

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DO NÚCLEO DE JOGOS
COOPERATIVOS APLICADOS À ALOCAÇÃO DE ENERGIA FIRME ENTRE
USINAS HIDROELÉTRICAS

Juliana Pontes de Lima

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Marcia Helena Costa Fampa
Luiz Augusto Nobrega Barroso

Rio de Janeiro
Outubro de 2011

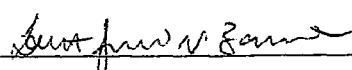
MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DO NÚCLEO DE JOGOS
COOPERATIVOS APLICADOS À ALOCAÇÃO DE ENERGIA FIRME ENTRE
USINAS HIDROELÉTRICAS

Juliana Pontes de Lima

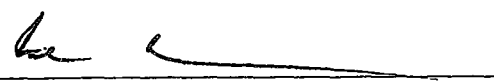
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

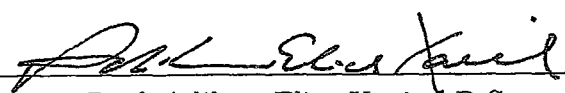
Examinada por:

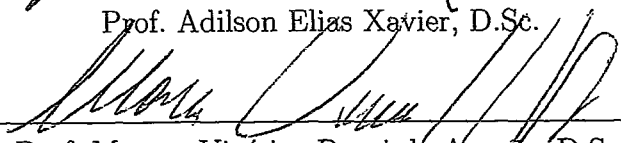

Prof.^a. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc.


Dr. Luiz Augusto Nobrega Barroso, D.Sc.


Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.


Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.


Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.


Prof. Marcus Vinicius Poggi de Aragão, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
OUTUBRO DE 2011

Lima, Juliana Pontes de

Métodos de Otimização para o Cálculo do Núcleo de Jogos Cooperativos Aplicados à Alocação de Energia Firme entre usinas hidroelétricas/Juliana Pontes de Lima. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XI, 122 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Marcia Helena Costa fampa

Luiz Augusto Nobrega Barroso

Tese (doutorado) - UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2011.

Referência Bibliográficas: p. 118 - 122.

1. Energia Firme. 2. Alocação de Benefícios.
3. Método de geração de de restrições. 4. Método Probabilístico. I. Fampa, Marcia Helena Costa *et al.*
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Aos meus pais.

Agradecimentos

À minha família, por todo carinho, educação, dedicação e apoio que me permitiram concluir mais esta etapa da vida.

Ao orientador e amigo Luiz Augusto Barroso, pela dedicação, confiança, apoio e incentivo em todos os momentos do desenvolvimento desta tese. Pelos conhecimentos transmitidos e oportunidades concedidas.

À Professora e orientadora Marcia Fampa, pela sua dedicação, apoio e incentivo desde o início do mestrado, pelos conhecimentos e segurança transmitidos.

Ao Mario Veiga F. Pereira, pela oportunidade concedida, grande contribuição e orientação, indispensáveis para o desenvolvimento desta tese.

Ao Sérgio Granville pela atenção, pelos ensinamentos e pela contribuição no desenvolvimento desta tese.

Ao Luis Augusto M. Rutledge, pelo apoio, carinho e dedicação, por estar sempre presente nos momentos importantes da minha vida.

Ao Professor Francisco Fontenele, pela amizade, incentivo e conselhos preciosos.

A todos os meus amigos, em especial, Dr. Augusto Rutledge, Elivelton Bueno, Maria de Fátima Marques, Selma Parente, Valéria S., Flávio M., Karla Pieragostni pelos bons momentos compartilhados.

Aos professores e amigos da COPPE/UFRJ.

A todos os amigos da PSR Consultoria, em especial, ao Rafael Kelman, pela orientação e revisão da tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA O CÁLCULO DO NÚCLEO DE JOGOS COOPERATIVOS APLICADOS À ALOCAÇÃO DE ENERGIA FIRME ENTRE USINAS HIDROELÉTRICAS

Juliana Pontes de Lima

Outubro/2011

Orientadores: Marcia Helena Costa Fampa
Luiz Augusto Nobrega Barroso

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo desta tese é encontrar a alocação dos direitos de energia firme entre um conjunto de agentes hidroelétricos. O cálculo de energia firme de um conjunto de usinas é formulado como um problema de programação linear. Mostra-se que não existe uma maneira “ótima”, única, de se fazer a alocação da sinergia resultante do seu cálculo entre todas as usinas do conjunto, conhecido como a grande coalizão. Porém, um critério que pode ser adotado na metodologia de repartição é a chamada “justiça”. Mostra-se que este critério equivale a pertencer ao “núcleo” de um jogo cooperativo. São então apresentados um método exato (baseado em programação linear inteira mista) e um método probabilístico (baseado em randomização de restrições) para encontrar as soluções no núcleo que também satisfaçam as propriedades do Leastcore, que consiste do conjunto de soluções que maximizam a menor “vantagem” que cada agente (ou subconjunto de agentes) tem por pertencer a grande coalizão, comparado ao que o mesmo agente teria fora dela. Os referidos métodos baseiam-se na relaxação das restrições como forma de lidar com a dificuldade causada pelo seu crescimento exponencial na formulação do problema, em função do número de agentes. Resultados são apresentados com exemplos oriundos do sistema brasileiro.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMIZATION METHODS FOR COMPUTATION OF THE CORE OF
COOPERATIVE GAMES APPLIED TO ALLOCATION OF FIRM ENERGY
RIGHTS AMONG HYDRO PLANTS

Juliana Pontes de Lima

October/2011

Advisors: Marcia Helena Costa Fampa
Luiz Augusto Nobrega Barroso

Department: Systems Engineering and Computer Science

This thesis presents methods to find the allocation of firm energy rights among a set of hydroelectric agents. The firm energy computation of a set of plants is formulated as a linear programming problem. It is shown that there are several ways to allocate the synergy resulting from the firm energy calculation between the whole set of plants, known as the grand coalition. However, a “justice” criterion can be adopted. It is shown that this criterion is equivalent to belonging to the “core” of a cooperative game. An exact method (based on mixed integer linear programming) and a probabilistic method (based on constraints randomization) are then presented to find solutions in the core that also satisfy the properties of Leastcore. The Leastcore is the set of solutions that maximize the smallest “advantage” that each agent (or subset of agents) has by belonging to the grand coalition, compared to what the same agent would have out of it. These methods are based on the constraints relaxation to handle the difficulty caused by its exponential growth with the number of constraints in the problem with the increase in the agent’s number. Applications are illustrated with examples from the Brazilian system.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Energia Firme de Usinas Hidrelétricas e Sinergia da Operação Integrada .	1
1.2	O Problema da Repartição Justa de Benefícios e Custos	3
1.3	Objetivos da Tese	5
1.4	Contribuições	7
1.5	Organização	8
2	O problema da Alocação de Energia Firme De Sistemas Hidrelétricos	9
2.1	Cálculo da Energia Firme de Sistemas Hidrelétricos	9
2.1.1	Sinergia da Operação Integrada de Usinas hidrelétricas	10
2.1.2	Formulação do Problema - Uma Única Usina	12
2.1.3	Formulação do Problema - Múltiplas Usinas	15
2.1.4	Modelo Para Cálculo de Energia Firme - Exemplo	19
2.2	Alocação da Energia Firme de Sistemas Hidroelétricos	21
2.2.1	Teoria de Jogos Cooperativos	22
2.2.2	Condição para um Jogo Cooperativo	34
2.2.3	O problema de alocação de Energia Firme Possui Núcleo Não Vazio	45
2.3	Motivação para Aplicação dos Métodos de Solução do Problema <i>Maxmin</i>	49
3	Método de Geração de Restrições	53
3.1	O Problema da Viabilidade	56
3.2	O Problema Mestre	58
4	Método de Randomização de Restrições	60
4.1	Problema Incerto e seus Métodos de Solução	63
4.2	Resultados Teóricos para o <i>MRR</i>	68
4.3	Aplicação do Método de Geração Randômica de Restrições ao Problema <i>Maxmin</i>	74

5	Resultados Computacionais	76
5.1	Dados de Entrada	77
5.2	Resultados Computacionais	82
5.2.1	Resultados <i>MGR</i>	83
5.2.2	Resultado - Método Randomizado <i>MRR</i>	93
5.2.3	Resultado - Método Exato <i>MGRR</i> (<i>MGR</i> + <i>MRR</i>)	107
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	111
6.1	Conclusão	111
6.2	Trabalhos Futuros	116
6.2.1	Método <i>MGR</i>	116
6.2.2	Método <i>MRR</i>	117

Lista de Figuras

2.1	Topologia das usinas	20
2.2	Representação geométrica do núcleo	30
2.3	Usinas em paralelo	41
2.4	Usinas em série	42
2.5	Usinas em paralelo	43
3.1	MGR	55
4.1	PCS_m	70
4.2	Teorema 1	72
5.1	Topologia das usinas	77
5.2	Instância A_{15} : Tempo de solução dos Problemas de viabilidade	86
5.3	Instância A_{20} : Tempo de solução dos Problemas de viabilidade	86
5.4	Distribuição de probabilidade da violação do <i>leastcore</i>	97
5.5	20 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Leastcore) - confiabilidade de 99%	99
5.6	30 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Leastcore) - confiabilidade de 99%	100
5.7	Distribuição de probabilidade da violação do núcleo - Confiabilidade de 99%	101
5.8	20 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo)- confiabilidade de 99%	104
5.9	30 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo) - confiabilidade de 99%	105
5.10	40 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo) - confiabilidade de 99%	106

Lista de Tabelas

2.1	Exemplo - Energia Firme.	19
2.2	Exemplo - Energias Firmes Individuais.	20
2.3	Exemplo - Alocações.	30
4.1	Exemplo - Número de restrições sorteadas - $n=20$ e $\epsilon = 1\%$	73
5.1	Dados de entrada.	78
5.2	Dados de entrada.	79
5.3	Instâncias com 84 etapas.	84
5.4	Instâncias com 12 etapas.	85
5.5	Turbinamento e Geração - 20 usinas e 12 etapas	88
5.6	Alocações do método MGR - 20 usinas e 12 etapas	90
5.7	Instâncias para 12 etapas e 20 usinas.	92
5.8	Instâncias para 12 etapas.	109

Capítulo 1

Introdução

1.1 Energia Firme de Usinas Hidrelétricas e Sinergia da Operação Integrada

A Energia Firme é a máxima demanda contínua de energia que um conjunto de usinas hidroelétricas consegue atender, durante um período especificado, quando a operação é simulada para o histórico de vazões¹. A Energia Firme é limitada pelo período mais seco do histórico, conhecido como período crítico. Esta definição, quando aplicada a uma única usina, determina a sua Energia Firme individual. Como veremos no próximo capítulo (seção 2.1), a energia firme total de um conjunto de usinas hidroelétricas, conhecido aqui como a *grande coalizão*, que operam de forma coordenada, é maior do que a soma das suas energias firmes individuais, resultantes de uma operação destas usinas sem coordenação com o sistema. A importância desta sinergia é ilustrada, por exemplo, em (Power Systems Research, Inc., 2000), onde mostra-se que há uma diferença de quase 8000 MW médios entre a soma das energias firmes “individuais” e a energia firme integrada do

¹É comum expressar a energia firme em “MWmed”, que denota o número de MWh entregues durante um determinado número de horas.

sistema hidrelétrico brasileiro. Este ganho sinérgico ocorre porque a operação integrada e coordenada das usinas hidrelétricas possibilita:

(i) O aproveitamento da diversidade hidrológica entre usinas localizadas em bacias distintas. As usinas localizadas em bacias que atravessam período de estiagem recebem “ajuda” daquelas situadas em bacias que estão experimentando condições hidrológicas mais favoráveis.

(ii) Um melhor aproveitamento das vazões das usinas localizadas em um mesmo rio. Os reservatórios permitem a regularização das vazões, transferindo água de um período úmido para um seco com ganhos para a própria usina e para as usinas a jusante.

A existência de um ganho na produção firme, resultante da operação integrada, nos leva imediatamente à questão de como reparti-lo de forma “justa” entre os diversos agentes de tal forma que seja vantajoso para cada um participar da grande coalizão. Em outras palavras, os benefícios da operação conjunta devem ser repartidos de forma que nenhum dos agentes tenha incentivo a sair da grande coalizão, o que faria com que a Energia Firme total do sistema fosse menor que a da operação conjunta. Esta repartição de benefícios tem grande importância comercial, pois em muitos sistemas com base hidroelétrica, tais como o Brasil, Panamá (Ente Regulador de los Servicios Públicos), costa oeste dos Estados Unidos (Bonneville Power Administration) (Bonneville Power Administration), (Bonneville Power Administration), Chile e Argentina (Zapata *et al.*, 2000), e Nova Zelândia (Meehan *et al.*, 2003), (Ministry of Economic and Development of New Zealand: Supply Security Issues), a energia firme é usada como limite máximo para os contratos de suprimento assinados pelas usinas hidroelétricas e, portanto, possui grande impacto na receita das mesmas.

1.2 O Problema da Repartição Justa de Benefícios e Custos

A repartição da energia firme é um exemplo do problema geral de repartição de custos e benefícios entre agentes que cooperaram para a construção de um recurso compartilhado como, por exemplo, uma rede de estradas ou um sistema de transmissão. Como o desenvolvimento de um recurso para uso compartilhado é mais barato e/ou eficiente do que o desenvolvimento de vários recursos para uso “exclusivo” de cada agente, surge o problema de como alocar o ganho sinérgico entre os participantes. Quando a alocação é “justa”, no sentido descrito acima, dizemos que ela pertence ao núcleo de jogos cooperativos (Maschler *et al.*, 1979), (Young, 1994). O núcleo formaliza o conceito de justiça em uma alocação de custos ou benefícios entre agentes. Este tipo de problema é estudado na teoria de jogos de coalizão (ou cooperativos) (Kahan *et al.*, 1995), (Lemaire), (Young, 1994), (Maschler *et al.*, 1979), que será utilizada como base para o desenvolvimento deste trabalho.

A determinação de uma alocação no Núcleo de jogos cooperativos é representada matematicamente como um conjunto de 2^n restrições lineares com $n = |N|$ variáveis de decisão, onde N é o conjunto de agentes. Este número de restrições é consequência da necessidade de verificação da condição de que o benefício atribuído a cada uma das $2^n - 1$ combinações de agentes não é inferior ao que estes conseguiriam obter se formassem um “consórcio” separado ou se atuasse “individualmente” (fora da coalizão).

Existem diversos métodos de alocação de custos e benefícios na literatura, como a alocação de Aumann-Shapley (Aumann *et al.*, 1974), (Young, 1994), a alocação a benefícios marginais e o método da última adição, por exemplo. Tais métodos foram aplicados na determinação da alocação da energia firme em (Faria, 2004). Dos métodos

citados acima, no entanto, somente a alocação marginal fornece uma alocação, comprovadamente, no núcleo.

Conforme veremos no próximo capítulo, o conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de benefícios consideradas “justas”. Isto nos leva a questionar se seria possível identificar uma alocação que fosse preferível às demais. Uma forma de resolver esta questão é determinar a alocação que maximiza a menor “vantagem” (Maschler *et al.*, 1979), (Young, 1994) que cada subconjunto tem por pertencer à “grande coalizão”, definida como sendo a diferença entre a alocação recebida pelo agente/coalizão e o que este receberia isoladamente, o que leva a uma repartição mais equitativa. O conjunto de todas as soluções com esta característica chama-se *leastcore* e pertence ao problema que denominamos *Maxmin*.

O problema *Maxmin* é um problema de programação linear com $n = |N|$ variáveis de decisão, N o conjunto de agentes, e 2^n restrições. Este número de restrições, similarmente ao Núcleo, é consequência da necessidade de verificação da diferença entre a alocação recebida por cada coalizão (combinação de agentes) e o que esta receberia isoladamente, de acordo com a definição do problema dada acima.

O caráter combinatório das restrições, cuja quantidade cresce com 2^n , torna a formulação do *Maxmin*, assim como a do Núcleo, incrivelmente grande em situações realistas. Para o caso da energia firme, por exemplo, se considerarmos o número de usinas hidrelétricas igual a 40, a formulação resultante terá $2^{40} = 1.1 \times 10^{12}$ restrições, computacionalmente difícil de resolver através de um método de programação linear.

1.3 Objetivos da Tese

O objetivo desta tese é propor dois métodos de solução para o problema *Maxmin*, ambos baseados na relaxação de restrições.

O primeiro deles consiste de um método exato de geração de restrições, que inicia resolvendo o problema com a formulação contendo um número pequeno de suas restrições e, a cada iteração, acrescenta a restrição mais violada pela solução deste problema relaxado, através da solução de um problema linear inteiro misto. O procedimento é interrompido quando não há nenhuma restrição violada pela solução do problema relaxado, ou seja, quando a otimalidade é provada. Este método foi anteriormente proposto em (Drechsel *et al.*, 2007) na alocação de custos em um problema de gerenciamento de cadeia de suprimento (*supply chain management*). Em (Drechsel *et al.*, 2007) foi mostrado que este método é bem geral no sentido de que pode ser adaptado a distintas aplicações. O método exato não pôde resolver instâncias relativamente grandes (acima de 30 usinas) do problema *Maxmin*.

O segundo método para a solução do problema *Maxmin* consiste de uma abordagem randomizada que resolve o problema com a formulação contendo somente um subconjunto das suas restrições, escolhido probabilisticamente de acordo com a teoria desenvolvida em (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*, 2002) e (Campi *et al.*, 2008). Este método foi desenvolvido, originalmente, com o objetivo de determinar soluções aproximadas para a classe dos problemas incertos. Estes problemas são caracterizados pela incerteza na definição de suas restrições, que ocorre em razão da incerteza nos seus dados, obtidos, frequentemente, a partir de medições. Como consequência deste fato, pode acontecer de existir um número muito grande, até mesmo infinito, de restrições possíveis para a sua formulação, cada restrição correspondendo a um valor possível do dado incerto.

O método randômico resolve o problema *Maxmin* com um subconjunto reduzido das

suas restrições, geradas aleatoriamente, o que torna possível a sua solução de forma eficiente. O número de restrições escolhidas é o ponto principal desta teoria (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*, 2002) e (Campi *et al.*, 2008) e funciona como um parâmetro que determina, probabilisticamente, o quão próxima a solução, dada pelo método randômico, estará da solução do problema *Maxmin*, no sentido de que esta estará violando uma pequena quantidade das restrições originais não consideradas na formulação relaxada. De outra forma, o método randômico fornece uma solução para o problema relaxado com uma determinada probabilidade de violação das restrições a um nível de confiabilidade, de acordo com níveis de violação e confiabilidade previamente definidos, o que significa que a referida solução irá satisfazer a grande maioria das restrições não consideradas na sua formulação, de acordo com o grau de violação desejado, a um nível de confiabilidade previamente definida. Portanto, de acordo com a confiabilidade estabelecida, este método fornece uma solução “aproximadamente” viável para o problema *Maxmin*.

Embora o método randômico não forneça uma solução exata para o *Maxmin*, é possível realizar a análise da qualidade das suas soluções, bem como a validade dos resultados da teoria probabilística correspondente (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*, 2002) e (Campi *et al.*, 2008), uma vez que conhecemos a solução ótima do problema, dada pelo método exato, para as instâncias que puderam ser resolvidas pelo mesmo. Até o momento desconhecemos a existência de artigos com aplicações industriais do método randômico. Neste caso, este é o primeiro teste de qualidade da sua aplicação em problemas práticos.

As abordagens exata e randômica, descritas acima, foram implementadas utilizando-se o software Xpress (XPRESS). Foram feitos testes com instâncias construídas através de dados coletados de fontes oficiais, como o ONS - Operador Nacional do Sistema Elétrico. Os resultados são relatados no capítulo de resultados (5).

1.4 Contribuições

As principais contribuições desta tese consistem na proposta de dois métodos (*MGR* e *MRR*) de solução para encontrar a alocação de energia firme entre usinas hidroelétricas que pertençam ao núcleo de jogos cooperativos e satisfaçam as propriedades do Leastcore (problema *Maxmin*). Estas contribuições são descritas a seguir:

- Com o método exato *MGR*, foi possível resolver instâncias do problema de tamanho nunca antes resolvido (com 30 agentes, o que equivale a um problema com 1.073.741.824 restrições na formulação). Este resultado é comparado com o de (Faria, 2004), onde foram resolvidas instâncias com somente 4 agentes, o que equivale a apenas 16 restrições na formulação do problema. Neste trabalho, foram utilizados dois métodos de alocação de energia firme no núcleo de jogos cooperativos, o de alocação a benefícios marginais e o do nucleolo, este último, fornecendo também solução para o *Maxmin*.
- Devido a estrutura do problema *Maxmin*, que possui poucas variáveis e um número de restrições que cresce exponencialmente, em função destas variáveis, foi possível aplicar o método randômico, *MRR*, ao mesmo. Com o *MRR*, embora não haja garantia de viabilidade para o *Maxmin*, conseguiu-se obter soluções aproximadas com boa qualidade, para as instâncias com 20, 30 e 40 agentes, que estão de acordo com a teoria probabilística relacionada, como pode ser visto no capítulo 5. O fato de que, até o momento, desconhecemos a existência de artigos com aplicações industriais do método randômico, juntamente com a aplicação inédita do *MGR* ao problema da alocação de energia firme, caracterizam a originalidade desta tese.
- Foi possível realizar a análise da qualidade das soluções do método *MRR*, bem como a validade dos resultados da teoria probabilística correspondente (Calafiore *et al.*,

2006), (Calafiore *et al.*, 2002) e (Campi *et al.*, 2008), uma vez que conhecemos a solução ótima do problema, dada pelo método *MGR*, para as instâncias que puderam ser resolvidas pelo mesmo.

1.5 Organização

Esta tese está organizada da seguinte forma: O capítulo 2 formula o problema do cálculo da energia firme de uma usina e de um conjunto de usinas hidrelétricas como um problema de programação linear; introduz os conceitos de núcleo (*core*) e *leastcore* (na seção 2.2), este último o conjunto solução do problema *Maxmin*, também apresentado neste capítulo e tratado pelos métodos propostos nesta tese; Nos capítulos 3 e 4 são apresentados os métodos exato e randômico, de solução do *Maxmin*, propostos como forma de lidar com a explosão combinatória do número de restrições do problema *Maxmin*, que ocorre com o crescimento do número de agentes. No capítulo 5 apresentamos as instâncias teste e os resultados computacionais obtidos com a implementação dos métodos descritos nos capítulos 3 e 4. Para efeito de comparação com o método exato, resolvemos, também, o problema *Maxmin* com o conjunto completo de restrições para algumas das instâncias.

Embora a definição de energia firme envolva a simulação do sistema para todo o histórico de vazões, nesta tese serão utilizados períodos de 12 e 84 meses, uma vez que o enfoque aqui está na performance dos algoritmos propostos. Os períodos considerados estão inseridos no período crítico, que, por possuir as piores afluências do histórico, é o que efetivamente determina a energia firme.

Capítulo 2

O problema da Alocação de Energia Firme De Sistemas Hidrelétricos

2.1 Cálculo da Energia Firme de Sistemas Hidrelétricos

A energia firme de um conjunto de usinas hidrelétricas corresponde à máxima produção de energia que pode ser feita continuamente, isto é, sem interrupções, supondo a ocorrência das vazões registradas no histórico. Esta é limitada pelo período crítico, caracterizado por ter as piores afluências do histórico de vazões.

O período crítico possui um papel importante na determinação da energia firme pois, por ser o período em que ocorre a pior seca, representa o ponto de estrangulamento da capacidade contínua de produção das usinas. Fora dele, ainda seria possível atender a um incremento da demanda, sem qualquer dificuldade, porém, dentro dele, qualquer incremento levaria a um racionamento. No Sudeste, o período crítico ocorreu no período de 1949 a 1956. Devido a ganhos sinérgicos, discutidos na próxima seção, quando as usinas são operadas de maneira coordenada, a energia firme total tem um aumento significativo, o que motiva o nosso estudo.

Neste capítulo, utilizaremos um modelo de programação linear para representar o problema em questão. Com o intuito de facilitar o entendimento do mesmo, inicialmente, apresentaremos a formulação para uma única usina para, então, estender para o caso com múltiplas usinas. Como veremos adiante, o cálculo da produção de energia leva em conta restrições operativas usuais, para cada usina, tais quais o balanço hídrico, os limites de turbinamento e vertimento, entre outros.

2.1.1 Sinergia da Operação Integrada de Usinas hidrelétricas

A operação integrada de um conjunto de usinas hidrelétricas torna possível o aproveitamento da existência da diversidade hidrológica, usualmente observada entre elas, principalmente em países continentais como o Brasil, e a regulação de suas vazões afluentes, através do uso dos reservatórios. Assim, através de uma operação conjunta, as usinas conseguem atender a uma demanda “firme” maior que a soma das demandas que cada uma conseguiria atender se operasse individualmente.

Os reservatórios regularizam as vazões naturais afluentes, isto é, armazenam água em períodos úmidos para usar em períodos mais secos, com ganhos na própria usina e nas usinas a jusante. Uma usina a fio d’água (sem reservatório), por exemplo, tem sua produção de energia totalmente dependente das suas vazões naturais, que são sazonais e voláteis. A maior demanda “firme” que ela consegue atender tende a ser baixa, dado que não é possível armazenar e transferir água dos períodos úmidos para os períodos secos. Entretanto, esta usina é beneficiada quando há um reservatório a montante, pois quando este regulariza as vazões, acaba por beneficiá-la diretamente, fazendo com que ela consiga atender a uma demanda, sem interrupções, superior à que conseguiria se dependesse somente de suas vazões naturais.

Outro benefício observado na operação integrada está na diversidade hidrológica, que possibilita que as usinas situadas em bacias que estão experimentando condições hidrológicas mais favoráveis “ajudem” aquelas que atravessam períodos de estiagem (e vice-versa quando as condições hidrológicas se invertem). Isto é possível porque, embora estejam situadas em bacias distintas, as usinas estão eletricamente interligadas. Com isso, a operação integrada das usinas traz benefícios para o sistema como um todo. Em outras palavras, a energia firme total resultante da operação integrada das usinas é maior que a soma das energias firmes “individuais”, mesmo que estas estejam localizadas em diferentes rios. Analogamente ao caso anterior, se cada usina operasse “individualmente”, estes benefícios não seriam obtidos.

Resumidamente, existe um ganho “sinérgico” de energia firme, que resulta da ação cooperativa de todos os agentes do sistema. A importância desta sinergia é ilustrada, por exemplo, em (Power Systems Research, Inc., 2000), onde mostra-se que há uma diferença de quase 8000 MW médios entre a soma das energias firmes “individuais” e a energia firme integrada do sistema hidrelétrico brasileiro. A existência de benefícios “sistêmicos” na capacidade de produção firme leva imediatamente à questão de como reparti-los entre os agentes proprietários das usinas. Esta repartição de benefícios tem grande importância comercial, pois em muitos sistemas com base hidrelétrica, tais como o Brasil, Panamá (Ente Regulador de los Servicios Públicos), costa oeste dos Estados Unidos (Bonneville Power Administration) (Bonneville Power Administration) (Bonneville Power Administration), Chile e Argentina (Zapata *et al.*, 2000), e Nova Zelândia (Meehan *et al.*, 2003) (Ministry of Economic and Development of New Zealand: Supply Security Issues), a energia firme é usada como limite máximo para os contratos de suprimento assinados pelas usina hidrelétricas.

