REDUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE CONTRÔLE ÓTIMO A PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Clóvis Caesar Gonzaga

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Jean-Paul Jacob

Presidente

[illegible]

Jack Schechtman

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
ABRIL - 1970

Agradeço ao meu orientador, Prof. Jean - Paul Jacob, que me encaminhou ao estudo de otimização e a meu amigo Newton D. Vasconcellos, por seu auxílio na redação e datilografia da tese.

Clovis Caesar Gonzaga

RESUMO

O princípio do mínimo de Pontryagin fornece condições necessárias para que seja minimizada uma funcional condicionada a um problema de contrôle. Como resultado, obtém-se, em geral, sistemas de equações diferenciais que as variáveis de contrôle e parâmetros do problema devem satisfazer. Nêste trabalho mostramos que certos tipos de problemas de contrôle podem ser aproximados, dentro de certo critério, por problemas de programação matemática, cujas soluções devem satisfazer certas condições. Estas aproximações não são do tipo "discretização no tempo", mas são aproximações nas funções contrôle usadas. Estudamos, nêste trabalho, condições necessárias e suficientes para os problemas simplificados, assim como alguns métodos numéricos para sua solução.

A B S T R A C T

Pontryagin's minimum principle furnishes the necessary conditions for the minimization of a functional restricted by a control problem. Systems of differential equations on the control variables and problem parameters are generally obtained as a result. This work shows that a certain class of control problems can be approximated, within certain limitations, by mathematical programming problems, the solution of which must satisfy determinate conditions. These approximations are not of the "time-discretization" type, but approximations on the control laws. We here study necessary and sufficient conditions for these simplified problems, as well as some numerical methods for their solution.

ÍNDICE

C A P I T U L O 1

INTRODUÇÃO AO PROBLEMA

Seção I - Introdução

O princípio do Mínimo de Pontryagin (ref. [2], pag. 284), quando aplicável a um problema de contrôle, fornece condições necessárias para que seja minimizada uma funcional. Como resultado de sua aplicação, obtém-se, no entanto, sistemas de equações diferenciais e problemas de minimização em espaços de dimensão infinita que raramente podem ser resolvidos por métodos analíticos e cuja complexidade cresce muito com o aumento de complexidade dos sistemas de contrôle tratados.

Nosso intuito neste trabalho é desenvolver um método de redução do problema de otimização em espaço de dimensão infinita em que consiste o problema de contrôle, a um problema de otimização em espaço de dimensão finita. Esta redução, realizada através de uma simplificação do espaço de contrôles admissíveis, levará a problemas de programação não linear, cujas soluções, se existirem, conduzirão a soluções sub-ótimas do primeiro problema.

1.I

O problema de programação matemática é obtido através da expansão do vetor contrôle em uma soma finita de funções elementares, como proposto por Jacob [1]. A otimização será feita sôbre os coeficientes dessa expansão, utilizando métodos de programação não linear.

O procedimento acima será desenvolvido nos capítulos 2 e 3 para problemas de contrôle particulares, onde abordamos problemas de tempo mínimo e problemas com critérios quadráticos. Poder-se-á ver, então, que a maior dificuldade do método reside na redução dos vínculos do problema de contrôle a vínculos sôbre os coeficientes da expansão. Esta redução será tratada no capítulo 4 para funções critério convexas e um algoritmo para resolver o problema reduzido será desenvolvido no capítulo 5.

Neste capítulo formularemos o problema de contrôle, introduzindo os casos particulares a ser tratados nos capítulos restantes.

Façamos inicialmente algumas observações sôbre notação.

<u>Notação:</u>

$$R^{+} = \{x \mid x \in R \wedge x \geqslant 0\}$$, onde R é o conjunto dos reais

1.I

Sejam $x \in R^n$ um vetor coluna e A uma matriz $n \times m$. Dados os conjuntos de índices $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, denotaremos:

$$x_I \triangleq \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$$

$A_i \triangleq$ iª linha da matriz A

$A^j \triangleq$ jª coluna da matriz A

$$A_I \triangleq \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix} , \quad A^J \triangleq \left[A^{j_1} \; A^{j_2} \ldots A^{j_m} \right]$$

Dada uma função $f : R^n \to R$, o gradiente de f em relação a x no ponto $\bar{x} \in R^n$ será denotado por

$$\nabla_x f(\bar{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Dada uma função $g : R^n \to R^m$

$$\nabla_x g(\bar{x}) \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}) \right]' \triangleq \left[\nabla_x g_1(\bar{x}) \cdots \nabla_x g_m(\bar{x}) \right]$$

onde "'" denota transposição.

Seção II - Introdução ao problema de contrôle

O problema de contrôle será enunciado segundo a apresentação de Athans e Falb (ref. [2], pag. 284). Para que o problema seja tratável com alguma generalidade, mas também sem uma complicação excessiva, faremos desde logo simplificações em sua enunciação: a) não se fazem restrições sôbre o estado do sistema;

b) as componentes do vetor contrôle serão limitadas sòmente em módulo;

c) o alvo do problema de contrôle será dado por uma variedade linear de $R^n \times R^+$ (vejam-se as definições abaixo).

Possíveis extensões da teoria serão indicadas nas conclusões dêste capítulo e dos seguintes.

Considere-se então um sistema variante no tempo, descrito pela equação (ref. [2], pag. 284)

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big)$$

onde $x : R^+ \longrightarrow R^n$

1 $x(t) \in R^n \quad \forall t \in R^+$, o estado do sistema

2 $u : R^+ \longrightarrow R^m$ satisfazendo condições de integrabilidade (veja-se [2], pag. 284)

3 $$u\,(t) \in \Omega \subset R^m \qquad \forall\, t \in R^+$$
$$\Omega = \left\{ y \in R^m \mid |y_i| \leq 1 \, , \; i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

4 $$f : R^n \times \Omega \times R^+ \longrightarrow R^n$$

5 Ao conjunto U de funções contrôle que satisfazem (2) e (3), acima, chamaremos

U = conjunto de contrôles admissíveis.

Vamos ainda definir o conjunto alvo.

6 $S \subset S_1 \times R^+$; $S_1 \subset R^n$, que neste trabalho será sempre tomado

$$S_1 = \left\{ x \in R^n \mid x_I = \bar{x}_I \right\}, \text{ onde } I = \left\{ i_1, i_2, \ldots, \ldots, i_k \right\} \subset \left\{ 1, 2, \ldots, n \right\}, \; \bar{x}_I \in R^{|I|}, \text{ dado,}$$

e a funcional

7 $$J : R^n \times U \times R^+ \times R^+ \longrightarrow R$$

$$J\left(x_0, u, t_0, T \right) = \int_{t_0}^{T} L\left(x\,(t), u\,(t), t \right) dt \qquad T \geq t_0$$

8 onde $L : R^n \times \Omega \times R^+ \longrightarrow R$

Problema de contrôle:

9 Encontrar, se existir, um contrôle admissível que, aplicado ao sistema (1), em um estado inicial x_0 no instante t_0 dados, leva $\left(x\,(t), t \right)$ ao alvo S (6), minimizando a fun-

cional critério $J(x_0, u, t_0, T)$ (7), onde T é o primeiro instante tal que $(x(T), T) \in S$

Seção III - Simplificação do problema de contrôle

Um extenso tratamento do problema (9) é feito na referência [2]. O conjunto de contrôles admissíveis U, constituido de funções satisfazendo condições gerais de integrabilidade, é muito geral. Nossa simplificação mais importante ao problema de contrôle será particularizar o conjunto U, como segue:

Considere-se um conjunto finito de funções dadas

10 $$v^j : R^+ \to R^m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

Definiremos agora

11 $$U^1 = \left\{ u \;\middle|\; u = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j , \ \alpha_j \in R, \ j = 1, 2, \ldots, q \ \wedge \ \wedge (\forall t \in R^+) \ |u_j(t)| \leq 1 , \ j = 1, 2, \ldots m \right\}$$

A particularização acima, com a hipótese adicional (12)

12 Hipótese: O sistema (1) é linear,

levar-nos-á a grande simplificação no tratamento do problema de contrôle, como segue:

O sistema (1) linear, variante no tempo será representado por

13 $$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

onde A (t) , B (t) são matrizes reais, respectivamente n x n e n x m , cuja apresentação e tratamento é encontrado na referência [3], pág. 341

Resolvendo o sistema (13) obtemos (ver [3] , pag. 342)

14 $$\dot{x}(t) = \phi(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \quad ,$$

onde ϕ é a matriz de transição de estado.

