



## COLORAÇÃO ORIENTADA: UMA ABORDAGEM ESTRUTURAL E DE COMPLEXIDADE

Hebert Coelho da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Sulamita Klein  
Luerbio Faria

Rio de Janeiro  
Setembro de 2013

COLORAÇÃO ORIENTADA: UMA ABORDAGEM ESTRUTURAL E DE  
COMPLEXIDADE

Hebert Coelho da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof.<sup>a</sup>. Sulamita Klein, D.Sc.

---

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

---

Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.

---

Prof. André Luiz Pires Guedes, D.Sc.

---

Prof. Carlos Alberto de Jesus Martinhon, D.Sc.

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
SETEMBRO DE 2013

Silva, Hebert Coelho da

Coloração Orientada: Uma Abordagem Estrutural e de Complexidade/Hebert Coelho da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XIII, 83 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Sulamita Klein

Luerbio Faria

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 80 – 83.

1. Grafos Orientados.      2. Coloração Orientada.
3. Número Cromático Orientado.      I. Klein, Sulamita *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico à minha esposa Erika,  
aos meus pais Maria José e  
Braz, e aos meus irmãos.*

# Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus que sempre esta presente em todos os momentos de minha vida.

Agradeço à minha família, em especial a minha esposa Erika pela seu amor e dedicação ao longo destes 13 anos de convivência.

Quero agradecer aos professores Sulamita e Luerbio que aceitaram me orientar, sem eles este trabalho não seria possível. Também agradeço ao professor Sylvain Gravier que aceitou ser o meu co-tutor francês, ele nos deu excelentes idéias.

Aos Professores André Luiz Pires Guedes, Carlos Alberto de Jesus Martinhon, Felipe Maia Galvão França e Jayme Luiz Szwarcfiter, muito obrigado por terem aceitado em participar da banca examinadora da minha tese de doutorado.

Um agradecimento especial ao Professor Jayme Luiz Szwarcfiter por ter me indicado a professora Sulamita para trabalhar neste doutorado.

Obrigado novamente ao professor Felipe Maia Galvão França pela liberação no uso da grade computacional do grupo de inteligência artificial do Programa de engenharia de sistemas e computação GRID-IA/PESC/UFRJ, recurso que possibilitou a maioria dos nossos experimentos computacionais.

Agradeço também aos amigos do Laboratório de Algoritmos e Combinatória, e aos professores da linha que sempre estão dispostos a nos ajudar.

Por fim, agradeço a CAPES, órgão que me manteve financeiramente durante boa parte do meu doutorado na UFRJ, e ao convênio Capes/COFECUB que possibilitou meu trabalho no período que estive na França.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## COLORAÇÃO ORIENTADA: UMA ABORDAGEM ESTRUTURAL E DE COMPLEXIDADE

Hebert Coelho da Silva

Setembro/2013

Orientadores: Sulamita Klein  
Luerbio Faria

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese apresenta um estudo sobre coloração orientada e sua complexidade, descrevendo seus principais conceitos, propriedades, resultados existentes na literatura, e resultados obtidos.

Definimos o *número clique cromático orientado* de um grafo combinando os problemas de clique coloração e coloração orientada.

Estudamos os limites para o problema da coloração orientada de grafos planares. No limite superior oferecemos uma demonstração simples de que Florestas têm uma coloração orientada com no máximo 3 cores. Para o limite inferior, apresentamos um refinamento para grafo orientado planar conhecido com maior número cromático orientado. Ainda no limite inferior apresentamos uma lacuna, que encontramos na determinação de que o número cromático orientado é maior ou igual a 16, apresentada por Sopena. Também exibimos um torneio com 5 vértices que é subgrafo de todo grafo de cor para a classe dos grafos planares. Caracterizamos a classe dos grafos cujo número cromático orientado é menor ou igual a 3, e conseguimos estabelecer limites para o número cromático orientado de algumas uniões disjuntas de grafos.

Demonstramos que é NP-completo determinar se um grafo orientado conexo, acíclico, planar, bipartido e com grau no máximo 3 tem uma 4-coloração orientada. Desenvolvemos um algoritmo de tempo linear para atribuir uma 8-coloração para grafos orientados acíclicos com grau máximo 3. Por último, apresentamos um estudo computacional sobre a conjectura de Sopena de que os grafos conexos orientados com grau máximo 3 admitem uma 7-coloração orientada.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## ORIENTED COLORING: A STRUCTURAL AND COMPLEXITY APPROACH

Hebert Coelho da Silva

September/2013

Advisors: Sulamita Klein

Luerbio Faria

Department: Systems Engineering and Computer Science

This thesis presents a study of oriented coloring and its complexity, describing its key concepts, properties, results in the literature, and our results.

We define the *oriented chromatic clique number* of a graph assembling the problems of clique coloring and oriented coloring. We study the bounds for the oriented coloring problem on planar graphs. For the upper bound we offer a simple proof that Forests have an oriented coloring with at most 3 colors. For the lower bound, we present a refinement for the known oriented graph with the largest oriented chromatic number, and we also show a gap, found in the proof of Sopena that the oriented chromatic number of planar class is greater than or equal to 16. We also exhibit a tournament with 5 vertices that is a subgraph of every color graph to the oriented chromatic number of planar class. We characterize the class of oriented graphs whose oriented chromatic number is less than or equal to 3, and we have also established bounds or values for some disjoint union of graphs.

We prove that it is NP-complete to determine whether a connected, planar, bipartite and acyclic oriented graph with degree at most 3 has an oriented 4-coloring. We devise a linear time algorithm to assign an oriented 8-coloring to an acyclic oriented graph with maximum degree 3. Finally, we present a computational study on the Sopena's conjecture that connected oriented graphs with maximum degree 3 admit an oriented 7-coloring.

# Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições e notações . . . . .	3
1.1.1 Grafos . . . . .	3
1.1.2 Grafos orientados . . . . .	6
<b>2 Número Clique Cromático Orientado</b>	<b>12</b>
2.1 Clique coloração orientada de um grafo $G$ . . . . .	16
<b>3 Limites para o número cromático orientado de grafos planares</b>	<b>19</b>
3.1 Limite superior para grafos planares . . . . .	20
3.2 Limite inferior para grafos planares . . . . .	23
3.2.1 Borboletas . . . . .	23
3.2.2 Uma lacuna na determinação de $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ por Sopena . . . . .	29
3.3 Uma característica para o limite homomórfico de grafos planares . . . . .	34
<b>4 Limites para o número cromático orientado da união disjunta de grafos</b>	<b>38</b>
4.1 A classe $\mathcal{CN}_3$ . . . . .	38
4.2 Número cromático orientado da união disjunta de grafos . . . . .	43
<b>5 Sobre a complexidade do problema da coloração orientada</b>	<b>49</b>
5.1 Introdução e Resultados prévios . . . . .	49
5.2 NP-completude de grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos com grau máximo 3 . . . . .	51
5.2.1 A instância especial $\vec{G} = (V, A)$ e $k$ de $\text{OCN}_k$ . . . . .	51
5.2.2 Propriedades estruturais do grafo $\vec{G}$ . . . . .	55

<b>6</b>	<b>Limites para o número cromático orientado de grafos orientados acíclicos com grau máximo 3</b>	<b>62</b>
6.1	O grafo de cor $\vec{R}$ . . . . .	62
6.2	$\vec{R}$ -coloração de um grafo orientado acíclico $\vec{G}$ com $\Delta(\vec{G}) = 3$ . . . . .	64
6.3	Um algoritmo para uma $\vec{R}$ -coloração de um grafo orientado acíclico $\vec{G}$ com $\Delta(\vec{G}) = 3$ . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Argumentos a favor e contra a conjectura de Sopena</b>	<b>70</b>
7.1	Resultados computacionais e o torneio mágico . . . . .	70
7.2	Análise sobre torneios proibidos . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>

# Lista de Figuras

1.1	Grafo $G$ com $ V(G)  = 5$ e $ E(G)  = 7$ . . . . .	4
1.2	(a) uma 2-coloração para $C_6$ e (b) uma 3-coloração acíclica para $C_6$ . . . . .	6
1.3	Torneio de Paley com 7 vértices $\vec{QR}_7$ . . . . .	7
1.4	(a) Digrafo $\vec{D}$ e (b) um torneio $\vec{K}_5$ . . . . .	8
1.5	(a) $G = P_3$ , (b) grafo orientado $\vec{G}$ e (c) coloração orientada de $\vec{G}$ . . . . .	8
1.6	Coloração orientada para $G = P_3$ . . . . .	9
1.7	$\vec{K}_3$ -limite minimal . . . . .	10
1.8	(a) $\vec{P}_1$ , (b) $\vec{P}_2$ e (c) $\vec{P}_3$ obtido de $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ . . . . .	11
2.1	Grafos $G$ e $H$ ambos com uma 2-clique coloração. . . . .	12
2.2	(a) Grafo $G$ e (b) clique-hipergrafo $\mathcal{H}(G)$ . . . . .	13
2.3	Hipercosmos direcionados. . . . .	13
2.4	Hipergrafo direcionado. . . . .	14
2.5	Dois hipergrafos direcionados $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$ e $\vec{\mathcal{H}}_2(G)$ . . . . .	15
2.6	Dois hipergrafos orientados $\vec{\mathcal{H}}_3(G)$ e $\vec{\mathcal{H}}_4(G)$ . . . . .	15
2.7	(a) $G$ , (b) $\mathcal{H}(G)$ , (c) 2-clique coloração orientada para $\vec{\mathcal{H}}(G)$ . . . . .	16
2.8	(a) Grafo completo $K_5$ e (b) $\vec{\mathcal{H}}(K_5)$ . . . . .	17
2.9	(a) Ciclo $C_5$ e (b) $\vec{\mathcal{H}}(C_5)$ . . . . .	17
2.10	(a) $G$ e (b) $\vec{\mathcal{H}}(G)$ . . . . .	17
3.1	Uma coloração acíclica para (a) $K_5 \setminus \{e\}$ , e (b) grafo $G$ com $\chi_a(G) = 5$ . . . . .	20
3.2	Grafo de cor para florestas . . . . .	21
3.3	(a) 2-coloração para a Floresta $F$ e (b) 4-coloração orientada para $\vec{F}$ . . . . .	21
3.4	Ciclo direcionado com 3 vértices. . . . .	23
3.5	Grafos $\vec{G}_i$ , $i = 1, \dots, 5$ , com $\chi_o(\vec{G}_i) =  V(\vec{G}_i)  = 2^i - 1$ . . . . .	24
3.6	Grafo planar orientado $\mathcal{B}_{75}^*$ com $\chi_o = 15$ , $ V  = 75$ e $ E  = 216$ . . . . .	26
3.7	Relação entre as cores de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para $\mathcal{B}_{15}$ . . . . .	27
3.8	Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 1. . . . .	27
3.9	Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 2. . . . .	27
3.10	Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 3. . . . .	28
3.11	Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 4. . . . .	28

3.12	Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 5. . . . .	29
3.13	A estrutura do grafo orientado $\vec{U}$ . . . . .	31
3.14	A estrutura corrente do grafo $\vec{U}$ . . . . .	33
3.15	A estrutura corrente do grafo $\vec{U}$ . . . . .	34
3.16	$\vec{K}_5^U$ . . . . .	35
3.17	Todos os torneio com 4 vértices livres de isomorfismo. . . . .	35
3.18	Todos os torneios com 5 vértices livres de isomorfismo. . . . .	37
4.1	Torneio de Paley com 5 vértices. . . . .	39
4.2	(a) $\vec{C}_5$ direcionado. (b), (c) e (d) os casos 1, 2 e 3 do Lema. . . . .	39
4.3	Grafo $\vec{G}$ usado no Lema, onde $\chi_o(G) \geq 4$ . . . . .	41
4.4	Grafo $\vec{K}_3 \cup \vec{P}_4$ . . . . .	42
4.5	Grafo $\vec{K}_4 \cup \vec{P}_5$ . . . . .	43
4.6	$\chi_o(K_5 \cup K_5) = 7$ – Uma 7 coloração orientada ótima de $\vec{K}_5^1 \cup \vec{K}_5^{12}$ . . . . .	47
5.1	(a) Água-viva $\vec{J}_i^d$ e (b) grafo de cor $\vec{H}$ para $\vec{J}_i^d$ . . . . .	52
5.2	(a) <i>Truth Setting</i> $\vec{T}_1$ , (b) <i>Satisfaction Testing</i> $\vec{S}_j$ . . . . .	53
5.3	(a) Grafo $\vec{G} = (V, \vec{E})$ e inteiro $k = 4$ , obtido da intância de P3-SAT $_{\vec{3}}$ $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1, u_2, u_3), (u_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$ , and (b) Desenho planar do bipartido $B = ((U \cup C), \vec{E}(B))$ para instância $I$ . . . . .	54
5.4	As duas atribuições de cores possíveis para $\bar{u}_1^2, u_1^3$ e $u_1^1$ . . . . .	55
5.5	componente <i>Satisfaction Testing</i> $S_j$ obtido da cláusula $c_j =$ $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3})$ mais os três vértices $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$ das três correspon- dentes Componentes <i>Truth Setting</i> (a). Coloração orientada de $S_j$ quando as cores $T$ e $F$ são atribuídas aos vértices $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$ (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i). Conflito no vértice $c_j^{11}$ quando conside- ramos as cores $F, F, F$ atribuídas aos vértices $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$ (i). . . . .	58
5.6	4-coloração orientada para o grafo orientado $\vec{G}$ obtido da instância satisfatível P3-SAT $_{\vec{3}}$ $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\},$ $\{(u_1, u_2, u_3), (u_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$ pela atribuição de verdade $u_1 =$ $T = \bar{u}_2 = u_3$ . . . . .	60
5.7	Grafo orientado para o Corolário 5.8. . . . .	61
6.1	Torneio de Paley com 7 vértices $\vec{QR}_7$ . . . . .	63
6.2	(a) $\vec{T}_4$ , (b) $\vec{G}$ com $\Delta(\vec{G}) \leq 3$ e (c) Uma árvore $F$ . . . . .	63
6.3	Grafo orientado $\vec{R}$ com 8 vértices. . . . .	64
6.4	Casos:(a) $d_G^+(s) = 3$ , (b) $d_G^+(s) = 2$ e (c) $d_G^+(s) = 1$ . . . . .	66
6.5	Passos da execução do procedimento <i>colour</i> ( $\vec{G}_{10}$ ) . . . . .	68
7.1	Torneio mágico com 7 vértices $\vec{T}_7^M$ . . . . .	72
7.2	Dois grafos cúbicos orientados com $\vec{T}_7^M$ -coloração. . . . .	73

7.3	$\vec{G}_1$ com $\Delta \leq 3$ e $\chi_o(\vec{G}) = 7$ . . . . .	73
7.4	$\vec{G}_2$ com $\Delta \leq 3$ e $\chi_o(\vec{G}) = 7$ . . . . .	74
8.1	Diagrama do trabalho desenvolvido nesta tese. . . . .	77

# Lista de Tabelas

3.1	$\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \times$ Cintura . . . . .	20
3.2	Resultado da função $f(v_j)$ , onde $v_j \in V(\vec{K}_4^i)$ , para $j = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	35
4.1	Valores de $Ag(p, q)$ com $p := 1, 2, 3, 4, 5$ e $q := 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . .	47
4.2	Valores para o $\chi_o(K_p \cup K_q)$ . . . . .	48
4.3	$\chi_o(G_1 \cup G_2)$ da união disjunta . . . . .	48
5.1	Cores para os vértices $r_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d$ do grafo $T_i, i \geq 2$ . . . . .	56
5.2	Avaliação de cores para os vértices $(c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{14})$ . . . . .	57
5.3	Estado da arte para NP-Compleitude do problema $OCN_k$ . . . . .	61
7.1	Tempo para uma implementação do Algoritmo $OCN7$ . . . . .	72
7.2	Torneios proibidos com 7 vértices para cúbicos . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

O problema da “COLORAÇÃO ORIENTADA” foi introduzido em 1994 independentemente por Courcelle [17], e Raspaud e Sopena [37]. Nas duas últimas décadas, diversos autores produziram uma ampla literatura sobre o assunto [18–23, 28, 34, 41, 44].

Uma *coloração orientada* para um grafo orientado  $\vec{G}$  é uma função  $\phi : V \rightarrow \mathbb{N}$  que atribui cores aos vértices de  $\vec{G}$ , tal que para todo arco  $xy \in A(\vec{G})$  temos que  $\phi(x) \neq \phi(y)$  e além disso, para dois arcos  $xy, zt \in A(\vec{G})$  se  $\phi(x) = \phi(t)$  então  $\phi(y) \neq \phi(z)$ . Em outras palavras, se  $V_i$  e  $V_j$  são duas classes de cores distintas em uma coloração orientada, então os arcos de  $\vec{G}$  sempre vão em um único sentido, isto é, se existe um arco  $uv$  com  $u \in V_i$  e  $v \in V_j$ , então não existe um arco  $xy$  com  $x \in V_j$  e  $y \in V_i$ . Uma  $k$ -coloração orientada é uma coloração orientada  $\phi : V(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . O número cromático orientado de  $\vec{G}$ , denotado por  $\chi_o(\vec{G})$ , é o menor  $k$  tal que  $\vec{G}$  admite uma  $k$ -coloração orientada.

O problema de decisão NÚMERO CROMÁTICO ORIENTADO é formalmente definido por:

NÚMERO CROMÁTICO ORIENTADO ( $\text{OCN}_k$ )

INSTÂNCIA: Grafo orientado  $\vec{G} = (V, A)$  e um inteiro positivo  $k$ .

PERGUNTA:  $\vec{G}$  tem uma  $k$ -coloração orientada?

Limites para o número cromático orientado de determinadas classes de grafos [30, 33, 37], e a complexidade computacional do problema  $\text{OCN}_k$  [18, 28], são assuntos recorrentes na literatura. Nesta tese, apresentamos nossa abordagem estrutural e de complexidade para o problema da coloração orientada.

No início deste doutorado, quando procurávamos um assunto para trabalhar, alguns problemas foram estudados. Dois problemas em particular chamaram nossa atenção, a clique coloração [2, 24] e a coloração orientada. Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma  $k$ -clique coloração de  $G$  é uma função  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que, para toda clique maximal  $K$  de  $G$ , existe  $u, v \in K$  com  $c(u) \neq c(v)$ , isto

é, nenhuma clique é monocromática. Resolvemos combinar estes dois problemas. Este estudo culminou na definição do *número clique cromático orientado* de um grafo  $G$ , denotado por  $\vec{\kappa}(G)$ . Em particular mostramos que se toda aresta de  $G$  é uma clique maximal, então  $\vec{\kappa}(G) = \chi_o(G)$ . Nosso intuito inicial, além de estudar o número clique cromático orientado para algumas classes de grafos, era conseguir uma maneira mais simples de limitar o número cromático orientado a partir do número clique cromático orientado. Porém, quando consideramos grafos onde cada aresta é uma clique maximal, ambos os problemas são idênticos. Apesar de nosso interesse no problema do *número clique cromático orientado*, decidimos voltar nossa atenção para o primeiro tema, que para nós se demonstrou, mais frutífero, o problema da *coloração orientada*.