2.1.2 Formulação do Problema - Uma Única Usina

No modelo apresentado a seguir será utilizada uma formulação linear para a operação do sistema hidrelétrico, a qual, em particular, considera constante o coeficiente de produção da usina hidrelétrica, como forma de garantir a linearidade do modelo. Outra não-linearidade desconsiderada no modelo, discutida em (ANA, 2002) e (Kelman *et al.*, 2003), é a representação das perdas de volume dos reservatórios por evaporação.

Equação de balanço hídrico

Esta equação representa a evolução do armazenamento ao longo do período de estudo: o volume final a cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência natural do rio) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t, \quad (2.1)$$

para $t = 1, \dots, T$

onde:

t indexa os estágios (mês)

T duração do estudo (número de meses do registro histórico)

v_t armazenamento do reservatório no início do mês t (m^3)

v_{t+1} armazenamento ao final do mês $t =$ início do mês $t + 1$ (m^3)

u_t volume turbinado ao longo do mês (m^3)

w_t volume vertido (m^3)

a_t afluência incremental ao longo do mês (m^3)

Limites de armazenamento e turbinamento

São estabelecidos os volumes máximo e mínimo armazenados no reservatório e turbinados ao longo de cada mês:

$$v_t \leq \bar{v} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

$$u_t \leq \bar{u} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$v_t \geq \underline{v} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$u_t \geq \underline{u} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

onde:

\bar{v} armazenamento máximo do reservatório (m^3)

\bar{u} máximo volume turbinado ao longo do mês (m^3)

\underline{v} armazenamento mínimo do reservatório (m^3)

\underline{u} mínimo volume turbinado pela usina ao longo do mês (m^3)

Para que seja possível a operação do reservatório, é necessário que haja uma cota mínima de armazenamento no reservatório, representado por \underline{v} , que limita inferiormente a variável v_t , e uma cota máxima, representando a capacidade máxima de armazenamento (\bar{v}). O volume compreendido entre os níveis mínimo e máximo de armazenamento é o volume efetivamente destinado à operação do reservatório e é denominado *volume útil*.

Considera-se no modelo que a cada usina está associado um reservatório. No caso em que a usina é a fio d'água ¹, definimos o volume útil nulo. Se a usina i é um reservatório puro ², o turbinamento máximo será zero.

¹Uma usina à fio d'água é aquela que não possui reservatório e, portanto, não possui capacidade de regularização de suas vazões

²Um reservatório puro não possui capacidade de turbinamento, só lhe restando verter ou armazenar água

Geração hidrelétrica

A produção de energia da usina (MWh) é igual ao produto do volume turbinado (m^3) pelo coeficiente de produção médio (MWh/m^3).

$$E_t = \rho \times u_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

onde: ρ fator de produção médio da usina (MWh/m^3)

Utilizamos aqui, um valor constante ρ , que corresponde ao fator de produção médio. No entanto, na realidade, este fator é definido, a cada etapa, em função dos volumes armazenado (v_t) e turbinado u_t , o que leva à uma não-linearidade na formulação.

Energia firme

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir estabelece que o firme é limitado pela menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \rho \times u_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

Onde F é a variável escalar que representa a energia firme da usina (MWh³).

Função objetivo

A energia firme F é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar F .

Modelo de programação linear para o problema da Energia Firme

O problema de otimização é formulado como:

³Na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio.

$$\max F \quad (2.8)$$

sujeito a

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t, \quad (2.9)$$

$$v_t \leq \bar{v}, \quad (2.10)$$

$$u_t \leq \bar{u}, \quad (2.11)$$

$$F - \rho u_t \leq 0, \quad (2.12)$$

$$v_t \geq \underline{v}_i, \quad (2.13)$$

$$u_t \geq \underline{u}_i, \quad (2.14)$$

$$t = 1, \dots, T \quad (2.15)$$

2.1.3 Formulação do Problema - Múltiplas Usinas

A Energia Firme de um sistema composto de múltiplas usinas hidrelétricas também pode ser obtida através de um modelo de programação linear, análogo ao modelo para uma usina visto na seção anterior. Assim como no modelo para uma única usina, para eliminar a não-linearidade do modelo, considera-se constante o coeficiente de produção da usina hidrelétrica e não serão representadas as perdas de volume dos reservatórios por evaporação.

Equação de balanço hídrico

Para o caso de um sistema com múltiplas usinas, a equação de balanço hídrico é um pouco diferente, já que, neste caso, adiciona-se à afluência incremental de cada usina as defluências das usinas a montante dela. Desta forma, teremos que o volume final a

cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência incremental mais defluência das usinas a montante) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} - \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i}, \quad (2.16)$$

para $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, n$

onde:

t indexa os estágios (mês)

T número de estágios (número de meses do registro histórico)

i indexa as usinas/reservatórios

$v_{t,i}$ armazenamento do reservatório i no início do mês t (m^3)

$v_{t+1,i}$ armazenamento do reservatório i ao final do mês $t =$ início do mês $t + 1$ (m^3)

M_i conjunto de usinas imediatamente a montante da usina i

$u_{t,i}$ volume turbinado pela usina i ao longo do mês t (m^3)

$w_{t,i}$ volume vertido pela usina i ao longo do mês t (m^3)

$a_{t,i}$ afluência incremental do reservatório i ao longo do mês t (m^3)

n número de usinas

Limites de armazenamento e turbinamento

As restrições abaixo são similares ao caso para uma usina somente e dispensa maiores explicações:

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

$$v_{t,i} \geq \underline{v}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

$$u_{t,i} \geq \underline{u}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

onde:

\bar{v}_i armazenamento máximo do reservatório i (m^3)

\bar{u}_i máximo volume turbinado pela usina i ao longo do mês (m^3)

\underline{v}_i armazenamento mínimo do reservatório i (m^3)

\underline{u}_i mínimo volume turbinado pela usina i ao longo do mês (m^3)

Para que seja possível a operação do reservatório, é necessário que haja uma cota mínima de armazenamento no reservatório, representado por \underline{v}_i , que limita inferiormente a variável $v_{t,i}$, e uma cota máxima, representando a capacidade máxima de armazenamento (\bar{v}_i). O volume compreendido entre os níveis mínimo e máximo de armazenamento é o volume efetivamente destinado à operação do reservatório e é denominado *volume útil*.

Considera-se no modelo que a cada usina i ($i = 1, \dots, n$) está associado um reservatório. No caso em que a usina i é a fio d'água, definimos o volume útil nulo. Se a usina i é um reservatório puro, o turbinamento máximo será zero.

Geração hidrelétrica

A produção de energia total (MWh) do sistema é igual à soma das produções individuais de todas as usinas:

$$E_t = \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \quad \text{para } t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

onde ρ_i é o coeficiente de produção da usina i (MWh/m^3).

O valor constante ρ , utilizado aqui, é uma aproximação do fator de produção médio que, na realidade, é definido, a cada etapa, em função dos volumes armazenado ($v_{t,i}$) e turbinado ($u_{t,i}$), o que leva à uma não-linearidade na formulação.

Energia firme

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir essencialmente estabelece que o firme é limitado pela menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \quad \text{para } t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

Onde F é variável escalar que representa a energia firme do conjunto de usinas (MWh⁴).

Função objetivo

Da mesma forma que para o problema com uma única usina, a energia firme F é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar F .

Formulação completa

A energia firme é definida como a demanda constante máxima que pode ser continuamente atendida, sem déficit, pelo sistema hidrelétrico:

$$\max \quad F \quad (2.23)$$

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} - \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i}, \quad (2.24)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad (2.25)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad (2.26)$$

$$F - \sum_i \rho_i u_{t,i} \leq 0, \quad (2.27)$$

$$v_{t,i} \geq \underline{v}_i, \quad (2.28)$$

$$u_{t,i} \geq \underline{u}_i, \quad (2.29)$$

$$t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

⁴Na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio

Onde F é uma variável escalar que representa a energia firme (MWh). As restrições 2.24 a 2.30 representam, respectivamente, o balanço hídrico e os limites de armazenamento e turbinamento, discutidos anteriormente. As restrições 2.27 representam o fato que a energia firme não pode exceder a produção de energia em período algum.

O modelo de cálculo da energia firme (2.23) - (2.30) é um problema de otimização linear e pode ser resolvido por pacotes computacionais comerciais como o CPLEX (CPLEX, 2000) ou XPRESS-MP (XPRESS).

2.1.4 Modelo Para Cálculo de Energia Firme -

Exemplo

Nesta seção, será utilizado, como um exemplo para o modelo de cálculo de energia firme, apresentado neste capítulo, um sistema hidrelétrico composto por três usinas localizadas em cascata. As características físicas das mesmas estão descritas na tabela 5.4 e a topologia, mostrada na Figura 2.1:

Tabela 2.1: Exemplo - Energia Firme.

<i>Usina</i>	ρ_i ($MW/m^3/s$)	\bar{v}_i (hm^3)	\bar{u}_i (m^3/s)
<i>Camargos</i>	0.1783	792.0	220
<i>Itutinga</i>	0.2447	11.0	236
<i>Funil – Grande</i>	0.3457	304.0	585

Na tabela acima, ρ_i ($MW/m^3/s$) é o fator de produção médio, \bar{v}_i (hm^3) e \bar{u}_i (m^3/s), volume e turbinamento máximos.

As vazões naturais utilizadas foram obtidas do histórico de vazões do sistema brasileiro para os 876 meses simulados (anos de 1931 a 2003), que abrangem o período crítico. As características físicas das usinas (volume máximo, turbinamento máximo e fator de



Figura 2.1: Topologia das usinas

produção médio) consideradas na tabela 2.1 são os valores utilizados pelo ONS. A Figura 2.1 mostra a topologia das usinas, consideradas no exemplo, e a legenda dos símbolos utilizados para representar cada tipo de usinas (fio d'água e com reservatório).

O modelo para o cálculo da energia firme foi implementado utilizando o pacote computacional Xpress-MP, e executado para o caso-exemplo descrito acima. O valor da Energia Firme encontrado foi 83,8 MW médios, que é, portanto, a máxima demanda que estas três usinas conseguiriam atender em uma operação integrada, sem interrupções, considerando a repetição das vazões históricas. Sendo os firmes individuais destas usinas iguais a:

Tabela 2.2: Exemplo - Energias Firmes Individuais.

<i>Usina</i>	<i>Firme</i> ($MW_{médios}$)
<i>Camargos</i>	13,9
<i>Itutinga</i>	7,8
<i>Funil – Grande</i>	23,85
<i>Total</i>	45,6

O resultado obtido é que o firme da grande coalizão é maior do que a soma dos firmes

individuais, o que está de acordo com a discussão feita na seção 2.1.1 deste capítulo.

2.2 Alocação da Energia Firme de Sistemas Hidroelétricos

Conforme já visto anteriormente, a energia firme de um conjunto de usinas hidro é a produção máxima constante de energia que pode ser alcançada ao longo de um período, para uma dada sequência de vazões. Além disto, na seção 2.1.1, foi visto que a energia firme total resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada agente maximiza isoladamente a sua produção, sem cooperar para a maximização do firme total do sistema.

A existência dos benefícios na capacidade de produção das usinas, quando estas operam em conjunto, leva imediatamente à questão de como reparti-los, de forma justa, entre os diversos agentes, de modo que seja vantajoso, para cada um, participar da grande coalizão. Ou seja, a repartição da energia firme total, resultante da operação conjunta, deve ser de tal maneira que a energia firme alocada a cada participante seja maior do que a sua produção firme individual, o que fará com que nenhum dos agentes tenha incentivo a sair da grande coalizão. Se a alocação possui tal característica, significa que esta pertence ao chamado "núcleo de jogos cooperativos", que, neste contexto, formaliza o conceito de justiça.

O problema da repartição da energia firme nada mais é do que uma instância do problema geral de repartição de custos e benefícios, entre agentes que cooperaram para a construção de um recurso compartilhado, e é estudado na teoria de jogos cooperativos (Young, 1994), assunto tratado neste capítulo.

Nas próximas seções, apresenta-se, de forma mais detalhada, a teoria de jogos e os conceitos de núcleo (*core*) e *leastcore*. Em seguida, será definido o problema a ser resol-

vido nesta tese, denominado *Maxmin*. Este capítulo termina com duas demonstrações: a primeira delas é a de que o problema de energia firme satisfaz a propriedade da superaditividade, que motiva o estudo da alocação do benefício obtido com a geração de todas as usinas de forma integrada. A demonstração seguinte é a de que o núcleo do problema de alocação de energia firme é não vazio.

2.2.1 Teoria de Jogos Cooperativos

A teoria dos Jogos é um ramo da matemática aplicada que estuda situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno. Dentre as diversas classificações existentes, as mais importantes são: Jogos Cooperativos e Não-Cooperativos.

A diferença básica entre jogos cooperativos e não-cooperativos é o tipo de solução empregada por cada um. Jogos cooperativos (Leng *et al.*, 2005) (Billera *et al.*, 1978) (Young, 1994) (Inter Agency Committee on Water Resources) Wu *et al.* (1999)) (Braga *et al.*, 1991) buscam repartir os benefícios de uma ação conjunta, de maneira a incentivar a cooperação entre os agentes. Os jogos não-cooperativos (Nash, 1951) (Kelman *et al.*, 2001) (Hobbs *et al.*, 2004) (Bushnell, 2003) (Cunningham *et al.*, 2002) são usados em ambientes competitivos, onde cada participante procura maximizar seu benefício individual, mesmo que em detrimento dos demais.

A teoria de jogos cooperativos é utilizada na solução tanto de problemas de alocação de custos, entre participantes que usufruem de um mesmo serviço, quanto de problemas de alocação de benefícios, como é o caso da energia Firme. No setor elétrico, vem sendo aplicada em problemas de alocação em seus diversos segmentos (IEEE Power Engineering Society). Uma de suas áreas de aplicação mais notáveis é a área de transmissão (Amboni *et al.*, 2001) (Barros *et al.*, 2001) (Medeiros *et al.*, 2001) (Silva *et al.*, 2001)

(Vieira *et al.*, 1997), sobretudo em alocação de custos de transmissão. Neste problema, o desenvolvimento de um “serviço” de transmissão, necessário para transportar a geração para a demanda, ocorre de maneira compartilhada por um conjunto de agentes (geradores e demandas). É intuitivo que o custo do serviço integrado seja menor que a soma de desenvolvimento de serviços separados para cada agente ou sub-grupos de agentes. Em outras palavras, o desenvolvimento conjunto é eficiente em termos econômicos. O problema é, então, como alocar este custo de serviço entre os participantes de maneira eficiente e justa. A referência (Zolezzi *et al.*, 2000) apresenta uma visão geral da utilização de jogos cooperativos para alocação de custos de transmissão.

Diversas outras aplicações práticas de teoria dos jogos cooperativos podem ser encontradas fora do setor elétrico, como por exemplo:

- problemas de gerenciamento de cadeia de suprimento (Leng *et al.*, 2005);
- repartição dos custos de aluguel de um sistema de telefonia na universidade de Cornell (Billera *et al.*, 1978);
- financiamento de projetos de recursos hídricos no estado americano do Tennessee (Young, 1994);
- alocação de custos de construção de reservatórios com usos múltiplos nos Estados Unidos (Inter Agency Committee on Water Resources);
- alocação dos custos de construção de um duto subterrâneo para transporte de água na Suécia Wu *et al.* (1999));
- aplicações em recursos hídricos de um modo geral (Young *et al.*, 1985), como o problema de alocação de custos de construção de dutos para abastecimento de águas em cidades (Braga *et al.*, 1991).

Embora existam muitos trabalhos na literatura referentes a aplicações da teoria dos jogos cooperativos na área de recursos hídricos, apenas um, na alocação de benefícios de energia firme, foi encontrado (Faria *et al.*, 2009). Neste trabalho, são investigados diferentes métodos de alocação da energia firme, tais como alocação marginal, alocação incremental e o método de Aumann-Shapley. Este último foi testado para o sistema brasileiro, que possui cerca de 100 usinas hidroelétricas, enquanto os demais, para somente 4 usinas em cascata.

Conceitos básicos

Um jogo cooperativo é formado por um conjunto N de jogadores que se unem para formar coalizões com o objetivo de maximizar ou minimizar uma função característica. Esta, por sua vez, fornece o benefício total, ou o custo total de fornecer um serviço, para cada coalizão formada pelos $n = |N|$ jogadores (ou agentes).

Matematicamente, uma coalizão é um subconjunto S do conjunto N de jogadores. Os jogadores podem agrupar-se de diferentes maneiras de acordo com seus interesses e conveniências. Para formar uma coalizão, é necessário que todos os jogadores envolvidos firmem acordos entre si e uma vez que todos concordem, a coalizão é formada. As coalizões são mutuamente exclusivas, ou seja, formar uma coalizão S implica que não há possibilidade de seus participantes fazerem acordos com participantes de fora dela.

A coalizão formada por todos os n jogadores é chamada de “grande coalizão”, ou coalizão N . Num jogo com $n = |N|$ jogadores há 2^n diferentes coalizões possíveis. A coalizão vazia, ou coalizão \emptyset , é a coalizão na qual nenhum jogador participa.

A maneira através da qual n jogadores formam m coalizões pode ser descrita pelo conjunto $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$. Este conjunto S satisfaz a três condições:

$$S_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, m$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \text{ e}$$

$$\bigcup_{i=1}^m S_i = N$$

Von Neumann e Morgenstern (Neumann *et al.*, 1947) introduziram pela primeira vez, em 1947, o termo função característica, que calcula para cada coalizão (argumento da função) o maior valor do benefício (ou menor valor do custo) associado a ela. Em outras palavras, a função característica fornece o valor do máximo benefício (ou mínimo custo) que os membros de uma determinada coalizão conseguem obter através de uma ação cooperativa entre eles. A definição formal da “função característica” é:

Definição: Para cada subconjunto S de N , a “função característica v ” de um jogo fornece o maior valor $v(S)$ que os membros de S podem receber se eles formarem uma coalizão e agirem juntos, cooperando entre si, sem a ajuda de qualquer jogador de fora dela.

Esta definição leva em conta uma restrição que requer que o valor da função característica da coalizão vazia seja zero, ou seja, $v(\emptyset) = 0$.

Outro requisito que deve ser atendido pela função característica em jogos de coalizão é a chamada “superaditividade”, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq N, \quad \text{tal que } S \cap T = \emptyset \quad (2.31)$$

A superaditividade determina que o benefício associado a qualquer coalizão será sempre maior ou igual a soma dos benefícios associados às sub-coalizões que a particionam. Uma vez que a expressão (2.31) não requer que $S \cup T$ seja igual a N , a superaditividade deve ser válida não somente para a grande coalizão, mas para qualquer outra possível. Desta forma, uma simples manipulação da expressão (2.31) permite concluir que seu lado direito pode não somente ter a soma dos benefícios de duas coalizões, como a soma dos benefícios de qualquer conjunto de coalizões que particiona $S \cup T$, o que equivale a:

$$v(S) \geq v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_m), \forall S, \quad \text{tal que } S_i \cap S_j = \emptyset \text{ e } \bigcup_{i=1}^m S_i = S \quad (2.32)$$

A superaditividade garante, portanto, que a cooperação entre os jogadores nunca gera uma redução no benefício total. Em outras palavras, a cooperação entre os agentes produz uma “sinergia”, que implica no aumento do benefício total, ou, na pior das situações, na manutenção do seu valor, correspondente a soma dos benefícios associados às sub-coalizes resultantes da partição do conjunto N de usinas.

Assumindo que a função característica do jogo apresenta superaditividade, a grande coalizão sempre será formada ao final do jogo. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do benefício total, é como dividi-lo de modo eficiente e justo entre os agentes que formam esta grande coalizão. A divisão do benefício $v(N)$ entre eles, representada pelo vetor de alocações $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, não é evidente.

Núcleo de jogos cooperativos

Dizemos que um vetor de alocações ϕ é considerado “justo” se ele satisfizer às três expressões abaixo:

$$v(N) = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (\text{Racionalidade do grupo}) \quad (2.33)$$

$$\phi_i \geq v(\{i\}) \quad (\text{para todo } i \in N) \quad (\text{Racionalidade individual}) \quad (2.34)$$

$$\sum_{i \in S} \phi_i \geq v(S), \quad \text{para todo } S \subset N \quad (\text{Racionalidade das coalizes}) \quad (2.35)$$

A equação 2.33 determina que deve-se alocar, aos jogadores, benefícios cuja soma é igual ao benefício da grande coalizão ($v(N)$), ou seja, deve-se garantir que a totalidade do benefício é alocada entre os agentes. Por sua vez, a inequação 2.34 determina que cada jogador deve receber, no mínimo, um benefício igual ao que ele obteria agindo individualmente ($v(\{i\})$). A inequação 2.35 determina que a soma das alocações dos jogadores de qualquer coalizão S deve ser maior que o benefício obtido pela ação conjunta destes jogadores ($v(S)$). Vale notar que 2.34 é apenas um caso particular de 2.35.

Quando uma alocação atende a (2.33)-(2.35), diz-se que ela pertence ao núcleo do jogo. O núcleo formaliza a idéia de justiça em uma alocação de custos ou benefícios entre agentes. Se uma alocação pertence ao núcleo de um jogo cooperativo, podemos dizer que o benefício atribuído a qualquer agente, ou a “consórcios” de agentes, não é inferior ao que estes agentes conseguiriam obter se formassem um “consórcio” separado ou se atuasse “individualmente” (fora da coalizão). Em outras palavras, uma alocação é justa se todos os participantes recebem mais benefícios (ou, ao menos, os mesmos benefícios) por estarem no “grande consórcio” do que fora dele.

Soluções que pertencem ao núcleo possuem uma certa estabilidade, já que nenhum jogador tem incentivo a sair da grande coalizão. Porém, é possível que o núcleo do jogo seja vazio. Neste caso, outras abordagens podem ser propostas, como, por exemplo, o uso dos conceitos de conjunto estável (ou *stable set*) (Neumann *et al.*, 1947) e conjunto de negociação (ou *bargaining-set*) (Aumann *et al.*, 1964). Na seção 2.2.3, apresentaremos a prova de que o núcleo do jogo, relacionado à repartição de energia firme, nunca é vazio.

Aplicação do núcleo de jogos cooperativos na alocação da energia firme

Suponha que exista uma função $f(\cdot)$ que calcule a energia firme de qualquer subconjunto destas hidrelétricas. O valor desta função é calculado pela aplicação do modelo (2.23)-(2.30) apresentado na seção 2.1.3. Com isto, teríamos, para um caso com 3 usinas, por exemplo, $f(H_2)$ o firme da usina H_2 ; $f(H_1, H_3)$ o firme conjunto das usinas H_1 e H_3 ; e $f(H_1, H_2, H_3)$ o firme total do sistema.

Sejam ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 as energias firmes alocadas à H_1 , H_2 e H_3 , respectivamente. A primeira restrição do núcleo é que a soma das alocações deve ser igual à energia firme total do sistema:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3)$$

O segundo grupo de restrições exige que a alocação de cada usina não seja inferior ao firme “isolado” das mesmas:

$$\phi_1 \geq f(H_1)$$

$$\phi_2 \geq f(H_2)$$

$$\phi_3 \geq f(H_3)$$

O terceiro grupo de restrições se aplica às combinações de duas usinas:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3)$$

Observe que ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são as variáveis de decisão do problema, e os lados direitos das restrições são valores conhecidos, determinados pelo modelo da seção 2.1.2. De acordo com a abordagem de jogos cooperativos, qualquer alocação ϕ_1 ; ϕ_2 ; ϕ_3 que atende o conjunto de restrições acima - conhecido como “núcleo” do jogo - é considerada “justa”, no sentido de que nenhum subconjunto de agentes teria incentivo a sair do “consórcio global”.

Como visto, as restrições do núcleo formam um conjunto linear, onde o lado esquerdo de cada restrição contém uma das combinações possíveis dos agentes (1 a 1, 2 a 2 etc.). Por sua vez, o valor do lado direito da restrição contém o benefício (energia firme, no caso) associado à mesma combinação.

Portanto, o núcleo deste jogo corresponderia à solução do sistema linear formado pelo conjunto de equações anteriores. Este sistema é reproduzido a seguir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3) \tag{2.36}$$

$$\phi_1 \geq f(H_1) \tag{2.37}$$

$$\phi_2 \geq f(H_2) \tag{2.38}$$

$$\phi_3 \geq f(H_3) \quad (2.39)$$

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \quad (2.40)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \quad (2.41)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \quad (2.42)$$

Finalmente, observa-se que para uma alocação estar no núcleo ela deve atender a um conjunto de inequações, o que faz com que a solução não seja necessariamente única.

Núcleo de jogos cooperativos - exemplo

Vamos ilustrar nesta seção o conceito de núcleo de jogos cooperativos, através de um exemplo que trata o problema da energia firme. Considere um sistema formado pelas duas usinas hidroelétricas em cascata, *Serra Facão* e *Emborcação*, que possuem proprietários distintos, com potências instaladas iguais a 212 MW e 1192 MW, respectivamente. Utilizando o modelo (2.8) - (2.15), de cálculo da energia firme, conclui-se que estas usinas possuem firmes “isolados” iguais a 94 MW médios e 466 MW médios, respectivamente. Através do modelo (2.23) - (2.30), é obtida uma Energia Firme total, resultante de uma operação integrada das 2 usinas, de 596 MW, que é superior à soma dos firmes “isolados” das mesmas (560 MW) e, portanto, indica a existência de um “benefício” na cooperação. Portanto, o problema a ser resolvido é repartir estes 596 MW médios entre as usinas, de forma a manter atrativa a operação integrada. Alguns possíveis critérios para a divisão deste montante estão indicadas na Tabela 2.3 a seguir:

Observa-se, nesta tabela, que o incentivo à cooperação ocorre quando a repartição se concentra na divisão da energia “excedente” (ou “ganho” somado aos firmes individuais), presente nas opções (c) e (d). Isto não ocorre na opção (a) para a usina Emborcação, já que nesta repartição o firme alocado a ela (298 MW médios) é menor que seu firme “isolado” (466 MW médios). O mesmo ocorre na opção (b) para a usina Serra Facão,

Tabela 2.3: Exemplo - Alocações.

Método de Alocação	Serra Facão	Emborcação
(a) Divisão igual	298	298
(b) Divisão proporcional às capacidades instaladas de cada usina	90	506
(c) Divisão igual do ganho somada aos firmes individuais	112	484
(d) Divisão do ganho, proporcional às capacidades instaladas de cada usina, somada aos firmes individuais	100	496

que tem o firme alocado a ela nesta repartição (90 MW médios) menor que seu firme “isolado” (94 MW médios). Ou seja, estes dois critérios de alocação não satisfazem à condição do tipo 2.37- 2.39, na seção 2.2.1, e, portanto, não constituem alocações “justas”. Note que qualquer forma de divisão do “ganho” acrescida ao firme individual leva ao núcleo (número infinito de soluções). Todas as alternativas de alocação da Tabela 2.3 estão representadas geometricamente na Figura 2.2 a seguir.