Fazendo-se agora

15 $$u(t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j\, v^j(t)$$

e substituindo (15) em (14), obtém-se

16 $$x(t) = \phi(t,t_0)\,x_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j\, F^j(t) \quad , \text{ onde}$$

17 $$F^j(t) \triangleq \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\,B(\tau)\,v^j(\tau)\,d\tau$$

Definindo

18 $$\alpha \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} \quad , \quad F(t) \triangleq \left[F^1(t) \;\; F^2(t) \cdots F^q(t) \right]$$

obtem-se finalmente de (16) e (18),

19 $$x(t) = \Phi(t,t_0)\, x_0 + F(t)\alpha$$

Segue-se também imediatamente que

20 $$x_I(t) = \Phi_I(t,t_0)\, x_0 + F_I(t)\alpha \quad , \text{ onde}$$

$$F_I^{\,j}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_I(t,\tau)\, B(\tau)\, v^j(\tau)\, d\tau$$

Note-se agora que a busca de um contrôle pertencente a U^1 transformou-se na busca de um $\alpha \in R^q$, e portanto reduziu-seao tratamento em um espaço de dimensão finita, o tratamento do espaço U de dimensão infinita.

A substituição de (19) e (15) na funcional $J(x_0, u, t_0, T)$ (7), leva a uma função cujo domínio depende do tipo de problema abordado, mas que poderá ser tratada por métodos de programação matemática.

Nas seções seguintes, apresentaremos o tratamento dos casos que nos ocuparão em todo o trabalho: problemas com tempo fixo e problemas de tempo mínimo.

Seção IV - Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares

Vamos considerar o caso particular em que, dado $T \in R^+$,

21 $$S = S_1 \times \{T\} \qquad , \quad T \geq t_0$$

$$S_1 = \{x \in R^n \mid x_I = \bar{x}_I\} \qquad \bar{x}_I \in R^{|I|} \quad \text{dado}$$

Como os contrôles admissíveis devem levar $(x(t), t)$ ao alvo, deve-se ter, substituindo $t = T$ em (20),

22 $$x_I(T) = \bar{x}_I = \Phi_I(T, t_0)\, x_0 + F_I(T)$$

Definindo-se

23 $$\hat{x}_I \triangleq \Phi_I(T, t_0)\, x_0 - \bar{x}_I$$

Obtem-se de (22) e (23)

24 $$\hat{x}_I + F_I(T) = 0$$

A equação (24) representa uma variedade linear de R^q de dimensão $n - |I|$. A grande vantagem dos problemas de tempo fixo reside na linearidade de (24), pois qualquer valor de $\alpha \in R^q$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j$$ resolve o problema de contrôle estará sempre, se existir, sôbre uma variedade linear. Veremos adiante que a equação (24) constituirá um vínculo do problema de programação não-linear a que se reduz o problema de contrôle, com a evidente vantagem de ser linear.

Note-se, entretanto, que os coeficientes que definem a variedade linear definida em (24), ou seja, os vetores $\hat{x}_I$ e $F^j(T)$, necessitam o conhecimento da matriz de transição de estados $\Phi(T, t_0)$ para poderem ser calculados. Em geral, o problema de achar-se Φ não é trivial, a não ser no caso de sistemas invariantes no tempo, que abordaremos a seguir.

Seção V – Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares invariantes no tempo

Citaremos ainda os resultados para sistemas lineares invariantes no tempo:

Se A e B forem constantes

25 $$\phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$$, o que substituído em (17) leva a

26 $$F^j(T) = e^{AT}\int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} B\, v^j(\tau)\, d\tau$$

Se $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, obtem-se, no lugar de (24), uma expressão muito simples para a variedade linear contendo α , ou seja

27 $$\hat{x} + F(t)\alpha = 0$$, onde $\hat{x} = e^{A(T-t_0)} x_0 - \bar{x}$

que pode ser escrita

28 $$\hat{x} + e^{AT}\hat{F}\alpha = 0$$, onde, de (26), temos que

29 $$\hat{F}^j = \int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} B\, v^j(\tau)\, d\tau$$

Como e^{AT} é não singular, multiplicando (28) por e^{-AT} obtem-se

30 $$\hat{x}_0 + F\alpha = 0 \ , \text{ onde } \hat{x}_0 = e^{-At_0}x_0 - e^{-AT}\tilde{x}$$

Note-se que as expressões para F^j e $\hat{x}_0$ são, neste caso, mais fáceis de ser calculadas que as expressões correspondentes na Seção IV.

Seção VI - Caso particular: problemas de tempo mínimo

Considere-se o problema de contrôle da Seção II, com a função L, introduzida em (8), definida por

31 $L\big(x(t),\ u(t),\ t\big) = 1$. Introduzindo-se (31) em II-7, vem

32 $$J\ (x_0\ ,\ u\ ,\ t_0\ ,\ T) = T - t_0$$

Seja ainda o alvo

33 $$S = S_1 \times R^+$$

34 $S_1 = \left\{ x \in R^n \mid x_I = \bar{x}_I \right\}$, $\bar{x}_I \in R^{|I|}$ dado.

Pode-se enunciar novamente o problema de contrôle:

35 Problema: Seja dado um sistema descrito pela equação $\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big)$, como na Seção II, acima, e seja U o conjunto de contrôles admissíveis (ver II-5). Encontrar um contrôle admissível, se existir, que leve o sistema de um estado inicial x_0 no instante t_0, dados, ao conjunto S_1 (34) em tempo mínimo $T - t_0$, também desconhecido.

O problema (35) é extensamente tratado na referência [2], à luz do Princípio do Mínimo. Os resultados obtidos desta maneira podem orientar-nos na escolha das funções elementares.

36 Devido ao princípio do "bang-bang" (ref. [2], pag. 382), dentro de condições de "normalidade", as componentes de u assumirão valores extremos, isto é, $|u_i(t)| = 1$ $\forall t \in [t_0, T]$. As condições de normalidade são bastante gerais e um resultado conhecido é o seguinte (ref. [2], pag. 400): se o sistema considerado fôr linear, invariante no tempo, uma condição necessária e suficiente para que o problema de contrôle seja normal (e portanto valha o princípio "bang-bang") é que o sistema seja normal (isto é, completamente controlável (ref. [2], pag. 218) através de qualquer de suas entradas atuando isoladamente).

Das considerações em (36), conclui-se que a melhor escolha das funções elementares v^j é do tipo

37
$$v^j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1(t-T_{i_1}) - 1(t-T_{i_2}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^m$$

onde $1(t-T_k)$ denota a função degrau aplicada no instante T_k.

Já que cada componente $u_i(t)$ do vetor contrôle $u(t)$ pode ser escrita como

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_i^j(t)$$

podemos escolher os vetores $v^j(t)$ de maneira que, a cada instante de tempo, $u_i(t)$ dependa apenas da i-ésima componente de um dos q vetores $v^j(t)$.

38 O número q de funções elementares utilizadas deve ser arbitrado em cada problema. Pode-nos auxiliar o fato de que, se o sistema fôr linear, invariante no tempo e todos os autovalores de A forem reais, o número de comutações de cada componente de u no intervalo (t_0, T) não excederá $n-1$, onde n é a ordem do sistema (ref. [2], pag. 402). Assim, uma boa escolha para q quando $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ é $m.n$.

A busca de um contrôle ótimo pertencente ao novo espaço de contrôles admissíveis deverá ser feita através de um problema de programação não-linear sôbre os coeficientes α_j , $j = 1, 2, \ldots, q$ das funções elementares e também sôbre os instantes de comutação, como se desenvolverá no capítulo 2.

39 Os problemas de tempo mínimo assim formulados têm uma característica particular: os vínculos de $u(t)$, ou seja,

$$|u_i(t)| \leq 1 \qquad \forall t \in [t_0, T] \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, m$$

serão refletidos diretamente nos α_j :

$|\alpha_j| \leq 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, q$, devido à não superposição de funções elementares relativas a cada componente de u , o que facilitará muito a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker.

Seção VII - Conclusões

40 Nosso tratamento do problema de contrôle é aplicável sòmente a sistemas lineares, mas a variância no tempo não traz dificuldades essenciais, além das já existentes na derivação das soluções de III-13.

41 Os conjuntos S_1 de estados finais escolhidos têm o formato de variedades lineares. Esta escôlha foi feita para simplificar os vínculos dos problemas reduzidos, como se verá nos capítulos seguintes, mas um tratamento mais geral não será qualitativamente muito diferente: apenas será mais trabalhoso e os vínculos dos problemas de programação matemática resultantes serão fortemente não-lineares.

42 No tratamento de problemas de tempo mínimo, devido à observação (39) da Seção anterior, será fácil trabalhar com os vínculos do vetor contrôle. Os problemas resultantes serão entretanto difíceis devido a fortes não-linearidades dos vínculos, como se verá no capítulo 2.

43 A simplificação de VI-39 não será possível quando as funções elementares não forem do tipo degrau e surge o problema: como expressar os vínculos de $u(t)$ em têrmos de vínculos de α ? Êste problema é interessante e ocupará a maior parte de nosso trabalho, com uma abordagem aproximada no capítulo 3 e uma abordagem exata nos capítulos 4 e 5. Nesta parte da tese trabalharemos com problemas de tempo fixo, por causa das vantagens dêsses problemas, como explicamos na Seção IV. Além disso, a fixação do instante final será importante no estudo dos vínculos $|u_1(t)| \leqslant 1 \quad (\forall t \in [t_0,T])$ e o tratamento de problemas com alvos mais gerais não segue imediatamente do apresentado nesta tese.