Dentre as classes nas quais já foram determinados limites para o número cromático orientado estão os grafos periplanares [36, 40], os grafos planares [30, 33, 37, 42], as grades 2-dimensionais [22], os grafos com grau menor ou igual 3 [40, 45]. Alguns limites também foram estabelecidos para operações sobre grafos, por exemplo para produtos de grafos [1, 43].

Neste contexto, estudamos o limite superior e inferior para o número cromático orientado de grafos planares. No limite superior oferecemos uma demonstração simples de que Florestas têm uma coloração orientada com no máximo 3 cores. Para o limite inferior, apresentamos um refinamento para o grafo orientado conhecido com o maior número cromático até o momento. Ainda no limite inferior apresentamos uma lacuna, que encontramos na determinação do número cromático maior ou igual a 16, apresentada por Sopena [42]. Caracterizamos a classe dos grafos com número cromático orientado menor ou igual a 3 [13]. Também obtivemos alguns limites ou valores para o número cromático orientado de algumas uniões disjuntas de grafos orientados [13, 14].

Conforme já dissemos, outro assunto de grande interesse é a complexidade do problema  $OCN_k$ , que tem sido estudada exaustivamente. O primeiro trabalho e uma das referências mais importantes é o artigo de Bang-Jensen, Hell and MacGillivray [3]. Eles provaram que se  $\vec{T}$  é um torneio com pelo menos dois ciclos, então decidir se um digrafo  $\vec{G}$  tem um homomorfismo para  $\vec{T}$  é NP-completo. Klostermeyer e MacGillivray [28] em 2004 estabeleceram uma dicotomia P *versus* NP-completo com respeito ao número de cores:  $OCN_k$  é polinomial se  $k \leq 3$  e NP-completo se  $k > 3$ . Em [18], Culus e Demange demonstraram que  $OCN_4$  é NP-completo mesmo restrito a grafos orientados bipartidos com grau máximo  $\Delta = \max(p + 3; 7)$ , e também que  $OCN_4$  é NP-completo mesmo restrito a grafos orientados acíclicos com grau máximo  $\Delta = \max(p + 3; 6)$ .

Neste contexto, demonstramos que  $OCN_k$  é NP-completo mesmo quando restrito a grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos, conexos e com grau no máximo

3 [12]. Para grafos orientados acíclicos com grau máximo 3, apresentamos um algoritmo de tempo linear para atribuir uma 8-coloração orientada [15, 16]. Observamos que este algoritmo é uma 2-aproximação para  $\text{OCN}_k$  em grafos acíclicos com grau máximo  $\Delta \leq 3$ , pois  $\text{OCN}_3$  é um problema polinomial. Também apresentamos um estudo sobre a conjectura de Sopena [40] de que o número cromático orientado de grafos conexos orientados com grau máximo 3 é menor ou igual a 7. Este estudo conduziu à um experimento computacional que mostrou o resultado que: se existe um grafo cúbico contrariando a conjectura de Sopena, então ele necessariamente tem pelo menos 20 vértices.

Nosso texto está distribuído em 8 capítulos. No presente capítulo além da introdução propriamente dita, apresentamos as principais definições e notações que serão utilizadas ao longo desse texto. No Capítulo 2, definimos o número clique cromático orientado de um grafo  $G$ , denotado por  $\vec{\kappa}(G)$ . No Capítulo 3, mostramos os resultados existentes na literatura sobre o número cromático orientado de grafos planares, exibimos um grafo planar com número cromático orientado 15 e muitas arestas no grafo de cor, apresentamos uma lacuna na demonstração de Sopena [42] e apresentamos um resultado topológico sobre a coloração orientada dos grafos planares. No Capítulo 4, caracterizamos a classe dos grafos com número cromático orientado menor ou igual a 3, também obtemos alguns limites ou valores para o número cromático orientado de algumas uniões disjuntas de grafos. No Capítulo 5, apresentamos nossos resultados sobre a complexidade do problema  $\text{OCN}_k$ . No Capítulo 6 exibimos um algoritmo para atribuir uma 8-coloração orientada para grafos orientados acíclicos com grau máximo 3. No Capítulo 7, discutimos os nossos resultados computacionais com respeito aos argumentos relacionados à conjectura de Sopena. E no Capítulo 8 descrevemos as conclusões de nosso trabalho.

## 1.1 Definições e notações

Nesta seção introduzimos algumas definições e notações em grafos, como coloração de vértices, grafos orientados e coloração orientada que serão utilizadas ao longo do texto. Para escrever este capítulo utilizamos os livros de West [46] e de Bondy e Murty [4], além de alguns artigos sobre coloração orientada [17, 30, 37, 42] e [44].

### 1.1.1 Grafos

Um *grafo simples* é um par ordenado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio de *vértices*, e  $E$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados de *arestas*. Quando houver ambiguidade denotamos  $V$  por  $V(G)$  e  $E$  por  $E(G)$ . A *ordem* de  $G$  é a cardinalidade,  $|V| = n$ , do conjunto de vértices. Denotamos

por  $m$  a cardinalidade do conjunto de arestas, isto é  $|E| = m$ . Utilizamos o termo *grafo* para denotar grafos simples.

Usamos a notação  $e = uv$  para denotar uma aresta  $e \in E$  ligando os vértices  $u$  e  $v$ . Neste caso  $u$  e  $v$  são denominados *extremidades* da aresta  $e$ , dizemos que  $e$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$ , e que  $u$  e  $v$  são *adjacentes*. Um vértice  $v$  é *isolado* se nenhuma aresta for incidente a  $v$ . Duas arestas que possuem um vértice em comum são chamadas *adjacentes*.

Uma representação de um grafo pode ser obtida por um desenho no plano, onde a cada vértice do grafo associamos um ponto no plano e a cada aresta  $e = uv$  associamos um segmento de reta ou de curva ligando os vértices  $u$  e  $v$ . Na Figura 1.1 um grafo com ordem cinco é representado.

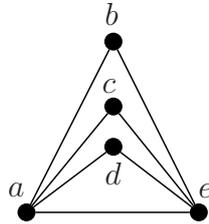


Figura 1.1: Grafo  $G$  com  $|V(G)| = 5$  e  $|E(G)| = 7$ .

O *grau*,  $d_G(v)$ , de um vértice  $v \in V(G)$  é o número de arestas de  $E(G)$  que incidem em  $v$ . O *grau mínimo* de  $G$  é o valor  $\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$  e o *grau máximo* é o valor  $\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$ . A *vizinhança* de um vértice  $v \in V(G)$ , denotado por  $N_G(v)$ , é o conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$ . Por exemplo, na Figura 1.1  $d_G(a) = 4$ ,  $N_G(a) = \{b, c, d, e\}$ ,  $\delta(G) = 2$  e  $\Delta(G) = 4$ .

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é *próprio* quando  $V(H) \subsetneq V(G)$  e  $E(H) \subsetneq E(G)$ . Seja  $X \subseteq V(G)$  um conjunto de vértices não vazio, o *subgrafo induzido*  $G[X]$  de  $G$  por  $X$  é tal que  $V(G[X]) = X$  e  $E(G[X]) = \{xy \in E(G) : x \in X \text{ e } y \in X\}$ . Para um subconjunto  $S \subseteq V(G)$ ,  $G - S$  denota o subgrafo induzido  $G[V(G) \setminus S]$ .

Um *passeio* em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices  $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  onde  $v_i v_{i+1} \in E(G)$ , para todo  $i = 0, \dots, k-1$ , o vértice  $v_0$  é chamado de *vértice inicial* e  $v_k$  é o *vértice final* de  $P$ . O *comprimento*  $l$  de um passeio  $P$  é o número de arestas de  $P$ . Um passeio fechado é um passeio  $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  onde  $v_0 = v_k$ . Um *caminho* (*trilha*) é um passeio onde os vértices (as arestas) são todos distintos. Denotamos por  $P_k$  um caminho com  $k$  vértices, seu comprimento é  $k-1$ . Dizemos que existe um caminho  $P$  de  $u$  para  $w$  em um grafo  $G$ ,  $u, w \in V(G)$ , se  $v_0 = u$  e  $v_k = w$ . Um *ciclo* é um passeio fechado com 3 ou mais vértices onde todos os vértices são distintos, com exceção de  $v_0$  e  $v_k$ . Um ciclo com  $k$  vértices é denotado por  $C_k$ . Se  $G$  contém um ciclo como subgrafo então  $G$  é um *grafo cíclico*, caso contrário,  $G$  é

um *grafo acíclico*. Em um grafo  $G$  que tem pelo menos um ciclo, o comprimento do menor ciclo é denominado de *cintura* e denotamos por  $g(G)$ .

Um grafo  $G$  é *conexo* se para cada par de vértices  $v$  e  $w$ , existe um caminho de  $v$  para  $w$  no grafo  $G$ , caso contrário,  $G$  é *desconexo*. Se um subgrafo conexo  $H$  de um grafo  $G$  não é subgrafo próprio de nenhum subgrafo conexo de  $G$ , então  $H$  é um *subgrafo conexo maximal* de  $G$ . Uma *componente conexa* de um grafo  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ . A *união disjunta* de dois grafos  $G$  e  $H$  é o grafo  $G \cup H$  com conjunto com vértice  $V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas  $E(G) \cup E(H)$ .

Seja  $G$  um grafo e  $S \subseteq V(G)$ , se  $G[S]$  não têm arestas então  $S$  é um *conjunto independente*, se os vértices de  $G[S]$  são dois a dois adjacentes então  $S$  é uma *clique*.

Um *grafo trivial* é um grafo com um único vértice. Um *grafo completo* é um grafo onde os vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

Um *conjunto bipartido* é um subconjunto  $B \subseteq V(G)$ , que pode ser particionado em  $B = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , onde  $V_1, V_2$  são conjuntos independentes não vazios. Se para todo  $v_i \in V_1$  e  $v_j \in V_2$ ,  $v_i v_j \in E(G)$ , então  $B$  é um conjunto *bipartido completo*. Uma *biclique* é um conjunto bipartido completo maximal. Um *grafo bipartido (completo)* é um grafo induzido por um conjunto bipartido (completo). Um grafo bipartido completo é denotado por  $K_{n,m}$ , onde  $n = |V_1|$  e  $m = |V_2|$ .

Um grafo é *planar* se existir uma representação geométrica do grafo no plano de tal forma que suas arestas se interceptem apenas nas suas extremidades.

Uma *árvore*  $T$  é um grafo conexo e acíclico. Toda árvore é um grafo bipartido e planar com exatamente  $n - 1$  arestas. Uma *folha* é um vértice de uma árvore  $T$  com grau 1. Toda árvore com  $n > 1$  vértices possui pelo menos uma folha. Uma *floresta*  $F$  é um grafo acíclico.

Um grafo  $G$  é *regular* se todos os vértices têm o mesmo grau. Se todos os vértices de  $G$  possuem o mesmo grau  $k$ , então  $G$  é *k-regular*. Um grafo 0-regular é um *conjunto independente*. Um grafo 1-regular é um *emparelhamento*. Um grafo 2-regular e conexo é chamado de *ciclo*. Um grafo 3-regular é chamado de *cúbico*.

Os grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existir uma função bijetora  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  com a propriedade que  $a$  e  $b$  são adjacentes em  $V(G)$  se e somente se  $f(a)$  e  $f(b)$  forem adjacentes em  $V(H)$ , para todo  $a$  e  $b$  em  $V(G)$ . Tal função é chamada de *isomorfismo*. Um *automorfismo* é um isomorfismo  $f : V(G) \rightarrow V(G)$ . Um *grafo vértice transitivo* é um grafo  $G$  tal que, dados quaisquer dois vértices  $v_1$  e  $v_2$  de  $G$ , existe algum automorfismo  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  tal que  $f(v_1) = v_2$ .

Uma *coloração* de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices de  $G$  tal que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Em uma coloração de  $G$  os vértices coloridos com cores iguais formam um conjunto independente. Uma *k-coloração* é uma partição de  $V(G)$  em  $k$  conjuntos independentes. O *número cromático*  $\chi(G)$  de

$G$  é o menor  $k$  tal que  $G$  admite uma  $k$ -coloração. Se  $\chi(G) = k$  então  $G$  é chamado de  $k$ -cromático. Por exemplo, um grafo bipartido com bipartição  $(V_1, V_2)$  pode ser colorido com apenas duas cores, uma cor para  $V_1$  e outra para  $V_2$ . Na Figura 1.2(a) temos uma 2-coloração para o ciclo  $C_6$ . Observe que, ciclos com número par de vértices são grafos bipartidos.

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , um *homomorfismo* de  $G$  para  $H$  é uma função de  $V(G)$  em  $V(H)$  que preserva as arestas, isto é, uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que se  $xy \in E(G)$ , então  $f(x)f(y) \in E(H)$ . Um grafo  $G$  tem número cromático  $\chi(G) = k$  se, e somente se, existe um homomorfismo de  $G$  para  $K_k$  mas não existe um homomorfismo de  $G$  para  $K_{k-1}$ . Observamos que existe um homomorfismo de  $C_{2k}$  para  $K_2$ .

Seja  $G$  um grafo, uma *coloração acíclica* de  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices de  $G$  tal que os vértices adjacentes tenham cores diferentes e o subgrafo induzido pelos vértices de duas classes de cores distintas não forma um ciclo. Uma coloração acíclica com  $k$  cores é denominada de  *$k$ -coloração acíclica*. O *número cromático acíclico*  $\chi_a(G)$  é o menor inteiro  $k$ , tal que  $G$  admite uma  $k$ -coloração acíclica. Note que em uma coloração acíclica, um ciclo deve ter pelo menos três cores. Na Figura 1.2(b) temos uma 3-coloração acíclica para o ciclo  $C_6$ . Observamos que  $\chi_a(C_{2k}) = 3$ . Assim,  $\chi(C_{2k}) = 2$  e  $\chi(C_{2k+1}) = \chi_a(C_{2k+1}) = 3$ .

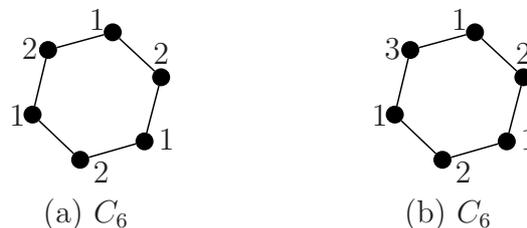


Figura 1.2: (a) uma 2-coloração para  $C_6$  e (b) uma 3-coloração acíclica para  $C_6$ .

### 1.1.2 Grafos orientados

Dado um grafo  $G$ , uma *orientação* de uma aresta  $e = uv \in E(G)$  é um dos dois possíveis pares ordenados  $(u, v)$  ou  $(v, u)$  chamados de *arcos*. Denotamos um arco  $(u, v)$  apenas por  $uv$  e dizemos que  $u$  domina  $v$ . Um *grafo orientado*  $\vec{G} = (V, A)$  é obtido de  $G$  pela orientação de cada aresta de  $E(G)$ . Dizemos que  $\vec{G}$  é uma *orientação* de  $G$ , e  $G$  é o *grafo subjacente* de  $\vec{G}$ . Se  $G$  é conexo, dizemos que  $\vec{G}$  é conexo (o mesmo para planares, e bipartidos). Outras terminologias e notações não abordadas neste texto sobre grafos orientados são similares as usadas em grafos.

Dado um grafo orientado  $\vec{G}$  e  $v \in V(\vec{G})$ , o *grau de saída* de  $v$  é  $d_{\vec{G}}^+(v) = |\{vu \in A(\vec{G}); \forall u \in V(\vec{G})\}|$ , o *grau de entrada* é  $d_{\vec{G}}^-(v) = |\{uv \in A(\vec{G}); \forall u \in V(\vec{G})\}|$ . Dizemos que  $v$  é uma *fonte* quando  $d_{\vec{G}}^-(v) = 0$  e  $d_{\vec{G}}^+(v) \geq 1$ , e  $v$  é um *sumidouro* quando

$d_{\vec{G}}^+(v) = 0$  e  $d_{\vec{G}}^-(v) \geq 1$ . Os graus *mínimo* e *máximo de entrada* de  $\vec{G}$  são respectivamente,  $\delta^-(\vec{G}) = \min\{d_{\vec{G}}^-(v) : v \in V(\vec{G})\}$  e  $\Delta^-(\vec{G}) = \max\{d_{\vec{G}}^-(v) : v \in V(\vec{G})\}$ . Analogamente, os graus *mínimo* e *máximo de saída* de  $\vec{G}$  são respectivamente,  $\delta^+(\vec{G}) = \min\{d_{\vec{G}}^+(v) : v \in V(\vec{G})\}$  e  $\Delta^+(\vec{G}) = \max\{d_{\vec{G}}^+(v) : v \in V(\vec{G})\}$ . Consideramos também  $\delta(\vec{G}) = \delta(G) = \delta$  e  $\Delta(\vec{G}) = \Delta(G) = \Delta$ , onde  $G$  é o grafo subjacente de  $\vec{G}$ .

O *caminho direcionado*  $\vec{P}_n$  ou *ciclo direcionado*  $\vec{C}_n$  é uma orientação de um caminho  $P_n$  ou ciclo  $C_n$ , onde existe uma sequência dos vértices em que cada vértice domina seu sucessor na sequência. Um caminho direcionado possui apenas uma fonte e um sumidouro, e um ciclo direcionado não possui nem fontes nem sumidouros.

Um *torneio*  $\vec{K}_n$  com  $n$  vértices é uma orientação de um grafo completo  $K_n$ . Um número  $q$  é chamado um resíduo quadrático módulo  $p$  se existe um número inteiro  $x$ , tal que  $x^2 \equiv q \pmod{p}$ . Seja  $p$  uma potência de primo tal que  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . O *Torneio de Paley*  $\vec{QR}_p$  é um grafo orientado com conjunto de vértices  $V(\vec{QR}_p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$  tal que  $xy \in A(\vec{QR}_p)$  se e somente se  $y-x$  é um resíduo quadrático diferente de  $p$ . Por exemplo, o torneio de paley com 7 vértices  $\vec{QR}_7$  tem conjunto de vértices  $V(\vec{QR}_7) = \{0, 1, \dots, 6\}$ , e  $xy \in A(\vec{QR}_7)$  se e somente se  $y-x \equiv 1, 2$  ou  $4 \pmod{7}$ . Na Figura 6.1 apresentamos o Torneio de Paley  $\vec{QR}_7$ .