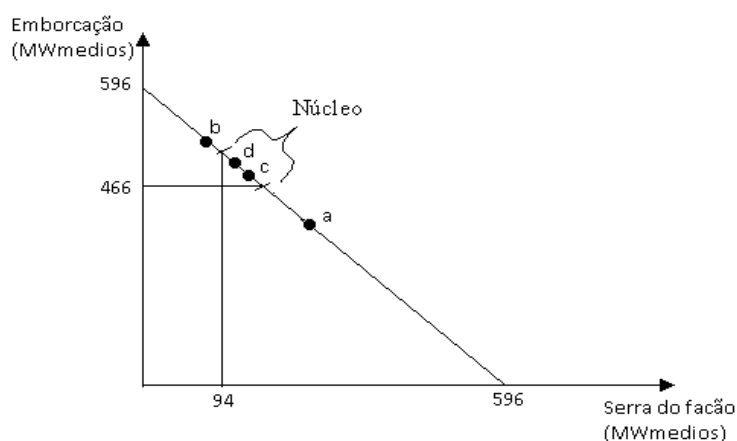


Figura 2.2: Representação geométrica do núcleo

O conjunto de soluções no núcleo do jogo cooperativo é representado neste exemplo pelo segmento de reta indicado na Figura 2.2. Pode-se notar que cada ponto deste segmento aloca tanto à usina Serra do Facão, quanto à usina Emborcação, energias firmes maiores que seus respectivos firmes “isolados” e portanto são atrativos sob o ponto de vista da coalizão. Observa-se ainda que mais de uma alocação pode pertencer ao núcleo, ou seja, o núcleo não é único.

Problema *Maxmin* - *LeastCore*

Como já foi mencionado anteriormente, o conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de benefícios consideradas “justas”. Isto nos leva a questionar se seria possível identificar uma alocação que seja preferível às demais.

Suponha, por exemplo, que tenha sido escolhida uma alocação no núcleo $\{\phi_1^p; \phi_2^p; \phi_3^p\}$, através de algum critério, e que um subconjunto de agentes, por exemplo, os agentes 1 e 3, propõem uma alocação alternativa $\{\phi_1^q; \phi_2^q; \phi_3^q\}$, também no núcleo, mas que leva a uma maior alocação para estes agentes, isto é:

$$\phi_i^q > \phi_i^p, \quad i = 1, 3 \quad (2.43)$$

Esta nova alocação proposta diminui a alocação total de outro agente, no caso, o agente 2:

$$\phi_2^q < \phi_2^p \quad (2.44)$$

Neste caso, o agente 2 vai preferir a alocação original, e não concorda com a proposta dos agentes 1 e 3, o que gera um impasse na solução deste problema. O modelo a seguir resolve esta questão, uma vez que ele determina a alocação que maximiza a menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer a “grande coalizão”. O referido

modelo, denominado *Maxmin* será mostrado abaixo para um caso com três agentes, onde δ e os ϕ 's são variáveis, e os $f(\cdot)$'s são dados:

$$\max \quad \delta \tag{2.45}$$

sujeito a

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3), \tag{2.46}$$

$$\delta \leq \phi_1 - f(H_1), \tag{2.47}$$

$$\delta \leq \phi_2 - f(H_2), \tag{2.48}$$

$$\delta \leq \phi_3 - f(H_3), \tag{2.49}$$

$$\delta \leq \phi_1 + \phi_2 - f(H_1, H_2), \tag{2.50}$$

$$\delta \leq \phi_1 + \phi_3 - f(H_1, H_3), \tag{2.51}$$

$$\delta \leq \phi_2 + \phi_3 - f(H_2, H_3), \tag{2.52}$$

$$\delta \geq 0 \tag{2.53}$$

Observa-se que os lados direitos das desigualdades representam a “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer a “grande coalizão”, comparado com o que o mesmo subconjunto receberia fora dela. Por exemplo, a diferença $\phi_1 + \phi_3 - f(H_1, H_3)$ representa o adicional de firme alocado ao subconjunto $\{H_1, H_3\}$ com relação ao firme que o mesmo teria se estivesse “isolado”, $f(H_1, H_3)$. O escalar, δ , no problema, representa, portanto, a maximização da menor vantagem (*Maxmin*). A restrição $\delta \geq 0$ garante que a “vantagem” seja não-negativa para qualquer subconjunto, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo.

Nesta tese, o objetivo consiste em obter a solução do problema *Maxmin*. Para isto, uma vez que o tamanho da formulação do problema cresce exponencialmente com o número de agentes, tornando o problema intratável quando este número é relativamente grande, consideraremos dois métodos baseados na relaxação das restrições: um exato (*MGR*) e outro randômico (*MRR*), descritos no próximo capítulo. Tais métodos lidam com o problema incluindo em sua formulação um subconjunto das restrições que o definem. O conjunto de soluções do *Maxmin* chama-se *leastcore*. A formulação geral do problema *Maxmin* é:

$$(Maxmin) \quad \max \quad \delta \tag{2.54}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = f(N), \tag{2.55}$$

$$\delta \leq \sum_{i \in S} \phi_i - f(S), \quad \forall S \subset N \tag{2.56}$$

$$\delta \geq 0 \tag{2.57}$$

Note que o modelo pode ter mais de uma alocação com mesma “menor vantagem” (δ). Em (Young, 1994) é proposto um método de solução para *Maxmin* que determina uma destas alocações através da maximização lexicográfica das “vantagens”. A alocação obtida desta forma, pertencente ao chamado *Nucleolo*, além de única, sempre existe e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio. A principal dificuldade do método do *Nucleolo*, da mesma forma que no *Maxmin*, é o caráter combinatório das restrições, que crescem com 2^n , onde n é o número de agentes. O método do *Nucleolo* não será implementado nesta tese.

Em Faria ((Faria, 2004)), foram utilizados diversos métodos de alocação por teoria

dos jogos, no entanto, apenas dois deles fornecem alocação que está, garantidamente, no núcleo do jogo. Os referidos métodos são o de alocação a benefícios marginais (BM) e o do Nuclelolo. No método BM, o benefício de cada participante é proporcional ao incremento marginal na energia firme resultante de um aumento marginal nos recursos aportados pelo participante (capacidade de armazenamento do reservatório, capacidade de turbinamento e vazão natural). O método BM será utilizado nesta tese, na seção (2.2.2), na demonstração de que o núcleo do problema de alocação de energia firme é não vazio. Em (Faria, 2004), as instâncias resolvidas pelos métodos que retornam como solução uma alocação no núcleo possuem somente $n = 4$ agentes, o que equivale a 16 restrições na formulação do problema. Os demais métodos deste trabalho foram aplicados no sistema hidroelétrico brasileiro (caso real), com cerca de 100 usinas com dados históricos de vazões do período de 1932 a 2001.

2.2.2 Condição para um Jogo Cooperativo

Conforme apresentado no início deste capítulo, uma das motivações para o problema de alocação de benefícios é a existência de “sinergia” entre os agentes, isto é, o benefício global excede a soma dos benefícios isolados. Em outras palavras, o jogo deve atender à condição de superaditividade (2.31). Para o problema em análise nesta tese, este aspecto intuitivo se traduz no requisito de que a soma das energias firmes “isoladas”, de qualquer grupo de agentes, não exceda a energia firme do conjunto. Por exemplo, para o sistema hidrelétrico composto de três usinas hidrelétricas H_1 , H_2 e H_3 , a seguinte inequação deve ser atendida:

$$f(H_1, H_2, H_3) \geq f(H_1) + f(H_2) + f(H_3) \quad (2.58)$$

que é justamente a expressão da sinergia.

Porém as restrições do tipo (2.58) devem ser válidas também para todos os subcon-

juntos de agentes. Por exemplo, devem ser válidas inequações do tipo:

$$f(H_1, H_2, H_3) \geq f(H_1, H_2) + f(H_3) \quad (2.59)$$

A verificação de todas as condições parece ser tão complexa quanto verificar o conjunto de restrições de núcleo (2.35). Entretanto, como será visto a seguir, pode-se demonstrar que as condições de tipo (2.58), para todos os subconjuntos de agentes, são válidas se o benefício global é calculado como a solução de um problema de programação linear com algumas características específicas, como é o caso da Energia Firme.

Esta demonstração, feita em (Faria, 2004) para um sistema com duas usinas, será dada em duas etapas: na primeira será mostrado que a condição de superaditividade é satisfeita se o benefício do jogo cooperativo em questão pode ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas o lado direito das restrições para o cálculo do benefício de qualquer subconjunto de agentes. Em seguida, será mostrado que o problema de alocação de energia firme atende a estas condições.

Condição atendida para o modelo de programação linear

Por simplicidade de notação, a demonstração será feita para um caso com 3 agentes. A generalização para N agentes é imediata, ou seja, a prova de que o modelo de programação linear atende à condição de superaditividade para quaisquer subconjuntos de agentes é análoga.

Suponha que o benefício $z(i)$ de um agente i , em um jogo cooperativo qualquer, possa ser calculado como a solução de um problema de programação linear. Suponha ainda que o benefício $z(S)$ de qualquer subconjunto S de agentes possa ser calculado através do mesmo modelo, apenas alterando o lado direito (“recursos”) das restrições.

Deseja-se mostrar que o benefício conjunto é maior ou igual à soma dos benefícios individuais para todos os agentes ou combinações de agentes. Assim, deve-se verificar a

validade dos seguintes tipos de desigualdades:

$$z(1, 2, 3) \geq z(1) + z(2) + z(3) \quad (2.60)$$

$$z(i, j) \geq z(i) + z(j), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j \quad (2.61)$$

$$z(1, 2, 3) \geq z(i, j) + z(k), \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j \neq k \quad (2.62)$$

Onde o modelo para o cálculo do benefício de um conjunto qualquer de agentes pode ser dado por:

$$z(1, \dots, k) = \max \quad cx \quad (2.63)$$

sujeito a

$$Ax \leq \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} b_i$$

$$x \geq 0$$

Em particular, os modelos para o cálculo do benefício de cada agente individualmente e das três usinas juntas são:

$$z(1) = \max \quad cx \quad (2.64)$$

sujeito a

$$Ax \leq b_1$$

$$x \geq 0$$

$$z(2) = \max \quad cx \quad (2.65)$$

sujeito a

$$Ax \leq b_2$$

$$x \geq 0$$

$$z(3) = \max \quad cx \quad (2.66)$$

sujeito a

$$Ax \leq b_3$$

$$\begin{aligned}
& x \geq 0 \\
z(1, 2, 3) = \max \quad & cx \\
\text{sujeito a} & \\
& Ax \leq b_1 + b_2 + b_3 \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{2.67}$$

O problema dual correspondente a cada problema é:

$$\begin{aligned}
z(1) = \min \quad & \pi b_1 \\
\text{sujeito a} & \\
& \pi A \geq c
\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
z(2) = \min \quad & \pi b_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& \pi A \geq c
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
z(3) = \min \quad & \pi b_3 \\
\text{sujeito a} & \\
& \pi A \geq c
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
z(1, 2, 3) = \min \quad & \pi(b_1 + b_2 + b_3) \\
\text{sujeito a} & \\
& \pi A \geq c
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Sejam π_1 , π_2 , π_3 e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (2.68) a (2.71), respectivamente. Aplicando a igualdade primal-dual, a restrição (2.60) é reescrita como:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2 + b_3) \geq \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \pi_3 b_3 \tag{2.72}$$

Como o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos quatro problemas duais, as soluções ótimas de cada problema são soluções viáveis dos demais. Em particular, π_{123} , é uma

solução viável do problema (2.68). Como o problema dual minimiza a função objetivo, isto significa que:

$$\pi_{123}b_1 \geq \pi_1b_1 \quad (2.73)$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos problemas (2.69) e (2.70), obtém-se que:

$$\pi_{123}b_2 \geq \pi_2b_2 \quad (2.74)$$

$$\pi_{123}b_3 \geq \pi_3b_3 \quad (2.75)$$

Somando (2.73), (2.74) e (2.75), chega-se a (2.72), que por sua vez equivale a (2.60).

Para concluir a demonstração, utiliza-se o mesmo procedimento para verificar as desigualdades (2.61) e (2.62). O modelo de cálculo da energia firme da sub-coalizão que contém os agentes 1 e 2, por exemplo, pode ser simplificado da seguinte forma:

$$z(1, 2) = \max \quad cx \quad (2.76)$$

sujeito a

$$Ax \leq b_1 + b_2$$

$$x \geq 0$$

O problema dual do modelo (2.76) é:

$$z(1, 2) = \min \quad \pi(b_1 + b_2) \quad (2.77)$$

sujeito a

$$\pi A \geq c$$

Sejam π_{12} , π_3 e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (2.77), (2.70) e (2.71), respectivamente. Com a igualdade primal-dual, a restrição (2.62), para as usinas em questão, é reescrita como:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2 + b_3) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2) + \pi_3b_3 \quad (2.78)$$

Novamente, o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos três problemas duais e a solução ótima de cada um é uma solução viável do outro. Em particular, π_{123} , é uma solução viável do problema (2.77). Como o problema dual visa a minimização da função objetivo, temos que:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2) \quad (2.79)$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao problema (2.70), obtém-se que:

$$\pi_{123}b_3 \geq \pi_3b_3 \quad (2.80)$$

Somando 2.79 e 2.80 chega-se a 2.78 que por sua vez equivale à restrição 2.62.

A demonstração de que (2.61) se verifica é análoga.

Assim, fica provado que a condição superaditiva é satisfeita caso o benefício do jogo cooperativo em questão possa ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas o lado direito das restrições para consideração de qualquer subconjunto de agentes. A seguir, será mostrado que o problema de alocação de energia firme se enquadra nestas condições.

Condição atendida para o problema de alocação de Energia Firme

O modelo de cálculo de Energia Firme apresentado na seção (2.1), e reproduzido a seguir, é um problema de otimização linear.

$$\max \quad F \quad (2.81)$$

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} - \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i}, \quad (2.82)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad (2.83)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad (2.84)$$

$$F - \sum_i \rho_i u_{t,i} \leq 0, \quad (2.85)$$

$$t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \quad (2.86)$$

Para que ele seja um caso particular da demonstração feita na seção anterior, e como tal, atenda automaticamente às condições de jogos cooperativos, deve-se provar que a energia firme de qualquer sub-conjunto de usinas pode ser calculada através de um mesmo modelo de programação linear, apenas alterando o lado direito (“recursos”) das restrições.

Note que esta condição não é claramente atendida no caso da energia firme, pois, tal como visto na equação (2.82), há uma conexão entre as equações de balanço hídrico de usinas em cascata. Caso uma usina não pertença a uma dada coalizão, e os lados direitos de todas as suas restrições se igualem a zero, a água correspondente à sua vazão incremental (lado direito de uma das restrições 2.82), que deveria chegar à usina imediatamente a jusante, não estaria sendo contabilizada, o que caracterizaria um erro.

Esta limitação pode ser resolvida se considerarmos como recursos de cada usina somente suas capacidades de turbinamento \bar{u} e de armazenamento \bar{v} . Se uma usina não faz parte de uma dada coalizão, estas capacidades (lados direitos de suas restrições de volume máximo e turbinamento máximo) são zeradas. Neste caso, a água que chega a montante seria totalmente vertida e seria a mesma coisa que a usina não existisse.

Entretanto, há um detalhe importante na demonstração de que a condição de superaditividade, apresentada anteriormente nesta seção, está atendida: todos os recursos no lado direito das restrições estarão sendo alocados a cada um dos participantes - ver vetores b_1 e b_2 nos problemas (2.64)-(2.67). Observando o problema de cálculo do firme (2.81)-(2.86), não há dúvida em alocar os limites de armazenamento (\bar{v}_i) e turbinamento (\bar{u}_i) aos respectivos agentes. O problema surge com as vazões afluentes incrementais $a_{t,i}$, que são os recursos no lado direito da equação de balanço (2.82). Esta dificuldade já havia sido detectada em (Binato, 1992).

Uma primeira idéia seria alocar as vazões afluentes a cada usina como seu recurso próprio. Se as usinas estão em paralelo, como na Figura 2.3 abaixo, esta alocação estaria correta, pois o firme isolado da usina 2 não é afetado pelas afliências à usina 1, e vice-versa.

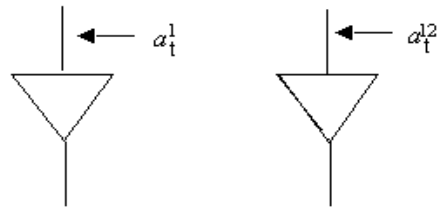


Figura 2.3: Usinas em paralelo

Suponha agora que as usinas estão em série, como na Figura 2.4 abaixo, e que as vazões incrementais a cada usina são alocadas separadamente em cada vetor de recursos.

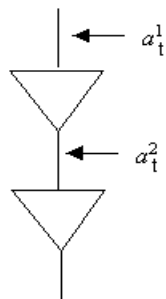


Figura 2.4: Usinas em série

Neste caso, observe que o firme isolado da usina 2 (a jusante), não estaria correto. A razão é que, se a usina 1 não existisse, a usina 2 deveria receber a vazão total afluyente, $a_{t,1} + a_{t,2}$, e não somente a vazão incremental.

Será mostrado, a seguir, que o modelo de energia firme pode ser reescrito de forma a representar todas as usinas em série como usinas em paralelo. Isto permite definir os recursos de vazão alocados a cada usina de maneira mais coerente.

Reformulação do problema de energia firme

O procedimento de transformação série-paralelo será desenvolvido para um sistema com duas usinas. Novamente, a extensão para uma topologia geral é imediata. As equações de balanço hídrico de duas usinas em série são:

$$v_{t+1,1} = v_{t,1} + a_{t,1} - u_{t,1} - w_{t,1} \quad (2.87)$$

$$v_{t+1,2} = v_{t,2} + a_{t,2} - u_{t,2} - w_{t,2} + u_{t,1} + w_{t,1} \quad (2.88)$$

Somando as equações (2.87)-(2.88), obtém-se:

$$v_{t+1,12} = v_{t,12} + a_{t,12} - u_{t,2} - w_{t,2} \quad (2.89)$$

onde:

$v_{t,12}$ representa a soma dos armazenamentos das usinas 1 e 2.

$a_{t,12}$ afluência natural (soma das incrementais) à usina.

As equações (2.87) e (2.89) correspondem à mesma região viável que as equações originais (2.87) e (2.88). A diferença é que a equação de balanço (2.89) não inclui as variáveis de defluência a montante, $u_{t,1}$ e $w_{t,1}$ (estas variáveis foram canceladas na soma). Como mostra a Figura 2.5, é como se as usinas estivessem em paralelo, cada uma recebendo a montante uma quantidade de água igual à sua vazão natural.

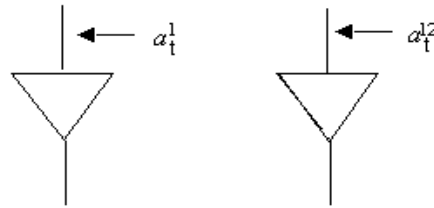


Figura 2.5: Usinas em paralelo

Por sua vez, os limites de armazenamento são reescritos como:

$$v_{t,1} \leq \bar{v}_1 \quad (2.90)$$

$$v_{t,12} - v_{t,1} \leq \bar{v}_2 \quad (2.91)$$

Os limites de defluência permanecem iguais:

$$u_{t,1} \leq \bar{u}_1 \quad (2.92)$$

$$u_{t,2} \leq \bar{u}_2 \quad (2.93)$$

Portanto, o cálculo da energia firme passa a ser formulado como:

$$\max F \quad (2.94)$$

sujeito a

$$v_{t+1,1} - v_{t,1} - u_{t,1} - w_{t,1} = a_{t,1}, \quad (2.95)$$

$$v_{t+1,12} - v_{t,12} - u_{t,2} - w_{t,2} = a_{t,12}, \quad (2.96)$$

$$v_{t,1} \leq \bar{v}_1, \quad (2.97)$$

$$v_{t,12} - v_{t,1} \leq \bar{v}_2, \quad (2.98)$$

$$u_{t,1} \leq \bar{u}_1, \quad (2.99)$$

$$u_{t,2} \leq \bar{u}_2, \quad (2.100)$$

$$F - \rho_1 u_{t,1} - \rho_2 u_{t,2} \leq 0, \quad (2.101)$$

$$v_{t,12} - v_{t,1} \geq 0, \quad (2.102)$$

$$t = 1, \dots, T \quad (2.103)$$

O modelo (2.94)-(2.103), que fornece o mesmo “firme” do primeiro modelo apresentado na seção 2.1, mostra a separação dos recursos nos vetores b_1 e b_2 , onde o vetor b_1 possui os recursos da usina 1 e b_2 , da usina 2. Assim, ao computar o firme individual da usina 2, por exemplo, deve-se atribuir o valor zero aos recursos da usina 1.

O procedimento descrito acima está relacionado com o conceito de “Mercado Atacadista de Água”, desenvolvido em (Lino, 2001) (Lino *et al.*, 2003). A idéia básica é que cada usina da cascata tem “direito” a utilizar a vazão natural afluyente, e deve ser compensada por alterações neste volume afluyente causadas por ações de reservatórios a montante; simetricamente, a usina deve compensar as unidades a jusante pelo efeito de seu próprio reservatório.

Foi provado que o cálculo da energia firme atende às condições dos jogos cooperativos, ou seja, a energia firme resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada uma maximiza isoladamente a sua produção.

Na próxima seção, será provado que o núcleo do problema da alocação de energia firme é não vazio, através da apresentação de uma alocação que satisfaz a todas as restrições que o definem.

2.2.3 O problema de alocação de Energia Firme Possui Núcleo Não Vazio

Para a demonstração de que o núcleo do problema de alocação de energia firme é não vazio, basta mostrar que existe uma alocação que satisfaz a todas as condições do núcleo de jogos cooperativos. Assim, considere a alocação da energia firme total do sistema proporcionalmente aos benefícios marginais (método BM) dos recursos aportados pelas usinas para o cálculo do “firme” total. Como já foi visto, não é intuitivo atribuir vazões a uma determinada usina em um sistema em cascata. Por esta razão, usaremos a mesma transformação série-paralelo que resultou no modelo (2.94)-(2.103).

Considerando que o problema (2.94)-(2.103) tem sempre solução ótima, sabe-se, pelo Teorema Forte da Dualidade, que o valor ótimo da função objetivo do modelo, para duas usinas, é igual ao valor ótimo da função objetivo de seu problema dual associado. A função objetivo do dual do referido modelo é:

$$\left(\sum_t \pi_{a_{1,t}} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v_{1,t}} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u_{1,t}} \bar{u}_1 + \sum_t \pi_{a_{12,t}} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v_{2,t}} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u_{2,t}} \bar{u}_2 \right) \quad (2.104)$$

onde os π 's são as variáveis duais associadas a cada restrição do modelo (2.94)-(2.103).

Vale notar que a variável dual π_F , associada à restrição de atendimento ao firme

(2.101), não aparece na fórmula porque o lado direito da sua restrição é zero.

O método BM aloca a cada usina a sua parcela da função objetivo do dual correspondente, ou seja, a soma das variáveis duais associadas a cada restrição multiplicadas pelos seus respectivos recursos (lado direito das restrições do problema primal).

A alocação para este caso com 2 usinas fica então:

$$\phi_1 = \sum_t \pi_{a_{1,t}} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v_{1,t}} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u_{1,t}} \bar{u}_1 \quad (2.105)$$

$$\phi_2 = \sum_t \pi_{a_{12,t}} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v_{2,t}} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u_{2,t}} \bar{u}_2 \quad (2.106)$$

A soma das alocações resultantes deste método é igual ao firme total do sistema. A prova disto vem diretamente do Teorema Forte da Dualidade: esta alocação é apenas uma ponderação da função objetivo do dual, que, por sua vez, é igual ao valor ótimo do problema primal, e, portanto, igual ao “firme” total do sistema.

Para provar que a alocação BM está no núcleo, considere novamente um sistema com 3 usinas. Usaremos os mesmos procedimentos que provaram o atendimento à condição de superaditividade, na subseção 2.2.2, para mostrar que esta alocação atende às restrições do núcleo, para todas as sub-coalizões, do tipo:

$$\phi_i \geq f(i), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.107)$$

$$\phi_i + \phi_j \geq f(i) + f(j), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j \quad (2.108)$$

Onde o modelo para o cálculo do benefício de um conjunto qualquer de agentes pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(S) = \max \quad cx \tag{2.109}$$

sujeito a

$$Ax \leq \sum_{i \in S} b_i$$

$$x \geq 0$$

Onde $S = \{1, \dots, k\}$ é o conjunto de usinas.

Sejam π_1, π_2, π_3 e π_{123} as soluções ótimas dos problemas do tipo (2.109) para as sub-coalizesões $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$ e $S_{123} = \{1, 2, 3\}$, respectivamente. O método de alocação a benefícios marginais aloca, a cada usina, o firme:

$$\phi_1 = \pi_{123}b_1, \tag{2.110}$$

$$\phi_2 = \pi_{123}b_2, \tag{2.111}$$

$$\phi_3 = \pi_{123}b_3, \tag{2.112}$$

Provou-se anteriormente que $\pi_{123}b_1 \geq \pi_1b_1$, $\pi_{123}b_2 \geq \pi_2b_2$ e $\pi_{123}b_3 \geq \pi_3b_3$. Portanto, $\phi_1 \geq f(H_1)$, $\phi_2 \geq f(H_2)$ e $\phi_3 \geq f(H_3)$.

Nos resta provar que, para qualquer sub-coalizioão, a soma das alocações das usinas, que nela participam, é maior que a energia firme da sub-coalizioão, quando esta opera sozinha. No caso de três usinas, isso equivale dizer que devemos ter:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2), \tag{2.113}$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3), \tag{2.114}$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3), \tag{2.115}$$

Para esta demonstração, seja, também, π_{12} a solução ótima do problema do tipo (2.109) para a sub-coalizioão $S_{12} = \{1, 2\}$. Durante a prova do atendimento à condição de

superaditividade, na subseção 2.2.2, obtivemos também que $\pi_{123}(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2)$, que, dadas as alocações (2.110)-(2.112), corresponde a $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$. Para as outras sub-coalizões ($S_{13} = \{1, 3\}$ e $S_{23} = \{2, 3\}$) a prova é análoga e imediata. Provou-se, portanto, que a alocação BM pertence ao núcleo do jogo.

A alocação utilizada aqui na demonstração de que o núcleo é não vazio, na literatura, chama-se alocação a custos marginais. Em (Faria, 2004) este método foi utilizado para a solução do problema de alocação de energia firme com o conceito de alocação a benefícios marginais, devido ao contexto. Essencialmente, a idéia de ambos é análoga, ou seja, alocam o benefício total (ou custo total), proporcionalmente aos incrementos de benefício (ou decréscimos de custos), causados por variações marginais dos recursos de cada agente.

A partir da prova de que a alocação BM sempre pertence ao núcleo, e dado que é sempre possível usá-la como método de alocação, conclui-se que o núcleo do jogo que envolve a alocação de energia firme nunca é vazio.

No entanto, embora a alocação BM pertença ao núcleo, e, portanto, seja “justa”, sua aplicação a sistemas em que os recursos aportados são discretos (como é o caso de usinas hidrelétricas) pode se tornar não satisfatória, uma vez que a alocação marginal é baseada em pequenas variações incrementais dos recursos.