CAPITULO 2

PROBLEMAS DE TEMPO MÍNIMO

Seção I - Introdução

Na Seção 1.VI apresentamos o enunciado do problema de contrôle com tempo mínimo (veja-se (35)) e fizemos várias observações que facilitam sua redução a um problema de programação matemática.

Êste capítulo tem por finalidade mostrar a formulação do problema de programação matemática para problemas de tempo mínimo, através das técnicas apresentadas no capítulo 1. Segue-se a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker a um caso particular (sistema linear invariante no tempo). Concluiremos que o sistema de inequações resultantes da aplicação do teorema de Kuhn - Tucker é muito complexo, devido à não-linearidades essenciais nos vínculos do problema de otimização.

Seção II - Aplicação do Teorema de Kuhn - Tucker

Vamos considerar o problema de contrôle com tempo mínimo, como apresentado em 1.VI-35. O conjunto de contrôles admissíveis, nesse enunciado, é o conjunto definido em 1.II-5, dado por

$$U = \Big\{ u \,\Big|\, (\forall t \in [t_0, T_f]) \quad |u_i(t)| \leq 1 \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m \;;$$

u satisfaz condições de integrabilidade $\Big\}$

onde T_f é o instante final desconhecido e

$$\forall t \in [t_0, T_f] \qquad u(t) \in R^m$$

Executaremos agora a simplificação do espaço de contrôles admissíveis, através da expansão dos contrôles em somas de funções elementares

$$v^j : R^+ \longrightarrow R \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, q$$

com o método desenvolvido no capítulo 1, utilizando para as v^j o formato sugerido em 1.VI-37.

Seja então

1 $\qquad I^\ell = \ell^a$ coluna da matriz identidade

2 $$v^j(t) = \left(1(t-T_{i_1}) - 1(t-T_{i_2})\right) I^\ell$$

onde $1\ (t - T_k)$ representa a função degráu (veja 1.VI-37).

As funções elementares (2) deverão ser ordenadas e deve-se escolher o número q.

Vamos considerar o sistema linear variante no tempo, como introduzimos em 1.III-13:

3 $$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \qquad , \quad \text{com}$$

4 $$u(t) \in R^m \qquad \forall t \in R^+$$

5 $$x(t) \in R^n \qquad \forall t \in R^+$$

Imporemos a condição

6 $$(\forall t \in R^+) \qquad u(t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t) \qquad , \quad v^j \text{ dadas por (2),}$$

construindo assim o novo espaço de contrôles admissíveis (veja 1.III-11).

Na expressão (2), cada v^j tem influência sôbre apenas uma componente do vetor contrôle. Sendo m a dimensão de u, escolheremos um número p de funções elementares para cada componente de u, ou seja, admitiremos para cada componente de u um número $p-1$ de comutações no intervalo (t_0, T_f) (veja 1.VI)

Assim,

7 $$q = mp$$

Pela observação 1.VI-38, p será geralmente igual a n, a ordem do sistema.

Os instantes de comutação serão denotados por

T_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, no que se inclui o instante final: $T_f = T_q$

Faremos uma ordenação das funções elementares da seguinte maneira:

8
$$
\begin{aligned}
v^1(t) &= \left(1(t-t_0) - 1(t-T_1)\right) I^1 \\
&\vdots \\
v^m(t) &= \left(1(t-t_0) - 1(t-T_m)\right) I^m \\
v^{m+1}(t) &= \left(1(t-T_1) - 1(t-T_{m+1})\right) I^1 \\
&\vdots \\
v^{mp}(t) &= \left(1(t-T_{(m-1)p}) - 1(t-T_{mp})\right) I^m
\end{aligned}
$$

No esquema de ordenação dos T_i em (8), os instantes $t_0, T_k, T_{m+k}, \ldots, T_{(m-1)p+k}$ correspondem às comutações de u_k, $k=1,\ldots,m$

Uma forma reduzida de apresentar esta ordenação é:

9 $$v^j(t) = \left(1(t-T_{j-m}) - 1(t-T_j)\right) I^\ell$$

10 onde $$\ell = \begin{cases} j \text{ módulo } m & \text{se } j \neq km, \ k = 1, 2, \ldots \\ m & \text{se } j = km, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

e definimos: $$\forall i \leq 0 \quad T_i = t_0$$
$$T_q = T_f$$

Resolução do sistema (3)

Aplicando o método apresentado em 1.III-20, obtem-se

11 $$F_I^j(T_f) = \int_{t_0}^{T_f} \Phi_I(T_f,\tau)\, B(\tau)\, v^j(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{T_{j-m}}^{T_j} \Phi_I(T_f,\tau)\, B(\tau)\, I^\ell\, d\tau$$
$$= \int_{T_{j-m}}^{T_j} \Phi_I(T_f,\tau)\, B^\ell(\tau)\, d\tau$$

onde Φ é a matriz de transição do sistema e ℓ é dada por (10).

A equação para as coordenadas I do estado do sistema no instante $T_f = T_q$ será dada por (veja 1.III-20)

12 $$\Phi_I (T_f, t_0) x_0 + F_I(T_f) \alpha - x_I (T_f) = 0$$

$$\text{onde } F(T_f) = \left[F^1(T_f) \;\; F^2(T_f) \ldots F^q(T_f) \right]$$

<u>Enunciado do problema de otimização</u>

Podemos agora enunciar um problema de otimização sôbre as variáveis α_j e T_j , j = 1, 2, ... , q , equivalente ao problema de contrôle com tempo mínimo 1.VI-35, com o espaço de contrôles admissíveis simplificado por (6).

Sejam

13 $$\alpha \in R^q$$

$$T \triangleq [T_1 \;\; T_2 \;\ldots\; T_q]' \in R^q$$

$$\theta : R^q \times R^q \to R$$

$$\theta(\alpha, T) = [0 \cdots 0 \;\; 1]\, T = T_q$$

O Problema PM

14 PM Encontrar $(\bar{\alpha}, \bar{T})$ que minimiza $\theta(\alpha, T)$, sujeito às restrições

15 $$h(\alpha, T) = \Phi_I(T_q, t_0)\, x_0 + F_I(T_q)\, \alpha - \bar{x}_I = 0$$

onde $\bar{x}_I \in R^{|I|}$, dado

16 $$T_q = T_{q-1} = \cdots = T_{q-m+1}$$

17 $$T_j \geq T_{j-m} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

18 $$-1 \leq \alpha_j \leq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

PM é, em geral, um problema complexo de programação não linear, devido ao grande número de vínculos e às fortes não-linearidades do vínculo $h(\alpha, T)$ dado por (15). Note-se que em (15), a matriz $F(T_q) = F(T)$ depende de <u>todos</u> os instantes de comutação, como se pode ver na expressão (11), em que a jª coluna de F depende de T_{j-m} e T_j. Sucessivas simplificações podem ser feitas, considerando o sistema invariante no tempo, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\bar{x}_I = 0$, $u : R \to R$.

Mostraremos a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker ao problema <u>simplificado</u> seguinte, enunciado segundo 1.VI-35.

2.II

Seja dado um sistema linear invariante no tempo

19 $$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

$$\forall t \in R^+ \qquad x(t) \in R^n$$
$$u(t) \in R$$

Problema

Encontrar um contrôle admissível, se existir, que leva o sistema (19) do estado inicial x_0 em $t_0 = 0$ à origem do espaço de estado em tempo mínimo.

Para o sistema dado em (19), se fizermos $t_0 = 0$, a solução é dada por $x(T_f) = e^{AT_f}\left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau\right)$, como vimos em 1.V-25.