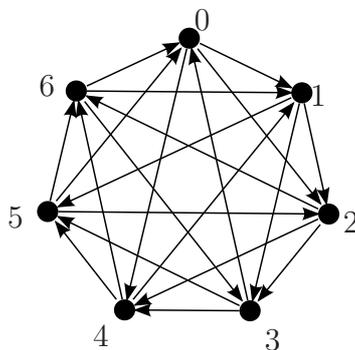


Figura 1.3: Torneio de Paley com 7 vértices  $\vec{QR}_7$ .

Um arco  $uv$  é um *laço* se  $u = v$  e *arcos múltiplos* são arcos que possuem o mesmo par de vértices como extremidades. Um *digrafo* é um grafo orientado que admite laços e arcos múltiplos. Na Figura 1.4(a) apresentamos um digrafo que não é um grafo orientado e na Figura 1.4(b) um torneio  $\vec{K}_5$  com cinco vértices.

Em geral, uma *classe de grafos orientados* é obtida considerando todas as orientações possíveis para os grafos de uma determinada classe de grafos. Por exemplo, a classe  $\vec{\mathcal{F}}$  das *florestas orientadas* consiste dos grafos orientados cujos grafos subjacentes são florestas. O mesmo ocorre para a classe dos *grafos planares orientados* que denotamos por  $\vec{\mathcal{P}}$ .

Um *circuito orientado* é uma orientação de um ciclo tal que, para todo vértice  $v$ , o número de arcos que entram em  $v$  é igual ao número de arcos que saem de  $v$ .



Figura 1.4: (a) Digrafo  $\vec{D}$  e (b) um torneio  $\vec{K}_5$ .

Grafos orientados livres de circuito consistem dos grafos orientados que não contêm um circuito orientado como subgrafo. Portanto, grafos orientados livres de circuito são uma exceção, porque não são obtidos a partir de uma determinada classe de grafos.

Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de grafos simples e  $G$  um grafo em  $\mathcal{C}$ , como toda aresta  $e \in E(G)$  pode ter duas orientações possíveis, então cada grafo  $G$  da origem a  $2^{|E(G)|}$  grafos orientados na classe  $\vec{\mathcal{C}}$  obtida de  $\mathcal{C}$ .

### Número cromático orientado de grafos orientados

Seja  $\vec{G}$  um grafo orientado,  $xy, zt \in A(\vec{G})$  e  $C = \{1, 2, \dots, k\}$  um conjunto de cores. Uma  $k$ -coloração orientada de  $\vec{G}$  é uma função  $\phi : V(\vec{G}) \rightarrow C$ , tal que

- i)  $\phi(x) \neq \phi(y)$ ;
- ii) Se  $\phi(x) = \phi(t)$ , então  $\phi(y) \neq \phi(z)$ .

O número cromático orientado, denotado por  $\chi_o(\vec{G})$ , é o menor  $k$  tal que  $\vec{G}$  admite uma  $k$ -coloração orientada.

Observe que se  $V_i$  e  $V_j$  são duas classes de cores distintas em uma  $k$ -coloração orientada de  $\vec{G}$ , e se existe um arco  $xy \in A(\vec{G})$  onde  $x \in V_i$  e  $y \in V_j$ , então  $\forall t \in V_i$  e  $\forall z \in V_j$   $zt \notin A(\vec{G})$ . Isto implica que dois vértices ligados por um caminho direcionado de tamanho 1 ou 2 devem ter cores distintas.

A Figura 1.5(a) ilustra um caminho com três vértices  $G = P_3$ , a Figura 1.5(b) um grafo orientado  $\vec{G}$  obtido de  $G$ , e na Figura 1.5(c) uma coloração orientada de  $\vec{G}$  com 3 cores e atingindo  $\chi_o(\vec{G}) = 3$ .

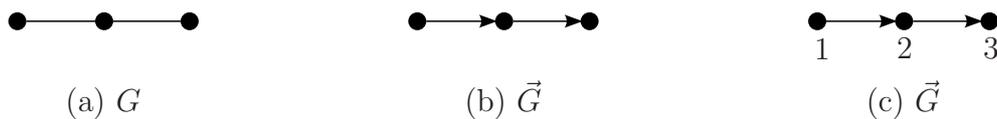


Figura 1.5: (a)  $G = P_3$ , (b) grafo orientado  $\vec{G}$  e (c) coloração orientada de  $\vec{G}$ .

## Número cromático orientado de grafos não orientados

Podemos estender a definição de coloração orientada a grafos não orientados. Dado um grafo  $G$ , o *número cromático orientado* de  $G$ , denotado por  $\chi_o(G)$ , é o máximo de  $\chi_o(\vec{G})$  para qualquer orientação  $\vec{G}$  de  $G$ . Apresentamos nas Figuras 1.6(b), 1.6(c) e 1.6(d) todos os grafos orientados livres de isomorfismo obtidos do caminho  $P_3$  da Figura 1.6(a). Também representamos uma coloração orientada com o mínimo de cores para cada orientação, sendo  $\chi_o(\vec{G}_1) = 3$ ,  $\chi_o(\vec{G}_2) = \chi_o(\vec{G}_3) = 2$ , assim  $\chi_o(P_3) = 3$ .

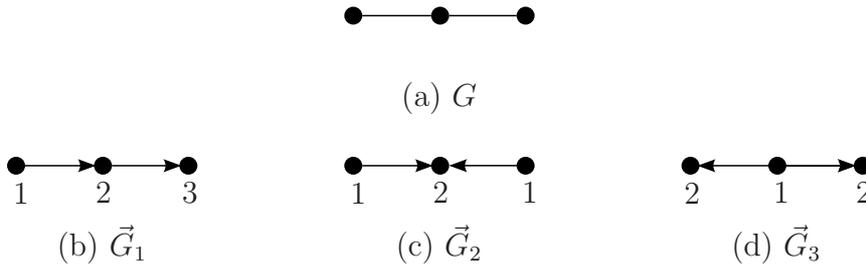


Figura 1.6: (a) Grafo  $G = P_3$  e uma coloração orientada para as três possíveis orientações de  $G = P_3$  em (b), (c) e (d).

Agora, vamos definir o homomorfismo entre grafos orientados e relacioná-lo com o número cromático orientado. Sejam  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  grafos orientados, um *homomorfismo*  $\varphi$  de  $\vec{G}_1$  em  $\vec{G}_2$  é uma função  $\varphi : V(\vec{G}_1) \rightarrow V(\vec{G}_2)$ , tal que se  $xy \in A(\vec{G}_1)$  então  $\varphi(x)\varphi(y) \in A(\vec{G}_2)$ . Um homomorfismo  $\varphi$  de  $\vec{G}_1$  em  $\vec{G}_2$  corresponde a uma *k-coloração orientada* de  $\vec{G}_1$  se  $\vec{G}_2$  tem  $k$  vértices. Neste caso, dizemos que  $\vec{G}_1$  é  $\vec{G}_2$ -colorível e os vértices de  $\vec{G}_2$  são as *cores* atribuídas aos vértices de  $\vec{G}_1$ . Se existe um homomorfismo  $\varphi$  de  $\vec{G}_1$  em  $\vec{G}_2$ , então  $\vec{G}_2$  é chamado de *grafo de cor* ou *palheta* para  $\vec{G}_1$ . O menor número de vértices  $k$  de  $\vec{G}_2$  tal que  $\vec{G}_1$  admite um homomorfismo para  $\vec{G}_2$  é o *número cromático orientado* de  $\vec{G}_1$ , isto é,  $\chi_o(\vec{G}_1) = \min |V(\vec{G}_2)|$ . Esta definição é uma generalização mais natural do número cromático no caso não direcionado.

## Número cromático orientado de classes de grafos

Considere  $\vec{\mathcal{C}}$  uma classe de grafos orientados,  $\chi_o(\vec{\mathcal{C}})$  é o máximo do número cromático orientado para todos os grafos em  $\vec{\mathcal{C}}$ . Observamos que, para determinar o número cromático orientado de uma classe de grafos devemos considerar todas orientações possíveis, assim, por exemplo, usamos indistintamente grafos planares ou grafos planares orientados. Um grafo orientado  $\vec{G}$  é um *limite homomórfico* para  $\vec{\mathcal{C}}$  se existe um homomorfismo de cada grafo orientado em  $\vec{\mathcal{C}}$  para  $\vec{G}$ , neste caso  $\vec{G}$  é um

$\vec{\mathcal{C}}$ -limite. Na literatura, também é utilizado o termo  $\vec{\mathcal{C}}$ -Universal para denotar  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite. Quando  $\vec{G}$  é um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite e nenhum subgrafo próprio de  $\vec{G}$  é um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite então  $\vec{G}$  é um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite minimal.

O número cromático orientado uniforme de uma classe  $\vec{\mathcal{C}}$ , denotado por  $\chi_u(\vec{\mathcal{C}})$ , é a menor ordem de um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite. Se não existe um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite então  $\chi_u(\vec{\mathcal{C}}) = \infty$ . Uma classe  $\vec{\mathcal{C}}$  é uma *classe de grafos completa* se para quaisquer dois grafos orientados  $\vec{C}_1, \vec{C}_2 \in \vec{\mathcal{C}}$ , existe um terceiro  $\vec{C}_3 \in \vec{\mathcal{C}}$  com  $\vec{C}_1$  subgrafo de  $\vec{C}_3$  e  $\vec{C}_2$  subgrafo de  $\vec{C}_3$ . Observamos que  $\chi_o(\vec{\mathcal{C}}) \leq \chi_u(\vec{\mathcal{C}})$  e a igualdade é válida quando  $\vec{\mathcal{C}}$  é uma classe de grafos completa [40]. Apresentamos nas Figuras 1.7(a) e 1.7(b) a classe  $\vec{\mathcal{K}}_3$  de todos os grafos orientados livres de isomorfismo obtidos do grafo completo  $K_3$ . A classe  $\vec{\mathcal{K}}_3$  tem  $\chi_o(\vec{\mathcal{K}}_3) = 3$  e  $\chi_u(\vec{\mathcal{K}}_3) = 4$ , na Figura 1.7(c) temos um  $\vec{\mathcal{K}}_3$ -limite minimal.

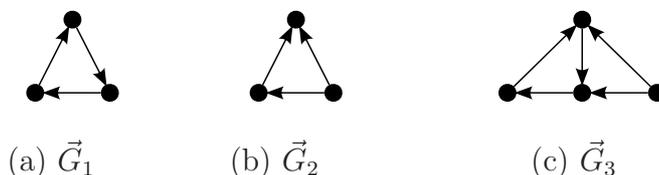


Figura 1.7: Dois torneios orientados com três vértices: o circular (a) e o transitivo (b), e um  $\vec{\mathcal{K}}_3$ -limite minimal (c).

O estudo de coloração orientada para uma classe de grafos  $\vec{\mathcal{C}}$  é interessante quando algum grafo completo  $\vec{K}_n$  não pertence a nenhum elemento de  $\vec{\mathcal{C}}$ , para  $n$  suficientemente grande. Por exemplo, o grafo  $K_5$  não pertence a nenhum elemento da classe Planar  $\vec{\mathcal{P}}$ .

Os limites inferior e superior do número cromático orientado para  $\vec{\mathcal{P}}$  têm sido bastante estudados, isto ocorre devido a dois fatos importantes. O primeiro é que a estrutura dos grafos planares não permite grafos completos com mais de quatro vértices como subgrafo induzido. O segundo é obtido da Proposição 1.1 em [42].

**Proposição 1.1 (Sopena [42])** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ , se  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq k$  então existe  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite membro de  $\vec{\mathcal{P}}$ , com  $k$  vértices.*

A demonstração é feita por contradição e utiliza o fato de que um grafo gerado pela identificação de um vértice de dois grafos planares também é planar, veja Figura 1.8, mostrando que  $\vec{\mathcal{P}}$  é uma classe completa.

Para uma classe  $\vec{\mathcal{C}}$  de grafos orientados com  $\chi_o(\vec{\mathcal{C}}) \leq k$  não existe necessariamente um  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite com  $k$  vértices. A classe dos grafos orientados  $\vec{\mathcal{K}}_k$  contendo todos os torneios com  $k$  vértices têm  $\chi_u(\vec{\mathcal{K}}_k) > k$ . Um exemplo com  $\vec{\mathcal{K}}_3$  está representado na Figura 1.7. Pela Proposição 1.1, a classe  $\vec{\mathcal{P}}$  admite um  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite com  $k$  vértices, e assim  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) = \chi_u(\vec{\mathcal{P}})$ .

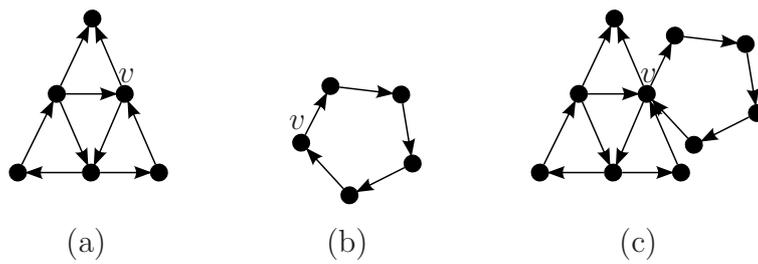


Figura 1.8: (a) Grafo orientado  $\vec{P}_1$ , (b) Grafo orientado  $\vec{P}_2$  e (c) grafo planar  $\vec{P}_3$  obtido da identificação do vértice  $v$  de  $\vec{P}_1$  e  $\vec{P}_2$ .

## Capítulo 2

# Número Clique Cromático Orientado

Neste capítulo, definimos o *número clique cromático orientado* combinando dois problemas conhecidos: *clique coloração* e *coloração orientada*. Iniciamos com algumas definições a respeito da clique coloração.

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma  $k$ -clique coloração de  $G$  é uma função  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que, para toda clique maximal  $K$  de  $G$ , existe  $u, v \in K$  com  $c(u) \neq c(v)$ , isto é, nenhuma clique é monocromática. O *número clique cromático*  $\kappa(G)$  é o menor  $k$  tal que  $G$  tem uma  $k$ -clique coloração. Para a conveniência do leitor nós oferecemos na Figura 2.1 um par de grafos com  $\kappa(G) = 2$ .

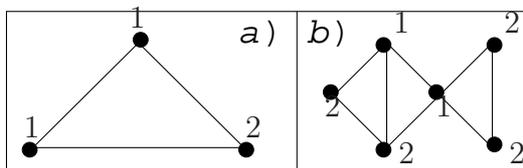


Figura 2.1: Grafos  $G$  e  $H$  ambos com uma 2-clique coloração.

Um *hipergrafo* é um par ordenado  $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ , onde  $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \dots, v_n\}$  é um conjunto não vazio de vértices e  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{E_1, \dots, E_m\}$  é uma coleção de hiperarestas  $E_i \subseteq V(\mathcal{H})$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Uma  $k$ -coloração de  $\mathcal{H}$  é uma função  $c : V(\mathcal{H}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que para todo  $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$  existe  $u, v \in E$  com  $c(u) \neq c(v)$ , isto é, nenhuma hiperaresta é monocromática. O *número cromático*  $\chi(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{H}$  é o menor  $k$  tal que  $\mathcal{H}$  tem uma  $k$ -coloração.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, o *clique-hipergrafo*  $\mathcal{H}(G) = (V, \mathcal{E})$  de  $G$  é o hipergrafo, onde  $\mathcal{E} = \{K \subseteq V : K \text{ é uma clique maximal de } G\}$ . Uma  $k$ -coloração de  $\mathcal{H}(G)$  define uma  $k$ -clique coloração de  $G$ , e o número cromático de  $\mathcal{H}(G)$  é o *número clique cromático* de  $G$ . Usamos a notação  $\kappa(G) = \chi(\mathcal{H}(G))$ . Na Figura 2.2 apresentamos um grafo  $G$  e o clique-hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$ .

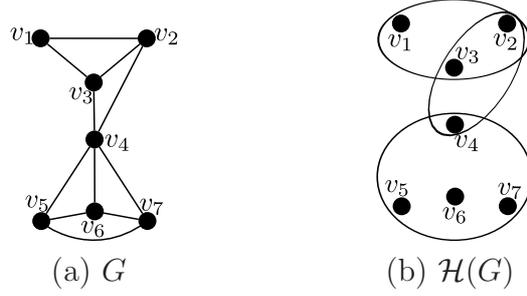


Figura 2.2: (a) Grafo  $G$  e (b) clique-hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$ .

Agora, apresentamos alguns conceitos relacionados a hipergrafos direcionados. Tais conceitos podem ser encontrados na tese de doutorado de Guedes [26], nos baseamos fortemente neste trabalho para a escrita das próximas definições.

Um *hipergrafo direcionado* é um par ordenado  $\vec{\mathcal{H}} = (V(\vec{\mathcal{H}}), \mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}}))$ , onde  $V(\vec{\mathcal{H}}) = \{v_1, \dots, v_n\}$  é o conjunto não vazio de vértices e  $\mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}}) = \{\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_m\}$  é uma coleção de hiperarcos  $\vec{E}_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Um hiperarco  $\vec{E}_i \in \mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}})$  é um par ordenado  $(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são subconjuntos disjuntos não vazios de  $V(\vec{\mathcal{H}})$  denominados respectivamente por *origem* e *destino*, e denotados por  $X = ORG(\vec{E}_i)$  e  $Y = DEST(\vec{E}_i)$ . A notação origem e destino também é usada para conjuntos de hiperarcos. Assim, se  $A$  é uma coleção de hiperarcos então  $ORG(A) = \bigcup_{\vec{E} \in A} ORG(\vec{E})$  e  $DEST(A) = \bigcup_{\vec{E} \in A} DEST(\vec{E})$ .

Na Figura 2.3 damos exemplos de representações de hiperarcos direcionados,  $\vec{E}_1 = (\{v_1\}, \{v_2\})$ ,  $\vec{E}_2 = (\{v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\})$ ,  $\vec{E}_3 = (\{v_7, v_8\}, \{v_9\})$  e  $\vec{E}_4 = (\{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}, \{v_{13}, v_{14}\})$ .