Uma pequena variação na quantidade dos recursos aportados por cada agente (por ex. capacidade de armazenamento ou limite de turbinamento) pode levar a uma grande variação na energia firme alocada a ele, e em um caso de um aporte de “excesso” dos recursos, a sua alocação pode ser até reduzida.

Suponha, por exemplo, que uma usina aumente sua capacidade de armazenamento até um pouco antes de ter “excesso” desse recurso. Neste ponto, como a sua variável dual associada à restrição de volume máximo será maior que zero, ela receberá benefício pelo método BM. Porém, se o reservatório aumentar um pouco mais, este “recurso” ficará

em excesso, e a mesma variável dual passará a valer zero, fazendo com que a usina perca benefício. Com isso pode-se concluir que este método não é robusto em relação a pequenas variações dos recursos das usinas. Portanto, a alocação BM, apesar de estar no núcleo do jogo, não pode ser considerada adequada para alocar a energia firme de um sistema hidrelétrico.

2.3 Motivação para Aplicação dos Métodos de Solução do Problema *Maxmin*

A maior dificuldade na solução do problema de alocação de energia firme (2.54)-(2.57), *Maxmin*, objetivo desta tese, é o crescimento exponencial das restrições do núcleo em função do número de usinas. Se considerarmos, por exemplo, um sistema com 10 usinas, a formulação do problema terá 1024 restrições ao passo que a mesma terá um bilhão de restrições, caso a quantidade de usinas seja 40. Esta enorme quantidade de restrições existentes na formulação do problema nos levou a pensar em abordagens de solução baseadas em relaxação, como forma de minimizar o esforço computacional. Para esta aplicação, especificamente, tais métodos são, ainda, encorajados pelo fato de que apenas uma pequena quantidade de restrições estará ativa na solução ótima do problema. Mais especificamente, dado que existem $n + 1$ variáveis na formulação do problema, existem, no máximo, $n + 1$ restrições ativas em uma solução ótima para o problema *Maxmin*. Para a demonstração desta afirmação, a seguinte teoria de dualidade será utilizada:

Sejam o problema de programação linear (P) $\min\{c^t x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ e o seu dual (D) $\max\{b^t y : A^t y \leq c, y \geq 0\}$.

Teorema 1 *Se \bar{x} é ótima de (P) e \bar{y} é ótima de (D) então $\bar{x}(A^t \bar{y} - c) = 0$ e $\bar{y}(A\bar{x} - b) = 0$. Esta é a conhecida *propriedade da complementaridade*.*

Definição: Dizemos que o par (\bar{x}, \bar{y}) de soluções ótimas para (P) e (D) possuem a propriedade da complementaridade estrita se $\bar{x} + (A^t\bar{y} - c) > 0$ e $\bar{y} + (A\bar{x} - b) > 0$

Teorema 2⁵ Para os problemas (P) e (D) , definidos acima, temos as seguintes duas alternativas:

(i) (P) e (D) são viáveis e existe um par (\bar{x}, \bar{y}) ótimo estritamente complementar para (P) e (D) com $c^t\bar{x} = b^t\bar{y}$.

(ii) (P) e (D) não possuem soluções ótimas. Este caso ocorre se e somente se existe $\bar{x} \geq 0$ e $\bar{y} \geq 0$ tais que $A\bar{x} \geq 0$, $A^t\bar{y} \leq 0$ e $c^t\bar{x} < b^t\bar{y}$ e então no mínimo um dos dois problemas é inviável.

Com os teoremas que acabamos de enunciar, podemos, finalmente, demonstrar a afirmação: dado que existem $n + 1$ variáveis na formulação do problema *Maxmin*, existem, no máximo, $n + 1$ restrições ativas em uma solução ótima para o mesmo.

Consideremos, portanto, o dual (*MaxminD*) do problema *Maxmin*:

$$(MaxminD) \quad \min \quad f(N)\lambda + \sum_{S \subset N} f(S)\mu_S \quad (2.116)$$

sujeito a

$$- \sum_{S \subset N} \mu_S \geq 1, \quad (2.117)$$

$$\lambda + \sum_{S \subset N: i \in S} \mu_S = 0, \quad i \in N \quad (2.118)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.119)$$

$$\mu_s \leq 0 \quad S \subset N \quad (2.120)$$

Onde λ é a variável dual associada à restrição de igualdade (2.55) e μ_s , às restrições (2.56), representadas na formulação do problema na seção (2.2.1).

⁵A demonstração para este resultado pode ser encontrada em (Roos *et al.*, 2003)

Conforme demonstrado anteriormente, o problema Maxmin é viável. Observe que o problema também é limitado, uma vez que todas as variáveis do problema são limitadas ($f(i) \leq \phi_i \leq f(N)$, para todo $i \in N$, e $0 \leq \delta \leq \sum_{i \in N} \phi_i$).

Desta forma, o problema dual (2.116)-(2.120) também é viável e limitado e da teoria de programação linear, é sabido que existe pelo menos uma solução básica ótima para o mesmo, onde o número de variáveis não-nulas é, no máximo, igual ao número de restrições em (2.117)-(2.118), ou seja, é, no máximo, igual a $n + 1$, onde $n = |N|$.

Conclui-se que existe pelo menos uma solução ótima $y^* = [\lambda^*, \mu^*]$ para *MaxminD* na qual, no máximo, n valores μ_S^* são estritamente negativos. Com o teorema das folgas complementares, envolvendo as restrições (2.56),

$$[\delta^* - \sum_{i \in S} \phi_i^* + f(S)] \times \mu_S^* = 0, \quad S \subset N \quad (2.121)$$

e sendo $x^* = [\delta^*, \mu^*]$ solução ótima do problema *Maxmin*, obtemos que $\delta^* - \sum_{i \in S} \phi_i^* + f(S) = 0$ para as n coalizões S tais que $\mu_S^* < 0$. Ou seja, $\delta^* = \sum_{i \in S} \phi_i^* - f(S)$, o que significa que estas restrições estão ativas no par de soluções (x^*, y^*) de (P) e (D).

Para verificarmos se o mesmo ocorre para todas as outras coalizões S tais que $\mu_S^* = 0$, consideremos a *propriedade da complementaridade estrita*, definida acima para os problemas dual e primal, onde temos que (x^*, y^*) são tais que

$$[\delta^* - \sum_{i \in S} \phi_i^* + f(S)] + \mu_S^* < 0, \quad S \subset N, \quad (2.122)$$

Assim, para as coalizões S tais que $\mu_S^* = 0$, obtemos que o valor de $[\delta^* - \sum_{i \in S} \phi_i^* + f(S)]$ é estritamente negativo, ou seja, $[\delta^* < \sum_{i \in S} \phi_i^* - f(S)]$ e, portanto, estas restrições não estarão ativas na solução ótima.

Assim, mostramos que, para o par de soluções $x^* = [\delta^*, \phi^*]$ e $y^* = [\lambda^*, \mu^*]$ dos problemas *Maxmin* e *MaxminD*, respectivamente, existem, no máximo, n restrições ativas em uma solução ótima de (2.54)-(2.57). Uma vez que n , o número de variáveis (usinas),

é muito menor que o número de restrições (coalizões), temos que somente um pequeno conjunto das restrições (2.56) é ativo em uma solução ótima e, portanto, necessário na formulação do problema.

O fato, demonstrado nesta seção, de que necessitamos somente de uma quantidade muito pequena de restrições na formulação do problema da alocação de energia firme (2.54)-(2.57), *Maxmin*, representa uma motivação adicional para os dois métodos de solução, utilizados nesta tese, baseados na relaxação das restrições do tipo (2.56):

a) O primeiro método, apresentado no capítulo 3, seguindo a metodologia da geração de restrições (Drechsel *et al.*, 2007), lida com o problema *Maxmin* incluindo inicialmente em sua formulação apenas um subconjunto das restrições que o definem, ou seja, considera, inicialmente, uma relaxação do problema. A cada iteração do método, um problema de programação inteira mista é resolvido para gerar uma nova restrição a ser incorporada ao problema relaxado, a qual é violada pela solução do mesmo. O procedimento é interrompido quando não há nenhuma restrição violada pela solução do problema relaxado, ou seja, quando a otimalidade é provada.

b) O segundo método, apresentado no capítulo 4, resolve o problema (2.54)-(2.57) com a formulação contendo somente um subconjunto das restrições (2.56), que será escolhido probabilisticamente de acordo com a teoria desenvolvida em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008). Os resultados, demonstrados em (Calafiore *et al.*, 2005), garantem que a solução viola somente um subconjunto das restrições desconsideradas na formulação, a um nível de confiabilidade desejado.

Capítulo 3

Método de Geração de Restrições

No presente capítulo, descreveremos em detalhes o método de geração de restrições (*MGR*), adotado para resolver o problema de alocação de energia firme, *Maxmin*, cuja solução está no *leastcore*. O esquema proposto foi motivado pela dificuldade de se obter a solução deste problema devido ao crescimento exponencial das restrições do núcleo em função do número de usinas. Uma motivação adicional para a aplicação do *MGR* é o fato de que a alocação do núcleo é um problema de programação linear com $n + 1$ variáveis de decisão e $2^n + 1$ restrições. Assim, uma vez que, no máximo, $|n + 1|$ restrições estarão ativas em pelo menos uma solução ótima, a grande maioria delas poderia ser relaxada sem afetar a otimalidade. Com base nestes fatos, utilizaremos um esquema de geração de restrições, onde a formulação inicial possui um subconjunto das restrições e, sucessivamente, adiciona-se, a este subconjunto, a restrição mais violada do subconjunto complementar. A busca pela restrição mais violada será modelada como um problema de programação inteira mista, denominado “problema da viabilidade”, com n variáveis inteiras binárias associadas às usinas.

Tal procedimento foi também utilizado em (Drechsel *et al.*, 2007) com o objetivo de determinar a solução do problema da cooperação de agentes na aquisição de bens para

o atendimento de suas demandas com o objetivo de reduzir os seus custos individuais. Neste trabalho foi mostrado que este método é bem geral no sentido de que pode ser facilmente adaptado a diferentes aplicações. Em (Leng *et al.*, 2005) é apresentado um “Survey” de diversos artigos cujo foco é a aplicação da teoria dos jogos em diferentes áreas do problema de gerenciamento de cadeia de suprimento.

A idéia da geração de restrições, com o intuito de resolver problemas de programação matemática, não é nova. Diversos algoritmos vem sendo utilizados seguindo esta mesma filosofia, todos, porém, com diferentes abordagens. Podemos citar, por exemplo, os métodos de geração de planos de corte (Bradley *et al.*, 1977), (Schrijver, 1986) e decomposição de Benders (Benders, 1962), (Geoffrion, 1972), (Magnanti *et al.*, 1981), (Schrijver, 1986), também conhecido como decomposição primal. O algoritmo aqui utilizado não pertence a nenhum destes esquemas. O mais proximamente relacionado ao mesmo é o trabalho de Göthe-Lundgren *et al.* (Göthe-Lundgren *et al.*, 1996), que computa o nucleolo de um jogo de roteamento de veículos por geração de linhas, onde o subproblema é um problema de programação linear inteiro misto difícil de resolver pois, diferentemente do nosso método, o número de restrições do subproblema a ser resolvido aumenta de iteração para iteração, com a adição de restrições que possuem a função de prevenir a determinação de solução gerada previamente. Como veremos nas próximas seções, no nosso método, o tamanho do subproblema permanece sempre o mesmo.

Para melhor compreender o método utilizado, considere o seguinte fluxograma:

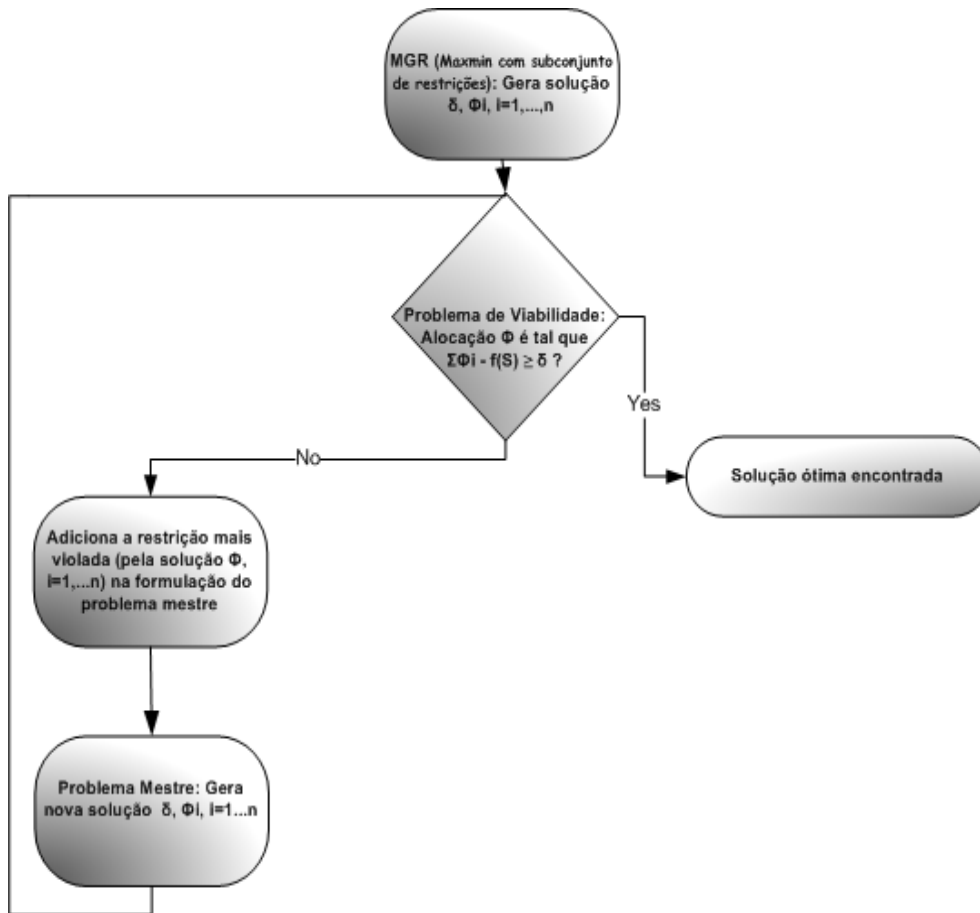


Figura 3.1: MGR

O esquema de geração de restrições funciona da seguinte maneira: o problema mestre é inicializado com um subconjunto contendo as n restrições do problema original, correspondentes às coalizões com uma única usina e as restrições $\sum_{i=1}^n \phi_i = f(N)$. A solução ótima do problema mestre, bem como a menor vantagem δ que cada conjunto de usinas têm por participar da grande coalizão, são determinadas e “passadas” para o problema de viabilidade, como dado de entrada. Este problema então irá verificar se a alocação viola alguma restrição do problema *Maximin*. Caso nenhuma restrição violada seja encontrada, a alocação atual é a ótima. Caso contrário, a restrição mais violada é incorporada

à formulação do problema mestre e uma nova alocação é encontrada. O procedimento alterna entre a solução do problema mestre (determinando nova solução) e a do problema viável até que nenhuma restrição violada pela alocação atual seja encontrada.

Na próxima seção, iniciaremos a descrição do método, em questão, com a definição do problema da viabilidade, para, então, detalharmos o algoritmo.

3.1 O Problema da Viabilidade

Sejam as condições de núcleo, definidas no capítulo anterior e repetidas a seguir, por conveniência:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = f(N), \quad (3.1)$$

$$\sum_{i \in S} \phi_i \geq f(S), \quad S \subset N \quad (3.2)$$

Para uma dada alocação $\{\phi_i^p, i = 1, \dots, n\}$, que satisfaz 3.1, o objetivo aqui é verificar se ela viola qualquer restrição de núcleo 3.2. Conforme mencionado, a abordagem utilizada (Drechsel *et al.*, 2007) busca identificar a restrição mais violada, e isto será feito através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\theta = \text{Min} \sum_{i \in S} \phi_i^p - f(S) \quad (3.3)$$

Onde $f(S)$ é a energia firme determinada pelo modelo definido na subseção 2.1.3. A variável de decisão em 3.3 é o subconjunto de índices S , através da qual percorre-se todas as coalizões em busca daquela associada ao menor valor da função objetivo do problema, ou seja, ao menor incentivo. Se a solução ótima θ^* é não-negativa, concluímos que a alocação proposta está no núcleo. Caso contrário, pelo menos uma restrição, correspondente a permutação S^* , terá sido violada.

Substituindo a formulação da energia firme, da subseção 2.1.3, em $f(S)$, 3.3 pode ser escrito como o problema de programação linear inteira mista (*PLIM*), denominado

“problema de viabilidade”:

$$\theta = \min \sum_{i=1}^n \phi_i^p y_i - F \quad (3.4)$$

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} - \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i}, \quad (3.5)$$

$$v_{ti} - \bar{v}_i y_i \leq 0, \quad (3.6)$$

$$u_{ti} - \bar{u}_i y_i \leq 0, \quad (3.7)$$

$$F - \sum_i \rho_i u_{ti} \leq 0, \quad (3.8)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad (3.9)$$

$$t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Observa-se que as variáveis binárias nesta formulação permitem a modelagem de todas as combinações de agentes. Portanto, a verificação de viabilidade de uma dada alocação é traduzida na solução de um problema *PLIM* com n variáveis binárias.

3.2 O Problema Mestre

Para a descrição do método de geração de restrições *MGR*, consideremos o problema *Maxmin*, cuja formulação foi definida no capítulo 2.2 e será repetida a seguir por conveniência.

$$\max \quad \delta \quad (3.11)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = f(N), \quad (3.12)$$

$$\delta \leq \Delta(S), \quad \forall S \subset N \quad (3.13)$$

$$\delta \geq 0, \quad (3.14)$$

Onde $\Delta(S) = \sum_{i \in S} \phi_i - f(S)$ é o benefício adicional ou “incentivo” que a alocação da “grande coalizão” $\{\phi_i, i \in S\}$ fornece às usinas no subconjunto S ($\sum_{i \in S} \phi_i$), comparado com o que elas devem receber sozinhas ($f(S)$).

Denominaremos *problema mestre* o problema obtido a partir da relaxação das restrições (3.13) do problema *Maxmin*. No método *MGR*, este problema será resolvido a cada iteração com um subconjunto destas restrições, que, seguindo o esquema de geração de restrições, adicionará a restrição mais violada pela solução do problema mestre. O método *MGR* funciona da seguinte forma:

(a) Determine um subconjunto das restrições (3.13) para compor o problema mestre. Resolva-o até a otimalidade, obtendo uma alocação ϕ_i^p .

(b) Dada a alocação ϕ_i^p , resolva o problema da viabilidade (3.4) - (3.10) para determinar a restrição mais violada:

(c) Se $\theta^* < \delta^p$, a alocação proposta não é uma solução do problema *Maxmin*, ou seja, não está no *leastcore*. Neste caso: (i) adicionamos a restrição mais violada ao problema mestre; (ii) uma nova alocação proposta é estabelecida com a sua solução; (iii)

retornamos ao passo (b). Se $\theta^* \geq \delta^p$, a alocação proposta é a solução ótima de (3.11)-(3.14) e, portanto, é solução do *Maxmin*. Note que se considerássemos $\delta^p = 0$ fixo estaríamos simplesmente verificando as restrições do núcleo e não do *leastcore*.

Note que o conjunto inicial de restrições que compõem o *problema mestre*, passo (a) do procedimento, precisa ser escolhido com cuidado, de forma que este problema esteja bem determinado. Ou seja, as restrições selecionadas devem ser tais que o *problema mestre* seja limitado. Para tal, inicialmente, serão incluídas todas as n restrições individuais de núcleo em sua formulação.

No passo (c) do método *MGR*, que busca a restrição mais violada pela solução do problema mestre, o subconjunto de agentes é indexado pelas variáveis binárias y_k que assumem valor 1 na solução ótima do “problema da viabilidade”. Além das variáveis y_k , é fornecido para o problema mestre o firme associado ao subconjunto de agentes correspondentes a restrição mais violada, uma vez que nas restrições do problema mestre o lado direito das restrições é dado de entrada.

Determinar a solução ótima para o problema *Maxmin*, para instâncias relativamente grandes (acima de 30 usinas), é ainda muito difícil, mesmo com o método *MGR*. Dependendo do tamanho da instância que se deseja resolver, o tempo gasto com este procedimento pode ser tão grande que o torna computacionalmente inviável. Conforme veremos no capítulo 5, de resultados computacionais, determinadas escolhas do conjunto inicial de restrições para composição da formulação do *problema mestre* podem acelerar a busca pela solução ótima do *Maxmin*. Além desta, outra alteração no procedimento, descrita no capítulo 5, foi testada. Porém, mesmo com estas variações no procedimento *MGR*, não foi possível a solução de problemas com mais de 30 usinas.

Capítulo 4

Método de Randomização de Restrições

Neste capítulo, descreveremos o método de randomização de restrições como uma abordagem alternativa de solução, para o problema *Maxmin*, que permite lidar com a dificuldade relacionada ao número grande de restrições existentes em sua formulação, ao se considerar instâncias mais realistas. O fato, demonstrado na seção 2.3, de que necessitamos somente de uma quantidade muito pequena de restrições na formulação do problema da alocação de energia firme (2.54)-(2.57), *Maxmin*, representa uma motivação adicional para este método, que baseia-se na relaxação das restrições do tipo (2.56).

O método em questão resolve o problema (2.54)-(2.57) com a formulação contendo somente um subconjunto das restrições (2.56), que será escolhido probabilisticamente de acordo com a teoria desenvolvida em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008). Os resultados, demonstrados em (Calafiore *et al.*, 2005), garantem que a solução viola somente um subconjunto das restrições desconsideradas na formulação, a um nível de confiabilidade desejado.

O método em questão foi, originalmente, proposto com o objetivo de resolver proble-

mas de controle ótimo (Calafiore *et al.*, 2006) (Calafiore *et al.*, 2002). Uma vez que existe incerteza nos dados destes problemas, o que frequentemente ocorre com problemas reais, eles são tratados como problemas de otimização sujeitos a restrições convexas com incerteza, denominados *Problema Convexo Incerto (PCI)*. Nestes problemas, para cada valor admissível para o referido dado incerto, obtém-se uma restrição diferente associada, o que, segundo (Calafiore *et al.*, 2005), resulta, frequentemente, em um número grande (ou mesmo infinito) de possíveis restrições.

Duas principais abordagens são, em geral, utilizadas para lidar com o *PCI*: uma determinística e outra probabilística. A abordagem determinística consiste da solução do problema denominado (em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*, 2002)) problema de otimização convexa robusta (*PCR*), que nada mais é do que o problema *PCI* em que se considera, na sua formulação, todas as restrições correspondentes a todas as realizações dos dados incertos. Como consequência, o *PCR*, frequentemente, possui um número muito grande (ou mesmo infinito) de restrições. A solução para o *PCR* é muito conservadora e representa uma solução viável, possivelmente não ótima, para o *PCI*. A probabilística, baseada no problema *chance constrained*, associa uma distribuição de probabilidade aos valores possíveis do referido dado incerto e impõe que as restrições correspondentes sejam atendidas, na solução do Problema de Otimização Convexa com restrições Probabilísticas (*PCP*), a um nível de probabilidade desejado. Uma vez que admite-se a violação de um conjunto de restrições, esta abordagem fornece uma solução “aproximadamente” viável para o *PCI*, de acordo com o grau de violação desejado.

Uma vez que as duas abordagens acima levam a problemas computacionalmente intratáveis, no caso em que existe um número muito grande de valores possíveis para o dado incerto, em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*,

2002), foi proposto um método alternativo de solução do *PCI*, denominado Método de randomização de restrições (*MRR*), que busca resolvê-lo através da solução do problema convexo sorteado, ou *PCS_m*. Neste problema, considera-se um subconjunto pequeno contendo *m* realizações das restrições incertas do *PCI*, geradas aleatoriamente, o que torna possível a sua solução de forma eficiente. A teoria probabilística por trás do método *MRR* garante que a solução do *PCS_m* irá satisfazer a grande maioria das restrições incertas não consideradas na sua formulação, de acordo com o grau de violação desejado, a um nível de confiabilidade previamente definida. Conclui-se, portanto, que, de acordo com a confiabilidade estabelecida, este método fornece uma solução “aproximadamente” viável tanto para o *PCI* quanto para o *PCR*.

Para o nosso objetivo, é especialmente interessante o fato de que o *MRR* representa um método de solução para o problema *PCR*, uma vez que este consiste de um problema determinístico, frequentemente, com um número muito grande de restrições, assim como o problema *Maxmin* quando se considera um número relativamente grande de usinas. Portanto, estas características concernentes ao *PCR* nos levaram à aplicação do *MRR* ao problema *Maxmin*, como forma de contornar a dificuldade relacionada à explosão combinatória que ocorre por considerar todas as possibilidades de coalizões que definem as suas restrições.

O número de restrições a serem escolhidas no método *MRR* é o ponto principal dos trabalhos ((Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008)) e funciona como um parâmetro que determina, de forma probabilística, o quão próxima a solução, dada pelo método em questão, estará da solução do problema *PCR*, no sentido de que esta estará violando uma pequena porção daquelas restrições não consideradas na formulação relaxada. De outra forma, o *MRR* fornece uma solução para o problema relaxado com uma determinada probabilidade de violação das restrições do *PCR* a um

nível de confiabilidade, de acordo com níveis de violação e confiabilidade previamente definidos.

Embora o *MRR* não forneça uma solução exata para o *Maxmin*, é possível realizar a análise da qualidade das suas soluções, bem como a validade dos resultados da teoria probabilística correspondente, uma vez que conhecemos a solução ótima do problema, dada pelo método *MGR*, para as instâncias que puderam ser resolvidas pelo mesmo. Até o momento não existem artigos com aplicações industriais do *MRR* e, portanto, este é o primeiro teste de qualidade da sua aplicação a problemas práticos.

Nas próximas seções, descreveremos toda a teoria relacionada ao método *MRR* (Calafiore *et al.*, 2005) para, então, detalhar a sua aplicação ao problema *Maxmin*. Assim, primeiramente, definiremos o *PCI*, cujo método *MRR* se propõe a resolver. Em seguida, descreveremos dois dos principais métodos de solução do *PCI*, entre eles o determinístico através do problema robusto *PCR* e, então, o método randomizado *MRR*. Por fim, será descrita a aplicação do método *MRR* na solução do *Maxmin*. Os resultados apresentados nesta seção não serão demonstrados, porém suas demonstrações poderão ser encontradas em (Calafiore *et al.*, 2005).

4.1 Problema Incerto e seus Métodos de Solução

Uma característica frequentemente encontrada em problemas reais é a existência de uma grande incerteza em seus dados, em geral, devido a sua obtenção através de medições. Como consequência, há também incerteza quanto à sua formulação, uma vez que suas restrições, associadas aos dados incertos, não são precisamente definidas (para cada valor admissível para o referido dado incerto, há uma restrição diferente associada). Uma outra consequência proveniente deste fato é que, frequentemente, existem infinitas restrições

possíveis associadas a um elemento incerto.