Em nosso enunciado, o alvo é dado por

$$S = \{0\} \times R^+ \qquad \text{(veja 1.VI-35)}$$

e para $(x(T_f), T_f) \in S$,

$x(T_f) = 0$, e a equação do sistema fica

20 $$x_0 + \int_0^{T_f} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau = 0$$, onde eliminamos o têrmo e^{AT_f}, sempre não singular (veja ref. [2], pag. 128)

As funções elementares são, segundo (9),

21 $$v^j(t) = 1(t-T_{j-1}) - 1(t-T_j) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Pelo método mostrado em 1.V-29, constrói-se a matriz $\hat{F} = [\hat{F}^1 \dots \hat{F}^q]$, onde

22 $$\hat{F}^j = \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-A\tau} B \, d\tau$$

e a equação (20) torna-se

23 $$x_0 + \hat{F}\alpha = 0$$

Podemos, agora, utilizando (14) e (23), enunciar o problema de otimização no caso particular:

24 PM : Sejam

$$\alpha \in R^q \quad , \quad T \in R^q$$

$$\Theta : R^q \times R^q \rightarrow R \quad , \quad \Theta(\alpha, T) = T_q$$

$$\Theta(\bar{\alpha}, \bar{T}) = \min_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha \\ T\end{smallmatrix}\right] \in R^{2q}} \Big\{ \Theta(\alpha, T) \,\Big|\, x_0 + \hat{F}\alpha = 0 \;,\; -1 \leq \alpha_j \leq 1 \;,\; T_j \geq T_{j-1} \;,\; T_0 = 0 \;,\; j = 1, 2, \dots, q \Big\}$$

O problema PM em (24) pode ser enunciado em uma forma mais elegante, definindo

25 $$T^{s} \triangleq [0 \; T_1 \; T_2 \ldots T_{g-1}]'$$

26 $$h(\alpha, T) \triangleq x_0 + \hat{F}\alpha$$

27 $$g_1(T) \triangleq T^{s} - T$$

28 $$g_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ \alpha_g - 1 \end{bmatrix} \qquad g_3(\alpha, T) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ -\alpha_g - 1 \end{bmatrix}$$

Com as definições acima, pode-se reescrever PM

29 PM: $$\theta(\bar{\alpha}, \bar{T}) = \min_{\begin{bmatrix} \alpha \\ T \end{bmatrix} \in R^{2g}} \left\{ \theta(\alpha, T) \;\middle|\; h = x_0 + \hat{F}\alpha = 0 \;, \; g_1 = T^{s} - T \lessgtr 0 \;, \; g_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ \alpha_g - 1 \end{bmatrix} \lessgtr 0 \quad g_3 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ -\alpha_g - 1 \end{bmatrix} \lessgtr 0 \right\}$$

Aplicaremos agora ao problema (29) o teorema de Kuhn - Tucker (veja ref. [7], pag. 173):

Notamos que $\theta(\alpha,T)$, $h(\alpha,T)$, $g(\alpha,T) = [g_1\ g_2\ g_3]'$ são diferenciáveis com relação a $[\alpha\ T]'$. Supondo-se satisfeita alguma condição de qualificação de vínculos, (ver ref. [7], pag. 171) segue-se que para o problema PM (29)

$$(\exists \bar{u} \in R^{3q}, \bar{v} \in R^{n})$$

tais que

30 $$\nabla_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\T\end{smallmatrix}\right]} \theta(\bar{\alpha},\bar{T}) + \left[\nabla_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\T\end{smallmatrix}\right]} h(\bar{\alpha},\bar{T})\right]\bar{v} + \left[\nabla_{\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\T\end{smallmatrix}\right]} g(\bar{\alpha},\bar{T})\right]\bar{u} = 0$$

31 $$\bar{u} \geq 0$$

32 $$\langle \bar{u}, g(\bar{\alpha},\bar{T}) \rangle = 0$$

33 $\begin{bmatrix}\bar{\alpha}\\ \bar{T}\end{bmatrix}$ satisfaz $h(\bar{\alpha},\bar{T}) = 0$, $g(\bar{\alpha},\bar{T}) \leq 0$

Utilizando as expressões em (25), III , (28), e separando (30) em duas expressões, com ∇_α e ∇_T , obtém-se para (30), ... , (33)

34 $$\hat{F}'\bar{v} + [0 \vdots I \vdots -I]\,\bar{u} = 0$$

35 $$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + \left[\nabla_T\left[\hat{F}\bar{\alpha}\right]\right]\bar{v} + \left[\begin{array}{cccc|c|c} -1 & 1 & & 0 & & \\ & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & 1 & & \\ 0 & & & -1 & & \end{array}\right]\bar{u} = 0$$

36 $$x_0 + \hat{F}\bar{\alpha} = 0$$

37 $$\left\langle \bar{u}, \begin{bmatrix}\bar{T}^s - \bar{T}\\ \bar{\alpha} - [1]\\ -\bar{\alpha} - [1]\end{bmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{onde} \quad [1] \triangleq [1\ 1 \dots 1]'$$

38 $$\bar{u} \geqslant 0$$

39 $$\bar{T}^s - \bar{T} \leqslant 0$$

40 $$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 - 1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_q - 1 \end{bmatrix} \leqslant 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 - 1 \\ \vdots \\ -\bar{\alpha}_q - 1 \end{bmatrix} \leqslant 0$$

Seção III – Conclusões

Observando-se o enunciado do problema PM em (14), nota-se que a maior dificuldade existente em sua solução reside no tratamento do vínculo $h(\alpha, T) = 0$, que representa a equação do sistema de contrôle considerado.

Êste vínculo não é simples devido à matriz $F(T_q)$, que depende dos instantes de comutação, de forma complexa, pois na expressão (11) para cada $F^j(T_q)$ aparecem T_{j-m} e T_j como extremos de um intervalo de integração. Além disso, o integrando contém a matriz $\Phi_I(T_q, \tau)$, que normalmente não é simples e contém funções transcendentes, o que torna o vínculo $h(\alpha, T)$ essencialmente não linear em T, em qualquer caso não trivial.

Métodos numéricos podem ser usados para resolver PM, dado em (14), mas êstes deverão ser bastante gerais para dar conta do vínculo $b(\alpha,\tau)$. Não estudaremos métodos numéricos para problemas de tempo mínimo, fazendo-o sòmente para problemas de energia mínima, no capítulo 5.

A aplicação do teorema de Kuhn - Tucker ao caso invariante no tempo mostra-nos o procedimento geral para encontrar condições necessárias para o problema PM. Não é possível, no entanto, encontrar condições de qualificação que sejam sempre verificadas por PM, e a busca dessas condições deve ser feita em cada problema particular.

Aplicando as equações (34), ..., (40) ao problema de tempo mínimo para o duplo integrador, problema êste tratado em [2], pag. 507, obtém-se um sistema de inequações cujo tratamento leva a conclusões idênticas às obtidas na referência citada através da aplicação do princípio do mínimo.

C A P I T U L O   3

PROBLEMAS DE CONTRÔLE COM ENERGIA MÍNIMA EM SISTEMAS LINEARES

Seção I - Introdução

Problemas de contrôle com energia mínima e funcionais critério quadráticos constituem uma classe importante de problemas de contrôle, tanto por terem um significado físico palpável com aplicação ao projeto de servomecanismos, como por existirem métodos para obter-se soluções analíticas em muitos casos. Um tratamento dêste tipo de problemas é realizado na ref. [2] , pag. 752, para sistemas lineares, invariantes no tempo, instante terminal fixo. Uma abordagem diferente será feita aqui.

O método geral de tratamento do problema de contrôle já foi apresentado no capítulo 1 e vamos limitar-nos aqui a desenvolver a resolução de problemas de tempo fixo. Esta abordagem introduz grandes simplificações, como já apontamos na Seção 1-IV. Como a invariância no tempo não introduz simplificações essenciais ao problema de tempo fixo, todo o tratamento será feito para sistemas lineares variantes no tempo.

Considere-se então um sistema linear variante no tempo

1 $$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t)$$

tal que, dados t_o, $T \in R^+$; $T > t_o$

$$\mathcal{T} \triangleq [t_o, T]$$

$$(\forall t \in \mathcal{T}) \qquad \begin{array}{l} x(t) \in R^n \\ u(t) \in R^m \\ A(t)\ n \times n \\ B(t)\ n \times m \end{array}$$

Expandindo o contrôle em funções elementares, como mostramos em 1.III

2 $$u = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \sigma^j$$

E definindo

3 $$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{bmatrix}$$

Chegamos à solução do sistema (1)

4 $$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + F(t)\alpha$$ (veja-se 1.III-19) onde $(\forall t \in T)$ $F(t)$ é uma matriz n X q e Φ é a matriz de transição de estado do sistema (1).

No instante final, dado o alvo

5 $$S = S_1 \times \{T\}$$

$$S_1 = \{x \in R^n \mid x_I = \bar{x}_I\}, \text{com } \bar{x}_I \in R^{|I|}, \text{ dado}$$

Obtem-se

6 $$\hat{x}_I + F_I(t)\alpha = 0$$, onde $\hat{x}_I = \Phi_I(T, t_0)x_0 - \bar{x}_I$; pelo tratamento da Seção 1.IV

Introduziremos agora a funcional critério para problemas de energia mínima (veja também ref. [2], pag. 461),

7 $$J(x_0, u, t_0, t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left[\langle x(t), Q(t)\,x(t)\rangle + \langle u(t), R(t)\,u(t)\rangle\right] dt$$

onde $(\forall t \in T)$

$Q(t)$ uma matriz n X n definida positiva

$R(t)$ uma matriz m X m definida positiva

$Q_{ij} : T \rightarrow R$, seccionalmente contínuas, $i, j \in \{1, .., m\}$

$R_{ij} : T \rightarrow R$, seccionalmente contínuas, $i, j \in \{1, .., m\}$

O espaço de contrôles admissíveis

No problema particular de contrôle, que enunciaremos abaixo, o espaço de contrôles admissíveis é

8 $$U^1 \triangleq \left\{ u \,\middle|\, u = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j \ \wedge \ (\forall t \in T) \ |u_i(t)| \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

A restrição $u = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j$ é simplificadora, responsável pela obtenção de um problema equivalente de programação matemática, como desenvolvemos no capítulo 1 e mostraremos abaixo.