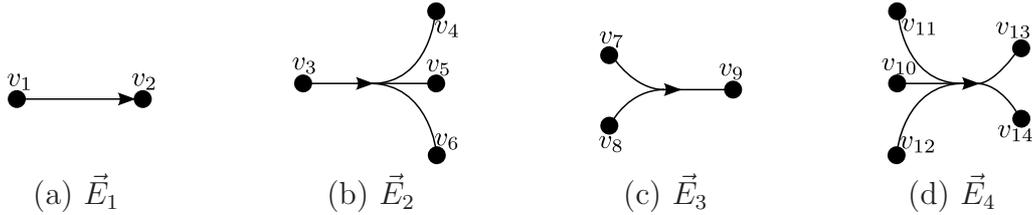


Figura 2.3: Hiperarcos direcionados.

Dado um hipergrafo direcionado  $\vec{\mathcal{H}}$  e  $s, t \in V(\vec{\mathcal{H}})$ . Um *hipercaminho* de comprimento  $k$  de  $s$  a  $t$  é uma sequência de hiperarcos  $P = (\vec{E}_{i_1}, \vec{E}_{i_2}, \dots, \vec{E}_{i_k})$ , onde  $s \in ORG(\vec{E}_{i_1})$  e  $t \in DEST(\vec{E}_{i_k})$ , e para cada hiperarco  $\vec{E}_{i_p} \in P$ ,  $p = 1, 2, \dots, k$ , temos que:

- i)  $ORG(\vec{E}_{i_p}) \cap (DEST(\{\vec{E}_{i_1}, \vec{E}_{i_2}, \dots, \vec{E}_{i_{p-1}}\}) \cup \{s\}) \neq \emptyset$ ;
- ii)  $DEST(\vec{E}_{i_p}) \cap (ORG(\{\vec{E}_{i_{p+1}}, \vec{E}_{i_{p+2}}, \dots, \vec{E}_{i_k}\}) \cup \{t\}) \neq \emptyset$ .

Seja  $P = (\vec{E}_{i_1}, \dots, \vec{E}_{i_k})$  um hipercaminho, usamos  $ORG(P)$  denotando  $ORG(\vec{E}_{i_1})$  e  $DEST(P)$  denotando  $DEST(\vec{E}_{i_k})$ . Um *hiperciclo* em um hipergrafo direcionado

$\vec{\mathcal{H}}$  é um hipercaminho  $P$  de  $\vec{\mathcal{H}}$  onde  $ORG(P) \cap DEST(P) \neq \emptyset$ . No hipergrafo representado na Figura 2.4, os hipercaminhos possíveis de  $v_1$  a  $v_5$  são  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ ,  $(\vec{E}_1, \vec{E}_3, \vec{E}_5)$ ,  $(\vec{E}_1, \vec{E}_4, \vec{E}_5)$ . Um hipercaminho  $P$  é *minimal* em um hipergrafo direcionado  $\vec{\mathcal{H}}$ , se não existe outro hipercaminho em  $\vec{\mathcal{H}}$  que esteja propriamente contido em  $P$ .

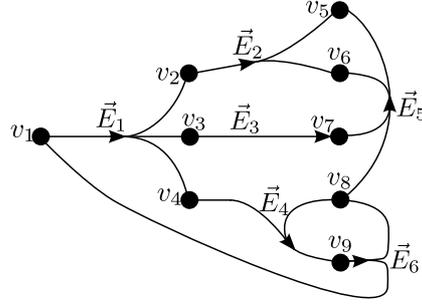


Figura 2.4: Hipergrafo direcionado.

Um *hipergrafo orientado*  $\vec{\mathcal{H}}$  é um hipergrafo direcionado no qual todos os hiper-ciclos minimais têm comprimento maior que 2. Uma *k-coloração orientada* de um hipergrafo orientado  $\vec{\mathcal{H}}$  é uma função  $c : V(\vec{\mathcal{H}}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que:

- i)  $\forall \vec{E} \in \mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}}), \exists x \in ORG(\vec{E})$  e  $\exists y \in DEST(\vec{E})$  com  $c(x) \neq c(y)$ ;
- ii) Sejam  $(X, Y), (Z, T) \in \mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}})$  dois hiperarcos distintos. Se  $\exists x \in X$  e  $\exists t \in T$  tal que  $c(x) = c(t)$ , então  $\forall y \in Y$  e  $\forall z \in T, c(y) \neq c(z)$ .

O *número cromático orientado*  $\chi_o(\vec{\mathcal{H}})$  de um hipergrafo orientado  $\vec{\mathcal{H}}$  é o menor inteiro  $k$ , tal que  $\vec{\mathcal{H}}$  admita uma  $k$ -coloração orientada. Exibimos exemplos de colorações orientadas para hipergrafos orientados nas Figuras 2.7(c), 2.8(b), 2.9(b) e 2.10(b).

Dado um hipergrafo  $\mathcal{H}$  e  $E_i \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ . Uma *orientação* de  $\mathcal{H}$  é um hipergrafo direcionado  $\vec{\mathcal{H}}$ , onde cada hiperarco  $\vec{E}_i \in \mathcal{E}(\vec{\mathcal{H}})$  é o par  $(X_i, Y_i)$ , com  $X_i, Y_i \neq \emptyset, X_i \cap Y_i = \emptyset$  e  $X_i \cup Y_i = V(E_i)$ . Uma orientação  $\vec{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  é chamada *orientação válida* se  $\vec{\mathcal{H}}$  é um hipergrafo orientado, caso contrário,  $\vec{\mathcal{H}}$  é uma *orientação inválida*. Lembramos que um hipergrafo orientado não tem ciclos de tamanho 2. O *número cromático orientado*  $\chi_o(\mathcal{H})$  de um hipergrafo  $\mathcal{H}$  é o  $\max\{\chi_o(\vec{\mathcal{H}})\}$ , para toda orientação válida  $\vec{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$ . Um *clique-hipergrafo orientado* de um grafo  $G$  é uma orientação válida para o clique-hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$ . Uma questão natural que surge é a complexidade de dado um hipergrafo direcionado  $\vec{\mathcal{H}}$ , determinar se  $\vec{\mathcal{H}}$  é um hipergrafo orientado. Apresentamos o Algoritmo 2.1 que permite determinar em tempo  $O(mn)$  se um hipergrafo direcionado é também um hipergrafo orientado.

Nas Figuras 2.5(a) e 2.5(b) mostramos dois exemplos de orientações inválidas  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$  e  $\vec{\mathcal{H}}_2(G)$  para o hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$  da Figura 2.2(b). Não podemos atribuir

---

**Algoritmo 2.1:** Algoritmo Hipergrafo Orientado  $\vec{\mathcal{H}}$ ; Tempo de Execução  $O(nm)$ .

---

**Entrada:** Hipergrafo direcionado  $\vec{\mathcal{H}}$ .

**Saída:** Se  $\vec{\mathcal{H}}$  é um Hipergrafo orientado ou um certificado para a resposta NÃO - um ciclo de comprimento 2.

```

1 início
2   para cada vértice  $v \in V$  faça
3     buscar todos vértices a distância 2 de  $v$  e colocar no conjunto  $A$ ;
4     se  $v \in A$  então
5       retorna o ciclo  $C$  com  $v$ ;
6     fim
7   fim
8   retorna SIM;
9 fim

```

---

uma coloração orientada aos hipergrafos direcionados da Figura 2.5. Para isso, vamos verificar para  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$ . Sejam  $\vec{E}_1 = (X, Y) = (\{v_3\}, \{v_1, v_2\})$ ,  $\vec{E}_2 = (Z, T) = (\{v_2, v_4\}, \{v_3\}) \in V(\vec{\mathcal{H}}_1(G))$  da Figura 2.5(a). O vértice  $v_3 \in X$  a origem de  $\vec{E}_1$  e  $v_3 \in T$  o destino de  $\vec{E}_2$ . Pela segunda regra da coloração orientada, cada par  $(y, z)$  onde  $y \in Y, z \in Z$  satisfaz  $c(y) \neq c(z)$  mas  $Y \cap Z = \{v_2\}$ , isto é uma contradição pois  $c(v_2) = c(v_2)$ . Assim,  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$  é um hipergrafo direcionado com um ciclo minimal de comprimento 2.

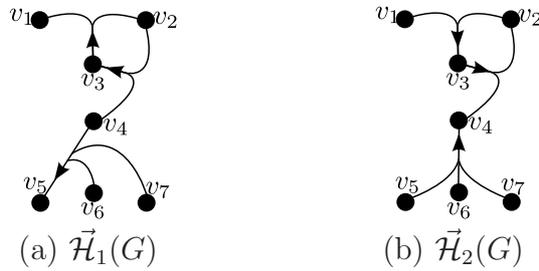


Figura 2.5: Dois hipergrafos direcionados  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$  e  $\vec{\mathcal{H}}_2(G)$ .

Apresentamos na Figura 2.6 duas orientações válidas  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$  e  $\vec{\mathcal{H}}_2(G)$  para o grafo  $G$  da Figura 2.2. Veja que  $v_2$  é um sumidouro em ambos  $\vec{\mathcal{H}}_1(G)$  e  $\vec{\mathcal{H}}_2(G)$ .

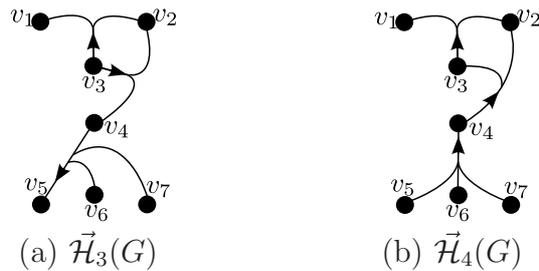


Figura 2.6: Dois hipergrafos orientados  $\vec{\mathcal{H}}_3(G)$  e  $\vec{\mathcal{H}}_4(G)$ .

## 2.1 Clique coloração orientada de um grafo $G$

Seja  $G$  um grafo e  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  uma orientação válida de  $\mathcal{H}(G)$ ,  $c : V(\vec{\mathcal{H}}(G)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  uma  $k$ -coloração orientada de  $\vec{\mathcal{H}}(G)$ , dizemos que  $c$  é uma  $k$ -clique coloração orientada de  $G$ . O número clique cromático orientado de  $G$  denotado por  $\vec{\kappa} := \vec{\kappa}(G) := \chi_o(\vec{\mathcal{H}}(G))$  é o menor  $k$  tal que  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  admite uma  $k$ -clique coloração orientada, dentre todas as orientações válidas  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  de  $G$ . Apresentamos nas Figuras 2.7(a), 2.7(b) e 2.7(c) respectivamente, um grafo  $G$ , o clique hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$  e uma 2-clique coloração orientada de  $\vec{\mathcal{H}}(G)$ .

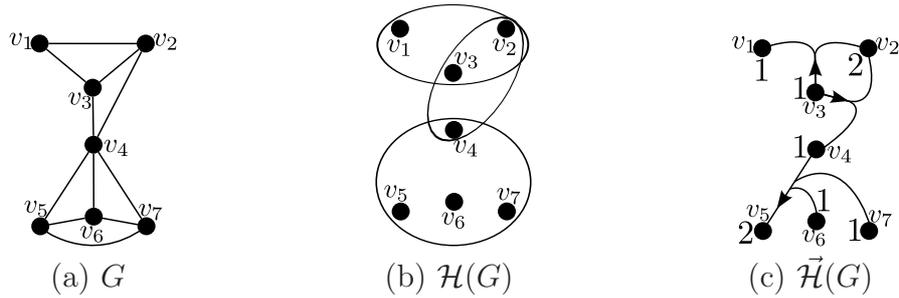


Figura 2.7: (a)  $G$ , (b)  $\mathcal{H}(G)$ , (c) 2-clique coloração orientada para  $\vec{\mathcal{H}}(G)$ .

**Teorema 2.1** *Seja  $G$  um grafo*

- i) Se  $G$  é um grafo completo, então  $\vec{\kappa}(G) = 2$ ;*
- ii) Se todo hipergrafo orientado  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  é um grafo orientado, então  $\vec{\kappa}(G) = \chi_o(G)$ ;*

*Demonstração.* *i)* Seja  $K_n$  um grafo completo com  $n$  vértices. Por definição, qualquer hipergrafo orientado obtido do grafo completo  $K_n$  tem apenas um hiperarco, que é uma orientação válida do clique hipergrafo  $\mathcal{H}(K_n)$ . Pela definição de clique coloração orientada duas cores são suficientes.

*ii)* Seja  $G$  um grafo no qual toda clique maximal de  $G$  tem tamanho 2. Por definição, cada aresta de  $G$  é uma clique maximal, então cada hiperaresta do clique hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$  também é uma aresta. Assim, como  $G$  é um grafo simples, toda orientação de  $\mathcal{H}(G)$  não tem hiperciclos de tamanho 2 e é uma orientação válida. Qualquer orientação  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  do clique hipergrafo  $\mathcal{H}(G)$  é um grafo orientado.

Pela primeira regra da coloração orientada para hipergrafos orientados, cada hiperarco de  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  tem pelo menos duas cores. Como cada hiperarco  $\vec{E}_i = (X_i, Y_i)$  de  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  tem dois vértices,  $|X_i| = |Y_i| = 1$ . Neste caso, a segunda regra da coloração orientada para um hipergrafo orientado é igual a segunda regra da coloração orientada para grafos orientados. Portanto, uma  $k$ -coloração orientada de  $G$ , corresponde biunivocamente a uma  $k$ -clique coloração orientada de  $\vec{\mathcal{H}}(G)$ . Logo  $\vec{\kappa}(G) = \chi_o(G)$ .  $\square$

**Corolário 2.2** Se  $G = C_n$ , então  $\vec{\kappa}(G) = \begin{cases} \chi_o(G), & \text{se } n \geq 4, e \\ 2 & \text{se } n = 3. \end{cases}$

*Demonstração.* Se  $n = 3$ , pelo Teorema 2.1 item i)  $\vec{\kappa}(G) = 2$ . Se  $n \geq 4$ , então todas as cliques de  $G$  são arestas. Então  $\vec{\mathcal{H}}(G)$  é um grafo orientado. Pelo Teorema 2.1 item ii)  $\chi_o(C_n) = \vec{\kappa}(G)$ .  $\square$

Exemplificamos o item *i)* do Teorema 2.1 na Figura 2.8, onde atribuímos uma 2-coloração orientada para o hipergrafo orientado  $\vec{\mathcal{H}}(K_5)$  na Figura 2.8(b) obtido de  $K_5$  na Figura 2.8(a).

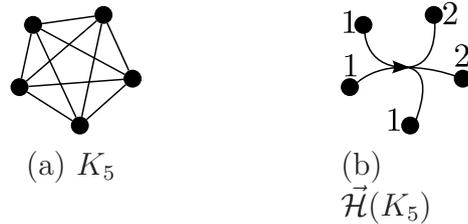


Figura 2.8: (a) Grafo completo  $K_5$  e (b)  $\vec{\mathcal{H}}(K_5)$ .

Apresentamos dois exemplos para o item *ii)* do Teorema 2.1 nas Figuras 2.9 e 2.10, a Figura 2.9 também é um exemplo para o Corolário 2.2.



Figura 2.9: (a) Ciclo  $C_5$  e (b)  $\vec{\mathcal{H}}(C_5)$ .

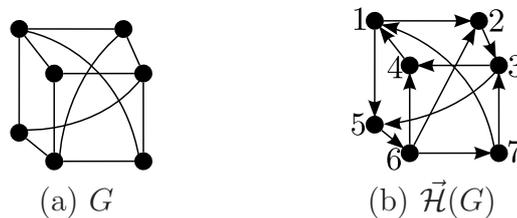


Figura 2.10: (a)  $G$  e (b)  $\vec{\mathcal{H}}(G)$ .

Nosso objetivo, introduzindo o conceito de clique coloração orientada e número clique cromático orientado de um grafo  $G$ , era o de estender vários resultados de clique coloração existentes na literatura, para grafos considerando agora orientações. Além disso, conseguir uma maneira mais simples de limitar o número cromático orientado a partir do número clique cromático orientado. Porém, quando consideramos

grafos onde cada aresta é uma clique maximal (Teorema 2.1 ii), ambos problemas são idênticos. Embora não tenhamos nos aprofundado mais nesse tema, optamos por apresentá-lo, porque foi um tópico que estudamos e que aponta um caminho promissor de pesquisa, e que pretendemos explorar no futuro. Por fim, deixamos uma conjectura sobre número clique cromático orientado.

**Conjectura 2.3** *Seja  $G$  um grafo, então  $\kappa(G) \leq \vec{\kappa}(G) \leq \chi_o(G)$ .*

## Capítulo 3

# Limites para o número cromático orientado de grafos planares

A classe  $\vec{\mathcal{P}}$  dos grafos planares tem sido bastante estudada no contexto de coloração orientada [30, 33, 37, 41, 42]. Sabemos que  $18 \leq \chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$  [29, 37]. Neste capítulo descrevemos várias ferramentas propostas e tentativas para encolher este intervalo. Primeiro na prova que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$  é usado uma 4-coloração orientada para uma floresta orientada. Nós demonstramos que existe uma 3-coloração para uma floresta orientada. Isto poderia melhorar o limite  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$ , mas infelizmente nós não conseguimos introduzir na prova [37] este argumento. Pelo propósito de acreditarmos nessa possibilidade de uso do resultado e esclarecer ao leitor onde é usado o argumento da floresta colorida nós reproduzimos na primeira seção a prova original [37], bem como nossa demonstração. É um resultado da literatura que existe um grafo planar orientado com número cromático orientado 18, porém nunca foi exibido um grafo orientado com  $\chi_o(\vec{G}) \geq 16$ . Na segunda seção, nós propomos uma técnica para tentar encontrar um grafo planar orientado  $\vec{G}$  com  $\chi_o(\vec{G}) \geq 16$ . O artigo [29] que prova que  $18 \leq \chi_o(\vec{\mathcal{P}})$ , ainda não foi publicado. No artigo [42] que contém a demonstração para  $16 \leq \chi_o(\vec{\mathcal{P}})$  nós encontramos uma lacuna, e com o propósito de registro mostramos na terceira seção. E para que o texto ficasse auto-contido, reproduzimos também a demonstração de Sopena nesta seção. Na quarta seção, mostramos nosso resultado topológico que: o limite homomórfico da classe dos grafos planares cúbicos contém um torneio específico  $\vec{K}_5^U$  como subgrafo.

Muitos trabalhos relacionaram o número cromático orientado de grafos planares  $\vec{\mathcal{P}}$  com a cintura do grafo subjacente, obtendo limites mais restritos. Os resultados apresentados na Tabela 3.1 podem ser encontrados em [44] e resumizam a relação do  $\chi_o(\vec{G})$  com a cintura  $g(G)$  do grafo subjacente  $G$ , quando  $G$  é planar.