Neste contexto, definimos o Problema de Otimização Convexa sob Incerteza (*PCI*) como sendo o problema de otimização convexa cujas restrições são imprecisamente definidas. Dado que, para cada valor admissível aos dados incertos, temos um conjunto distinto de restrições, o *PCI* pode ser considerado uma família de problemas convexos, onde cada problema desta família é uma instância ou realização do *PCI*. Sendo suas restrições parametrizadas por um parâmetro (ou instância) $\delta \in \Delta$, a formulação do *PCI* é como segue:

$$\text{PCI} : \left\{ \min_{x \in \chi \subseteq \mathbb{R}^n} c^t x \quad \text{sujeito a} \quad x \in \chi_\delta \right\} \quad (4.1)$$

onde $x \in \chi$ é a variável de decisão, χ e χ_δ são convexos e fechados, χ_δ o conjunto viável para o parâmetro δ . Além disto, na família de problemas 4.1, assumimos, sem perda de generalidade, que os dados incertos afetam somente os coeficientes das restrições do problema. De fato, se existisse incerteza na função objetivo, poderíamos reescrevê-la como *Min* z e, então, incluir a restrição $z - c^t x \geq 0$ na formulação. Com estes rearranjos, podemos eliminar qualquer não linearidade da função objetivo do problema.

Com o objetivo de assegurar o entendimento do problema em questão, considere o seguinte exemplo simples:

$$\min \quad x_1 + x_2 \quad (4.2)$$

sujeito a

$$ax_1 + x_2 \leq 1, \quad (4.3)$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 1, \quad (4.4)$$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad (4.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4.6)$$

Onde a é o elemento incerto e $\Delta = \left\{ \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \right\}$.

Podemos dizer que o problema acima é um problema incerto e que representa, na verdade, uma família de problemas, cujas restrições podem ser parametrizadas por $\delta \in \Delta$, $\delta = a$, o que significa que, para cada a do conjunto $U = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, temos um problema desta família. Note que, para este exemplo, existem infinitas instâncias para o problema incerto.

Em uma situação real, o coeficiente incerto a poderia ser, por exemplo, o coeficiente de produção de uma usina hidroelétrica, que pode variar dependendo do número de turbinas em funcionamento. Assim, neste caso, o a representaria a incerteza relacionada a quebra das turbinas existentes na usina. Assim, supondo que existam 10 turbinas e cada uma delas contribua com 0.4 no valor do coeficiente, o a pode variar no conjunto $0.4 * k$, $k = 1, \dots, 10$, o que, para o problema incerto, significa que existem 10 problemas na família *PCI*, um para cada valor de a .

Duas das principais formas de solução do problema (4.1), encontradas na literatura, são uma abordagem probabilística e outra determinística. A abordagem probabilística, baseada em *Chance Constraint*, essencialmente, considera o parâmetro δ como uma variável aleatória e impõe que as restrições, parametrizadas por δ sejam atendidas, na solução, a um nível de probabilidade desejado ϵ . Mais precisamente, se P é a probabilidade em Δ e $\epsilon \in [0, 1]$ é um risco aceitável de violação das restrições, a versão *chance constrained* do *PCI* (ou Problema de Otimização Convexa com restrições Probabilísticas (*PCP*)) é a seguinte:

$$\text{PCP} : \min_{x \in \chi \subseteq \mathbb{R}^n} c^t x \text{ sujeito a } P\{\delta \in \Delta : x \notin \chi_\delta\} \leq \epsilon \quad (4.7)$$

Problemas de otimização deste tipo costumam ser difíceis de serem resolvidos exatamente, uma vez que o tamanho do modelo de otimização cresce drasticamente em função do tamanho do conjunto Δ . Assim, até mesmo verificar a viabilidade de uma determinada solução pode ser muito difícil. Além disto, de acordo com (Campi *et al.*, 2009), mesmo

que χ_δ seja convexo em x , para todo δ , o conjunto viável $\{x : P\{x \notin \chi_\delta\} \leq \epsilon\}$ pode não ser convexo, e portanto, *PCP* não é um problema convexo em geral. Muitos resultados para este problema são apresentados na monografia de Prékopa (Prékopa, 1995).

A abordagem determinística busca uma solução que satisfaça a todas as possíveis instâncias do parâmetro incerto, ou, equivalentemente, que satisfaça a todas as realizações das restrições associadas ao conjunto incerto Δ . Isto equivale a resolver o seguinte problema:

$$\text{PCR} : \min_{x \in \chi \subseteq \mathbb{R}^n} c^t x \text{ sujeito a } x \in \bigcap_{\delta \in \Delta} \chi_\delta, \quad (4.8)$$

Novamente, para tornar mais fácil o entendimento, escreveremos abaixo o *PCR* equivalente ao problema exemplo (4.2)-(4.6):

$$\min \quad x_1 + x_2 \quad (4.9)$$

sujeito a

$$a_1 x_1 + x_2 \leq 1, \quad (4.10)$$

$$a_2 x_1 + x_2 \leq 1, \quad (4.11)$$

...

$$a_p x_1 + x_2 \leq 1, \quad (4.12)$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 1, \quad (4.13)$$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad (4.14)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4.15)$$

Onde $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_p = \frac{3}{2}$.

Assim, na formulação do *PCR*, todos os valores admissível para o elemento a são considerados, garantindo, então, que a solução atenda a todas as restrições correspondentes a todos os valores aceitáveis para a . Portanto, em particular, a solução será viável, embora, possivelmente, não ótima, para o problema *PCI*, quando o elemento a assume o seu real valor. Esta abordagem é especialmente interessante naquelas aplicações em que o atendimento às restrições do tipo (4.3) é obrigatório qualquer que seja a real realização do dado a (ver (Ben-Tal *et al.*, 1999)). No entanto, em geral, esta solução é considerada excessivamente conservadora.

O *PCR* é ainda um problema de otimização convexo, mas, uma vez que envolve um número extremamente grande, ou mesmo infinito, de restrições, é, em geral, numericamente difícil de resolver exatamente. Por esta razão, de acordo com (Calafiore *et al.*, 2005), soluções aproximadas são frequentemente obtidas através de métodos de relaxação porém, uma dificuldade encontrada na utilização desta abordagem reside no fato de que, em geral, desconhece-se a qualidade da solução encontrada.

Motivado pela complexidade computacional dos dois métodos de solução para o *PCI*, discutidos acima, foi proposta uma abordagem diferente de solução (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008), que se baseia na randomização do parâmetro $\delta \in \Delta$. Ou seja, um novo problema PCS_m é formulado como sendo o *PCI* com um subconjunto de m restrições, associadas ao conjunto Δ , escolhidas de forma aleatória. Este artigo fornece uma limitação na probabilidade (ou volume) do conjunto de restrições originais que estão, possivelmente, violadas pela solução randomizada (solução do PCS_m). Este volume decresce a medida que m cresce e, portanto, a solução randomizada obtida pode ser feita aproximadamente viável para o problema robusto (4.8), caso seja sorteado um número suficientemente grande de restrições. Além disto, existe uma probabilidade alta de que esta solução seja viável para o problema con-

vexo probabilístico - PCP (4.7) e que esteja violando somente uma pequena quantidade de restrições do *PCR*. O resultado relativo ao *PCR* justifica a aplicação do método ao problema *Maxmin*, conforme será visto na seção 4.3.

Os resultados teóricos que respaldam esta metodologia, serão formalmente apresentados na próxima seção.

4.2 Resultados Teóricos para o *MRR*

Similarmente à abordagem randomizada, é assumido que a família de problemas *PCI* é parametrizada por um parâmetro δ , que é uma variável randômica com probabilidade P . Considera-se, então:

Definição 2 (Probabilidade de Violação). *Seja $x \in \chi$ uma solução candidata para o *PCI*. Definimos a probabilidade de violação de x como*

$$V(x) = P\{\delta \in \Delta : x \notin \chi_\delta\} \quad (4.16)$$

Caso seja assumida uma função densidade de probabilidade uniforme, então, $V(x)$ mede o volume de parâmetros δ “ruins” tais que as restrições correspondentes aos parâmetros δ são violadas. Neste caso, uma solução x com valor correspondente $V(x)$ pequeno é viável para a maioria das instâncias do problema da família *PCI*.

Definição 3 (solução ϵ -viável). *Seja $\epsilon \in [0, 1]$. Dizemos que $x \in \chi$ é uma solução ϵ -viável para o *PCI* se $V(x) \leq \epsilon$.*

Note que, de acordo com a definição acima, qualquer solução ϵ -viável é uma solução viável para o problema de otimização convexa probabilístico - *PCP* (4.7), porém, é admissível que esteja violando um número de restrições do *PCR*, limitado por ϵ . O objetivo em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Calafiore *et al.*, 2002) é desenvolver um algoritmo que retorne uma solução ϵ -viável, onde ϵ é qualquer valor

pequeno, previamente fixado. Para este propósito, são obtidas, randomicamente, m amostras dos parâmetros δ para, então, construir um problema de otimização convexo sorteado (PCS_m), que consiste do problema PCI com todas as restrições correspondentes aos parâmetros sorteados. O PCS_m é formalmente definido como segue:

Definição 4 (Problema de Otimização Convexa Sorteado - PCS_m). *Sejam $\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(m)}$, m amostras extraídas de acordo com a probabilidade P . O Problema Convexo Sorteado derivado do PCI é*

$$PCS_m : \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} c^t x \text{ sujeito a } x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} \chi_{\delta^{(i)}}, \quad (4.17)$$

A figura a seguir ilustra o processo de construção do problema PCS_m :

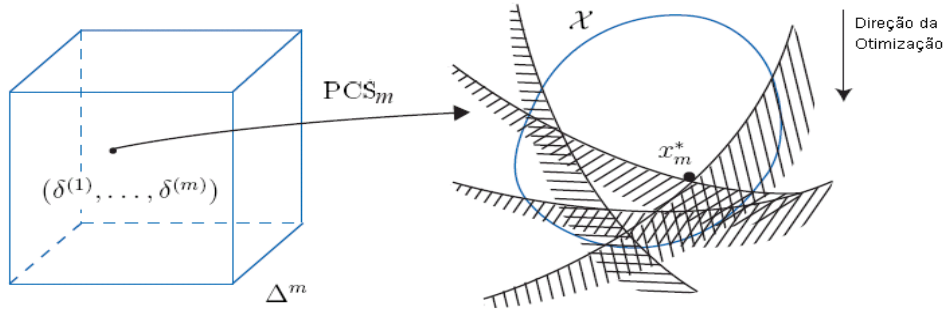


Figura 4.1: PCS_m

A Figura (4.1) dá a interpretação geométrica da construção do problema PCS_m : são extraídas aleatoriamente m restrições (amostras dos parâmetros δ) do conjunto Δ . Estas m restrições vão compor a formulação do PCS_m , resultando na solução ótima x_m^* para o mesmo.

O PCS_m possui uma grande vantagem sobre os problemas PCR e PCP : é um problema convexo comum com m restrições e, em geral, pode ser resolvido eficientemente. No entanto, uma vez que a sua região viável é determinada por somente uma parte das restrições do PCI , a solução obtida x_m^* pode estar violando algumas das restrições associadas a certas instâncias δ . Desta forma, em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008), a questão principal consiste em determinar as condições para as quais a probabilidade de violação de x_m^* , $V(x_m^*)$, está a um nível satisfatório ϵ . Ou, de forma equivalente, deseja-se determinar o número mínimo de amostras m que

devem ser sorteadas para garantir que a solução randomizada x_m^* correspondente esteja violando apenas uma pequena quantidade das restrições incertas δ do problema PCI , com uma dada probabilidade. Nesta tese, estamos utilizando a referência mais atual (Campi *et al.*, 2008), cuja expressão para m resulta no limite mais “apertado” para a probabilidade de violação de x_m^* . Ou, inversamente, dadas a probabilidade de violação e a confiabilidade desejadas, determina uma quantidade mínima necessária de restrições na formulação do PCS_m .

Para estabelecer o resultado precisamente, deve-se notar que $V(x_m^*)$ é uma variável randômica, já que varia em função da variável randômica x_m^* , que depende das extrações aleatórias $\delta_1, \dots, \delta_m$. Desta forma, $V(x_m^*) \leq \epsilon$ (x_m^* é solução ϵ -viável) deve ocorrer para certas extrações $\delta_1, \dots, \delta_m$ e $V(x_m^*) > \epsilon$, para outras. Note que as restrições extraídas podem não ser boas representantes das outras restrições não consideradas. Neste caso, a porção de restrições violadas pela solução x_m^* será maior do que o limite ϵ . Assim, no teorema, a seguir, o parâmetro β dá um limite para a probabilidade de x_m^* não ser uma solução ϵ -viável. Portanto, β é o risco de falha ou a confiança associada a solução randomizada. Em outras palavras, o resultado a seguir quantifica as extrações “ruins” (tais que $V(x_m^*) > \epsilon$):

Teorema 1. *Fixe dois números reais $\epsilon \in [0; 1]$ (grau de de violação) e $\beta \in [0; 1]$ (grau de confiança) e, dado que n é a dimensão do vetor de solução x , se*

$$\beta \leq \sum_{i=1}^{n-1} C_i^m \epsilon^i (1 - \epsilon)^{m-i}. \quad (4.18)$$

Então, com probabilidade maior ou igual a $1 - \beta$, o problema randomizado PCS_m retorna uma solução ótima x_m^ que é ϵ -viável.*

A fórmula (4.18) fornece uma expressão implícita para m , como uma função de ϵ e β , apresentada no trabalho de Campi e Garatti (Campi *et al.*, 2008). Neste artigo, mostrou-se que a fórmula (4.18) torna-se uma igualdade para uma determinada classe de

problemas.

A figura, a seguir, ilustra o Teorema 1:

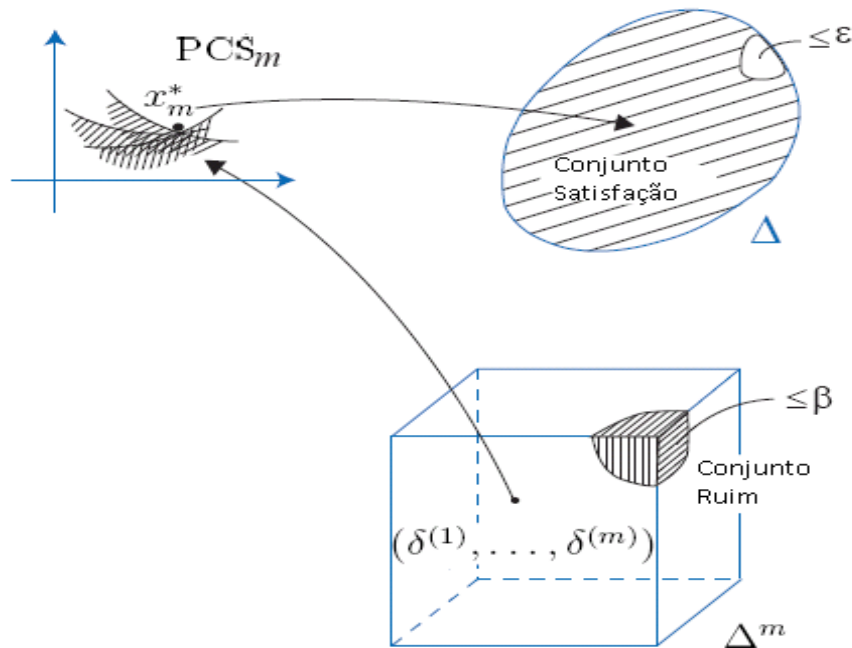


Figura 4.2: Teorema 1

A Figura (4.2) dá a interpretação geométrica do Teorema 1: Com probabilidade maior ou igual a $1 - \beta$, extraímos m instâncias de fora do “conjunto ruim”. A solução ótima x_m^* resultante é, portanto, viável para todos os parâmetros incertos desconsiderados na formulação do problema PCS_m exceto, no máximo, um conjunto de medida ϵ . Em outras palavras, a solução ótima do PCS_m é ϵ -viável, de acordo com a Definição 3, com probabilidade maior que $1 - \beta$. Este fato consiste na propriedade da generalização, que diz que a satisfação explícita de um conjunto de instâncias implica na satisfação de outras instâncias não consideradas. A generalização é garantida pela convexidade exigida nos problemas PCI e PCS_m . Assim, o papel da convexidade, nesta abordagem randomizada, é fundamental por duas razões: pelo lado computacional, permite a solução eficiente do

problema de otimização; e pelo lado teórico, permite a generalização.

Os artigos (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) foram os pioneiros na utilização da propriedade da generalização com o objetivo de resolver problemas incertos. No artigo (Calafiore *et al.*, 2005) é posto que este resultado ocorre independentemente da estrutura do conjunto de restrições Δ e da probabilidade P associada às restrições, o que implica que, mesmo nos casos em que esta probabilidade não é conhecida, toda esta teoria continua válida. O número de restrições é determinado de acordo com a expressão $m \geq \frac{n}{\epsilon\beta} - 1$, onde as constantes são definidas como no Teorema 1. O artigo (Calafiore *et al.*, 2006) propõe um novo limite na probabilidade de violação das restrições. Dado o número de restrições sorteadas, este limite é mais apertado do que aquele dado na referência anterior e é definido de acordo com a expressão $P^m\{V(x_m^*) > \epsilon\} \leq C_n^m(1 - \epsilon)_{m-n}$. Por outro lado, dado o limite, o número de restrições sorteadas deve ser $m \geq \lceil \inf_{v \in (0,1)} \frac{1}{(1-v)} (\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1}{\beta} + n + \frac{n}{\epsilon} \ln \frac{1}{v\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}) \rceil$, que resulta em um número inferior de restrições na formulação do PCS_m . A tabela (4.1) compara o número de restrições resultantes, para $n = 20$, dadas a probabilidade de violação de $\epsilon = 1\%$ e confiabilidades β iguais a 97.7%, 95% e 91.6%, exigidas para a solução do PCS_m , para cada uma das referências (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008):

Tabela 4.1: Exemplo - Número de restrições sorteadas - $n=20$ e $\epsilon = 1\%$.

	97%	95%	91%
Artigo (Calafiore <i>et al.</i> , 2005)	89996	39999	24000
Artigo (Calafiore <i>et al.</i> , 2006)	15459	15366	15308
Artigo (Campi <i>et al.</i> , 2008)	2991	2784	2642

Na tabela (4.1) podemos notar uma grande diferença no tamanho das formulações resultantes das expressões dos artigos (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006),

(Campi *et al.*, 2008), para os mesmos parâmetros. O artigo (Campi *et al.*, 2008) utilizado aqui, possui valores para m bem inferiores que os demais.

É importante notar que os resultados desta teoria probabilística fornecem um limite para o número de restrições probabilisticamente violadas, porém, não dá qualquer garantia sobre a qualidade da solução, no que se refere ao “tamanho” da violação.

4.3 Aplicação do Método de Geração Randômica de Restrições ao Problema *Maxmin*

A formulação do problema *Maxmin* cresce exponencialmente com o número n de usinas, tornando-se demasiadamente grande, mesmo para uma quantidade ainda pequena delas. Por exemplo, se tivermos um sistema com 20 hidros, o número de restrições na formulação é $2^{20} = 1.048.576$. Para o caso em que n é grande, onde n representa o número de usinas, o problema *Maxmin* pode se tornar computacionalmente intratável, o que justifica o uso do método de randomização de restrições (*MRR*), (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008), como método de solução do mesmo, a exemplo de sua aplicação ao problema convexo robusto (*PCR*), que também representa um problema determinístico com número extremamente grande, ou até mesmo infinito, de restrições, conforme teoria vista anteriormente.

Para a aplicação do *MRR* ao problema *Maxmin*, consideramos todas as restrições do mesmo igualmente importantes, ou seja, elas são equiprováveis, ou ainda, todas as restrições possuem a mesma chance no sorteio para a composição do problema sorteado (*PCS_m*) equivalente. Como consequência, a probabilidade de violação, definida na seção 4.2, em nossa aplicação, mede o volume de restrições violadas pela solução randomizada.

Desta forma, o método probabilístico, aplicado na resolução do *Maxmin* recai no

sorteio equiprovável das restrições, onde a quantidade delas é determinada de acordo com o nível de exigência acerca da qualidade da solução, que é estabelecida através da escolha dos parâmetros ϵ e β , conforme o Teorema 1. Uma vez que o objetivo é determinar uma formulação (problema PCS_m), cuja solução viole a menor quantidade possível das restrições excluídas, o ideal seria escolher valores bem pequenos para os parâmetros. No entanto, esta escolha pode levar ao sorteio de um número ainda muito grande de amostras (já que $m \geq \frac{2}{\epsilon} \left(\ln \frac{1}{\beta} + n \right)$, onde m é o número de restrições sorteadas) o que não resultará no efeito desejado em termos de eficiência na solução do problema. Por outro lado, a escolha de parâmetros muito grandes podem levar a uma solução muito distante da solução ótima do problema original, uma vez que poderá ter um volume muito grande de restrições sendo violadas. Desta forma, no momento da escolha dos parâmetros ϵ e β deve-se realizar um *trade-off* entre viabilidade e performance.

Conforme será visto no capítulo de resultados (5), os resultados da teoria de (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008) foram plenamente satisfeitos na aplicação do *MRR* a todas as instâncias simuladas. A análise da qualidade das soluções para o *Maxmin*, dadas pelo *MRR*, bem como a validade dos resultados da teoria correspondente, foram possíveis uma vez que conhecemos a sua solução ótima, obtida pelo método *MGR*, para aquelas instâncias que puderam ser resolvidas pelo mesmo.

Capítulo 5

Resultados Computacionais

Neste capítulo, serão apresentados os resultados computacionais obtidos com a implementação dos métodos exato *MGR* e randômico *MRR*, propostos nesta tese como formas de solução do problema de alocação de Energia Firme no núcleo de jogos cooperativos, *Maxmin*, definido no capítulo 2. Este capítulo está organizado da seguinte forma:

Na seção 5.1 serão definidas as instâncias, compostas de 5, 10, 15, 20, 30 e 40 usinas, que foram utilizadas nas simulações realizadas. Mostra-se a disposição topológica destas usinas bem como suas características físicas como potência, fator de produção e capacidade dos reservatórios.

Na seção 5.2, serão apresentadas estatísticas, tais como o tempo de execução dos métodos e o número de restrições envolvidas no processo de solução, que permitirão avaliar o desempenho de cada um dos métodos, *MGR* e *MRR*, a partir dos resultados obtidos da aplicação dos mesmos às instâncias definidas em 5.1.

5.1 Dados de Entrada

Nos testes computacionais, foram utilizadas instâncias que correspondem a subconjuntos de usinas, selecionadas dentre aquelas que compõem o parque hidrelétrico brasileiro. A seleção das referidas usinas foi feita de modo que, nas simulações realizadas, as energias firmes fossem resultantes de sinergias decorrentes tanto de regularização das vazões naturais afluentes, de usinas em cascata, quanto da diversidade hidrológica existente entre aquelas localizadas em bacias distintas. Desta forma, as usinas analisadas estão em rios localizados nas bacias do grande, do Paranaíba, do Tietê e do Paranapanema, todas na região sudeste, e possuem representação topológica dada pela figura 5.1 (usinas destacadas em rosa).

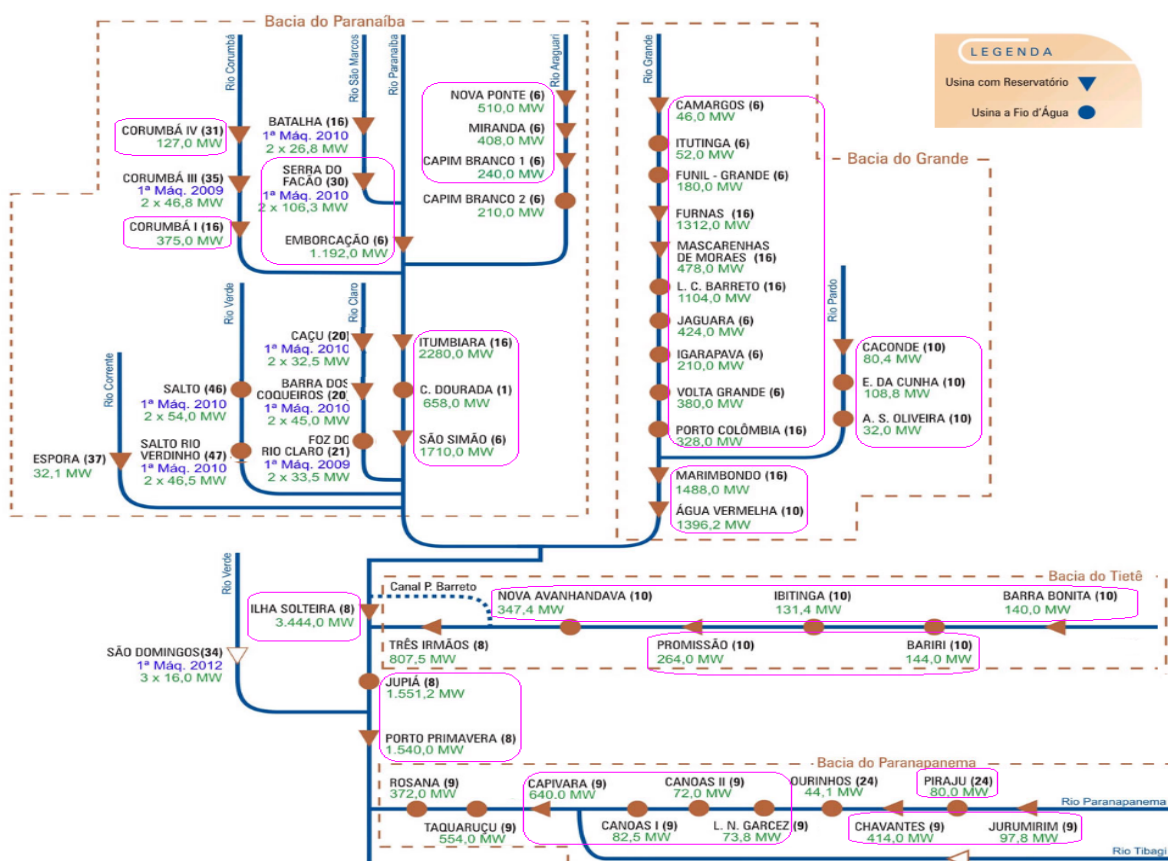


Figura 5.1: Topologia das usinas

As características físicas das usinas do estudo e os demais dados utilizados como entrada para o modelo de energia firme são mostrados nas tabelas 5.1 e 5.2, a seguir:

Tabela 5.1: Dados de entrada.