A restrição

9 $$(\forall t \in T) \quad |u_i(t)| \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

dificulta o tratamento em têrmos de programação não-linear, pois só poderemos impor vínculos sôbre α.

Podemos obter vínculos sôbre os α de duas maneiras:

a) Através de condições satisfeitas pelos α_j suficientes mas não obrigatòriamente necessárias para que (9) sejam satisfeitas. Estas condições podem ser, por exemplo, impor limitações a cada α_j de modo que $\alpha_j \max_{t \in T} |v_i^j(t)| \leq \frac{1}{q}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ o que garante (9). As soluções obtidas serão sub-

-ótimas para o problema reduzido e poderão distanciar-se muito da solução procurada;

b) através de condições necessárias e suficientes para que (9) sejam satisfeitas, ou seja, através do estudo da função

$$\varphi_i(\alpha) = \max_{t \in T} |\mu_i(\alpha, t)| \quad , \text{ onde}$$

$$\mu_i(\alpha, t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \, v_i^{\,j}(t)$$

O tratamento do vínculo $\varphi_i(\alpha) \leq 1$, vínculo êste equivalente a $\forall t \in T \ \ |\mu_i(t)| \leq 1$ não é trivial e será o objetivo principal dos dois últimos capítulos da tese. No presente capítulo desenvolveremos a solução do problema de contrôle com energia mínima com restrições do tipo (a), acima.

Enunciado do Problema Particular

10 Dado o sistema (1), encontrar um contrôle admissível, se existir, que (a) leva o sistema de um estado inicial x_0 no instante t_0 , dados, ao conjunto de estados S_1 (5) no instante T.

(b) minimiza a funcional critério J (x_0 , u, t_0 , T) (7), com Q(t) e R(t) definidas positivas.

Seção II - <u>Redução a um problema de dimensão finita</u>

Definindo para todo $t \in T$ a matriz m X q ,

11 $$v(t) = \left[\, v^1(t)\ v^2(t)\ \dots\ v^q(t) \,\right] ,$$

segue-se que para α definido em I-4,

12 $$u(t) = v(t)\alpha$$

Entrando com (12) na expressão (7), obtem-se

13 $$\theta(\alpha) \triangleq J\left(x_0, \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^i, t_0, T\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left[\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \langle \alpha, v'(t)R(t)v(t)\alpha\rangle\right] dt$$

Substituindo agora em (13) a expressão para x(t) (4), obtem-se

14 $$\theta(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big[\langle \alpha, \left[F'(t)Q(t)F(t) + v'(t)R(t)v(t)\right]\alpha\rangle + \langle x_0, \phi'(t,t_0)Q(t)$$
$$\phi(t,t_0)x_0\rangle + 2\langle x_0, \phi'(t,t_0)Q(t)F(t)\alpha\rangle\Big] dt$$

Definindo agora

15 $$G \triangleq \int_{t_0}^{T}\left[F'(t)Q(t)F(t) + v'(t)R(t)v(t)\right] dt$$

16 $$H \triangleq \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \Phi'(t,t_0), Q(t)\, \Phi(t,t_0)\, dt$$

17 $$K \triangleq \int_{t_0}^{T} \Phi'(t,t_0), Q(t)\, F(t)\, dt$$

obtem-se de (14), (15), (16) e (17),

18 $$\theta(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \alpha, G\alpha\rangle + \langle x_0, K\alpha\rangle + \langle x_0, Hx_0\rangle$$

O resultado (18) é interessante, pois mostra que o critério em α é quadrático e portanto de fácil tratamento em programação matemática. Além disso, as únicas dificuldades introduzidas pela variância no tempo, tanto do sistema como do critério, residem na resolução do próprio sistema, isto é, no cálculo de $\Phi(t, t_0)$ e no cálculo das integrais (15), (16), (17).

Outro resultado importante é dado pelo lema a seguir, que garantirá a suficiência do teorema de Kuhn - Tucker:

19 <u>Lema:</u> a função θ definida por (18) é convexa em R^q.

<u>Demonstração</u>: basta provar que a matriz G é semi-definida positiva, pois em (18) o têrmo que não inclue G é linear em α e portanto convexo, e o têrmo em G é quadrático.

Como $Q(t)$ e $R(t)$ são definidas positivas $\forall t \in \mathcal{T}$, o integrando de (15) é claramente semi-definida positiva. Chamando de $L(t)$ ao integrando, isto é,

$$G = \int_{t_0}^{T} L(t)\, dt$$

Seja $x \in R^q$ qualquer

$$\langle x, Gx \rangle = \int_{t_0}^{T} \langle x, L(t)x \rangle\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} y(t)\, dt \quad \text{, onde} \quad y(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Como $T \geqslant t_0$, temos que $\int_{t_0}^{T} y(t)\, dt \geqslant 0$ e portanto $\langle x, Gx \rangle \geqslant 0$ e G é semi-definida positiva.

<u>Enunciado do problema de programação não-linear</u>

20 **PM1** - Dadas as funções $Q : R^q \to R^m$, as matrizes $\phi(T,t_0)$ e $F(T)$, os vetores $x_0 \in R^n$, $\bar{x}_I \in R^{|I|}$, e as funções $v^j : R \to R^m$,

Encontrar $\tilde{\alpha} \in R^q$, se existir, que minimiza $\theta(\alpha)$, sujeito aos vínculos

21 $$\hat{x}_I + F_I(T)\,\alpha = 0 \quad ; \text{ onde } \hat{x}_I = \phi_I(T,t_0) - \bar{x}_I$$

22 $$\left|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_i^j(t)\right| - 1 \leq 0 \quad \forall t \in T \ , \ i = 1, 2, \dots, m$$

Seção III - Resolução de PM1 com vínculos aproximados

23 Desenvolveremos a solução do PM1 com vínculos impostos sôbre α suficientes para (22), como indicamos em I-9.

Vamos, então, limitar os α_j a intervalos fechados usando-se como vínculos, ao invés de (22), as desigualdades

$$a_{q+j} \leq \alpha_j \leq a_j \qquad j = 1, 2, \dots, q$$

desigualdades essas que também podem ser escritas como

$$g(\alpha) \leq 0 \qquad \text{onde } g : R^q \to R^{2q} \text{ é dada por}$$

24
$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_q - a_q \\ -\alpha_1 + a_{q+1} \\ \vdots \\ -\alpha_q + a_{2q} \end{pmatrix} \quad , \quad g(\alpha) \leqq 0$$

25 Com esta aproximação, as restrições em α dadas por (21) e (24) serão tôdas lineares.

26 Podem-se obter sucessivas aproximações a (22), usando (24), resolvendo-se o problema para um conjunto de a_j's e depois modificando êsse conjunto de maneira a melhor aproximar-se o conjunto de α's que satisfaz

27
$$\max_{t \in \mathcal{T}} \left| \sum_{j=1}^{q} \tilde{\alpha}_j v_i^j(t) \right| \leqq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Êste procedimento pode ser útil na busca de um ponto viável, mas pode levar a soluções muito distantes da ótima, devido à configuração particular da região $\{\alpha \mid g(\alpha) \leqq 0\}$, que é um hipercubo.

Incorporando as restrições (24), o problema de otimização PM1 dado em (20) fica:

28 Sejam $\theta : R^q \to R$ dado por (18)

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \alpha, G\alpha \rangle + \langle x_0, K\alpha \rangle + \langle x_0, Hx_0 \rangle$$

Encontrar $\bar{\alpha} \in R^q$, se existir, tal que

29 PM2. $$\theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \,\middle|\, h(\alpha) = \hat{x}_I + F_I(\tau)\alpha = 0 \text{ , } g(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_q - a_q \\ -\alpha_1 + a_{q+1} \\ \\ -\alpha_q + a_{2q} \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

Podemos agora aplicar o teorema de Kuhn - Tucker (ver ref. [7], pag. 173), pois (21) e (24) satisfazem uma das condições de qualificação, ou seja, a condição iii da ref. [7] pag. 173 .

30 θ, g, h são diferenciáveis com relação a α ; θ é convexa em R^q (ver (19)), g e h são lineares, e portanto uma condição de qualificação de vínculos é satisfeita para todo $\alpha \in R^q$.