Tabela 3.1:  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \times$  Cintura

$g(G)$	$\chi_o(\vec{G})$	Referência/Comentário
$\geq 12$	$\chi_o = 5$	[9], [35] (justo)
$\geq 11$	$5 \leq \chi_o \leq 6$	[35], [34]
$\geq 7$	$5 \leq \chi_o \leq 7$	[35], [6]
$\geq 6$	$5 \leq \chi_o \leq 11$	[35], [8]
$\geq 5$	$5 \leq \chi_o \leq 16$	[35], [32]
$\geq 4$	$11 \leq \chi_o \leq 47$	[33], [7]
$\geq 3$	$18 \leq \chi_o \leq 80$	[30], [37]

### 3.1 Limite superior para grafos planares

Um problema em aberto é determinar se 80 cores é um limite justo para coloração orientada de grafos planares. Na demonstração de que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$  são usados dois resultados importantes que enunciamos a seguir. O primeiro resultado afirma que o número cromático acíclico para grafos planares é igual a 5.

**Teorema 3.1 (Borodin [5])** *Se  $G$  é um grafo planar então  $\chi_a(G) \leq 5$ .*

Observamos que o limite de Borodin é justo. De fato, seja  $K_5$  o grafo completo com cinco vértices e  $e \in E(K_5)$ . Veja na Figura 3.1(a) que  $K_5 \setminus \{e\}$  tem uma 4-coloração acíclica, e  $K_5 \setminus \{e\}$  não tem uma 3-coloração acíclica pois  $\chi(K_5 \setminus \{e\}) = 4$ . Assim,  $\chi_a(K_5 \setminus \{e\}) = 4$ . Como qualquer grafo planar  $G$  com 5 vértices é um subgrafo de  $K_5 \setminus \{e\}$ , temos que  $\chi_a(G) \leq 4$ . Na Figura 3.1(b) temos um grafo planar  $G$  com  $\chi_a(G) = 5$  e o menor número de vértices possível  $|V(G)| = 6$ .

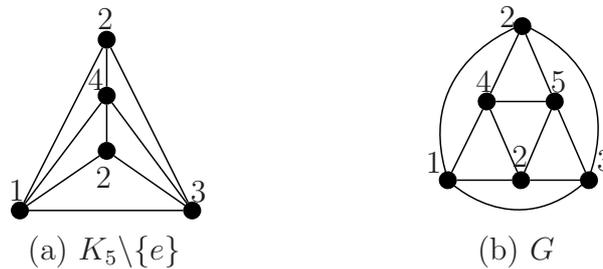


Figura 3.1: Uma coloração acíclica para (a)  $K_5 \setminus \{e\}$ , e (b) grafo  $G$  com  $\chi_a(G) = 5$ .

O segundo resultado assegura que existe uma 4-coloração orientada para uma floresta orientada  $\vec{F}$  gerada a partir de uma 2-coloração acíclica para uma floresta  $F$ .

**Lema 3.2 (Raspaud e Sopena [37])** *Seja  $F$  uma floresta,  $c$  uma 2-coloração de  $F$  usando as cores  $i$  e  $j$ , ( $i < j$ ), e  $\vec{F}$  qualquer orientação de  $F$ . Então existe uma*

4-coloração orientada  $f$  de  $\vec{F}$  usando as cores  $(f^1(x), f^2(x)) \in \{i, j\} \times \{0, 1\}$  tal que para qualquer vértice  $x$  em  $\vec{F}$ ,  $f^1(x) = c(x)$ .

Na demonstração do Lema 3.2 a coloração orientada  $f$  pode ser obtida da 2-coloração  $c$  usando uma regra simples. Seja  $xy \in E(\vec{F})$  então  $f(x) = (c(x), \alpha)$ ,  $f(y) = (c(y), \beta)$ , com  $\alpha = \beta$ , se e somente se  $c(x) < c(y)$ , onde  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ . Assim, toda floresta orientada tem um homomorfismo no grafo orientado apresentado na Figura 3.2, onde  $i < j$ .

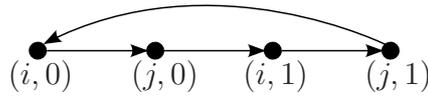


Figura 3.2: Grafo de cor para florestas apresentado no Lema 3.2.

Na Figura 3.3 oferecemos um exemplo para a regra criada na demonstração do Lema 3.2. Na Figura 3.3(a) temos uma 2-coloração (acíclica)  $c$  para a floresta  $F$ , e na Figura 3.3(b) temos uma 4-coloração orientada para a floresta orientada  $\vec{F}$  obtida de  $c$ .



Figura 3.3: (a) 2-coloração para a Floresta  $F$  e (b) 4-coloração orientada para  $\vec{F}$ .

O Teorema 3.3 estabelece o limite superior atual para o número cromático orientado de grafos planares. Outros limites superiores mais baixos foram estabelecidos quando considerado a cintura dos grafos planares, veja Tabela 3.1.

**Teorema 3.3 (Raspaud e Sopena [37])** *Se  $\vec{G} = (V, A)$  é um grafo orientado cujo grafo subjacente  $G = (V, E)$  tem uma  $k$ -coloração acíclica, então  $\vec{G}$  tem uma coloração orientada usando no máximo  $k \times 2^{k-1}$  cores.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $V_1, \dots, V_k$  as  $k$  classes de cores de  $V$  em uma coloração acíclica, e seja  $\vec{G}$  uma orientação de  $G$ . Por hipótese,  $F_{i,j} = \vec{G}[V_i \cup V_j]$  é uma floresta, para  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  e  $i \neq j$  (o subgrafo orientado induzido por  $V_i \cup V_j$ ). Como  $F_{i,j}$  e  $F_{j,i}$  denotam a mesma floresta, o número de florestas diferentes é  $k(k-1)/2$ . Note que cada vértice colorido com a cor  $i$  pertence a exatamente

$k - 1$  florestas  $F_{i,j}$  distintas. Pelo Lema 3.2, segue que  $F_{i,j}$  tem uma 4-coloração orientada  $f_{i,j} = f_{j,i}$ , satisfazendo que para qualquer  $x \in V_i$  (resp.  $V_j$ ),  $f_{i,j}^1(x) = i$  (resp.  $j$ ). Para cada  $x \in V$  existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $x \in V_i$  e  $x$  pertence a  $(k - 1)$  florestas  $F_{i,j}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ .

A coloração orientada  $\phi$  de  $\vec{G}$  é dada por

$$\phi(x) = (i, f_{i,i_1}^2(x), \dots, f_{i,i_{k-1}}^2(x)), \quad (3.1)$$

onde  $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$  é o conjunto  $\{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ , com  $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1}$  e onde  $f_{i,j}^2(x) \in \{0, 1\}$  denota a segunda componente de  $f_{i,j}(x)$ . Desde que  $f$  é uma coloração acíclica, os vértices adjacentes recebem cores diferentes e a primeira condição da coloração orientada é satisfeita.

Falta demonstrar a segunda condição. Por contradição, suponha que existem quatro vértices  $x, y, z, t \in V(\vec{G})$  tal que  $xy, zt \in A(\vec{G})$  com  $\phi(x) = \phi(t)$  e  $\phi(y) = \phi(z)$ . Pela definição de  $\phi$  temos que  $x, t$  (resp.  $y, z$ ) estão na mesma classe de cor  $V_i$  (resp.  $V_j$ ). Consequentemente,

$$\phi(x) = \phi(t) = (i, f_{i,i_1}^2(x), \dots, f_{i,i_{k-1}}^2(x))$$

e

$$\phi(y) = \phi(z) = (j, f_{j,j_1}^2(y), \dots, f_{j,j_{k-1}}^2(y)).$$

Além disso,  $xy$  e  $zt$  pertencem a mesma floresta  $F_{i,j}$ . Mas pelo Lema 3.2  $f_{i,j}$  é uma coloração orientada, uma contradição.

Portanto o número de cores de  $\phi$  é no máximo  $k \times 2^{k-1}$ .  $\square$

Assim, o limite superior  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$  para o número cromático orientado de grafos planares é definido pelos Teoremas 3.1 e 3.3. O enunciado da Proposição 3.4 pode ser encontrada em [18] e em [44], embora não haja uma demonstração para a mesma nos artigos. Portanto, apresentamos a seguir uma prova para a proposição.

**Proposição 3.4** *Toda Floresta orientada  $\vec{F}$  admite um homomorfismo  $h$  no ciclo direcionado  $\vec{C}_3$ , assim  $\chi_o(\vec{F}) \leq 3$ .*

*Demonstração.* Se cada componente conexa de um dado grafo orientado  $\vec{G}_1$  tem homomorfismo em um único grafo orientado  $\vec{G}_2$ , então  $\vec{G}_1$  também tem homomorfismo em  $\vec{G}_2$ . Assim, basta demonstrar que toda árvore  $\vec{T}$  admite um homomorfismo  $h$  no ciclo direcionado  $\vec{C}_3$  da Figura 3.4.

A demonstração pode ser feita por indução no número de vértices  $n$  da árvore. Para  $n = 1$  e  $v \in V(\vec{T})$ , podemos mapear  $v$  em qualquer vértice 1, 2, 3 do ciclo

direcionado  $\vec{C}_3$ . Para  $n = 2$  e  $uv \in A(\vec{T})$ , faça  $h(u) = 1$  e  $h(v) = 2$ , ou  $h(u) = 2$  e  $h(v) = 3$ , ou  $h(u) = 3$  e  $h(v) = 1$ .

Quando  $n > 2$ , suponha que  $\vec{T}$  admite um homomorfismo no ciclo direcionado  $\vec{C}_3$ . Seja  $v$  é uma folha de  $\vec{T}$ . A árvore  $\vec{T} - v$  tem  $n - 1$  vértices, então por hipótese  $\vec{T} - v$  admite um homomorfismo  $h$  no ciclo direcionado  $\vec{C}_3$ . Retorne  $v$  em  $\vec{T} - v$ , seja  $u$  o vizinho de  $v$ ,  $h(u) \in \{1, 2, 3\}$  e  $v$  pode ser mapeado em um vértice de  $\vec{C}_3$ .  $\square$

O grafo de cor para uma 3-coloração orientada de uma floresta orientada é o ciclo direcionado com 3 vértices apresentado na Figura 3.4.

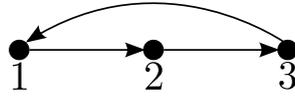


Figura 3.4: Ciclo direcionado com 3 vértices.

Pela Proposição 3.4 sabemos que uma floresta admite uma 3-coloração orientada. Na demonstração do Teorema 3.3, de que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \leq 80$ , é usado uma 4-coloração orientada para florestas. Assim uma pergunta natural que nós não respondemos é:

**Pergunta 3.5** *Utilizando uma 3-coloração orientada para florestas é possível melhorar este limite?*

## 3.2 Limite inferior para grafos planares

Uma maneira de estabelecer um limite inferior para o número cromático orientado de uma classe  $\vec{\mathcal{C}}$ , consiste em identificar um grafo orientado  $\vec{G}$  pertencente a  $\vec{\mathcal{C}}$ , tal que  $\chi_o(\vec{G}) = k$  e assim  $\chi_o(\vec{\mathcal{C}}) \geq k$ .

Seja  $\vec{G} = (V, A)$  um grafo orientado e  $x, y \in V(\vec{G})$ . Se existe um caminho direcionado de comprimento máximo 2 entre  $x$  e  $y$ , então  $x$  e  $y$  tem cores distintas em uma coloração orientada. Utilizando este fato, Sopena [39] descreve um primeiro limite inferior para os grafos planares. A seguir apresentamos a construção necessária para obtenção desse limite.

### 3.2.1 Borboletas

Considere  $\vec{G}_1$  um grafo orientado com um único vértice (grafo trivial), e  $\vec{G}_i$ ,  $2 \leq i$ , o grafo orientado obtido de duas cópias disjuntas de  $\vec{G}_{i-1}$  mais um vértice adicional  $x_i$  tal que  $x_i$  é incidente a todo vértice da segunda cópia e é incidido por todo vértice

da primeira cópia, note que  $|V(\vec{G}_i)| = 2^i - 1$ . Denotamos  $\vec{G}_i$  por  $\mathcal{B}_{2^i-1}$  a borboleta de ordem  $2^i - 1$ . Na Figura 3.5 apresentamos as borboletas  $\mathcal{B}_{2^i-1}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Por construção, existe um caminho direcionado de comprimento máximo 2 entre quaisquer dois vértices  $x, y \in \mathcal{B}_{2^i-1}$ . Logo, por definição,  $\chi_o(\mathcal{B}_{2^i-1}) = |V(\mathcal{B}_{2^i-1})| = 2^i - 1$ .

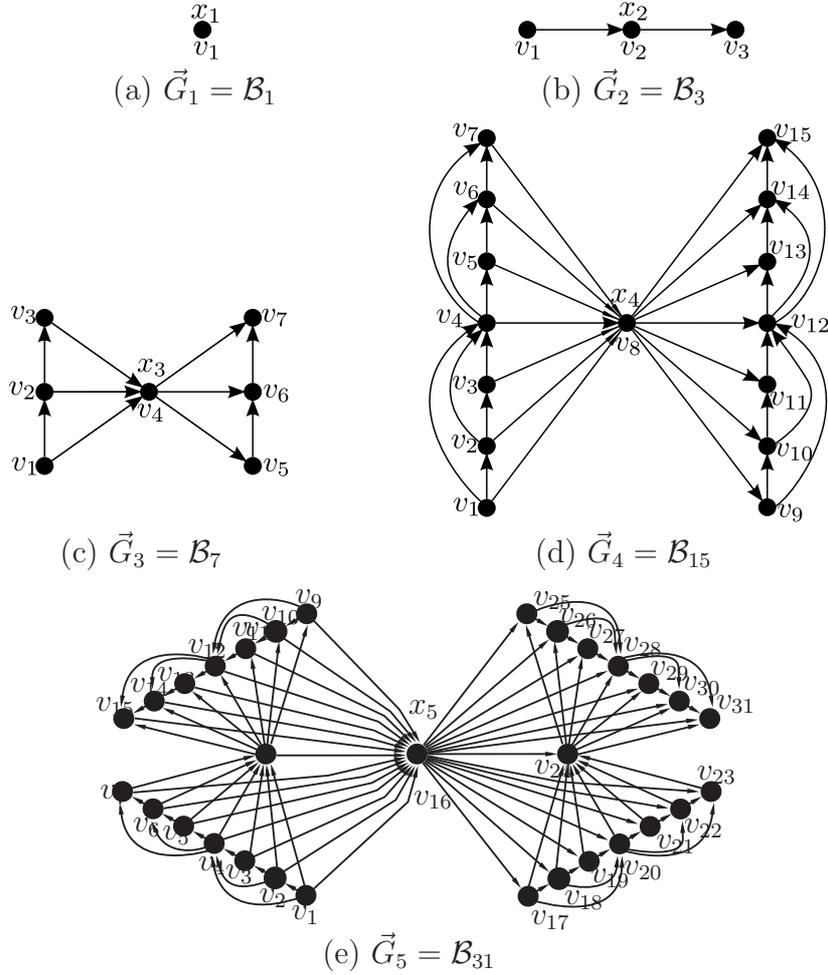


Figura 3.5: Grafos  $\vec{G}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , com  $\chi_o(\vec{G}_i) = |V(\vec{G}_i)| = 2^i - 1$ .

Note, pela Figura 3.5, que para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  os grafos  $\vec{G}_i$  pertencem a  $\vec{\mathcal{P}}$ . Como  $\chi_o(\vec{G}_4) = 15$ , temos um primeiro limite inferior para a classe dos grafos planares,  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 15$ . Sopena [42], em 2002, demonstrou que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$  e Marshall [30], em 2007, melhorou este resultado obtendo que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 17$ . Ambos resultados usam o fato de que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) = \chi_u(\vec{\mathcal{P}})$ , obtido pela Proposição 1.1, e estabelecem tais limites a partir de restrições no  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite. Ainda pela Proposição 1.1 e o artigo de Marshall [30], sabemos que existe um grafo planar  $\vec{G}$  tal que  $\chi_o(\vec{G}) = 17$ , porém este grafo nunca foi exibido pois a demonstração não é construtiva.

Nosso interesse é investigar tais limites, tentando exibir um grafo planar que alcance 16 ou 17 cores, e também contribuir para a demonstração de Sopena [42] de

que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ . Primeiro refinamos a estrutura do grafo  $\mathcal{B}_{15}$  obtendo um  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite com maior número de arcos, porém ainda com 15 cores. Depois mostramos um pequeno equívoco cometido em [42] para estabelecer que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ . Na busca do estabelecimento desta afirmação, Sopena [42] usou o Teorema 3.8 onde substituindo o valor de  $n$  por 1, temos que: Não existe um torneio com 15 vértices tal que o conjunto dos sucessores de cada vértice tem pelo menos 7 vértices, o conjunto dos sucessores de cada dois vértices tem pelo menos 3 vértices em comum e o conjunto dos sucessores de cada três vértices tem pelo menos 1 vértices em comum. Sopena demonstrou que se  $\vec{U}$  é um  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite minimal com 15 vértices, então  $\vec{U}$  é um torneio onde o conjunto dos sucessores de cada vértice tem pelo menos 7 vértices e o conjunto dos sucessores de cada dois vértices tem pelo menos 3 vértices em comum. Assim, para concluir que não existe  $\vec{U}$  com 15 vértices, faltava verificar que o conjunto dos sucessores de cada três vértices tem pelo menos 1 vértices em comum, neste ponto ocorre uma lacuna na demonstração do Lema 3.13 que não conseguimos corrigir.

### Refinamento do Grafo $\mathcal{B}_{15}$

Sopena [42] e Marshall [30] estabeleceram, respectivamente, os limites inferiores  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$  e  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 17$ , porém ambos não apresentaram um grafo planar orientado  $\vec{G}$  alcançando estes limites. Na tentativa de encontrar um grafo planar orientado  $\vec{G}$  com  $\chi_o(\vec{G}) > 15$ , construímos a partir de  $\mathcal{B}_{15}$  o grafo planar orientado  $\mathcal{B}_{75}^* = (V, A)$  mais robusto com relação ao número de vértices e arcos. Nosso grafo  $\mathcal{B}_{75}^*$  tem um conjunto com 75 vértices:

$$V = \bigcup_{i=1}^6 \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}, v_{i,5}, v_{i,6}, v_{i,7}\} \cup \{v_8\} \cup \bigcup_{i=9}^{14} \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}, v_{i,5}, v_{i,6}, v_{i,7}\}.$$

Onde os vértices  $v_{i+1,1}$  e  $v_{i,7}$  representam o mesmo vértice. O conjunto de arcos é definido por:

$$A = \bigcup_{i=1}^6 \{ \{v_{i,j}v_{i,j+1}, v_{i,1}v_{i,4}, v_{i,2}v_{i,4}, v_{i,4}v_{i,6}, v_{i,4}v_{i,7} : j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \cup \\ \{v_{i,7}v_{i,1}, v_{i,6}v_{i,7}\} \cup \{v_{i,j}v_8, v_8v_{k,\ell} : i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, l \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}\} \cup$$

$$\bigcup_{i=9}^{14} \{ \{v_{i,j}v_{i,j+1}, v_{i,1}v_{i,4}, v_{i,2}v_{i,4}, v_{i,4}v_{i,6}, v_{i,4}v_{i,7}, : j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \cup \\ \{v_{i,7}v_{i,1}, v_{i,6}v_{i,7}\} \}.$$

Seja  $U = \{v_{1,1}, \dots, v_{7,1}, v_8, v_{9,1}, \dots, v_{15,1}\}$  um subconjunto de  $V(\mathcal{B}_{75}^*)$  então o subgrafo induzido  $\mathcal{B}_{75}^*[U]$  é isomorfo ao grafo  $\mathcal{B}_{15}$ . Apresentamos nosso grafo na Figura 3.6.