P	<i>Usina</i>	V	T	ρ ($MW/m^3/s$)	\underline{u} (m^3/s)	\bar{u} (m^3/s)	\underline{v} (hm^3)	\bar{v} (hm^3)
1	CAMARGOS	2	2	0.1783	0.0	220	120.0	792.0
2	ITUTINGA	211	211	0.2447	0.0	236	11.0	11.0
211	FUNIL-GRANDE	6	6	0.3457	0.0	585	304.0	304.0
6	FURNAS	7	7	0.7475	0.0	1692	5733.0	22950.0
7	M. DE MORAES	8	8	0.3160	0.0	1328	1540.0	4040.0
8	ESTREITO	9	9	0.5627	0.0	2028	1423.0	1423.0
9	JAGUARA	10	10	0.4043	0.0	1076	450.0	450.0
10	IGARAPAVA	11	11	0.1525	0.0	1480	480.0	480.0
11	P. COLOMBIA	12	12	0.2472	0.0	1584	2244.0	2244.0
12	VOLTA GRANDE	17	17	0.2038	0.0	1988	1524.0	1524.0
14	CACONDE	15	15	0.7754	0.0	94	51.0	555.0
15	E. DA CUNHA	16	16	0.7461	0.0	148	14.0	14.0
16	A.S.OLIVEIRA	17	17	0.2064	0.0	178	25.0	25.0
17	MARIMBONDO	18	18	0.4663	0.0	2944	890.0	6150.0
18	A.VERMELHA	0	0	0.4568	0.0	2958	5856.0	11025.0
251	SERRA FACAO	24	24	0.6090	0.0	304	1752.0	5199.0
24	EMBORCACAO	31	31	1.0370	0.0	1048	4669.0	17725.0
25	NOVA PONTE	206	206	0.9426	0.0	597	2412.0	12792.0
206	MIRANDA	207	207	0.6100	0.0	675	974.0	1120.0
207	CAPIM BRAN I	0	0	0.5053	0.0	495	239.0	240.0

Tabela 5.2: Dados de entrada.

P	$Usina$	V	T	ρ ($MW/m^3/s$)	\underline{u} (m^3/s)	\bar{u} (m^3/s)	\underline{v} (hm^3)	\bar{v} (hm^3)
205	CORUMBA IV	30	30	0.6121	0.0	208	2936.0	3624.0
209	CORUMBA I	31	31	0.5733	0.0	570	470.0	1500.0
31	ITUMBIARA	32	32	0.6454	0.0	3222	4573.0	17027.0
32	CACH.DOURADA	33	33	0.2826	0.0	2570	460.0	460.0
33	SAO SIMAO	0	0	0.6093	0.0	2670	7000.0	12540.0
37	BARRA BONITA	38	38	0.1569	0.0	756	569.0	3135.0
38	BARIRI	39	39	0.1881	0.0	771	544.0	544.0
39	IBITINGA	40	40	0.1872	0.0	705	985.0	985.0
40	PROMISSAO	42	42	0.2003	0.0	1293	5280.0	7408.0
42	NAVANHANDAVA	0	0	0.2601	0.0	1431	2720.0	2720.0
44	I.SOLTEIRA	45	45	0.3835	0.0	11604	25467.0	34432.0
45	JUPIÁ	46	46	0.1980	0.0	8344	3354.0	3354.0
46	P.PRIMAVERA	0	0	0.1593	0.0	8904	14400.0	14401.0
47	JURUMIRIM	48	48	0.2819	0.0	356	3843.0	7008.0
48	PIRAJU	49	49	0.2296	0.0	362	84.0	84.0
49	CHAVANTES	0	0	0.6128	0.0	648	5754.0	8795.0
50	L.N.GARCEZ	51	51	0.1497	0.0	564	45.0	45.0
51	CANOAS II	52	52	0.1289	0.0	561	151.0	151.0
52	CANOAS I	61	61	0.1509	0.0	567	212.0	212.0
61	CAPIVARA	0	0	0.3563	0.0	1740	4816.0	10540.0

Para cada linha das tabelas 5.1 e 5.2, são informados o nome da usina, o seu posto P (ponto de medição da vazão natural, cujo número identifica a usina), o posto das usinas a jusante, para onde a usina verte (“ V ”) e turbina (“ T ”), o fator de produção média da usina (ρ), turbinamentos mínimo (“ \underline{u} ”) e máximo (“ \bar{u} ”), volumes mínimos (“ \underline{v} ”) e máximo (“ \bar{v} ”). Em todas as instâncias resolvidas nesta tese, os volumes turbinados e vertidos de cada usina vão para uma mesma usina a jusante. Além disto, em todas as simulações, o volume inicial dos reservatórios foi definido como sendo 80% do volume útil.

Devido a modelagem do problema do cálculo da energia firme de sistemas hidrelétricos utilizada, em que se considera que a cada usina está associado um reservatório, para a representação de usinas a fio d’água, impusemos que o volume fosse o mesmo em todas as etapas. Isto significa que todo o volume de água que chega na usina é vertida ou turbinada.

Para os reservatórios “puros”, a representação pode ser feita anulando-se o volume máximo turbinado. Assim, estas usinas possuem somente o papel de regularização das vazões das usinas a jusante, não lhes cabendo gerar energia.

Além dos dados das usinas apresentados acima, são também informadas as vazões históricas de cada usina, de modo que torna-se possível a simulação da sua operação e, conseqüentemente, a determinação da Energia Firme, tanto individual quanto a do sistema em que a mesma está inserida. Foram realizados testes para horizontes de estudo com 12 e 84 etapas (meses), ambos contendo o período crítico (que no sudeste ocorreu entre os anos de 1949 e 1956).

As instâncias com k usinas são compostas das k primeiras usinas da tabela 5.1 e serão representadas por A_k . Na modelagem, os postos das usinas remanescentes foram eliminados (atribuindo valor nulo) dos destinos de vertimento e turbinamento das k usinas

consideradas.

As instâncias do problema de energia firme são constituídas de informações coletadas de fontes oficiais, como o ONS - Operador Nacional do Sistema Elétrico. Como o único trabalho, encontrado na literatura, que trata da determinação da alocação de Energia Firme, utilizando métodos de solução no núcleo, pôde resolver instâncias com somente 4 usinas, não existem resultados publicados para as mesmas, para fins de comparação com os resultados que obtivemos em nossos testes.

5.2 Resultados Computacionais

Nesta seção, serão apresentados todos os resultados obtidos da aplicação dos métodos exato (*MGR*), descrito em 5.2.1, e randomizado (*MRR*), descrito em 5.2.2, às instâncias definidas na seção anterior (5.1). Serão dadas estatísticas que permitirão avaliar o desempenho de cada um dos métodos, tais quais o tempo de execução e o número de restrições envolvidas no processo de solução, uma vez que ambos os métodos são baseados na relaxação das restrições do problema *Maxmin*. Dado que, para uma das instâncias testadas, conhecemos a solução exata do problema *Maxmin*, fornecida pelo algoritmo exato *MGR*, será possível avaliar a qualidade da solução ótima aproximada, dada pelo *MRR*.

Utilizando o modelo de otimização descrito na seção 2.1.3 e os dados de entrada descritos na seção anterior, foi calculada a energia firme total das instâncias simuladas do problema *Maxmin*. Para o horizonte de 84 etapas, foram calculados os firmes das instâncias A_5 , A_{10} e A_{15} , cujos valores são $755,9MWmed$, $1841,0MWmed$ e $2989,0MWmed$. Para o horizonte com 12 etapas, foi possível a solução de problemas *Maxmin* maiores, A_{20} , A_{30} e A_{40} , cujos firmes correspondentes são $4906.48MWmed$, $7946.94MWmed$ e $11959.3MWmed$, respectivamente. Conforme já visto em capítulos anteriores, estes valores representam as demandas máximas que as usinas dos sistemas correspondentes conseguiriam atender em uma operação integrada, sem interrupções, se ocorresse a repetição das vazões históricas.

Uma vez calculada a energia firme “total” do sistema considerado, o problema colocado é como alocar este total entre os agentes. Os resultados de cada método serão apresentados nesta seção.

Todos os problemas foram modelados em linguagem Mosel, através do software Xpress (XPRESS). Para a sua execução, foi utilizado o computador Core(TM) 2 CPU, com 2.13 GHz e 2 Gb de memória RAM.

5.2.1 Resultados *MGR*

Os resultados apresentados, nesta subseção, foram obtidos da aplicação do método exato, *MGR*, de solução para o problema de Alocação de Energia Firme, *Maxmin*, abordado no capítulo 3, às instâncias descritas na seção anterior. O *MGR*, conforme já dito no capítulo 3, retorna solução no *Leastcore*, o que significa que o método determina a alocação que maximiza a menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer a “grande coalizão”.

Em nossa implementação, no passo (a) do método, onde determina-se o primeiro subconjunto das restrições (3.13) que irá compor o problema mestre, optamos por inicializar o algoritmo com todas as restrições (3.13), além da restrição (3.12), correspondentes a uma única usina, o que impede que o problema torne-se ilimitado.

As instâncias simuladas aqui foram A_5 , A_{10} e A_{15} , para 84 e 12 etapas, e A_{20} para 12 etapas. Como forma de verificar a eficiência das soluções encontradas pelo *MGR*, para algumas das instâncias citadas, resolvemos o problema linear *Maxmin* utilizando a sua formulação completa como um problema de programação linear (*LP*). Como resultado, obtivemos alocações diferentes das fornecidas pelo *MGR*, no entanto, o valor da função objetivo obtido com o *LP* coincidiu com o do *MGR*, a menos de um pequeno erro numérico, o que significa que o problema *Maxmin* possui múltiplas soluções ótimas.

Devido ao, já mencionado, crescimento exponencial da sua formulação com o número de usinas, o maior problema resolvido através do *LP* foi aquele com 15 usinas, que possui $2^{15} = 32,768$ restrições, e 12 etapas. Impusemos um tempo limite de 54000 segundos, ou 15 horas, para a execução dos métodos *MGR* e *LP*, constituindo o nosso critério de parada. Os resultados obtidos estão exibidos nas tabelas 5.3 e 5.4 a seguir, onde a coluna “Tempo (s)”exibe o tempo de execução do método *MGR*, a coluna “#Restrições”, o número total de restrições adicionadas ao problema mestre, “Frac”o percentual destas

restrições com relação ao total na formulação completa e δ_{MGR} e δ_{LP} as soluções ótimas obtidas pelos procedimentos *MGR* e *LP*, respectivamente.

Resultado do método *MGR* para o Caso com 84 meses

Para o horizonte de 84 etapas, as instâncias A_5 , A_{10} e A_{15} puderam ser resolvidas pelo *MGR*.

Tabela 5.3: Instâncias com 84 etapas.

A_k	<i>Tempo(s)</i>	#Retrições	<i>Frac</i>	δ_{MGR} (<i>MW</i>)	δ_{LP} (<i>MW</i>)
A_5	23.4	9	28.13%	1.5201	1.5202
A_{10}	963.1	43	4.20%	2.1275	2.1226
A_{15}	53309.6	156	0.48%	1.1239	-
A_{20}	-	-	-	-	-

A quantidade de restrições geradas pelo *MGR*, foi de 28.1%, 4.2% e 0.48% do total de restrições da formulação original para as instâncias A_5 , A_{10} e A_{15} , respectivamente. Com o método *LP* conseguimos resolver as instâncias A_5 e A_{10} e verificamos que as soluções obtidas estão a 0,01% e 0.02% da solução do *MGR*, respectivamente. O tempo de solução de cada problema *Maxmin* “completo”, que é a soma do tempo necessário para geração de todas as $2^5 / 2^{10}$ restrições com o tempo de sua solução, foi aproximadamente 2.6 s /114.3 s. A instância A_{20} não pôde ser resolvida pelos métodos *LP* e *MGR* antes do tempo limite imposto de 54000 seg. O mesmo ocorreu para a instância A_{15} com relação ao método de programação linear.

Resultado do método *MGR* para o caso com 12 meses

Para o horizonte de 12 etapas, o algoritmo *MGR* foi capaz de resolver as instâncias A_5 , A_{10} , A_{15} e A_{20} , no entanto, como as duas primeiras já foram resolvidas anteriormente, mostraremos as demais na próxima tabela.

Tabela 5.4: Instâncias com 12 etapas.

A_k	<i>Tempo</i> (s)	#Retrições	<i>Frac</i>	δ_{MGR} (MW)	δ_{LP} (MW)
A_{15}	1111.3	269	0.82%	1.5293	1.5285
A_{20}	14679.7	532	0.05%	1.2330	-

A quantidade de restrições geradas pelo *MGR*, foi de 0,82% e 0,05% do total de restrições da formulação original para as instâncias A_{15} e A_{20} , respectivamente. Para o método *LP*, conseguimos resolver a instância A_{15} , cuja solução está a 0,05% da solução do *MGR*. O tempo de solução do problema *Maxmin* “completo”, que é a soma do tempo necessário para geração de todas as 2^{15} restrições com o tempo de sua solução, foi aproximadamente 874.27 s. A instância A_{20} não pôde ser resolvida pelo método *LP* antes do tempo limite imposto de 54000 seg. Além disso, instâncias maiores que a A_{20} não puderam ser resolvidas pelo método *MGR* antes do tempo limite.

Os próximos gráficos mostram o tempo de solução de cada problema de viabilidade resolvido na solução das instâncias A_{15} e A_{20} através do *MGR*.

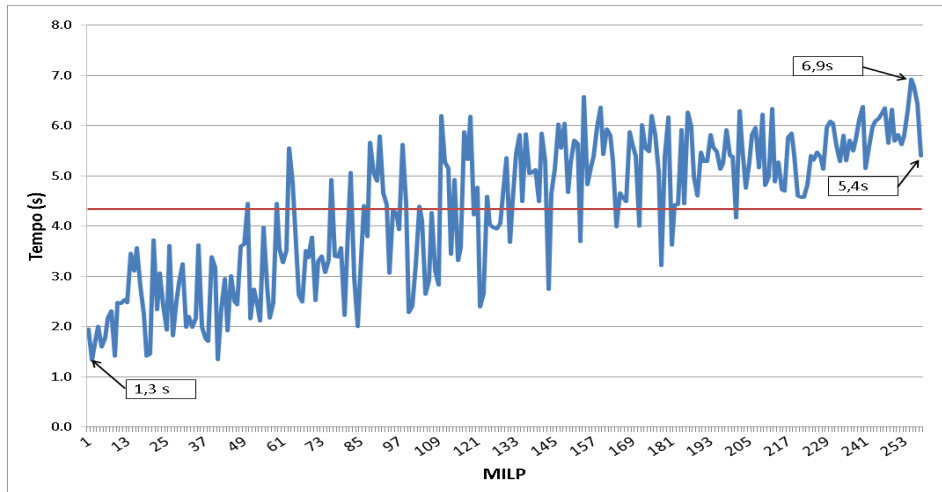


Figura 5.2: Instância A_{15} : Tempo de solução dos Problemas de viabilidade

Para a instância A_{15} , como o esperado, observamos o crescimento do tempo de solução do problema de viabilidade. O menor tempo, correspondente ao segundo problema resolvido, é de 1,3 seg enquanto que o maior, correspondente ao penúltimo problema, é de 6,9 seg.

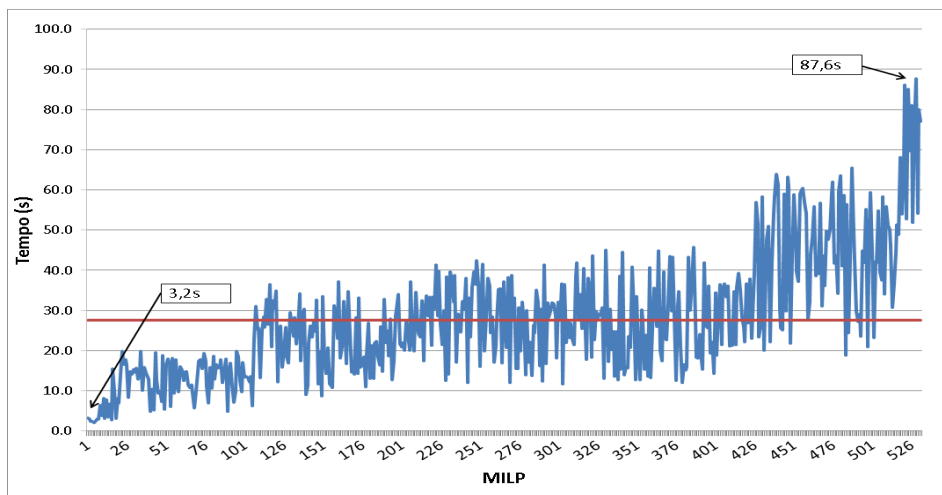


Figura 5.3: Instância A_{20} : Tempo de solução dos Problemas de viabilidade

Para a instância A_{20} , novamente, observamos o crescimento do tempo de solução do problema de viabilidade. O menor tempo, correspondente ao segundo problema resolvido, é de 3,2 seg, enquanto que o maior é de 87,6 seg.

Com os gráficos 5.2 e 5.3, podemos constatar que a dificuldade de solução do *Maxmin* através do *MGR* está na solução do problema inteiro misto, ou problema de viabilidade (passo (c) do método *MGR*, descrito no capítulo 3), que gasta uma quantidade elevada de tempo até encontrar a restrição mais violada pela solução do problema mestre.

Análise da alocação dada pelo *MGR* para o sistema com 20 usinas

O sistema hidroelétrico com 20 usinas, no horizonte de 12 meses, possui uma energia firme total igual a 4906,5 MW médios, calculada com o modelo de otimização apresentado no capítulo 2. Como o esperado, uma vez que a propriedade da superaditividade é válida para o problema da energia firme (ver subseção 2.2.2), o valor da energia firme total (4906,5 MW), obtido com a operação integrada, é maior do que a soma das energias firmes individuais das usinas (3643,3 MW), mostradas na tabela 5.6. Como já discutido na seção (2.1.1), para que esta “sinergia” seja alcançada, o papel dos reservatórios é fundamental pois estes têm a função de armazenar e transferir água dos períodos úmidos para os períodos secos, regulando as vazões nas cachoeiras e aproveitando a diversidade hidrológica entre as usinas localizadas em diferentes bacias. A tabela 5.5, a seguir, mostra os volumes mensais turbinados pela usina Camargos (que possui reservatório e está no início da cascata do Rio Grande), e sua geração correspondente, na operação individual e em coordenação com as outras usinas da instância A_{20} .

Tabela 5.5: Turbinamento e Geração - 20 usinas e 12 etapas

Mês	Turb. F.I. (m^3/s)	Ger. F.I. (MW)	Turb. O.I. (m^3/s)	Ger. O.I. (MW)
1	105.9	18,9	220,0	39,2
2	105.9	18,9	0,0	0,0
3	105.9	18,9	220,0	39,2
4	105.9	18,9	150,0	26,8
5	105.9	18,9	104,0	18,5
6	105.9	18,9	99,0	17,7
7	105.9	18,9	220,0	39,2
8	105.9	18,9	0,0	0,0
9	105.9	18,9	68,6	12,2
10	105.9	18,9	0,0	0,0
11	105.9	18,9	220,0	39,2
12	105.9	18,9	138,3	24,7
Ger.Med.Ano (MW)		18,9		21,5

Na tabela 5.5, a coluna “Ger. F.I.”exibe a geração mensal correspondente ao volume turbinado, mostrado na primeira coluna (“Turb. F.I”), na determinação do firme individual. Já as colunas “Turb. O.I”e “Ger. O.I.”possuem os volumes turbinados e geração mensais na operação integrada. A linha “Ger.Med.Ano”informa a geração média no ano, tanto para a operação individual quanto para a integrada.

Podemos ver que, em prol de um valor maior de energia firme total, a usina Camargos funcionou como reguladora das vazões das usinas a jusante, uma vez que o seu volume turbinado na operação conjunta, em diversos meses, foi menor do que o da operação individual, sendo, inclusive, igual a zero nos meses 2, 8 e 10. Desta forma, pode-se concluir

que a usina guardou água para tornar as vazões das usinas a jusante mais regulares, aumentando, assim, o firme total do sistema, o que gerou ganhos para ela própria e para as usinas a jusante. De fato, com o aumento da energia firme total, Camargos teve como retorno uma alocação de EF (46,8 MWmed), dada pelo método *MGR*, 117% maior do que a sua geração média no ano (21,5 MWmed).

A tabela 5.6, a seguir, apresenta o resultado da alocação, no *Leastcore*, da energia firme total entre os agentes, através da aplicação do método *MGR*. Nesta tabela, são mostrados também os firmes individuais de cada usina para que possamos avaliar o benefício gerado, para as mesmas, pela alocação resultante.

Tabela 5.6: Alocações do método MGR - 20 usinas e 12 etapas

Usina	Firme Individual (MW)	Alocação (MW)	Obs
Camargos	18,9	46,8	
Itutinga	16,2	24,4	Fio d'água
Funil-Grande	53,2	82,4	Fio d'água
Furnas	544,1	545,8	
M. de Moraes	195,0	264,0	
Estreito	250,4	469,0	Fio d'água
Jaguara	181,5	339,6	Fio d'água
Igarapava	70,6	127,7	Fio d'água
Volta Grande	119,9	220,4	Fio d'água
P. Colombia	110,3	197,6	Fio d'água
Caconde	23,6	31,7	
E. da Cunha	23,9	32,4	Fio d'água
A.S. Oliveira	6,8	8,6	Fio d'água
Marimbondo	470,2	620,7	
A. vermelha	513,1	649,7	
Serra facão	94,6	96,0	
Emborcação	466,1	502,1	
Nova Ponte	281,7	283,5	
Miranda	117,8	199,2	
Capim Branco ¹	85,6	165,1	

Outra consequência da ocorrência da sinergia na operação conjunta das usinas, como pode-se perceber na tabela 5.6 acima, é que o aumento da energia firme total do sistema implica no aumento da energia firme de todas as usinas, dado que a sua alocação, fornecida pelo método *MGR*, está no núcleo. Isto quer dizer que a energia firme total é repartida entre as usinas e todas elas recebem alocação maior do que o seu firme individual. Em particular, para a usina Camargos, a alocação foi 147.8% maior do que seu firme individual (18.9 MWmed). Já as suas usinas a jusante, que são, na maioria, a fio d'água, tiveram também a sua energia firme aumentada, em média 65%. As usinas a fio d'água, intuitivamente, são as maiores beneficiadas com a operação conjunta já que não podem sozinhas regularizar as suas vazões, devido a ausência de reservatório. Este fato faz com que, sozinhas, fiquem totalmente dependentes de suas vazões naturais e, portanto, obtenham um energia firme baixa.

O método *MGR* com interrupção do problema auxiliar

O *MGR* não pôde resolver instâncias com número de usinas superior a 20 antes do tempo limite imposto. O “gargalo” está na solução do problema inteiro misto, ou problema de viabilidade (passo (c) do método *MGR*, descrito no capítulo 3), que gasta uma quantidade elevada de tempo até encontrar a restrição mais violada pela solução do problema *Maxmin* relaxado, ou problema mestre.

Desta forma, visando acelerar o processo de solução do *MGR*, realizamos outros testes, para a instância com 20 usinas, onde interrompemos a solução do problema de viabilidade após a determinação de k soluções inteiras (coalizões), cujas restrições, do *Leastcore*, associadas estão sendo violadas pela alocação dada pelo problema mestre. Com esta alteração, os resultados obtidos para a instância com 20 usinas foram aprimorados, como pode ser visto na tabela 5.7 a seguir:

Tabela 5.7: Instâncias para 12 etapas e 20 usinas.

#Cortes	Tempo(s)	#Restrições	Frac
1	4360,2	1274	0,12%
3	4595,7	416	0,04%
4	3498,4	255	0,02%
6	3865,1	203	0,02%

Na tabela 5.7, a coluna “#Cortes” é o número de restrições adicionadas, simultaneamente, ao problema mestre após cada solução do problema de viabilidade, a coluna “Tempo (s)” exibe o tempo de execução do método, a coluna “#Restrições”, o número total de restrições adicionadas ao problema mestre e “Frac” o percentual destas restrições com relação ao total na formulação completa.

Como já visto, o *MGR* levou 14679,7 segundos para encontrar a solução do *Maxmin* sem a interrupção do problema auxiliar. Além disto, foram adicionadas 532 restrições ao problema mestre. Para os resultados com interrupção, o maior tempo foi de 4595,7 segundos, correspondente a adição de 3 restrições a cada execução do problema de viabilidade, significativamente menor. O maior número de restrições adicionadas ao problema mestre, ao fim do procedimento, foi 1274, quando foi adicionada 1 restrição. Já o menor, foi 203, quando adicionadas 6 restrições. Em média, foram adicionadas 537 restrições.

Outra vantagem com a interrupção do problema auxiliar é que tornou-se possível a solução da instância com 30 usinas, que não pôde ser resolvida com o procedimento *MGR* original. Para esta instância, foram adicionados 6 cortes a cada execução do problema de viabilidade. O número de restrições acrescentadas na formulação, ao fim do procedimento, foi 1400, o que equivale a 0,13% do total de 1.073.741.824 restrições. O tempo de execução foi 49165,2 segundos e o valor da função objetivo, FO=0,00135, que

consiste da vantagem obtida pela coalizão menor favorecida com a alocação dada pelo modelo. Podemos notar que esta vantagem está muito próxima de zero, o que indica que, para a coalizão menos favorecida, o valor alocado está muito próximo do seu firme individual, ou seja, o ganho é desprezível.

O *MGR* não pôde resolver as instâncias maiores (com mais de 30 usinas) dentro do tempo limite imposto de 54000 segundos, ou 15 horas. Na próxima seção, faremos a análise dos resultados obtidos da aplicação do método randômico ((Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006), (Campi *et al.*, 2008)) ao problema *Maxmin*.

5.2.2 Resultado - Método Randomizado *MRR*

Nesta seção, serão mostrados os resultados obtidos da aplicação do método randômico *MRR*, proposto em (Calafiore *et al.*, 2005) e descrito no capítulo 4, às instâncias construídas na seção 5.1. De acordo com o método, definido o tamanho do problema e fixados um valor para a probabilidade de violação ϵ e outro para a confiabilidade $1 - \beta$, obtemos uma instância do problema sorteado PCS_m , onde o número m de restrições a serem sorteadas é dado por uma fórmula envolvendo os referidos parâmetros.

As instâncias simuladas foram as A_{20} , A_{30} e A_{40} , que possuem 20, 30 e 40 usinas, respectivamente. Para a instância A_{20} , que corresponde a uma formulação *Maxmin* completa contendo $2^{20} - 1 = 1.048.575$ restrições, foram realizados 100 sorteios de restrições para cada combinação dos parâmetros ϵ e β , onde $\epsilon = 1,0\%$ e $\beta = 1,0\%, 5,0\%, 8,0\%$. De acordo com (Calafiore *et al.*, 2005), os referidos parâmetros possuem o significado de que, para cada problema sorteado, a solução desejada deve violar, no máximo, 1,0% das restrições do problema original, com confiabilidade de 99%, 95%, 92%, respectivamente. Utilizando a fórmula $\beta \leq \sum_{i=1}^{n-1} C_i^m \epsilon^i (1 - \epsilon)^{m-i}$, que determina, implicitamente, o número m de restrições na formulação do problema sorteado, para a confiabilidade de

99% (e probabilidade de violação de 1,0%), chegamos que a instância do PCS_m gerada deve conter uma quantidade maior ou igual a 3179 restrições na formulação relaxada (ou 0,30% do total de restrições do $Maxmin$). Se a confiabilidade é reduzida para 95% e 92%, este número cai para 2784 e 2642, respectivamente (ou 0,27% e 0,25% do total de restrições do problema $Maxmin$).

Para a instância A_{30} , que corresponde a uma formulação $Maxmin$ completa contendo $2^{30} - 1 = 1.073.741.823$ restrições, foram realizados 100 sorteios do método considerando $\epsilon = 1,0\%$ de probabilidade de violação de restrições e confiabilidade de $1 - \beta = 99\%$. Utilizando a fórmula, que determina o número de restrições na formulação do problema sorteado, chegamos que a instância do PCS_m gerada deve conter uma quantidade maior ou igual a 4412 restrições na formulação relaxada (ou 0.00041% do total de restrições do $Maxmin$).