31 Segue-se, portanto, da ref. [7], pag. 173, que o problema de Kuhn - Tucker é equivalente a PM2, ou seja, um conjunto de condições necessárias e suficientes para que $\bar{\alpha}$ resolva PM2 é:

$\exists\, \bar{u} \in R^{2q}, \bar{w} \in R^{|I|}$ tais que

32 $$G\bar{\alpha} + K'x_0 + \left[I \,\vdots\, -I \right]\bar{u} + F_I'(T)\,\bar{\omega} = 0$$

33 $$g_i(\bar{\alpha})\,\bar{u}_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 2q$$

34 $$\bar{u} \geqslant 0$$

35 $$g(\bar{\alpha}) \leqslant 0$$

36 $$h(\bar{\alpha}) = 0$$

(31), ... , (36) foram obtidos substituindo nas condições de Kuhn - Tucker (ref. [7] , pag. 173),

$$\nabla\theta(\alpha) = G\alpha + K'x_0$$

$$\nabla h(\alpha) = F_I'(T)$$

$$\nabla g(\alpha) = \left[I \,\vdots\, -I \right]$$

Seção IV - Conclusões

A aproximação (24) dos vínculos sôbre a amplitude do contrôle conduz a um problema típico de programação quadrática, cuja resolução por métodos numéricos é conhecida e vários métodos podem ser encontrados nas referências [9] e [10] . Alguns desses métodos são baseados na equivalência entre PM2 e o problema de Kuhn - Tucker (32)-(36) , isto é, no fato de que podemos resolver PM2, resolvendo um sistema de equações e desigualdades lineares em $\bar{\alpha}$, $\bar{u}$ e $\bar{w}$, ou seja, (32), (34), (35) e (36), observando-se que (33) apenas nos dá uma condição de complementaridade. Essa condição é que se $\bar{u}_i > 0$ então $\bar{\alpha}_i = a_i$ e se $\bar{u}_i = 0$ então $\bar{\alpha}_i \leq a_i$.

Processos iterativos poderiam ser desenvolvidos para obter uma sequência de conjuntos de valores dos a_i , $i=1,\dots,2q$, mas êste não nos parece ser um bom caminho, pois não é fácil encontrar-se uma política de modificação dos a_i sem um estudo profundo de $\varphi_i(\alpha) = \max_{t \in T} \left| \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v_i^j(t) \right|$.

Êste estudo, no entanto, leva à abordagem mais geral do problema, que consiste em procurar a solução exata de PM1, e que vai nos ocupar nos capítulos restantes da tese. Como veremos, nenhuma simplificação essencial é obtida por considerar-se apenas funções critério quadráticas e no que segue trataremos de funções critério convexas, o que inclui o caso de mínima energia.

Nêste capítulo usamos $u(t) \in R^m$. Como os vínculos de amplitude de contrôle são impostos independentemente sôbre as coordenadas de u, após uma ordenação das funções elementares teremos que impor vínculos sôbre blocos de componentes de α, correspondentes à mesma coordenada de u. Isto complica o tratamento e vamos considerar no que segue contrôles escalares, isto é, $(\forall t \in T)\ u(t) \in R$, indicando que a extensão para $u(t) \in R^m$ pode ser feita sem grande dificuldade.

CLÓVIS CAESAR GONZAGA

FALTA
FOLHA.

HH

C A P I T U L O 4

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA SOLUÇÕES DE PM1

Seção I - Introdução

No capítulo anterior, vimos que o estudo do problema PM1, definido em 3.II-20 é dificultado pelos vínculos na amplitude do vetor contrôle. Um método foi desenvolvido para o cálculo de um contrôle que otimiza a função critério θ em um conjunto mais particular do que o conjunto de pontos viáveis de PM1 e indicamos que esta aproximação poderia ser muito grosseira.

Neste capítulo e no seguinte, propomo-nos estudar uma classe de problemas de programação matemática em que a configuração do conjunto de pontos viáveis é exatamente a do problema PM1. O objetivo dêste capítulo será obter condições necessárias e suficientes de otimalidade para êstes problemas e no capítulo 5 trataremos de um método para a busca de um ponto de ótimo.

A classe de problemas que trataremos terá alguns aspectos importantes, que enunciamos abaixo:

a) O contrôle $u(t)$ é um escalar. Esta simplificação é feita, como indicamos no capítulo anterior, para evitar as complicações introduzidas pela dimensão do contrôle na definição e ordenação das funções elementares v^j.

b) A função critério será tomada convexa e diferenciável, englobando portanto os critérios quadráticos estudados no capítulo anterior.

c) As funções elementares serão tomadas analíticas e linearmente independentes. A classe de funções analíticas é bastante geral e tem propriedades muito úteis em nosso desenvolvimento, como será visto adiante.

Formularemos inicialmente o problema P1 incorporando os aspectos apresentados acima, seguido de um novo problema (P2) equivalente a P1 em que os vínculos estão em um formato mais fàcilmente tratável. Propriedades dêsses vínculos serão estudadas na Seção II, fornecendo-nos as ferramentas requeridas para o desenvolvimento, na Seção III, de condições necessarias e suficientes de otimalidade para P1.

1 Sejam, então:

$\alpha \in R^q$

$\theta : R^q \longrightarrow R$ convexa, diferenciável com relação a α com gradiente contínuo, $\forall\ \alpha \in R^q$

$\mathbb{T} \triangleq [t_o, T] \subset R^+$

$v^j : \mathbb{T} \longrightarrow R$ analíticas, linearmente independentes, $j = 1, 2, \ldots, q$

$\hat{x} \in R^n$ dado

F uma matriz $n \times q$

$I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

2 Enunciado do Problema P1

Encontrar $\bar{\alpha} \in R^q$ tal que

$$\theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \;\middle|\; \left|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t)\right| - 1 \leq 0, \forall t \in \mathbb{T} ;\ \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \right\}$$

P1 encontra-se em um formato dificilmente tratável por termos vínculos definidos por funções implícitas em α, ou seja, dado um α qualquer, não podemos verificar com um número finito de operações aritméticas, se $\forall t \in \mathbb{T}$ $\left|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t)\right|$ é menor que 1. Definimos a seguir funções que nos auxiliarão a visualizar o conjunto de pontos viáveis de P1:

3 Definição:

Seja

$\mu : R^q \times T \longrightarrow R$ definida para $(\alpha, t) \in R^q \times T$

por

$$\mu(\alpha, t) \triangleq \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t)$$

A função μ definida em (3) acima é òbviamente diferenciável em relação a α, para cada $t \in T$, com gradiente contínuo, e analítica em t.

Definimos a seguir duas funções auxiliares que nos permitirão reformular o problema P1.

Definição:

Sejam

4 $\varphi_M : R^q \longrightarrow R$, $\varphi_M(\alpha) \triangleq \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$

5 $\varphi_m : R^q \longrightarrow R$, $\varphi_m(\alpha) \triangleq \max_{t \in T} (-\mu(\alpha, t))$

Com as funções φ_M e φ_m podemos formular o problema seguinte:

6 <u>Enunciado do Problema P2</u>

Encontrar $\bar{\alpha} \in R^q$ tal que

$$\theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid \varphi_M(\alpha) - 1 \leq 0 \, , \, \varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0 \, , \, \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \right\}$$

7 <u>Lema</u>: P1 e P2 são problemas equivalentes, isto é, se $\bar{\alpha}^1$ fôr uma solução de P1, também será uma solução de P2. Conversamente, se $\bar{\alpha}^2$ fôr uma solução de P2, também será uma solução de P1.

A demonstração do lema (7) é imediata.

Os vínculos φ_M e φ_m do problema P2 serão objeto de estudo das próximas seções, onde se procurará aplicar os teoremas de Fritz-John (ref. [7], pag. 170) e Kuhn - Tucker (ref. [7], pag. 173) a P2. Os resultados encontrados dependerão, como se pode prever, do cálculo de pontos t onde ocorrem os máximos e mínimos da função $\mu(\alpha, t)$, o que dificulta sua aplicação.

Seção II - Estudo dos vínculos φ_M e φ_m

O problema (P2) descrito acima encontra-se numa das formas canônicas de problemas de programação não linear (veja, por exemplo, ref. [7] , pag. 170). Condições necessárias e suficientes são conhecidas para êste tipo de problemas (ref. [7] , pag. 170). Estas condições, entretanto, só têm algum valor para os casos em que as funções vínculo e critério de P2 possuem as propriedades de convexidade e diferenciabilidade nas variáveis do problema. Essas propriedades são òbviamente satisfeitas pela função critério Θ e pelos vínculos lineares em α . Resta, entretanto, verificá-las para as funções φ_M e φ_m . Conforme veremos abaixo, essas funções são convexas mas nem sempre apresentam derivadas globais, se bem que derivadas direcionais existam em todas as direções. O estudo dessas derivadas direcionais e das condições que implicam na existência de derivadas globais nos levará a substituir os vínculos $\varphi_M(\alpha) - 1 \leq 0$ e $\varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0$ por outra família de vínculos em α , tal que com esta nova família de vínculos, um novo problema equivalente a (P2) seja definido. Êsse novo problema pertencerá à classe de problemas convexos e diferenciáveis.

Convexidade de φ_M e φ_m .