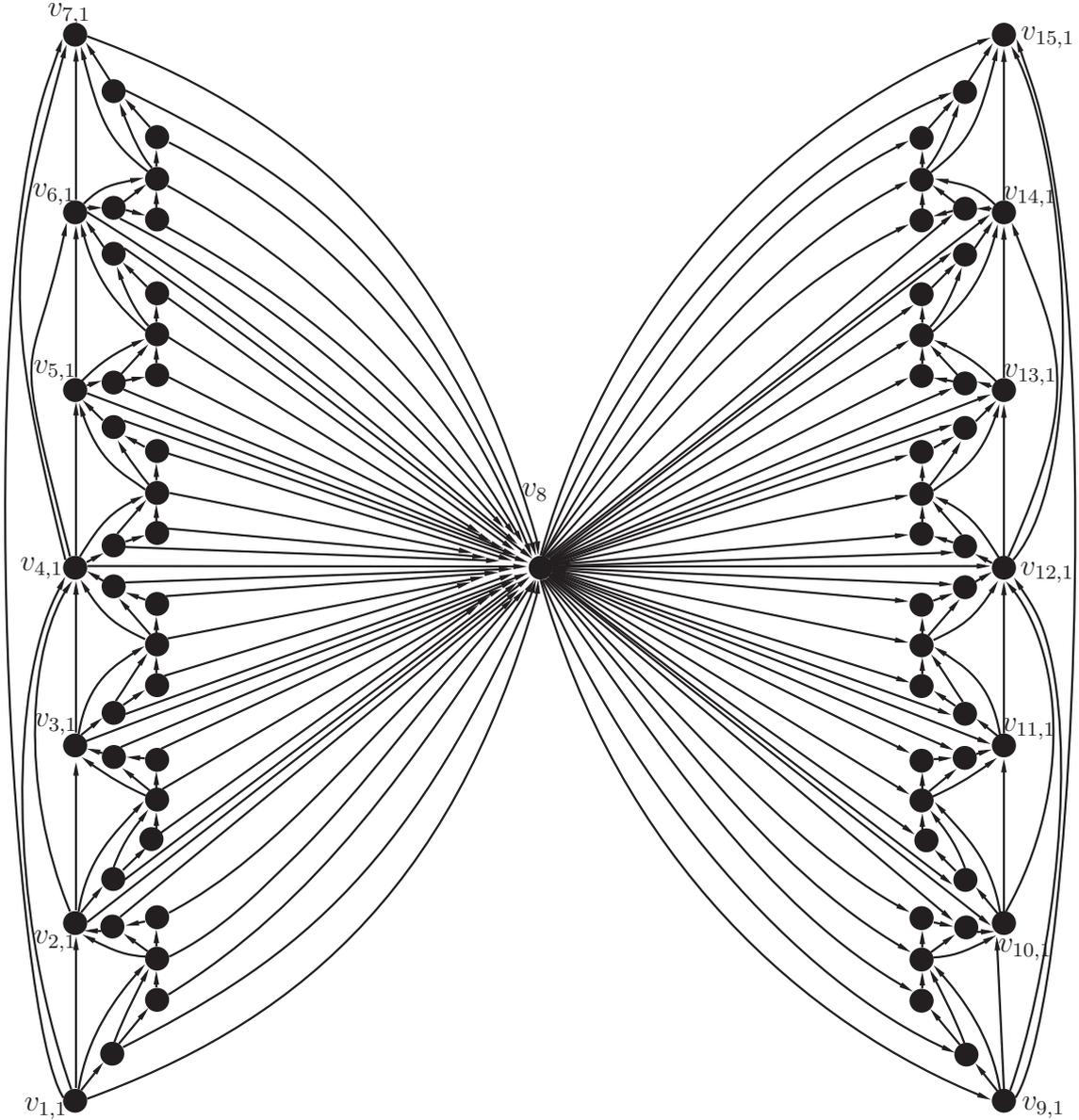


Figura 3.6: Grafo planar orientado  $\mathcal{B}_{75}^*$  com  $\chi_o = 15$ ,  $|V| = 75$  e  $|E| = 216$ .

**Teorema 3.6**  $\mathcal{B}_{75}^*$  tem uma 15-coloração orientada e o grafo de cor  $\vec{C}$  para  $\mathcal{B}_{75}^*$  tem 22 arcos a mais que o grafo de cor para  $\mathcal{B}_{15}$ . Além disso, sejam os conjuntos de vértices  $C_1 = \{1, 2, \dots, 8\}$  and  $C_2 = \{8, 9, \dots, 15\}$ , os subgrafos induzidos  $\vec{C}[C_1]$  e  $\vec{C}[C_2]$  são torneios.

*Demonstração.* Da construção de Sopena sabemos que  $\mathcal{B}_{15}$  tem uma 15-coloração orientada  $c$ , assumimos que  $c(v_{i,1}) = i$  e  $c(v_8) = 8$ ,  $v_{i,1}, v_8 \in V(\mathcal{B}_{75}^*), i = 1, \dots, 7, 9, \dots, 15$ . Mostramos como essa coloração deve ser estendida a fim de colorir  $\mathcal{B}_{75}^*$ .

Procedemos analisando a extensão das cores para cada conjunto  $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}, v_{i,5}, v_{i,6}, v_{i,7}\}$  de vértices,  $i = 1, \dots, 6$ . Na demonstração, usamos  $N_1 \rightarrow N_2$ ,  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , para denotar que existe um arco  $N_1 N_2$  entre as cores  $N_1$  e  $N_2$  no grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ .

**Item 1** Sabemos que  $c(v_{4,4}) \neq 6$  e  $c(v_{4,6}) \neq 6$ , desde que  $5 \rightarrow 6$  e  $c(v_{4,7}) = c(v_{5,1}) = 5$ , e  $v_{4,4}v_{4,7}, v_{4,6}v_{4,7} \in A$ . Além disso,  $c(v_{4,2}) \neq 1$  e  $c(v_{4,4}) \neq 1$ ,  $c(v_{4,2}) \neq 2$  e  $c(v_{4,4}) \neq 2$ , e  $c(v_{4,2}) \neq 3$  e  $c(v_{4,4}) \neq 3$ , desde que  $1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4$ ,  $c(v_{4,1}) = 4$ , e  $v_{4,1}v_{4,4}, v_{4,1}v_{4,2} \in A$ . Consequentemente,  $c(v_{4,4}) = 7$ .

Como  $v_{4,4}v_{4,5}, v_{4,4}v_{4,6} \in A$  e  $1 \rightarrow 7$ ,  $c(v_{4,5}) \neq 1 \neq c(v_{4,6})$ . Portanto,  $c(v_{4,3}) = 1$ . Como  $2 \rightarrow 3$ , temos que  $c(v_{4,5}) = 2$ , e  $c(v_{4,6}) = 3$ . Finalmente,  $c(v_{4,2}) = 6$ .

Note que, o homomorfismo original de  $\mathcal{B}_{15}$  define somente a relação mostrada na Figura 3.7 sobre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

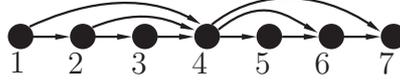


Figura 3.7: Relação entre as cores de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para  $\mathcal{B}_{15}$ .

Apresentamos na Figura 3.8 a relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para o grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ , obtemos essa relação após a análise do Item 1.

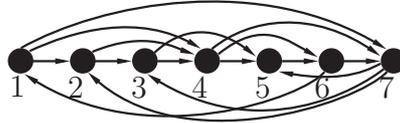


Figura 3.8: Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 1.

**Item 2** Como  $v_{3,4}v_{3,7}, v_{3,6}v_{3,7} \in A$ ,  $c(v_{3,7}) = 4$ ,  $4 \rightarrow 5$ ,  $4 \rightarrow 6$  e  $4 \rightarrow 7$ , então  $c(v_{3,4}) \neq 5$  e  $c(v_{3,6}) \neq 5$ ,  $c(v_{3,4}) \neq 6$  e  $c(v_{3,6}) \neq 6$ , e  $c(v_{3,4}) \neq 7$  e  $c(v_{3,6}) \neq 7$ . Como  $2 \rightarrow 3$ ,  $c(v_{3,1}) = 3$ , e  $v_{3,1}v_{3,4} \in A$  temos que  $c(v_{3,4}) \neq 2$ , e então  $c(v_{3,4}) = 1$ . Desde que  $v_{3,2}v_{3,4}, v_{3,3}v_{3,4} \in A$ ,  $1 \rightarrow 7$  e  $c(v_{3,4}) = 1$ , temos que  $c(v_{3,3}) \neq 7$  e  $c(v_{3,2}) \neq 7$ . Como  $5 \rightarrow 6$  temos que  $c(v_{3,2}) = 5$ ,  $c(v_{3,3}) = 6$ , e  $c(v_{3,5}) = 7$ . Finalmente,  $c(v_{3,6}) = 2$ .

Apresentamos na Figura 3.9 a relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para o grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ , obtemos essa relação após a análise do Item 2.

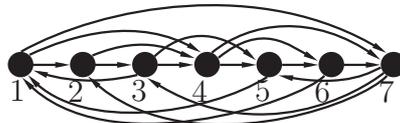


Figura 3.9: Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 2.

**Item 3** Como  $v_{1,4}v_{1,7}, v_{1,6}v_{1,7} \in A$ ,  $c(v_{1,7}) = 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 4$ , então  $3 \neq c(v_{1,4}) \neq 4$  e  $3 \neq c(v_{1,6}) \neq 4$ . Como  $5 \rightarrow 1$  e  $6 \rightarrow 1$ ,  $v_{1,1}v_{1,4}, v_{1,1}v_{1,2} \in A$ , então  $c(v_{1,2}) \neq 5 \neq c(v_{1,4})$  e  $c(v_{1,2}) \neq 6 \neq c(v_{1,4})$ . Consequentemente,  $\underline{c(v_{1,4}) = 7}$ . Desde que  $v_{1,4}v_{1,5}, v_{1,4}v_{1,6} \in A$ ,  $4 \rightarrow 7$  e  $6 \rightarrow 7$ , então  $4 \neq c(v_{1,5}) \neq 6$  e  $4 \neq c(v_{1,6}) \neq 6$ . Como  $5 \rightarrow 6$ , temos que  $\underline{c(v_{1,2}) = 4}$  e  $\underline{c(v_{1,3}) = 6}$ . Como  $3 \rightarrow 5$ ,  $\underline{c(v_{1,5}) = 3}$  e  $\underline{c(v_{1,6}) = 5}$ .

Apresentamos na Figura 3.10 a relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para o grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ , obtemos essa relação após a análise do Item 3.

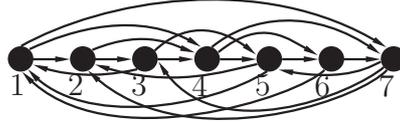


Figura 3.10: Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 3.

**Item 4** Desde que  $v_{6,4}v_{6,7}, v_{6,6}v_{6,7} \in A$ ,  $c(v_{6,7}) = 7$ ,  $7 \rightarrow 2$ ,  $7 \rightarrow 3$ , então  $2 \neq c(v_{6,4}) \neq 3$  e  $2 \neq c(v_{6,6}) \neq 3$ . Como  $4 \rightarrow 6$  e  $5 \rightarrow 6$ ,  $v_{6,1}v_{6,4}, v_{6,1}v_{6,2} \in A$ , então  $c(v_{6,2}) \neq 4 \neq c(v_{6,4})$  e  $c(v_{6,2}) \neq 5 \neq c(v_{6,4})$ . Assim,  $\underline{c(v_{6,4}) = 1}$ . Desde que  $v_{6,4}v_{6,5}, v_{6,4}v_{6,6} \in A$ ,  $c(v_{6,4}) = 1$ ,  $3 \rightarrow 1$  e  $5 \rightarrow 1$ , então  $c(v_{6,5}) \neq 3 \neq c(v_{6,6})$  e  $c(v_{6,5}) \neq 5 \neq c(v_{6,6})$ . Como  $3 \rightarrow 5$  e  $2 \rightarrow 4$ , então  $\underline{c(v_{6,2}) = 3}$ ,  $\underline{c(v_{6,3}) = 5}$ ,  $\underline{c(v_{6,5}) = 2}$  e  $\underline{c(v_{6,6}) = 4}$ .

Apresentamos na Figura 3.11 a relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para o grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ , obtemos essa relação após a análise do Item 4.

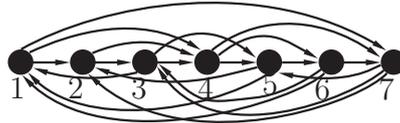


Figura 3.11: Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 4.

**Item 5** Como  $v_{5,4}v_{5,7}, v_{5,6}v_{5,7} \in A$ ,  $c(v_{5,7}) = 6$ ,  $6 \rightarrow 1$ ,  $6 \rightarrow 7$ , então  $1 \neq c(v_{5,4}) \neq 7$  e  $1 \neq c(v_{6,6}) \neq 7$ . Como  $3 \rightarrow 5$  e  $4 \rightarrow 5$ ,  $v_{5,1}v_{5,4}, v_{5,1}v_{5,2} \in A$ , então  $c(v_{5,2}) \neq 3 \neq c(v_{5,4})$  e  $c(v_{5,2}) \neq 4 \neq c(v_{5,4})$ . Consequentemente,  $\underline{c(v_{5,4}) = 2}$ . Desde que  $v_{5,4}v_{5,5}, v_{5,4}v_{5,6} \in A$ ,  $c(v_{5,4}) = 2$ ,  $1 \rightarrow 2$  e  $7 \rightarrow 2$ , então  $c(v_{5,5}) \neq 1 \neq c(v_{5,6})$  e  $c(v_{5,5}) \neq 7 \neq c(v_{5,6})$ . Como  $1 \rightarrow 7$  e  $3 \rightarrow 4$ , então  $\underline{c(v_{5,2}) = 1}$ ,  $\underline{c(v_{5,3}) = 7}$ ,  $\underline{c(v_{5,5}) = 3}$  e  $\underline{c(v_{5,6}) = 4}$ .

Apresentamos na Figura 3.12 a relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para o grafo de cor de  $\mathcal{B}_{75}^*$ , obtemos essa relação após a análise do Item 5.

Fazendo as mesmas considerações para os vértices  $v_8 \cup \bigcup_{i=9}^{14} \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}, v_{i,5}, v_{i,6}, v_{i,7}\}$ , obtemos o resultado desejado.  $\square$

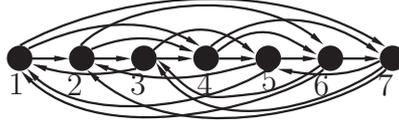


Figura 3.12: Relação entre as cores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 após o Item 5.

Do resultado anterior, obtemos um grafo de cor com 15 vértices para os grafos planares, no qual conhecemos todas as restrições entre as cores de 1 a 8 e entre as cores de 8 a 15. Usando a construção definida na demonstração do Lema 3.11, podemos criar as restrições entre os conjuntos de cores  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ . Até o momento não conseguimos fixar tais restrições e apresentar o torneio de cor com 15 vértices para os grafos planares.

**Pergunta 3.7** *A exploração da construção de tal torneio pode facilitar a obtenção de um grafo orientado planar  $\vec{G}$  com  $\chi_o(\vec{G}) \geq 16$ ?*

### 3.2.2 Uma lacuna na determinação de $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ por Sopena

Na busca para estabelecer  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ , Sopena [42] usou o Teorema 3.8 onde substituindo o valor de  $n$  por 1, temos que: Não existe um torneio com 15 vértices tal que o conjunto dos sucessores de cada vértice tem pelo menos 7 vértices, o conjunto dos sucessores de cada dois vértices tem pelo menos 3 vértices em comum e o conjunto dos sucessores de cada três vértices tem pelo menos 1 vértices em comum. Como  $\chi_o(\mathcal{B}_{15}) = 15$  (veja  $\mathcal{B}_{15}$  na Figura 3.5 (d)), então um  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite tem pelo menos 15 vértices. No restante desta seção vamos usar  $\vec{U}$  para denotar o  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite minimal. Sopena demonstrou que se  $\vec{U}$  tem 15 vértices, então  $\vec{U}$  é um torneio, pelo Lema 3.11 o conjunto dos sucessores de cada vértice tem pelo menos 7 vértices, e pelo Lema 3.12 o conjunto dos sucessores de cada dois vértices tem pelo menos 3 vértices em comum. Assim, para concluir que não existe  $\vec{U}$  com 15 vértices, faltava verificar que o conjunto dos sucessores de cada três vértices tem pelo menos 1 vértices em comum, neste ponto ocorre uma lacuna na demonstração do Lema 3.13.

**Teorema 3.8 (Brown e Reid [11])** *Não existe um torneio com  $8n + 7$  vértices tal que o conjunto dos sucessores de cada vértice tem pelo menos  $4n + 3$  vértices, o conjunto dos sucessores de cada dois vértices tem pelo menos  $2n + 1$  vértices em comum e o conjunto dos sucessores de cada três vértices tem pelo menos  $n$  vértices em comum.*

Vamos analisar a lacuna na demonstração do Lema 3.13 de Sopena. Primeiro, vamos transcrever alguns resultados preliminares do artigo [42].

**Teorema 3.9 (Sopena [42])**  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ .

A demonstração do Teorema 3.9 será feita ao longo desta seção. Seja  $\vec{G}$  um grafo orientado e  $x \in V(\vec{G})$ , denotamos o subgrafo de  $\vec{G}$  induzido pelos sucessores de  $x$  por  $\Gamma_{\vec{G}}^+(x)$ , e o subgrafo de  $\vec{G}$  induzido pelos predecessores de  $x$  por  $\Gamma_{\vec{G}}^-(x)$ .