Para a instância A_{40} , que corresponde a uma formulação $Maxmin$ completa contendo $2^{40} - 1 = 1.099.511.627.776$ restrições, foram realizados 100 sorteios do método considerando $\epsilon = 1,0\%$ de probabilidade de violação de restrições e confiabilidade de $1 - \beta = 99\%$. Utilizando a fórmula, que determina o número de restrições na formulação do problema sorteado, chegamos que a instância do PCS_m gerada deve conter uma quantidade maior ou igual a 5608 restrições na formulação relaxada (ou $5.1 \times 10^{-07}\%$ do total de restrições do $Maxmin$).

Em nossos testes, adotamos uma distribuição de probabilidade uniforme no sorteio das restrições que irão compor o PCS_m , ou seja, todas as restrições possuem a mesma probabilidade de serem sorteadas.

Assim, definido o tamanho do problema e fixados valores para a probabilidade de violação ϵ e para a confiabilidade $(1 - \beta)$, as etapas de execução do MRR são:

1. Determinar o número m de restrições que irão compor a formulação do problema

sorteado PCS_m , de acordo com os níveis de violação de restrições e confiabilidade definidos;

2. Construir uma instância do problema sorteado com m restrições sorteadas;
3. Obter a solução ótima $x_m^* = \phi$ do PCS_m ;

Os tempos médios para a construção e solução de uma instância do problema sorteado com m restrições sorteadas foram de 35.7, 73.2 e 126.7 segundos, para $m = 20, 30, 40$, respectivamente, bem inferiores ao tempo de 14679,7 segundos do MGR .

Para uma avaliação da qualidade das soluções do $Maxmin$, dadas pelo MRR , e, assim, tornar possível julgar a aplicabilidade do mesmo ao problema em questão, analisaremos, a seguir, os seguintes resultados:

- Distribuição de probabilidade da Violação - 20 usinas: Neste resultado, verificaremos que, para todas as instâncias resolvidas, a alocação dada pelo MRR não está no *Leastcore*, através da distribuição de probabilidade da violação;
- Distribuição de probabilidade da Perda Relativa Máxima (*Leastcore*) - 20 e 30 usinas: Neste resultado, será feita uma análise do tamanho das perdas sofridas pelas coalizões mais prejudicadas com a alocação, dada pelo método MRR , através de um gráfico de Distribuição de probabilidade de suas perdas relativas. Estas perdas são determinadas através da comparação da alocação dada pelo método randômico com aquela determinada pelo método exato. Uma determinada coalizão está sendo prejudicada pela alocação do método randômico se esta for inferior àquela dada pelo método exato.
- Distribuição de probabilidade da Violação do Núcleo - 20 usinas: Neste resultado, dado que as alocações não estão no *Leastcore*, verificaremos qual o volume de

restrições que também violam o núcleo.

- Distribuição de probabilidade da Perda Relativa Máxima (Núcleo) - 20, 30 e 40 usinas: Neste resultado, dado que existem restrições de núcleo sendo violadas, será feita uma análise do tamanho das perdas sofridas pelas coalizões mais prejudicadas com a alocação através de um gráfico de Distribuição de probabilidade de suas perdas relativas. Estas perdas nos permitem avaliar se o método é uma boa forma de rateio da energia firme total, apesar das violações resultantes.

Distribuição de probabilidade da Violação - 20 usinas

O primeiro resultado mostrado é o gráfico (5.4) de distribuição de probabilidade da violação das restrições, pela alocação $x_m^* = \phi$, dada pelo método randômico *MRR* na solução dos cem problemas sorteados PCS_m . Para cada um destes problemas, fixada a confiabilidade $1 - \beta$, é calculado o volume ($V(x_m^*)$) de restrições do *Maxmin* violadas pela referida alocação, onde, de acordo com (Calafiore *et al.*, 2005), $V(x_m^*) = \#RestricoesVioladas / \#RestricoesMaxmin$. Para a determinação do número de restrições violadas, verificamos se a alocação $x_m^* = \phi$ satisfaz a cada uma das 1.048.575 restrições ($\delta \leq \sum_{i \in S} \phi_i - f(S)$) do *Maxmin*, onde o $\delta = 1.233$ é a solução ótima dada pelo método exato (*MGR*).

Suponha, por exemplo, que, no primeiro PCS_m resolvido, 5.000 do total de 1.048.575 restrições do problema *Maxmin* estivessem sendo violadas pela solução x_m^* . Neste caso, a probabilidade de violação é dada por $V(x_m^*) = 5000/1048576$. Ou seja, 0,48% das restrições do problema original, não consideradas em PCS_m , não estariam sendo atendidas pela solução x_m^* deste problema.

Este resultado, para os cem PCS_m resolvidos, pode ser visto no gráfico de distribuição de probabilidade a seguir:

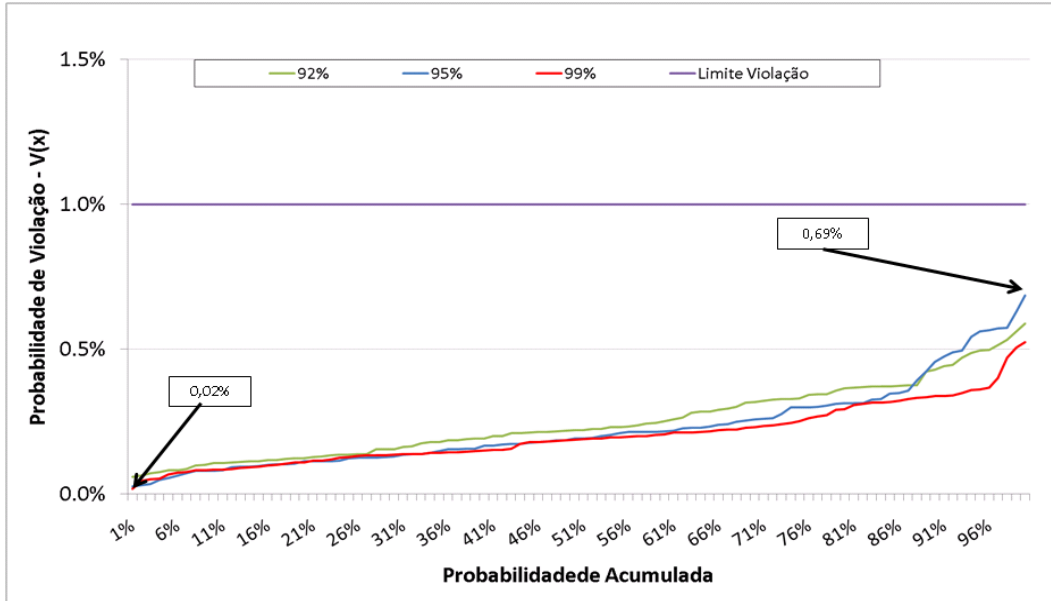


Figura 5.4: Distribuição de probabilidade da violação do *leastcore*

Como pode-se observar nos gráficos de distribuição, a maior probabilidade de violação obtida foi de 0,69% o que significa que, para o problema correspondente, que possui confiabilidade de 95%, somente este percentual das restrições, não consideradas na formulação, são violadas. Podemos concluir que a probabilidade de violação de todos os problemas resolvidos é menor que $\epsilon = 1,0\%$, o que está de acordo com a teoria probabilística em questão.

Distribuição de probabilidade da perda relativa máxima (Leastcore) - 20 e 30 usinas

Os próximos resultados, figuras (5.5) e (5.6), são as distribuições de probabilidade da perda relativa máxima do Leastcore, certamente sofrida por algumas coalizões devido a alocação $x_m^* = \phi$, dada pelo método randômico *MRR*, de solução do problema *Maxmin*, em comparação com a alocação dada pelo método exato *MGR*, de solução do mesmo. A perda relativa, $(\sum_{i \in S} \phi_i^* - \sum_{i \in S} \phi_i^p) / \sum_{i \in S} \phi_i^*$, é calculada para cada coalizão S tal que

$$\sum_{i \in s} \phi_i^* > \sum_{i \in s} \phi_i^p.$$

Suponha, por exemplo, que, no primeiro dos cem PCS_m 's resolvidos, a coalizão S foi tal que $\sum_{i \in s} \phi_i^* = 1000$ e $\sum_{i \in s} \phi_i^p = 999$. Percebe-se que a coalizão poderia ganhar mais com o método exato, ou seja, existe uma perda para esta coalizão causada pela alocação $x_m^* = \phi^p$, solução do PCS_m . Assim, a perda relativa do Leastcore associada a esta coalizão é dada por $(\sum_{i \in s} \phi_i^* - \sum_{i \in s} \phi_i^p) / \sum_{i \in s} \phi_i^* = 1/1000 = 0,1\%$.

Para a obtenção deste resultado, o seguinte procedimento foi realizado para cada problema p sorteado:

- Inicializamos o problema mestre (procedimento *MGR*) com as restrições geradas pelo método *MRR*;
- Resolvemos o problema mestre obtendo a alocação ϕ^p ;
- Determinamos a coalizão S^* tal que $(\sum_{i \in s^*} \phi_i^* - \sum_{i \in s^*} \phi_i^p)$ é o maior valor. Se este valor for positivo, então esta coalizão S^* poderia ganhar mais com o método exato, ou seja, ela possui uma perda com a alocação dada pelo *MRR*;
- Calculamos a perda relativa da coalizão mais prejudicada $((\sum_{i \in s} \phi_i^* - \sum_{i \in s} \phi_i^p) / \sum_{i \in s} \phi_i^*)$.

Assim, para as instâncias A_{20} e A_{30} (que possuem 20 e 30 usinas, respectivamente), foram sorteados cem problemas PCS_m com confiabilidade $1 - \beta$ igual a 99%, o que leva a problemas com 3179 e 4412 restrições, respectivamente. Para cada problema p resolvido, consideramos a coalizão S^* correspondente ao maior valor de $(\sum_{i \in s^*} \phi_i^* - \sum_{i \in s^*} \phi_i^p)$, para o cálculo da perda relativa máxima do leastcore.

Os gráficos (5.8) e (5.6), a seguir, mostram a distribuição de probabilidade da perda relativa máxima para a instância com 20 e 30 usinas:

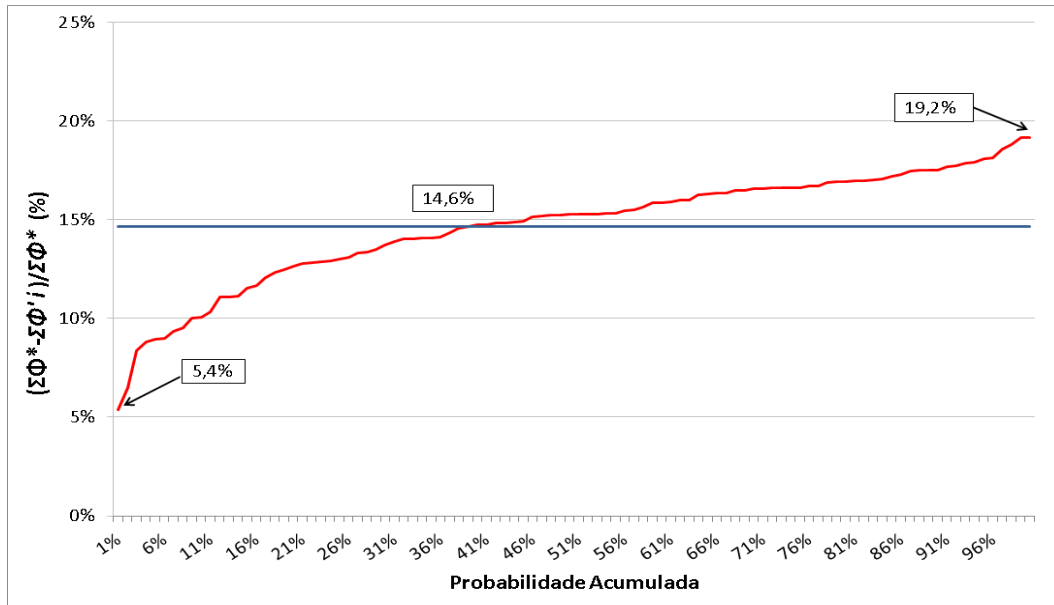


Figura 5.5: 20 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Leastcore) - confiabilidade de 99%

Analisando as perdas relativas máximas, para a instância com 20 usinas, pode-se observar que 40% dos PCS_m 's tiveram perdas abaixo de 15%, sendo o menor valor igual a 5,4%. A maior perda é de 19,2%.

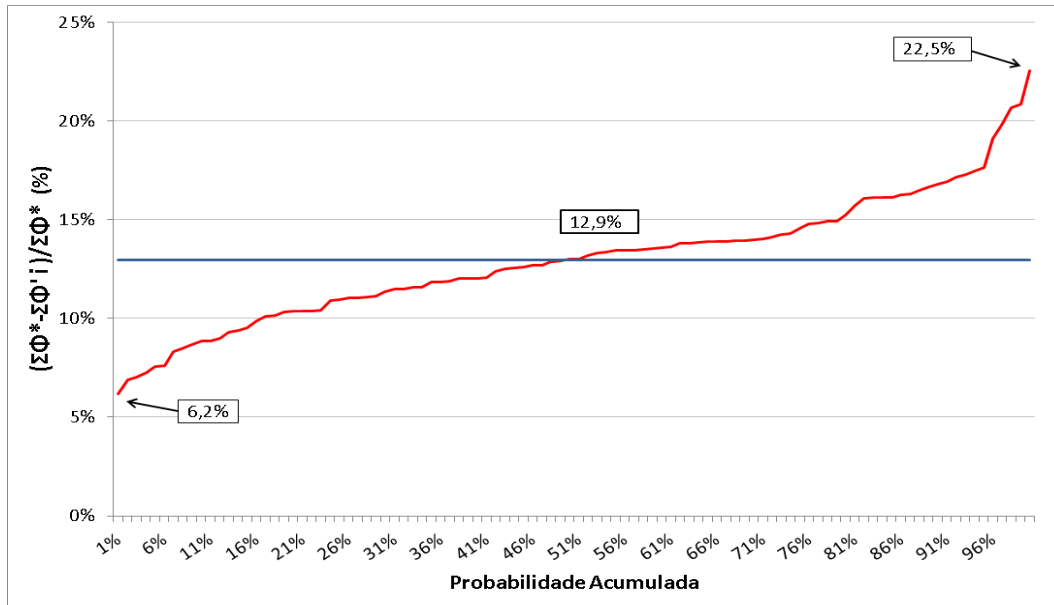


Figura 5.6: 30 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Leastcore) - confiabilidade de 99%

Analisando as perdas relativas máximas, para a instância com 30 usinas, pode-se observar que 50% dos PCS_m 's tiveram perdas abaixo de 13%, sendo o menor valor igual a 6,2%. Além disto, a maior dentre todas as perdas foi de 22,5%.

Dado que, como o esperado, existem restrições do *leastcore* sendo violadas pela alocação $x_m^* = \phi$, dada pelo *MRR*, para todos os PCS_m s resolvidos, verificaremos, no próximo gráfico de distribuição de probabilidade, quantas estão, adicionalmente, violando as restrições de núcleo.

Distribuição de probabilidade da violação do núcleo - 20 usinas

Verificamos, para a confiabilidade de 99%, a violação das restrições de núcleo ($V_N(x_m^*)$), através do gráfico (5.7) de distribuição da probabilidade de violação destas restrições, pela alocação $x_m^* = \phi$, resultante da solução dos cem PCS_m s resolvidos. Para cada

um destes problemas sorteados, é, então, calculado o volume $V_N(x_m^*)$ de restrições de núcleo violadas pela referida alocação, onde $V_N(x_m^*) = \#RestricoesVioladasdoNucleo / \#RestricoesNucleo$. Para a determinação do número de restrições violadas do núcleo ($\#RestricoesVioladasdoNucleo$), verificamos se a alocação x_m^* , de cada um dos cem problemas, satisfaz a cada uma das 1.048.575 restrições ($0 \leq \sum_{i \in S} \phi_i - f(S)$). Este resultado pode ser visto no gráfico de distribuição de probabilidade a seguir:

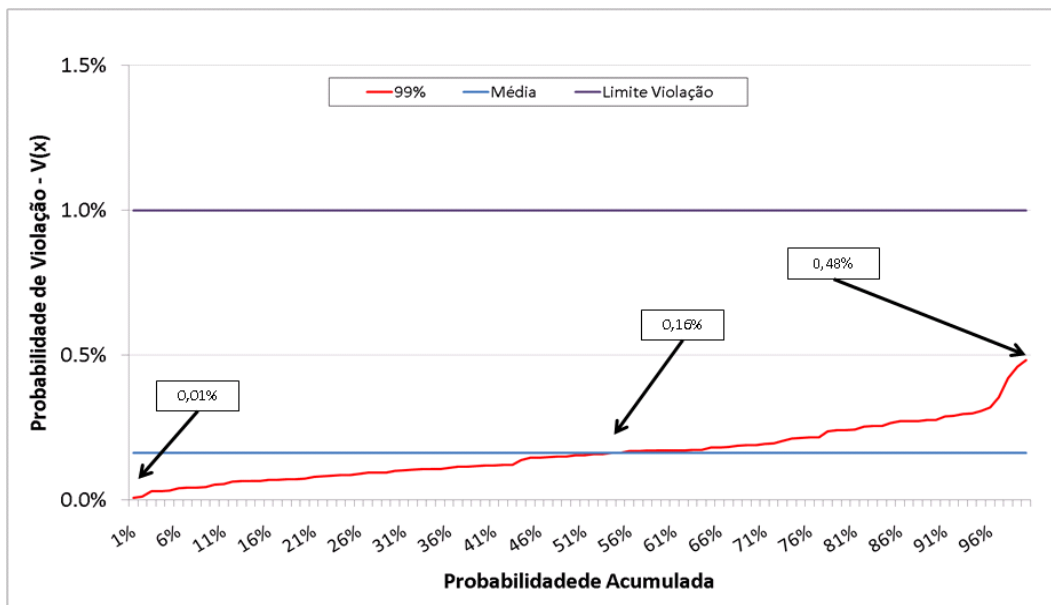


Figura 5.7: Distribuição de probabilidade da violação do núcleo - Confiabilidade de 99%

Além da distribuição de probabilidade da violação $V_N(x_m^*)$, é também mostrada a média dos cem valores de violação do núcleo. Podemos ver que 56% das alocações resultaram em uma quantidade de restrições violadas inferior ao valor médio de 0,16% do total de restrições do problema. Isto significa que, para algumas coalizões, houve desvantagem em participar da grande coalizão uma vez que estas receberiam mais energia firme se atuassem de forma independente. O maior valor de probabilidade de violação do núcleo foi de 0,48%, o que indica que, para o PCS_m correspondente, 0,48% das restrições do núcleo foram violadas pela sua alocação x_m^* .

Dado que existem restrições de núcleo sendo violadas, faremos, a seguir, uma análise do tamanho da perda sofrida pelas coalizões mais prejudicadas com a alocação x_m^* dada pelo MRR através de um gráfico de Distribuição de probabilidade de suas perdas relativas.

Distribuição de probabilidade da perda relativa máxima (Núcleo) - 20, 30 e 40 usinas

Os próximos resultados, figuras (5.8) a (5.10), são as distribuições de probabilidade da perda relativa máxima, certamente sofrida por algumas coalizões devido a alocação $x_m^* = \phi$, dada pelo método randômico MRR , de solução do problema $Maxmin$. A perda relativa, $(f(S) - \sum_{i \in S} \phi_i)/f(S)$, é calculada quando a restrição de núcleo, associada a coalizão S , não é satisfeita pela alocação x_m^* dada e indica o tamanho do prejuízo causado a esta coalizão pela referida alocação.

Suponha, por exemplo, que, no primeiro dos cem PCS_m 's resolvidos, a coalizão S foi tal que $F(S) = 1000$ e $\sum_{i \in S} \phi_i = 999$. Percebe-se que a restrição de núcleo não está sendo satisfeita, ou seja, existe uma perda para esta coalizão causada pela alocação $x_m^* = \phi$, solução do PCS_m . Assim, a perda relativa associada a esta coalizão é dada

por $(f(S) - \sum_{i \in s} \phi_i)/f(S) = 1/1000 = 0,1\%$, o que, neste caso, representaria um valor pequeno.

Para a obtenção deste resultado, o seguinte procedimento foi realizado para cada problema p sorteado:

- Inicializamos o problema mestre (procedimento *MGR*) com as restrições geradas pelo método *MRR*;
- Resolvemos o problema mestre obtendo a alocação ϕ^p ;
- Resolvemos o problema de viabilidade até a otimalidade com a alocação ϕ^p dada no item anterior. Se $\delta < 0$, então esta alocação não satisfaz as condições de núcleo e é obtida a coalizão mais prejudicada, que corresponde à restrição do núcleo mais violada;
- Calculamos a perda relativa da coalizão mais prejudicada.

Assim, para cada instância A_{20} , A_{30} e A_{40} (que possuem 20, 30 e 40 usinas, respectivamente), foram sorteados cem problemas PCS_m com confiabilidade $1 - \beta$ igual a 99%, o que leva a problemas com 3179, 4412 e 5608 restrições, respectivamente. Para cada problema p resolvido, consideramos a coalizão correspondente a restrição de núcleo mais violada, pela alocação ϕ^p , para o cálculo da perda relativa máxima.

O gráfico (5.8), a seguir, mostra a distribuição de probabilidade da perda relativa máxima para a instância com 20 usinas:

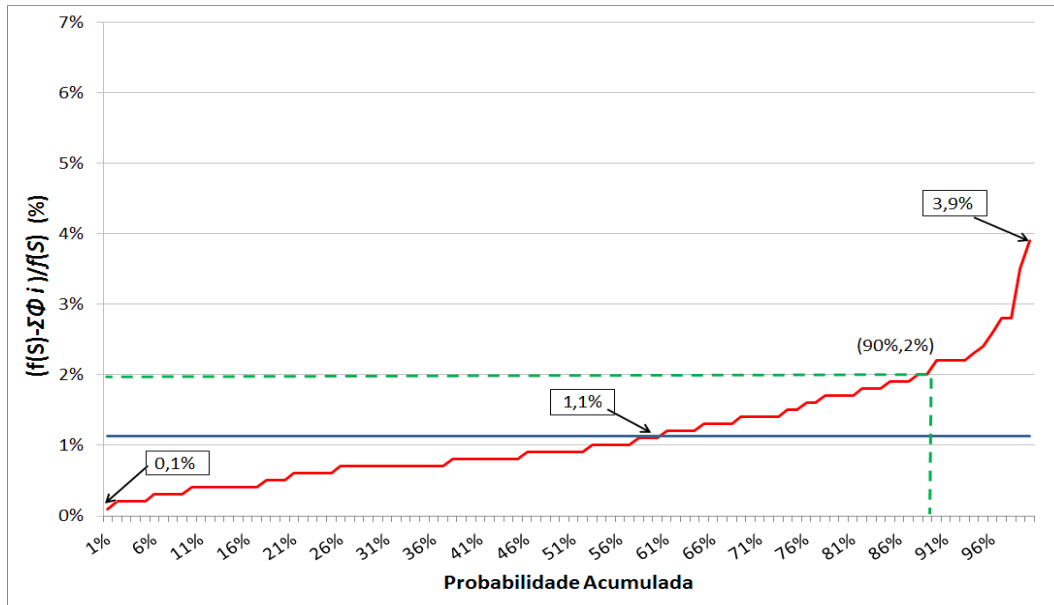


Figura 5.8: 20 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo)- confiabilidade de 99%

Analisando as perdas relativas máximas, para a instância com 20 usinas, pode-se observar que 61% dos PCS_m 's tiveram perdas abaixo de 1%. Constata-se que somente 10% dos problemas tiveram valores acima de 2%. Além disto, a maior dentre todas as perdas foi de 3,9%. Desta forma, conclui-se que os resultados, para a instância com 20 usinas, dados pelo método MRR , foram bons já que as perdas, para as coalizões correspondentes à (pequena) parcela de restrições que violam o núcleo, para cada PCS_m , foram, em termos relativos, pequenas.

Os gráfico (5.9) e (5.10) de distribuição de probabilidade da perda relativa máxima, a seguir, estende esta análise para as instâncias com 30 e 40 usinas, respectivamente:

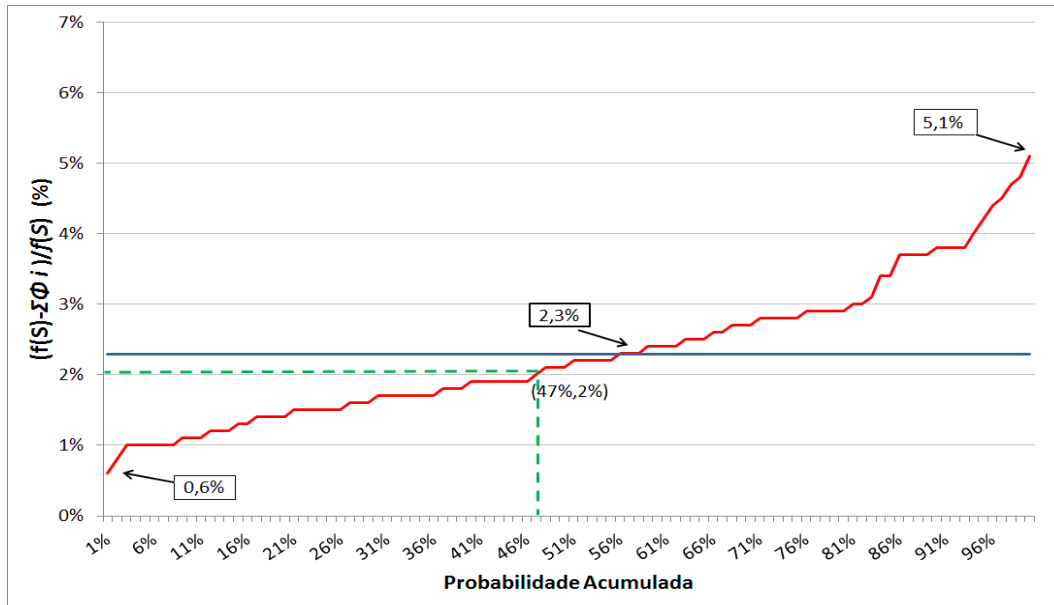


Figura 5.9: 30 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo) - confiabilidade de 99%

Analisando as perdas relativas máximas, agora para a instância com 30 usinas, pode-se observar que 47% dos PCS_m 's tiveram perdas abaixo de 2%, dentre as quais somente 10% resultaram em perdas abaixo de 1%. Além disto, a maior dentre todas as perdas foi de 5,1%.

