp 548 - 563 , July/1965.
- 15- M.K.Sain and J.L.Massey, "Invertibility of Linear Time Invariant Dynamical Systems" , IEEE T-AC 14(2) , April / 1969.
- 16- S.P.Bhattacharyya , "Output Regulation with Bounded Energy" COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Internal Report. A ser publicado.
- 17- E.J.Davison and S.H.Wang, "Properties of Linear Time Invariant Multivariable Systems Subjected to Arbitrary Output and State Feedback" ; a ser publicado.
- 18- D.G.Luenberger, "Observers for Multivariable Linear Systems", IEEE T-AC AC" , April/1966.
- 19- J.B.Pearson e C.Y.Ding,"Compensator Design for Multivariable Linear Systems ", IEEE T-AC , Vol. AC 14 , April/1969.
20. J.P.La Salle, "The Time-Optimal Control Problem" em Contributions to Nonlinear Oscillations, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., Vol.5, p.1, 1960.