**Lema 3.10 (Sopena [42])** *Existe um grafo planar orientado  $\vec{P}^*$  tal que para todo homomorfismo  $\varphi : \vec{P}^* \rightarrow \vec{U}$  e todo arco  $uv \in E(\vec{U})$  existe um arco  $xy \in E(\vec{P}^*)$  tal que  $\varphi(x) = u$  e  $\varphi(y) = v$ .*

*Esquema da demonstração.* Como  $\vec{U}$  é minimal, existe um grafo planar orientado  $\vec{P}_{uv}$  tal que todo homomorfismo de  $\vec{P}_{uv}$  para  $\vec{U}$  usa  $uv \in E(\vec{U})$ .  $\vec{P}^*$  é obtido pegando uma cópia de  $\vec{P}_{uv}$  para cada  $uv \in E(\vec{U})$  e identificando um vértice de cada um deles em um único vértice. Veja um exemplo na Figure 1.8.  $\vec{P}^*$  é planar e cada homomorfismo de  $\vec{P}^*$  em  $\vec{U}$  tem que utilizar todos os arcos de  $\vec{U}$ .  $\square$

**Lema 3.11 (Sopena [42])** *Para todo vértice  $u \in V(\vec{U})$ ,  $|V(\Gamma_{\vec{U}}^+(u))| \geq 7$  e  $|V(\Gamma_{\vec{U}}^-(u))| \geq 7$ .*

*Esquema da demonstração.* Seja  $\vec{P}^*$  o grafo orientado obtido do Lema 3.10 e  $\mathcal{B}_7$  a borboleta de ordem 7. Obtemos um grafo planar orientado  $\vec{P}$  de  $\vec{P}^*$  pela adição de duas cópias de  $\mathcal{B}_7$  para cada vértice  $x \in V(\vec{P}^*)$  com arcos de  $x$  para cada vértice da primeira cópia e arcos de cada vértice da segunda cópia para  $x$ . Cada homomorfismo de  $\vec{P}$  em  $\vec{U}$  tem que usar cada vértice de  $\vec{U}$  e como  $\chi_o(\mathcal{B}_7) = 7$ , isto finaliza a demonstração.  $\square$

Como consequência do Lema 3.11, em particular, se  $\vec{U}$  é um grafo orientado com 15 vértices então  $\vec{U}$  é um torneio e cada vértice  $u \in V(\vec{U})$  tem 7 predecessores e 7 sucessores.

**Lema 3.12 (Sopena [42])** *Se  $\vec{U}$  é um torneio com 15 vértices, então para cada arco  $uv \in A(\vec{U})$ , e para cada  $X \in \{\Gamma_{\vec{U}}^+(u), \Gamma_{\vec{U}}^-(u)\}$ ,  $Y \in \{\Gamma_{\vec{U}}^+(v), \Gamma_{\vec{U}}^-(v)\}$ ,  $|V(X \cap Y)| \geq 3$ . Além disso, se  $|V(X \cap Y)| = 3$  então o subgrafo  $X \cap Y$  é o ciclo direcionado com 3 vértices.*

Pelo Lema 3.12, se  $\vec{U}$  é um torneio com 15 vértices então para quaisquer dois vértices  $u, v \in V(\vec{U})$ , um dos quatro subgrafos  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$ ,  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^-(v)$ ,  $\Gamma_{\vec{U}}^-(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$  e  $\Gamma_{\vec{U}}^-(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^-(v)$  tem exatamente 4 vértices, enquanto cada um dos outros três subgrafos é um ciclo direcionado com três vértices.

A seguir, transcrevemos e discutimos a lacuna na demonstração do Lema 3.13.

**Lema 3.13 (Sopena [42])** *Se  $\vec{U}$  é um torneio com 15 vértices então quaisquer 3 vértices  $u, v, w \in V(\vec{U})$  tem um sucessor em comum.*

*Demonstração.* São dois casos a considerar dependendo se  $u, v, w$  induzem um torneio transitivo ou um ciclo direcionado.

*Caso 1:*  $u, v, w$  induzem um torneio transitivo. Sem perda de generalidade, assumamos que  $uv, vw, wu \in A(\vec{U})$ . Se  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$  é o ciclo direcionado com 3 vértices, Lema 3.12, como  $w \in V(\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v))$  então o sucessor de  $w$  neste ciclo é um sucessor de  $u$  e  $v$ . Suponha agora que  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$  tem 4 vértices. Se  $w$  tem um sucessor em  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$  então este sucessor é novamente um sucessor de  $u$  e  $v$ . Se  $w$  não tem sucessor em  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$ , vamos contar os predecessores de  $w$  em  $\vec{U}$ . Sabemos que  $w$  tem 3 predecessores em  $\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v)$ , 3 predecessores em  $\Gamma_{\vec{U}}^-(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^-(w)$ , e incluindo  $u$  e  $v$ , dão 8 predecessores. Uma contradição com o Lema 3.11.

*Caso 2:*  $u, v, w$  induzem um ciclo direcionado. Assuma por contradição que  $u, v, w$  não tem sucessor comum em  $\vec{U}$ . Na Figura 3.13 representamos a estrutura do grafo  $\vec{U}$ , esta estrutura será utilizada para mostrar uma contradição com o Lema 3.11.

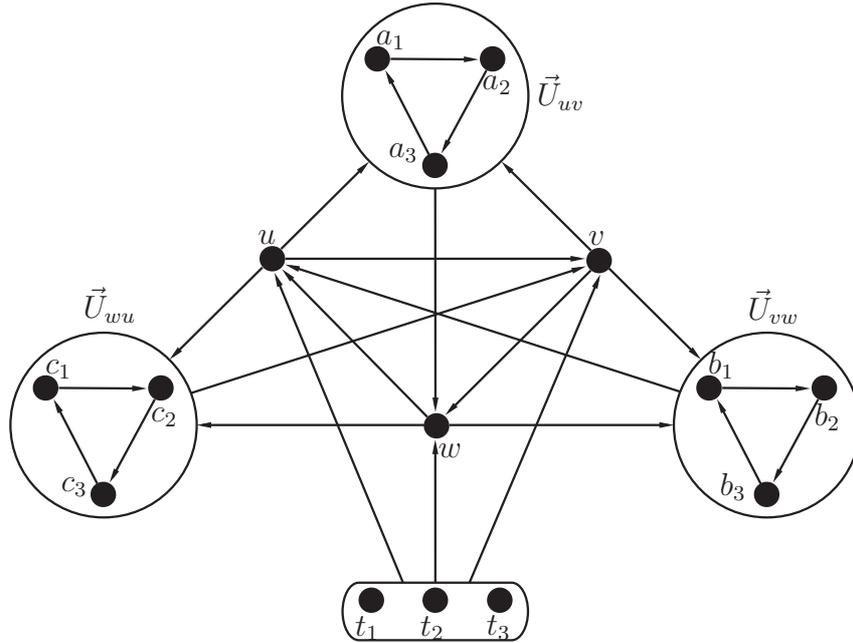


Figura 3.13: A estrutura do grafo orientado  $\vec{U}$ .

Os conjuntos  $V(\Gamma_{\vec{U}}^+(u) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(v))$ ,  $V(\Gamma_{\vec{U}}^+(v) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(w))$  e  $V(\Gamma_{\vec{U}}^+(w) \cap \Gamma_{\vec{U}}^+(u))$  serão denotados, respectivamente, por  $\vec{U}_{uv}$ ,  $\vec{U}_{vw}$  e  $\vec{U}_{wu}$ . Estes 3 conjuntos são disjuntos, senão os vértices entre  $u, v, w$  teriam um sucessor em comum. Pelo Lema 3.12 os conjuntos  $\vec{U}_{uv}$ ,  $\vec{U}_{vw}$ ,  $\vec{U}_{wu}$  contém no mínimo 3 vértices e, por hipótese,  $w$  é um sucessor de  $\vec{U}_{uv}$ ,  $u$  é um sucessor de  $\vec{U}_{vw}$  e  $v$  é um sucessor de  $\vec{U}_{wu}$ .

Pela estrutura do grafo  $\vec{U}$ , os sucessores do vértice  $u$  são os vértices dos conjuntos  $\vec{U}_{uv}$  e  $\vec{U}_{wu}$ , bem como o vértice  $v$ . Desta forma,  $\vec{U}_{uv}$  e  $\vec{U}_{wu}$  contém exatamente 3 vértices cada, senão haveria uma contradição com o Lema 3.11. Seguindo o mesmo

caminho, mas usando os sucessores de  $v$  ou de  $w$ , o terceiro conjunto  $\vec{U}_{vw}$  também contém exatamente 3 vértices. Pelo Lema 3.12, cada um destes 3 conjuntos induz um ciclo direcionado com 3 vértices. Seja então  $\vec{U}_{uv}$  o ciclo direcionado  $a_1a_2a_3$ ,  $\vec{U}_{vw}$  o ciclo direcionado  $b_1b_2b_3$  e  $\vec{U}_{wu}$  o ciclo direcionado  $c_1c_2c_3$ . Os 3 vértices restantes no grafo  $\vec{U}$  serão denotados por  $t_1, t_2$  e  $t_3$ . Desde que  $u, v$  e  $w$  já têm 7 sucessores, os vértices  $t_1, t_2$  e  $t_3$  são necessariamente predecessores de  $u, v$  e  $w$ , caso contrário haveria uma contradição com o Lema 3.11.

Finalmente, pelo Lema 3.12, deve existir no mínimo 3 sucessores comuns entre  $u$  e qualquer  $a_i, 1 \leq i \leq 3$ . Um deles é  $a_{i+1} \pmod{3}$  e há pelo menos dois outros necessariamente ao longo de  $\vec{U}_{uv}$ . **A lacuna** ocorre neste ponto, quando Sopena conta os sucessores comuns de  $u$  e qualquer  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ , considerando que cada  $c_i$  tem pelo menos dois sucessores em  $\vec{U}_{uv}$ . Então o número de arcos entre  $\vec{U}_{uv}$  e  $\vec{U}_{wu}$  é pelo menos 12, chegando a uma contradição desde que cada um destes conjuntos têm somente 3 vértices.  $\square$

A lacuna na demonstração anterior está no fato de que  $u$  e qualquer  $c_i$  podem ter apenas um sucessor em  $\vec{U}_{uv}$ . Pelo Lema 3.12, devem existir no mínimo 3 sucessores comuns entre  $u$  e qualquer  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ . Um deles é  $c_{i+1} \pmod{3}$ , outro é o vértice  $v$  que não foi contado na demonstração anterior, e necessariamente existe pelo menos outro vértice no conjunto  $\vec{U}_{uv}$ . Assim o número de arcos entre  $\vec{U}_{uv}$  e  $\vec{U}_{wu}$  deve ser 9. Agora vamos continuar com a construção do grafo  $\vec{U}$ .

Vamos considerar a demonstração anterior até o último paragrafo. Vamos adicionar mais algumas arestas para o grafo  $\vec{U}$  a partir das propriedades já conhecidas. Pelo Lema 3.12, existem pelo menos 3 sucessores comuns entre cada dois vértices em  $V(\vec{U})$ .

Considerando os sucessores comuns de  $u$  e qualquer  $a_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $a_{i+1} \pmod{3}$  e os outros dois estão necessariamente em  $\vec{U}_{uv}$ . Considerando os sucessores comuns entre  $u$  e qualquer  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $c_{i+1} \pmod{3}$ , outro é o vértice  $v$  e existe um último vértice em  $\vec{U}_{uv}$ .

Considerando os sucessores comuns de  $w$  e qualquer  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $c_{i+1} \pmod{3}$  e os outros dois estão necessariamente em  $\vec{U}_{vw}$ . Considerando os sucessores comuns entre  $w$  e qualquer  $b_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $b_{i+1} \pmod{3}$ , outro é o vértice  $u$  e existe um último vértice em  $\vec{U}_{vw}$ .

Agora considerando os sucessores comuns de  $v$  e qualquer  $a_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $a_{i+1} \pmod{3}$ , outro é o vértice  $w$  e existe um último vértice em  $\vec{U}_{vw}$ . Agora considerando os sucessores comuns de  $v$  e qualquer  $b_i, 1 \leq i \leq 3$ , um deles é  $b_{i+1} \pmod{3}$  e os outros dois estão necessariamente em  $\vec{U}_{uv}$ . Apresentamos o grafo  $\vec{U}$  acrescentado dos arcos descritos na Figura 3.14. Note que, cada um arco que

começa em um conjunto (conjunto de saída) e fim em outro conjunto (conjunto de entrada), representa que todos os vértices do conjunto de saída têm um arco para algum vértice do conjunto de entrada.

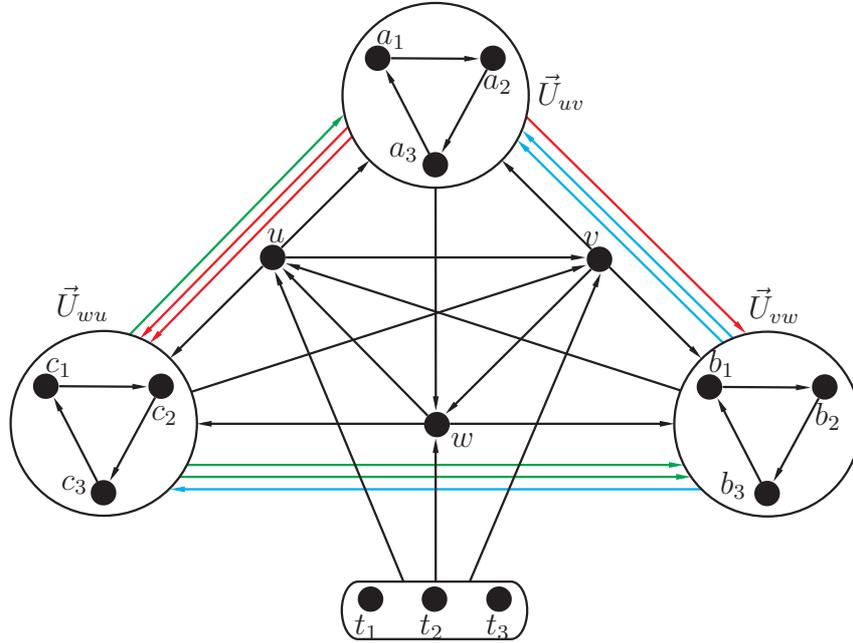


Figura 3.14: A estrutura corrente do grafo  $\vec{U}$ .

Denominamos por  $T$  o conjunto dos vértices  $t_1, t_2, t_3$ . Note que, não pode ser adicionado mais arcos entre os vértices  $u, v, w, a_i, b_i$  e  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ .

Como cada vértice  $a_i, b_i$  e  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ , tem somente cinco sucessores e pelo Lema 3.11 deve ter sete, então existem mais dois sucessores em  $T$  para cada  $a_i, b_i$  e  $c_i$ . Assim os predecessores de cada  $t_i, 1 \leq i \leq 3$ , estão completos.

Como cada  $t_i, 1 \leq i \leq 3$ , já tem quatro sucessores ( $u, v, w$  e  $t_{i+1}$ ) e pelo Lema 3.11 deve ter sete sucessores, ainda faltam três sucessores. Cada vértice  $t_i, 1 \leq i \leq 3$ , tem um sucessor em comum com o vértice  $u$  (resp.  $v$  e  $w$ ), que é  $v$  (resp.  $w$  e  $u$ ). Como cada vértice  $t_i, 1 \leq i \leq 3$ , deve ter mais dois sucessores comuns com cada um dos vértices  $u, v$  e  $w$ , então cada  $t_i$  tem um sucessor em  $U_{uv}$ , um em  $U_{wu}$  e um em  $U_{vw}$ . Assim, os sucessores de cada  $t_i, 1 \leq i \leq 3$ , estão completos e além disso  $t_i$  tem três sucessores em comum com cada um dos vértices  $u, v$  e  $w$ .

Os predecessores comuns de  $u$  e  $v$  são  $t_1, t_2$  e  $t_3$ , portanto pelo Lema 3.12 o subgrafo induzido  $\vec{U}[T]$  é o ciclo direcionado com três vértices. Assim, concluímos a construção do grafo  $\vec{U}$  com respeito aos Lemas 3.11 e 3.12. Apresentamos a estrutura corrente do grafo  $\vec{U}$  acrescentado dos arcos descritos na Figura 3.15. Assim nós não conseguimos chegar a uma contradição e o resultado de Sopena não está corretamente demonstrado.

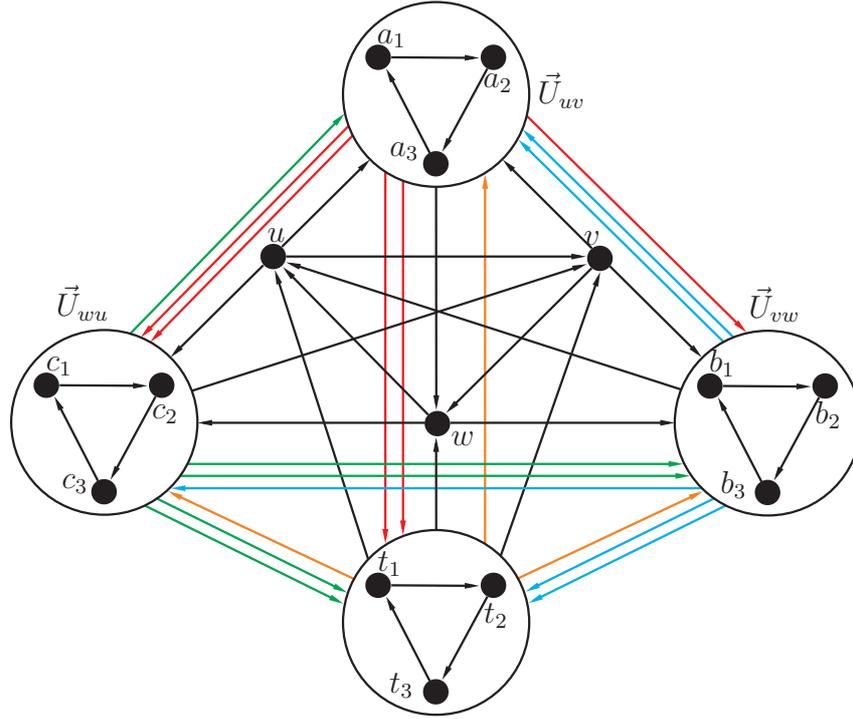


Figura 3.15: A estrutura corrente do grafo  $\vec{U}$ .