8 <u>Teorema</u>: $\varphi_M : R^q \longrightarrow R$, definida em (4), é convexa em R^q

<u>Demonstração</u>: Por definição

9 $$\varphi_M(\alpha) = \max_{t \in T} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t)$$

Sejam agora $\alpha^1, \alpha^2 \in R^q$ quaisquer e seja $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. A convexidade de φ_M estará provada se mostrarmos que

10 $$\varphi_M(\alpha^1\lambda + (1-\lambda)\alpha^2) \leqslant \lambda\varphi_M(\alpha^1) + (1-\lambda)\varphi_M(\alpha^2)$$

Usando-se a definição (9) no lado esquerdo de (10)

$$\varphi_M(\alpha^1\lambda + (1-\lambda)\alpha^2) = \max_{t \in T}\left[\sum_{j=1}^{q}(\lambda\alpha_j^1 + (1-\lambda)\alpha_j^2)\, v^j(t)\right]$$

$$= \max_{t \in T}\left[\sum_{j=1}^{q}\lambda\alpha_j^1 v^j(t) + \sum_{j=1}^{q}(1-\lambda)\alpha_j^2 v^j(t)\right]$$

$$\leqslant \max_{t \in T}\sum_{j=1}^{q}\lambda\alpha_j^1 v^j(t) + \max_{t \in T}\sum_{j=1}^{q}(1-\lambda)\alpha_j^2 v^j(t)$$

$$\leqslant \lambda\cdot\varphi_M(\alpha^1) + (1-\lambda)\varphi_M(\alpha^2)$$

o que termina esta demonstração.

11 **Teorema:** $\varphi_m : R^q \longrightarrow R$, definida em (5), é convexa em R^q.

Demonstração: Análoga à demonstração do teorema (8).

12 **Diferenciabilidade direcional de φ_M**

Demonstraremos a seguir que a função $\varphi_M : R^q \longrightarrow R$ tem derivadas direcionais em tôdas direções e em qualquer ponto $\bar{\alpha} \in R^q$. O mesmo resultado pode ser anàlogamente obtido para $\varphi_m : R^q \longrightarrow R$. Para o teorema (16) abaixo, necessitamos da seguinte definição:

13 **Definição:** Seja $\varphi_M(\alpha)$ definido em (4). Podemos então definir o mapeamento Γ_M de R^q em partes de R por

14 $$(\forall \alpha \in R^q) \qquad \Gamma_M(\alpha) \triangleq \{ t \mid t \in T \wedge \varphi_M(\alpha) = \mu(\alpha, t) \}$$

O seguinte resultado pode ser encontrado na ref. [4].

15 **Lema** : O mapeamento Γ_M é semi-contínuo superiormente (veja definição na ref. [5] , pag.114).

Demonstração : Veja Pshenichnyi (ref. [4]).

Podemos agora enunciar um primeiro resultado sôbre as derivadas direcionais de φ_M ou seja, o

16 **Teorema** - Seja $e \in R^q$ qualquer, com $|e| = 1$. Seja $\alpha \in R^q$ um ponto qualquer. Então $\varphi_M(\alpha)$ é diferenciável na direção e com derivada direcional $\partial\varphi_M(\alpha)/\partial e$ dada por

17
$$\frac{\partial\varphi_M}{\partial e}(\alpha) = \max_{t\in\Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha,t), e\rangle$$

onde $\Gamma_M(\alpha)$ está definido em (14) acima.

Demonstração: Por definição de $\varphi_M(\alpha)$,

18
$$\varphi_M(\alpha) = \max_{t\in T} \mu(\alpha,t)$$

Seja agora $\lambda^+ > 0$ um número real qualquer. Segue-se de (18) que

19 $$\varphi_M(\alpha+\lambda^+e) - \varphi_M(\alpha) = \max_{t\in T} \mu(\alpha+\lambda^+e,\ t) - \max_{t\in T} \mu(\alpha, t)$$

Para qualquer $t \in T$

$$\mu(\alpha, t) \leqslant \max_{t\in T} \mu(\alpha, t)$$

Em particular para $t_\lambda \in \Gamma_M(\alpha+\lambda^+e) \subset T$ temos que

20 $$\mu(\alpha, t_\lambda) \leqslant \max_{t\in T} \mu(\alpha, t)$$

e também, por definição de $\Gamma_M(\alpha+\lambda^+e)$

21 $$\mu(\alpha+\lambda^+e,\ t_\lambda) = \max_{t\in T} \mu(\alpha+\lambda^+e,\ t)$$

Substituindo (20) e (21) em (19), segue-se que para $t_\lambda \in \Gamma_M(\alpha+\lambda^+e)$

22 $$\varphi_M(\alpha+\lambda^+e) - \varphi_M(\alpha) \leqslant \mu(\alpha+\lambda^+e,\ t_\lambda) - \mu(\alpha, t_\lambda)$$

Como $\mu(\alpha+\lambda^+e, t_\lambda)$ é diferenciável em relação a α, o segundo membro de (22) pode ser re-escrito

23 $$\mu(\alpha+\lambda^+e, t_\lambda) - \mu(\alpha, t_\lambda) = \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_\lambda), \lambda^+e \rangle + \sigma(\lambda^+)$$

24 onde

$$\lim_{\lambda^+\to 0} \frac{\sigma(\lambda^+)}{\lambda^+} = 0$$

Dividindo ambos os membros de (22) por $\lambda^+ > 0$ e entrando com (23),

25 $$\frac{\varphi_M(\alpha+\lambda^+e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \leq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_\lambda), e \rangle + \frac{\sigma(\lambda^+)}{\lambda^+}$$

Considerando agora que o mapeamento $\Gamma_M : R^q \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ é semi-contínuo superiormente,

26 $$\left(\lim_{\lambda^+\to 0} t_\lambda\right) \in \Gamma_M(\alpha)$$

De (24), (25) e (26) conclui-se que quando λ tende para zero, a desigualdade (25) deverá valer para algum $t \in \Gamma_M(\alpha)$ ou seja,

27 $$(\exists t' \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \lim_{\lambda^+\to 0} \frac{\varphi_M(\alpha+\lambda^+e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \leq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t'), e \rangle$$

A desigualdade (27) implica imediatamente em

$$\text{28} \qquad \lim_{\lambda^+ \to 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \leq \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

Voltando à expressão (19), se escolhermos $t \in \Gamma_M(\alpha)$ obteremos por um procedimento análogo a (19) ... , (22)

$$\text{29} \qquad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \qquad \varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha) \geq \mu(\alpha + \lambda^+ e, t) - \mu(\alpha, t)$$

Dividindo ambos os membros de (29) por $\lambda^+ > 0$ e utilizando (23), obtém-se

$$\text{30} \quad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle + \frac{\sigma(\lambda^+)}{\lambda^+}$$

Tomando o limite de (30) quando λ^+ tende a zero,

$$\text{31} \quad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \lim_{\lambda^+ \to 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

Em particular, pode-se escrever

$$\text{32} \qquad \lim_{\lambda^+ \to 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

De (28) e (32), obtém-se que

$$\lim_{\lambda^+ \to 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} = \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

que, pela definição de derivada direcional, coincide com (17) e está completa nossa demonstração.

Note-se que, devido a (18), se o conjunto de pontos de T em que $\mu(\alpha, t)$ atinge o máximo tem mais de um elemento, pode não existir um vetor P com as propriedades de um gradiente, ou seja $\frac{\partial \varphi_M}{\partial e}(\alpha) = \langle P, e\rangle \ \forall e \in R^q, |e| = 1$ e φ_M não é diferenciável em α. No entanto, se $\Gamma_M(\alpha)$ tiver sòmente um ponto, φ_M será diferenciável, como provamos no teorema seguinte:

33 <u>Teorema</u> -

Seja $\alpha \in R^q$ um ponto qualquer.

Se $|\Gamma_M(\alpha)| = 1$, isto é, $\Gamma_M(\alpha) = \{\bar{t}\}$, $\bar{t} \in T$ então φ_M é diferenciável em α, com gradiente

34 $$\nabla_\alpha \varphi_M(\alpha) = \nabla_\alpha \mu(\alpha, \bar{t})$$

<u>Demonstração</u> :

Partiremos da expressão (22) acima, definindo $h = \lambda^{+} e$ e subtraindo em ambos os membros $\langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_h), h \rangle$

$(\forall\, t_h \in \Gamma_M(\alpha + h))$

35 $$\varphi_M(\alpha+h) - \varphi_M(\alpha) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_h), h \rangle \leqslant \mu(\alpha+h, t_h) - \mu(\alpha, t_h) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_h), h \rangle$$

Notando agora que $(\forall\, t \in T)$ $\mu(\alpha, t)$ é diferenciável em α, obtém-se por definição de diferenciabilidade (ref. [6], pag. 38)

36 $$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(\alpha+h, t_h) - \mu(\alpha, t_h) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_h), h \rangle}{|h|} = 0$$

Dividindo-se ambos os membros de (35) por $|h|$ e fazendo $h \to 0$, obtém-se $\forall\, t_h \in \Gamma_M(\alpha + h)$

37 $$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_M(\alpha+h) - \varphi_M(\alpha) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_h), h \rangle}{|h|} \leqslant 0$$

onde o segundo membro é nulo devido a (36).