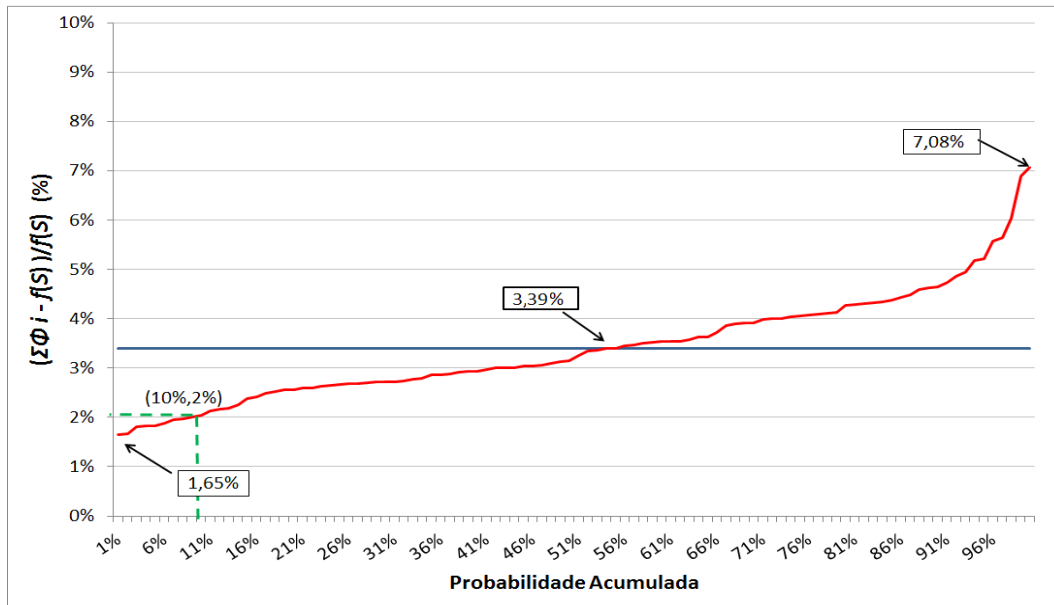


Figura 5.10: 40 usinas: Distribuição de probabilidade da perda (Núcleo) - confiabilidade de 99%

Analisando as perdas relativas máximas, agora para a instância com 40 usinas, pode-se observar que somente 10% dos PCS_m 's tiveram perdas abaixo de 2%, nenhum deles, porém, abaixo de 1%. Além disto, a maior dentre todas as perdas foi de 7,1%.

Após estas análises, constatamos que o MRR pode ser considerado uma boa heurística de solução para o problema $Maxmin$, uma vez que, para as três instâncias testadas, o método gerou soluções de boas qualidade, mesmo violando restrições do $Leastcore$ e do núcleo. Para chegarmos a esta conclusão, pesamos o fato de que as perdas, causadas às coalizões, foram pequenas e que, na literatura, não há registro de qualquer tentativa de solução de problemas $Maxmin$ grandes como os que foram resolvidos aqui. Como relatado em capítulos anteriores, o trabalho (Faria, 2004) propôs métodos de solução para a determinação de soluções no núcleo, porém, os problemas resolvidos tinham somente 4 usinas.

5.2.3 Resultado - Método Exato $MGRR$ ($MGR + MRR$)

Os resultados desta subseção provém da aplicação, à instância com 20 usinas e 12 etapas, do método MGR com restrições iniciais randomizadas ($MGRR$). Este novo procedimento, decrito a seguir, consiste na junção dos dois métodos descritos nas seções anteriores: O exato MGR e o método de solução randômica MRR .

A idéia deste novo procedimento é gerar um número suficientemente grande de restrições, aleatoriamente, de acordo com a teoria descrita no capítulo 4, e proposta em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008), para serem incluídas na formulação inicial do *problema mestre* (passo (c) do método MGR , descrito na seção 3.2), na tentativa de reduzir o tempo de processamento do MGR . A motivação para a realização destes testes foram os bons resultados obtidos da aplicação do método randômico ao problema *Maxmin*, que estiveram de acordo com a teoria correspondente, uma vez que geraram soluções que satisfizeram os níveis de violação e confiabilidade predeterminados.

Portanto, com o $MGRR$ parte-se de uma solução de boa qualidade, de acordo com os referidos parâmetros, o que torna possível a redução da necessidade de solução do problema de viabilidade (que representa o gargalo do método MGR) e, portanto, a obtenção de melhores tempos de solução relativamente ao MGR . Como veremos, esta melhoria, de fato, ocorreu.

As etapas do procedimento, em questão, foram:

- Determinar o número m de restrições que irão compor a formulação do problema randomizado, de acordo com os níveis de violação ϵ e confiabilidade $1 - \beta$ definidos;
- Construir uma instância do problema randomizado com m restrições sorteadas;
- Inicializar o *problema mestre* (passo (a) do método MGR , descrito no capítulo 3)

com as m restrições geradas na etapa anterior;

- Obter a solução do problema *Maxmin* com os passos (b) e (c) descritos na seção 3.2;

Realizamos testes com diferentes valores para probabilidade de violação (ϵ) e confiabilidade (β), porém, os valores que levaram aos melhores resultados foram: $\epsilon = 0,1\%$ e $\beta = 1,0\%$, o que significa que a solução desejada deve possuir probabilidade de 99% de violar no máximo 0,1% das restrições do problema original. Segundo a fórmula $\beta \leq \sum_{i=1}^{n-1} C_i^m \epsilon^i (1 - \epsilon)^{m-i}$ de (Campi *et al.*, 2008), mostrada no capítulo 4, que descreve o método *MRR*, os valores definidos acima para os parâmetros ϵ e β resultam em, pelo menos, 30000 restrições na formulação do problema *Maxmin* relaxado. Assim, de acordo com as etapas acima, sorteamos as 30000 restrições, considerando uma distribuição de probabilidade uniforme, inicializamos o *problema mestre* com as mesmas e resolvemos o problema *Maxmin*.

Este procedimento foi repetido 15 vezes, gerando diferentes composições iniciais para o *problema mestre*. Os resultados obtidos foram aprimorados, como pode ser visto na tabela 5.8, a seguir. Nesta tabela, são exibidos o tempo total para obtenção da solução do problema *Maxmin* e o número de restrições geradas pelo método *MGRR*.

Tabela 5.8: Instâncias para 12 etapas.

Sorteio	Tempo (s)	#Retricões Geradas
1	4019	104
2	4345	65
3	3232	83
4	4096	77
5	5409	109
6	5754	132
7	3979	104
8	4944	74
9	6176	114
10	2876	54
11	6007	74
12	8922	89
13	4615	198
14	3772	123
15	5907	136
<i>media</i>	4937	102.4

Os tempos exibidos na tabela 5.8 foram obtidos da soma do tempo gasto com a geração das restrições (em média 640.7 segundos) com o tempo de solução do *Maxmin* com estas restrições consideradas no *problema mestre* inicial. Como já dito, este procedimento teve melhor performance em relação ao tempo de processamento do *MGR*. Em média, foi gasto 4937 segundos (ou 1.3 horas) para a solução do *Maxmin* com o procedimento *MGRR*, o que equivale a 34% do tempo dado pelo *MGR* (14679 s ou aproximadamente

4h). Foi necessária a geração, em média, de 102 restrições (além das 30000 restrições iniciais) no procedimento exato até que a solução ótima fosse encontrada.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusão

A repartição da energia firme total entre as usinas de um sistema hidrelétrico pode ser vista como uma repartição do benefício da sinergia existente da operação integrada das usinas. Este é um exemplo do problema geral de repartição de benefícios entre agentes que cooperam para a maximização de um recurso compartilhado: como a “união” dos agentes para desenvolver conjuntamente o recurso de uso compartilhado é mais eficiente do que o desenvolvimento do recurso em separado por cada agente, surge o problema de alocar os “bônus” entre os participantes. Este tipo de problema é estudado na teoria de jogos cooperativos e foi o foco de análise desta tese, onde cada agente é uma usina hidroelétrica e a utilização do recurso (água) de forma coordenada permite aumentar a energia firme do sistema.

Mostrou-se que não existe uma maneira “ótima”, única, de se fazer esta repartição. Porém, um critério que pode ser adotado na escolha da metodologia de repartição é a chamada “justiça”: uma repartição é “justa” se o benefício alocado à usina como participante do “grande conjunto” (no caso, todas as usinas hidrelétricas) é maior do que o que

a usina receberia se estivesse operando isoladamente, ou como parte de um subconjunto. Este critério equivale a pertencer ao chamado “núcleo” de um jogo cooperativo, isto é, o núcleo formaliza a idéia de “justiça” em uma alocação de benefícios entre agentes.

Foi mostrado que o núcleo pode ser formalizado matematicamente por um conjunto de restrições lineares e que este conjunto pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de benefícios consideradas “justas”. Este fato leva a questionar se seria possível identificar uma alocação que fosse preferível às demais. A solução para esta questão encontra-se no *Maxmin*, problema objetivo desta tese, uma vez que ele determina a alocação que maximiza a menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer a “grande coalizão”. Desta forma, a alocação estudada nesta tese pertence ao chamado *Leastcore*, que consiste do conjunto de soluções mais equitativas do núcleo, soluções do problema *Maxmin*.

Foi visto que o número de restrições do problema *Maxmin* cresce exponencialmente com o número de agentes, tornando o problema computacionalmente intratável, mesmo quando este número é relativamente pequeno. Portanto, para a sua solução, foram considerados dois métodos baseados em relaxação de restrições: o exato *MGR* e o randomizado *MRR*. O *MGR*, descrito no capítulo 3, consiste de um método de geração de restrições, que inicia resolvendo o *problema mestre*, problema *Maxmin* com a formulação contendo um subconjunto de suas restrições originais, e, a cada iteração, acrescenta a restrição mais violada pela solução deste problema. A restrição mais violada é encontrada através da solução de um problema linear inteiro misto. Já o *MRR*, tratado na seção 4, resolve o problema *Maxmin* com a formulação contendo somente um subconjunto das suas restrições, que é escolhido probabilisticamente de acordo com a teoria descrita em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008). Estes métodos tornam-se ainda mais interessantes pelo fato, demonstrado no capítulo 2, de que necessitamos de,

no máximo, $|n + 1|$ restrições, de um total de 2^n , na formulação do problema *Maxmin*. Ou seja, todas as outras restrições, que correspondem a grande maioria, poderiam ser relaxadas sem afetar a otimalidade do problema.

O método *MGR* teve um desempenho muito satisfatório, uma vez que foi capaz de determinar a alocação de energia firme no núcleo (pertencente ao *Leastcore*) de jogos cooperativos (problema *Maxmin*), entre as usinas hidroelétricas, para sistemas mais realistas com até 30 usinas, cuja formulação possui 1.073.741.824 restrições, e, portanto, é computacionalmente difícil de ser resolvida através do método de programação linear (*LP*), aplicado a sua formulação completa. Na solução destas instâncias, o método gerou uma porção muito pequena das restrições do problema, comparada ao número total existente na sua formulação original com tempo de execução que não superou 14 horas.

O *MGR* resolveu instâncias maiores do que o *LP*, método de programação linear aplicado à formulação completa do *Maxmin*. Para as instâncias que o *LP* pode resolver, no entanto, seu tempo é sempre menor que o do *MGR*. O *MGR* não pôde resolver instâncias com mais de 30 usinas dentro do tempo limite imposto de 54000 segundos, ou 15 horas.

O *MRR* foi testado para três instâncias com 20, 30 e 40 usinas, cujos tempos médios de solução foram, respectivamente, de 35.7, 73.2 e 126.7 segundos, bem inferiores ao tempo do *MGR*. Para aquela com 20 usinas, os resultados obtidos estão de acordo com aqueles esperados por (Calafiore *et al.*, 2006), uma vez que, definidos os níveis de violação de restrições (1,0%) e confiabilidade (99%), a probabilidade de violação, tanto das restrições do *Leastcore* quanto de núcleo, de todos os problemas sorteados (PCS_m) resolvidos é menor que 1,0%. Ainda para esta instância, embora todos os PCS_m tenham violado restrições de núcleo, em pequenas proporções, como já mencionado, mostrou-se que as perdas sofridas, pelas coalizões mais prejudicadas, com a alocação dada pelo

MRR, em termos relativos, não superaram 3,9%. Ou seja, as perdas relativas máximas foram bem pequenas.

As análises das perdas relativas máximas foram estendidas para as instâncias com 30 e 40 usinas e os resultados obtidos foram semelhantes aos daquela com 20 usinas. As perdas sofridas, pelas coalizões mais prejudicadas, em termos relativos, foram também pequenas, não superando 5,1% e 7,1%, respectivamente.

Portanto, foi observado empiricamente que, para o procedimento randomizado *MRR*, com uma boa escolha dos níveis de violação de restrições e confiabilidade, é possível obter, com probabilidade alta, que uma pequena quantidade de restrições é violada, o que está de acordo com a teoria apresentada no capítulo 4. Assim, foi constatado que o *MRR* pode ser considerado uma boa heurística de solução para o problema *Maxmin*, uma vez que, para as três instâncias testadas, o método gerou soluções de boa qualidade, mesmo violando algumas restrições do *Leastcore* e do núcleo. Para chegar a esta conclusão, foram considerados o fato de que as perdas, causadas às coalizões, foram pequenas e que, na literatura, não há registro de outra proposta de solução de problemas *Maxmin* grandes como os que foram resolvidos aqui. Como relatado em capítulos anteriores, o trabalho (Faria, 2004) propôs métodos de solução para a determinação de soluções no núcleo, porém, os problemas resolvidos tinham somente 4 usinas.

Finalmente, foram realizadas simulações com o método *MGRR*, combinação dos métodos *MRR* e *MGR*, visando a redução do tempo de processamento do método exato, *MGR*. A motivação para a realização destes testes foram os bons resultados obtidos da aplicação do *MRR* ao problema *Maxmin*, que estiveram de acordo com a teoria correspondente, descrita no capítulo 4, e proposta em (Calafiore *et al.*, 2005), (Calafiore *et al.*, 2006) e (Campi *et al.*, 2008), uma vez que geraram soluções que satisfizeram os níveis de violação e confiabilidade predeterminados. Assim, no *MGRR*, a idéia é gerar um número

suficientemente grande de restrições, definido de acordo com a referida teoria, de forma aleatória, para serem incluídas na formulação inicial do *problema mestre* e, então, partir de uma solução de boa qualidade, de acordo com os níveis de violação e confiabilidade pré-definidos.

O método *MGRR* foi aplicado à instância com 20 usinas e horizonte de 12 meses do problema *Maxmin*. Foram consideradas diversas possibilidades para a probabilidade de violação ϵ e confiabilidade β na definição do conjunto de restrições inicial do *MGRR*, porém, os valores dos parâmetros que levaram aos melhores resultados foram $\epsilon = 0,1\%$ e $\beta = 1,0\%$, que resultaram, de fato, em melhores tempos de solução, com relação ao *MGR*. Em média, foram gastos 4937 segundos (ou 1.3 horas) para a solução do *Maxmin* com o procedimento *MGRR*, o que equivale a 34% do tempo dado pelo *MGR* (14679 s ou aproximadamente 4h).

6.2 Trabalhos Futuros

Duas classes de trabalho distintas, no âmbito computacional, podem ser investigadas em futuros trabalhos: investigação de formas de solução do problema de viabilidade do *MGR* e novas formas de sorteio de restrições do *MRR*. Ambas serão discutidas a seguir:

6.2.1 Método *MGR*

Nos testes computacionais, vimos que o *MGR* não pôde resolver instâncias com número de usinas superior a 20 e que o gargalo está na solução do problema inteiro misto (problema de viabilidade), que leva muito tempo até encontrar a restrição mais violada pela solução do problema *Maxmin* relaxado, ou *problema mestre*.

Desta forma, realizamos alguns testes onde interrompemos a solução do mesmo após a determinação de k soluções inteiras (coalizões) cujas restrições, do *Leastcore*, associadas estão sendo violadas pela alocação dada pelo problema mestre. Este procedimento alternativo nos permitiu resolver a instância com 30 usinas.

Outra alternativa que encontramos foi a de inicializar a formulação do *problema mestre* com as restrições dadas pelo método *MRR* e, com isso, tentar reduzir a necessidade de solução do problema de viabilidade, e assim, o tempo de execução do *MGR*, o que, de fato, ocorreu.

Visto isto, em trabalhos futuros, com o objetivo de resolver problemas maiores, poderia-se explorar outras formas de seleção da próxima restrição a compor a formulação do problema mestre, ou de solução do problema inteiro misto (problema de viabilidade). Outro caminho poderia ser a aplicação do método de geração de colunas como forma de solução do problema *Maxmin*.

6.2.2 Método *MRR*

Como visto no capítulo 4, os resultados obtidos com a aplicação do método *MRR* são válidos independentemente da probabilidade associada às restrições do problema. Na aplicação desta tese, que consiste da determinação de alocação de Energia Firme entre usinas hidroelétricas no *Leastcore*, optamos pelo sorteio equiprovável das restrições, onde a quantidade sorteada é determinada de acordo com o nível de exigência acerca da qualidade da solução, que é estabelecida através da escolha dos parâmetros ϵ e β , conforme teoria descrita no capítulo 4.

Embora os resultados, obtidos desta forma, tenham sido bons, achamos válida a realização de outros testes associando probabilidades distintas às restrições, com o objetivo de melhorar a qualidade da solução do *MRR*. Com isso, o método *MGR* pode ser aprimorado pois “melhores” restrições podem ser selecionadas para compor a formulação inicial do *problema Mestre*, e, com isso, reduzir o número de restrições, adicionadas pelo método, e o tempo de processamento. A forma de determinação destas probabilidades pode estar relacionada com a topologia do sistema. Por exemplo, pode-se considerar que uma restrição associada a usinas em uma mesma cascata tenham uma probabilidade maior em comparação com outra associada a usinas localizadas em cascatas distintas.

Referências Bibliográficas

- Agência Nacional das Águas (ANA) - *Metodologia de Cálculo da Energia Firme de Sistemas Hidrelétricos levando em Consideração usos Múltiplos da Água*, 2002
- Amboni M.K., Silva E.L., *Alocação do Sobrecusto operativo via teoria dos jogos cooperativos*, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001
- Aumann, R. J., and Maschler, M., *The bargaining set for cooperative games*, In M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker (Eds.), *Advances in game theory*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1964.
- Aumann, R.J., Shapley, L.S., *Values of Non-Atomic Games*, Princeton University Press, 1974.
- Barros J.R.P. e Melo A.C.G., *Usando Teoria dos Jogos Cooperativos para Repartir Custos associados a serviços ancilares - os casos da reserva de transformação e da potência reativa*, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001.
- Benders, J.F., *Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems*, *Numerische Mathematik*, Vol. 4, pp. 238-252, 1962.
- Ben-Tal, A., Nemirovski, A., *Robust Solutions of uncertain Linear Programs*. *Oper. Res. Lett.* 25(1), pp. 1-13, 1999.
- Ben-Tal, A., Nemirovski, A., *Robust convex optimization*. *Math. Oper. Res.* 23 (4), pp. 769-805, 1998
- Billera, L., Heath, D., Raanan J., *Internal telephone billing rates: a novel application of non atomic game theory*, *Operations Research*, pp. 956-965, 1978.
- Binato, S., *Análise de Diferentes Alternativas de Alocação de Custos e Benefícios Aplicadas à Operação e ao Planejamento de Sistemas Hidrelétricos*. Monografia (Tese M.Sc.), PUC-RJ, pp. 1992.

- Bonneville Power Administration, BPA Power Business Line, <http://www.bpa.gov/power/>
- Bonneville Power Administration, *the Draft Guide to the Tools and Principles for a Dry Year Strategy*, disponível em <http://www.bpa.gov/power/pgp/dryyear/>
- Braga, B., Martinez, F., *Alocação de Custos em Projetos de Usos Múltiplos de Recursos Hídricos*, RBE CRH, v. 9, n. 2, pp. 111-126, 1991.
- Bradley, S.P., Hax, A.C., Magnanti, T.L., *Applied Mathematical Programming*, Reading, Addison-Wesley, 1977.
- Bushnell, J., *A mixed complementarity model of hydrothermal electricity competition in the western United States*, Operations research, Vol. 51, No. 1, pp. 80-93, 2003.
- Calafiore, G., Campi, M.C., *Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels*. Mathematical Programming. 102 (1), pp. 25-46, 2005.
- Calafiore, G., Campi, M.C., *The scenario approach to robust control design*. IEEE Transactions on Automatic Control. 51 (5), pp. 742-753, 2006.
- Calafiore, G., Dabbene, F., *A probabilistic framework for problems with real structured uncertainty in systems and control*. Automatica. 38 (8), pp. 1265-1276, 2002.
- Campi M.C., Garatti S., *Chance-constrained optimization via randomization: feasibility and optimality*., Optimization online, 2009.
- Campi, M.C., Garatti S., *The Exact Feasibility of Randomized Solutions of Robust Convex Programs*. SIAM J. Optim. 19(3), pp. 1211-1230, 2008.
- CPLEX - <http://www.ilog.com/products/cplex/>
- Cunningham, L.B., Baldick, R., Baughman, M.L., *An Empirical Study of applied game theory : transmission constrained Cournot behavior*, IEEE Trans. on Power Syst., Vol.17, No.1, 2002.
- Cunha S.H.F., Prado S., Costa J.P., *Modelagem da produtividade variável de usinas hidrelétricas com base na construção de uma função de produção energética* , XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Vitória, Brasil, pp. 16-20 Nov. 1997.
- Deng, X., Ibaraki, T., Nagamochi, H., *Algorithmic Aspects of the Core of Combinatorial Optimization Games*, Mathematics of Operations Research, Vol. 24, pp. 751-766, 1999.
- Drechsel J., Kimms A., *Computing Core Cost Allocations for Cooperative Procurement*, University of Duisburg-Essen, 2007.
- Ente Regulador de los Servicios Públicos - Panamá: <http://www.ersp.gob.pa/>

- Faria, E., *Aplicação de Teoria dos Jogos à Repartição da Energia Firme de um Sistema Hidrelétrico.*, tese de MSc, PUC-Rio, 2004.
- Faria, E. Barroso, L.A. Kelman, R. Granville, S. Pereira, M.V., *Allocation of Firm-Energy Rights Among Hydro Plants: An Aumann-Shapley Approach*, IEEE Transactions on Power Systems, Volume:24, pp. 541 - 551, No 2, May 2009.
- Geoffrion, A.M., *Generalized Benders Decomposition*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 10, pp. 237-260, 1972.
- Göthe-Lundgren, M., Jörnsten, K., Värbrand, P., *On the Nucleolus of the Basic Vehicle Routing Game*, *Mathematical Programming*, Vol. 72, pp. 83-100, 1996.
- Hobbs, B. F., Helman, U., *Complementarity-based equilibrium modeling for electric power markets*, in D. Bunn, ed., *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*, J. Wiley, in press, 2004.
- IEEE Power Engineering Society, *IEEE Tutorial On Game Theory Applications in Electric power markets*, IEEE Winter Meeting, NY, 1999.
- Inter Agency Committee on Water Resources, *Proposed Practices for economic analysis of river-basins projects*, US Government Printing Office, 1958.
- Kahan, J.P, Rapoport A., *Theories of Coalition Formation* Lawrence Erlbaum Associates, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 1995.
- Kanamori, T., Takeda, A., *Worst-Case Violation of Sampled Convex Programs for Optimization with Uncertainty*.
- Kelman, R., Barroso, L.A., Pereira, M.V., *Market power assessment in hydrothermal systems*, IEEE Trans. Power Syst, Vol. 16, No.3, 2001.
- Kelman J., Kelman R., Pereira M., *Energia Firme Sistemas Hidrelétricos e Usos múltiplos dos recursos hídricos*, Revista da Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH), 2003.
- Lemaire J., *An application for Game Theory: Cost Allocation*, Astin Bulletin Vol. 14, No. 1.
- Leng, M., Parlar, M., *Game theoretic applications in supply chain management: A review*, INFOR, Vol. 43, pp. 187-220, 2005.
- Lino P., *Operação Descentralizada de Sistemas Hidrotérmicos em Ambiente de Mercado.*, tese de MSc, IM-NCE-UFRJ, 2001.
- Lino P., Barroso L.A., Fampa M., Kelman R., Pereira M.V., *Bid-based dispatch of hydrothermal systems in competitive markets.*, *Annals of Operations Research*, 120, pp.81-97, 2003.

- Magnanti, T.L., Wong, R.T., *Accelerating Benders Decomposition: Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria*, Operations Research, Vol. 29, pp. 464-484, 1981.
- Maschler, M., Peleg, B. Y., Shapley, L., *Geometric Properties Of The Kernel, Nucleolus, And Related Solutions Concepts*, Mathematics of Operations Research, vol. 4, no. 4, pp. 303-338, 1979.
- Medeiros, A., Salgado, R., Zurn, H., *Uma metodologia para obtenção de fatores de perdas nodais via jogos cooperativos*, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001.
- Meehan, G., Fraser H., *Evaluation of compulsory dry-year generation reserve proposals for New Zealand*NERA Economic Consulting, 2003 (disponível em <http://www.med.govt.nz/ers/electric/supply-security/submissions/17/nera/>)
- Ministry of Economic and Development of New Zealand: Supply Security Issues: <http://www.med.govt.nz/ers/electric/supply-security/index.html>
- Nash, J.F., *Non cooperative games*, Annals of Mathematics, 54, pp. 286-295, 1951.
- Neumann, J.V., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton Press, ISBN 0691003629, 1947.
- Power Systems Research, Inc. (PSR) *Estimativa dos benefícios da operação hidrotérmica coordenada*- estudo realizado para o ONS. Disponível em <http://www.psr-inc.com.br>, 2000.
- Prékopa, A., *Stochastic Programming*. Kluwer, 1995.
- Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph., *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach*, 2003.
- Roos, C., Terlaky, T., *Theory and algorithms for linear optimization - An interior Point Approach*, Wiley, 1988.
- Silva E.L., Morales J.C., *Allocating congestion cost using game theory*, Power Tech Proceedings, Power Tech Proceedings, IEEE Porto, Volume: 1 , pp. 10-13 Sept. 2001 Pages:5 pp. vol.1, 2001.
- Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Chichester, Wiley, 1986.
- Verrechia R., *An analysis of two cost allocation cases*, Acc ver pp. 579-593, 1982.
- Vieira, X. and Granville, S. and Pereira, M. and Gorenstin, B. and Mello, J. and Melo, A., *Ancillary Services: How to Allocate Costs in an Optimization-Based Framework*, Proceedings of the CIGRÉ Symposium, Neptun, 1997.

XPRESS-MP - <http://www.dashoptimization.com/products.html?locale=english>

Zapata C., Muñoz J., *Contratos de suministro eléctrico. Realidad Chilena, Boliviana y Argentina. Realidad, estímulo al desarrollo de contratos. Contratos y confiabilidad* Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Eléctrica, 2000. Disponible em: <http://www2.ing.puc.cl/power/alumno>

Zolezzi, J., Rudnick, H., *Tarificación del sistema de transmisión eléctrica: aproximación mediante juegos cooperativos*, VII Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, VII SEPOPE, Curitiba, May 23-28, 2000.

Young, H., Okada, N. Y Hashimoto, T., *Cost Allocation In Water Resource Development*, Water Resources Research, vol. 18, no. 3, pp. 463-475, 1985.

Young, H., *Cost allocation*, Handbook of game theory with economic applications, edited by Robert Aumann and Sergiu Hart. N.H Elsevier, 1994.

Wu, F., Yeung, C., Poon, A., *Game Theoretical Multi-Agent Modelling of Coalition Formation For Multilateral Trades*, IEEE Transaction on Power Systems, vol. 14, no. 3, pp. 929-934, 1999.