Agora, graças à semi-continuidade superior de Γ_M e ao fato de que, por hipótese, $\Gamma_M(\alpha) = \{\bar{t}\}$

38 $$\lim_{h \to 0} t_h = \bar{t} \qquad \forall\, t_h \in \Gamma_M(\alpha + h)$$

4.II

Utilizando (38), como $\nabla_\alpha \mu(\alpha,t)$ é contínuo por hipótese,

39 $$\lim_{h\to 0} \nabla_\alpha \mu(\alpha,t_h) = \lim_{t_h\to \bar{t}} \nabla_\alpha \mu(\alpha,t_h) = \nabla_\alpha \mu(\alpha,\bar{t})$$

Introduzindo (39) em (37), obtém-se

40 $$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_M(\alpha+h) - \varphi_M(\alpha) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha,\bar{t}), h\rangle}{|h|} \leq 0$$

Analogamente, partindo da expressão (29) obtém-se

41 $$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_M(\alpha+h) - \varphi_M(\alpha) - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha,\bar{t}), h\rangle}{|h|} \geq 0$$

As expressões (40) e (41) demonstram, pela aplicação da definição de diferenciabilidade, que φ_M é diferenciável e vale (34), estando demonstrado o teorema.

Os resultados dos teoremas (16) e (33) acima são também válidos para a função φ_m, como enunciado no seguinte:

42 <u>Teorema</u>

Seja $e \in R^q$, $|e| = 1$. Para qualquer $\alpha \in R^q$, φ_m é diferenciável na direção e com derivada direcional:

43 $$\frac{\partial \varphi_m}{\partial e}(\alpha) = \max_{t \in \Gamma_m(\alpha)} \left\{ - \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha,t), e \rangle \right\}$$

onde $\Gamma_m(\alpha) = \left\{ t \in T \mid \varphi_m(\alpha) = -\mu(\alpha,t) \right\}$

Além disso, se

$$\Gamma_m(\alpha) = \{\bar{t}\}, \quad \bar{t} \in T$$

, então φ_m é diferenciável em α com gradiente

44 $$\nabla_\alpha \varphi_m(\alpha) = -\nabla_\alpha \mu(\alpha, \bar{t})$$

Demonstração: Análoga à demonstração dos teoremas (16) e (33), acima.

Para a demonstração dos teoremas (16), (33) e (42) acima foi sòmente necessária a diferenciabilidade de $\mu(\alpha,t)$. No lema a seguir mostraremos que se $\mu(\alpha,t)$ também fôr analítica em t, o conjunto de pontos de máximo locais em t para cada α, será em geral finito, o que terá grande importância para o desenvolvimento de condições de otimalidade para o problema P1, como se verá na Seção III, e será também utilizado no capítulo seguinte.

45 Lema

Seja $f : \mathcal{T} \to R$, analítica em um intervalo aberto contendo $\mathcal{T} \triangleq [t_0, T]$

Se $f(t)$ tem um número infinito de pontos de máximo ou mínimo locais em $\mathcal{T}$, então $f(t)$ é constante em $\mathcal{T}$

Demonstração

Sejam $\tau \triangleq \left\{ t \in \mathcal{T} \mid \frac{\partial f}{\partial t}(t) = 0 \right\}$

46 $\beta \triangleq \{ t \in \mathcal{T} \mid t$ é ponto de extremo de $f(t)$ local em $\mathcal{T} \}$

Como f é analítica,

47 $$\beta \subset \tau \cup \{t_0, T\}$$

Supondo que o conjunto β é infinito, provaremos que $f(t)$ é constante.

Supondo, então, que β é infinito, conclui-se de (47) que τ é infinito.

Pelo teorema de Bolzamo - Weierstrass (ref. [14], pag. 76)

48 $$(\exists \hat{t} \in R)(\forall V(\hat{t})) \quad (V(\hat{t}) - \{\hat{t}\}) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{T}$ tem um ponto de acumulação $\hat{t}$ em R.

Mostraremos que $\hat{t} \in \mathcal{T}$ da seguinte maneira:

Como $\frac{\partial}{\partial t} f$ é contínua e $\{0\}$ é fechado, a imagem inversa de $\{0\}$

49 $$\mathcal{T} = \left(\frac{\partial}{\partial t} f\right)^{-1} (\{0\}) \qquad \text{é fechada}$$

e como por (48) $\hat{t}$ é ponto de acumulação de $\mathcal{T}$,

$\mathcal{T}$ fechado $\Rightarrow \hat{t} \in \mathcal{T}$, ou seja, por definição de $\mathcal{T}$,

50 $$\frac{\partial}{\partial t} f(\hat{t}) = 0$$

De (48) e (50), deduz-se que $\hat{t}$ é um zero não isolado de $\frac{\partial}{\partial t} f(t)$, ou seja, não existe nenhuma vizinhança de $\hat{t}$ na qual sòmente $\hat{t}$ anule $\frac{\partial}{\partial t} f(t)$.

51 Usando um resultado da referência [13], pag. 556, sabemos que sòmente pode valer uma das alternativas: ou os zeros de uma função analítica são isolados, ou a função é idênticamente nula.

Como $\hat{t}$ não é um zero isolado, deduzimos por (51) que $(\forall t \in T)$ $\frac{\partial}{\partial t} \mu(t) = 0$ ou seja, $\mu(t)$ é constante em T.

52 Os resultados obtidos nesta Seção permitir-nos-ão fazer uma reformulação de P2, baseada no teorema (33) e no lema (45) da seguinte maneira: se $\mu(\alpha, t)$ não é constante, segue-se do lema (45) que os conjuntos $\Gamma_M(\alpha)$ e $\Gamma_m(\alpha)$ são finitos para qualquer α. Construindo várias funções $\varphi_m^i(\alpha)$ cada uma correspondente a um intervalo T_i, $\varphi_M^i(\alpha) = \max_{t \in T_i} \mu(\alpha, t)$ de modo que cada T_i contenha sòmente um ponto de $\Gamma_M(\alpha)$, as funções φ_M^i serão diferenciáveis pelo teorema (33). Obteremos então um problema equivalente a P2, utilizando as funções φ_M^i e φ_m^i e aplicaremos a êste problema os resultados de Fritz - John e Kuhn - Tucker.

Êste procedimento sòmente será possível se $\mu(\alpha, t)$ não fôr constante, pois se $(\forall t \in T)$ $\mu(\alpha, t) = k \in R$, obtém se $\Gamma_M(\alpha) = \Gamma_m(\alpha) = T$, òbviamente infinito. Assim, desenvolveremos na próxima Seção condições de otimalidade para P1 aplicáveis a pontos α tais que $\mu(\alpha, t)$ não é constante em T.

O estudo dos pontos α tais que $\mu(\alpha,t)$ é constante em T é complicado. Como êste caso é muito particular e os resultados são de aplicação muito difícil, limitar-nos-emos a fazer alguns comentários na próxima Seção, sem desenvolver condições de otimalidade.

Seção III - Condições necessárias e suficientes de otimalidade para P1, com $|\mu(\alpha,t)|$ não constantemente igual a 1

Precedendo o enunciado das condições de otimalidade, provaremos um teorema importante relativo aos vínculos φ_M e φ_m, fornecendo um procedimento para construir o conjunto de funções φ_M^i e φ_m^i de que falamos em II-52.

Até agora não utilizamos a independência linear das funções v^j definidas em (1). Esta condição é introduzida com a finalidade seguinte: se as funções v^j são linearmente independentes, uma função μ que possa ser expressa como combinação linear das v^j,

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j$$

, terá sòmente uma representação e haverá uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do espaço $\left\{\mu \mid \mu = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j\right\}$ e o R^q.

Como os pontos em que $\mu(\alpha,t)$ é constante constituem um caso especial em nosso tratamento, é interessante que se estabeleça que uma das funções $v^j(t)$ seja constante e diferente de zero em t, ou seja, $v^1(t) = k \neq 0 \ \forall t \in T$, o que nos garantirá que

$\mu(\alpha,t)$ = constante $\Leftrightarrow \alpha_{\{2,\dots,q\}} = 0$, como provaremos adiante, tornando imediato o reconhecimento dêsses pontos.

53 <u>Teorema</u>

Sejam

54 $\alpha \in R^q$

55 $v^j : T \rightarrow R \quad , \quad j = 1, 2, \dots, q \quad , \quad T = [t_0, T]$

onde $(\forall t \in T) \ v^1(t) = k \neq 0 \qquad k \in R$

e ainda v^j analíticas, em um intervalo aberto contendo T, $\{v^j\}$ linearmente independentes em T, $j = 1, 2, \dots, q$

56 $$\mu(\alpha,t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j v^j(t)$$