Apesar dessa lacuna, Marshall [30] em 2007 demonstrou que cada  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite tem grau máximo pelo menos 16, assim  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 17$ . O resultado de Marshall [30] continua válido, pois não usa  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$  de Sopena [42]. Além disso, a idéia de Sopena [42] de limitar o número cromático orientado de grafos planares pelo seu  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite, veja Proposição 1.1, foi amplamente utilizada em outros artigos incluindo o resultado de Marshall [30].

### 3.3 Uma característica para o limite homomórfico de grafos planares e de grafos cúbicos

Nesta seção apresentamos o torneio  $\vec{K}_5^U$  (Figura 3.16), o único torneio com 5 vértices que contém como subgrafo todos os torneios com 4 vértices. O torneio  $\vec{K}_5^U$  deve ser subgrafo de todo limite homomórfico para os grafos planares e para os grafos cúbicos, veja Teorema 3.15. Relembramos que  $\vec{\mathcal{P}}$  é a classe dos grafos planares orientados, e vamos denotar  $\vec{\mathcal{C}}$  a classe dos grafos cúbicos orientados. Primeiro demonstramos que todo torneio com 4 vértices tem homomorfismo em  $\vec{K}_5^U$ .

**Lema 3.14** *Todo torneio com 4 vértices tem pelo menos um homomorfismo  $f$  em  $\vec{K}_5^U$  da Figura 3.16.*

*Demonstração.* Existem apenas 4 torneios com 4 vértices livres de isomorfismo [4], apresentamos estes torneios na Figura 3.17. A Tabela 3.2 contém um homomorfismo

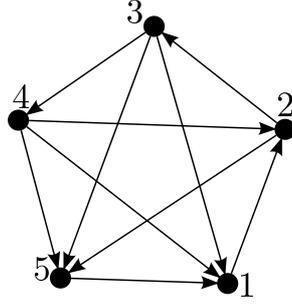


Figura 3.16:  $\vec{K}_5^U$ .

$f : V(\vec{K}_4^i) \rightarrow V(\vec{K}_5^U)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , entre os vértices de cada grafo da Figura 3.17 e os vértices de  $\vec{K}_5^U$  da Figura 3.16. Assim, concluímos que todos os torneios com 4

Tabela 3.2: Resultado da função  $f(v_j)$ , onde  $v_j \in V(\vec{K}_4^i)$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$ .

	$\vec{K}_4^1$	$\vec{K}_4^2$	$\vec{K}_4^3$	$\vec{K}_4^4$
$f(v_1) =$	1	5	3	2
$f(v_2) =$	4	1	4	5
$f(v_3) =$	5	2	2	1
$f(v_4) =$	3	4	5	3

vértices têm pelo menos um homomorfismo em  $\vec{K}_5^U$ . □

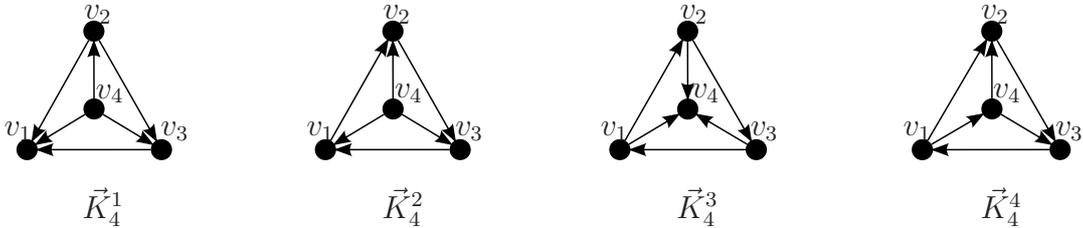


Figura 3.17: Todos os torneios com 4 vértices livres de isomorfismo.

Sabemos do Lema 3.14 que todo torneio com 4 vértices tem uma  $\vec{K}_5^U$ -coloração orientada. Assim, todo grafo que tem uma 4-coloração orientada também tem uma  $\vec{K}_5^U$ -coloração orientada. Observamos que as funções de homomorfismo contidas na Tabela 3.2 também representam que os torneios com 4 vértices são subgrafos de  $\vec{K}_5^U$ . Agora, demonstramos que  $\vec{K}_5^U$  é o único torneio com 5 vértices que contém todos os torneios com 4 vértices como subgrafo.

**Teorema 3.15** *Todo  $\vec{\mathcal{P}}$ -limite e todo  $\vec{\mathcal{C}}$ -limite possui o torneio  $\vec{K}_5^U$  como subgrafo.*

*Demonstração.* Segue do Lema 3.14 que  $\vec{K}_5^U$  contém todos os torneios com 4 vértices como subgrafo. Basta verificarmos que os outros torneios com 5 vértices

não contém algum torneio com 4 vértices como subgrafo. Apresentamos na Figura 3.18 todos os torneios com 5 vértices livres de isomorfismo, o número de torneios com 5 vértices livres de isomorfismo pode ser encontrado nos Livros de Gross e Yellen [25] e de Harary e Palmer [27]. Para cada torneio  $\vec{K}_5^i$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , Figura 3.18, apresentamos um torneio com 4 vértices que não é subgrafo de  $\vec{K}_5^i$ . Para  $i \in \{1, 2, 4, 8\}$  os torneios  $\vec{K}_5^i$  da Figura 3.18 não contém como subgrafo o torneio  $\vec{K}_4^4$  da Figura 3.17. Para  $i \in \{3, 5, 9\}$  os torneios  $\vec{K}_5^i$  da Figura 3.18 não contém como subgrafo o torneio  $\vec{K}_4^3$  da Figura 3.17. O torneio  $\vec{K}_5^6$  da Figura 3.18(f) não contém como subgrafo o torneio  $\vec{K}_4^2$  da Figura 3.17. Para  $i \in \{10, 11, 12\}$  os torneios  $\vec{K}_5^i$  da Figura 3.18 não contém como subgrafo o torneio  $\vec{K}_4^1$  da Figura 3.17. O torneio  $\vec{K}_5^7$  da Figura 3.18(g) é o grafo  $\vec{K}_5^U$ .  $\square$

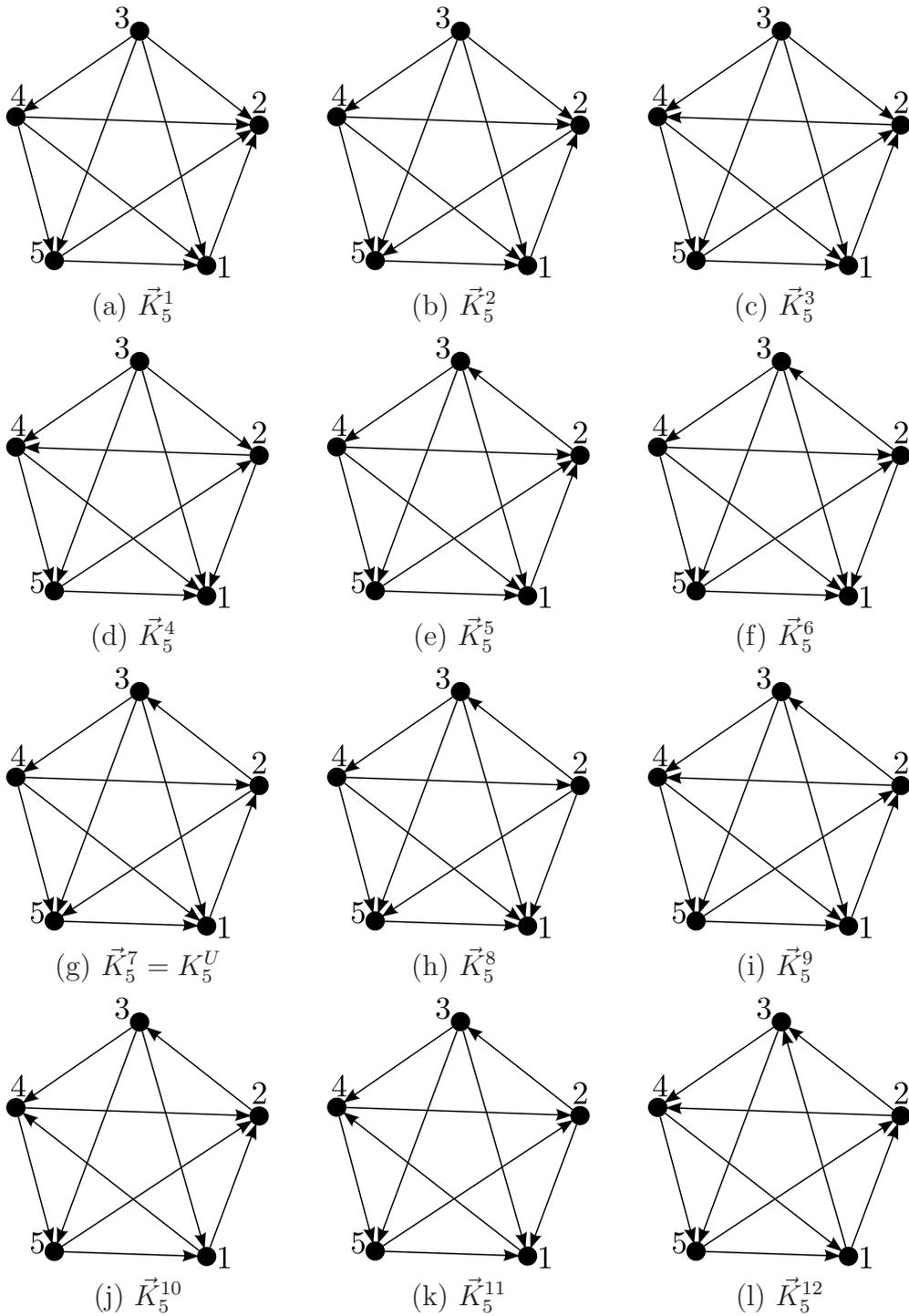


Figura 3.18: Todos os torneios com 5 vértices livres de isomorfismo.

# Capítulo 4

## Limites para o número cromático orientado da união disjunta de grafos

Neste capítulo, estudamos alguns limites para o número cromático orientado da união disjunta de algumas classes de grafos. Na primeira seção apresentamos a classe dos grafos cujo número cromático orientado é menor ou igual a 3 [13]. Por último, abordamos alguns de nossos resultados obtidos sobre a união disjunta de algumas classes de grafos [13, 14].

### 4.1 A classe $\mathcal{CN}_3$

Dado um inteiro positivo  $k$ , denotamos por  $\mathcal{CN}_k$  a classe dos grafos  $G$  tal que  $\chi_o(G) \leq k$ . Podemos decidir em tempo polinomial se um grafo pertence a  $\mathcal{CN}_3$  [28], enquanto é NP-completo decidir se um grafo pertence a  $\mathcal{CN}_k$  para todo  $k \geq 4$  [18, 23, 28]. Em [12] nós demonstramos que decidir se um grafo pertence a  $\mathcal{CN}_4$  é NP-completo mesmo quando restrito a grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos com grau no máximo 3. Porém uma caracterização para os grafos em  $\mathcal{CN}_3$  não era conhecida. Nesta seção, apresentamos uma caracterização para a classe  $\mathcal{CN}_3 = \{G; \chi_o(G) \leq 3\}$  [13, 14]. Um grafo  $G \in \mathcal{CN}_3$  se e somente se:

- Quando  $G$  for conexo,  $G$  é um  $K_3$  ou uma árvore;
- Quando  $G$  for desconexo,  $G$  é uma floresta ou  $K_3 \cup S$ , onde  $S$  é uma floresta de estrelas.

Primeiro, consideramos o caso onde o grafo  $G$  é conexo.

**Lema 4.1** ([40]) *Se  $C_5$  é o ciclo com 5 vértices, então  $\chi_o(C_5) = 5$ .*

*Demonstração.* Seja  $\vec{C}_5$  o ciclo direcionado obtido de  $C_5$ , em outras palavras,  $A(\vec{C}_5) = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_0\}$  (Figura 4.2 (a)). Para quaisquer dois vértices  $v_i, v_j \in V(\vec{C}_5)$ , existe um caminho de tamanho no máximo 2 iniciando em  $v_i$  e terminando em  $v_j$  ou iniciando em  $v_j$  e terminando em  $v_i$ ,  $v_i \neq v_j$ . Pela definição de  $k$ -coloração orientada, a cor de  $v_i$  é diferente da cor de  $v_j$ ,  $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Assim,  $\chi_o(C_5) \geq \chi_o(\vec{C}_5) = 5$ .

Reciprocamente,  $C_5$  tem somente cinco vértices, então  $\chi_o(C_5) \leq 5$ .  $\square$

Sopena [40] provou que se  $G$  é um grafo com grau máximo 2, então  $\chi_o(G) \leq 5$  e apresentou o torneio de Paley com 5 vértices (Figura 4.1) como grafo de cor.

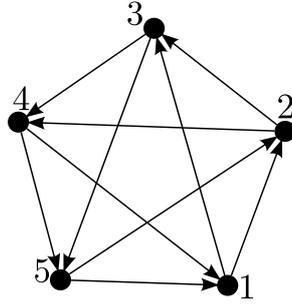


Figura 4.1: Torneio de Paley com 5 vértices.

Este fato não implica que todo ciclo precisa de 5 cores em uma coloração orientada, apresentamos a seguir algumas configurações para os ciclos que proibem estes de pertencerem a  $\mathcal{CN}_3$ .

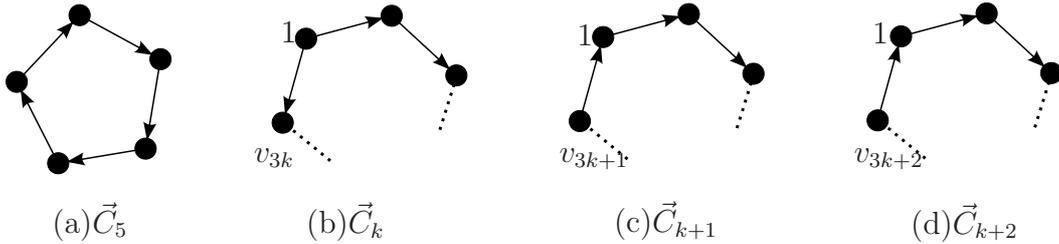


Figura 4.2: (a)  $\vec{C}_5$  direcionado. (b), (c) e (d) respectivamente os casos 1, 2 e 3 do Lema 4.2.

**Lema 4.2** *Seja  $G$  um grafo conexo  $|V| \geq 4$ . Se  $G$  contém  $C_k$  como subgrafo, com  $k \geq 3$ , então  $\chi_o(G) \geq 4$ . Em particular, se  $G$  contém  $C_5$  como subgrafo, então  $\chi_o(G) \geq 5$ .*

*Demonstração.*

Seja  $G$  um grafo conexo que contém  $C_k$  como subgrafo,  $k \geq 3$ . Se  $G$  contém  $C_5$  como subgrafo, então pelo Lema 4.1,  $\chi_o(G) \geq \chi_o(C_5) = 5$ .

Suponha que  $G$  contém  $C_3$  como subgrafo nós vértices  $u, v, w \in V(G)$ . Como  $G$  é conexo, existe um vértice  $t \notin \{u, v, w\}$  em  $V$  tal que  $t$  é adjacente a pelo menos um vértice em  $\{u, v, w\}$ . Assuma que  $tu \in E(G)$ . Considere uma orientação  $\vec{G} = (V, A)$  de  $G$  onde  $uv, vw, uw, tu \in A(\vec{G})$ , veja Figura 4.3. Precisamos de 3 cores diferentes para os vértices  $u, v, w$  desde que  $u, v, w$  pertencem a  $C_3$ . Como existe um caminho de tamanho no máximo 2 de  $t$  para cada vértice em  $\{u, v, w\}$  pela definição da  $k$ -coloração orientada, uma quarta cor adicional é necessária para  $t$ . Assim,  $\chi_o(G) \geq 4$ .

Suponha que  $G$  não contém  $C_3$  ou  $C_5$  como subgrafo e suponha por absurdo que  $\chi_o(G) \leq 3$ . Vamos dividir o restante da demonstração em 3 casos:

*Caso 1:*  $G$  contém  $C_{3k}$  como subgrafo,  $k > 1$ .

Seja  $V(C_{3k}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{3k}\}$ . Considere uma orientação  $\vec{G}$  para  $G$  onde  $A(\vec{C}_{3k}) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{3k-1}v_{3k}, v_1v_{3k}\}$ . Seja  $c$  uma 3-coloração orientada para  $\vec{G}$  e assumamos que  $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2$  e  $c(v_3) = 3$  (lembramos que devido as arestas  $v_1v_2, v_2v_3$ , a cor de qualquer par em  $\{v_1, v_2, v_3\}$  deve ser distinta).

**Afirmção 1:** Afirmamos que se  $c(v_i) = 1, c(v_{i+1}) = 2$  e  $c(v_{i+2}) = 3$  com  $i = 3q + 1, q \geq 0$ , e  $\chi_o(\vec{G}) \leq 3$ , então  $c(v_{i+3}) = 1, c(v_{i+4}) = 2$  e  $c(v_{i+5}) = 3$  para todo  $q \in \{1, \dots, k - 1\}$ .

De fato, suponha que  $c(v_i) = 1, c(v_{i+1}) = 2$  e  $c(v_{i+2}) = 3$ . Como existem as arestas  $v_iv_{i+1}$  e  $v_{i+1}v_{i+2}$ , então  $c(v_{i+3}) = 1$ . Novamente, devido as arestas  $v_{i+1}v_{i+2}$  e  $v_{i+2}v_{i+3}$ , temos que  $c(v_{i+4}) = 2$ . Finalmente  $v_{i+2}v_{i+3}$  e  $v_{i+3}v_{i+4}$  implica que  $c(v_{i+5}) = 3$ . Pela Afirmção 1, temos que para todo  $q \in \{1, \dots, k - 1\}$ ,  $c(v_i) = 1, c(v_{i+1}) = 2$ , e  $c(v_{i+2}) = 3$ . No entanto, quando  $q = k - 1$  isto implica que  $c(v_{3k}) = 3$ . Desde que  $c(v_1) = 1$  e  $v_1v_{3k} \in A(\vec{G})$  temos uma contradição porque a cor 3 do vértice  $v_3$  incide na cor 1 do vértice  $v_4$ .

*Caso 2:*  $G$  contém  $C_{3k+1}$  como subgrafo,  $k \geq 1$ .

Seja  $V(C_{3k+1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{3k}, v_{3k+1}\}$ . Considere uma orientação  $\vec{G}$  para  $G$  onde  $A(\vec{C}_{3k+1}) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{3k}v_{3k+1}, v_{3k+1}v_1\}$ . Pela afirmação 1 temos uma contradição porque a cor 1 do vértice  $v_{3k+1}$  incide na cor 1 do vértice  $v_1$ .

*Caso 3:*  $G$  contém  $C_{3k+2}$  como subgrafo,  $k \geq 1$ .

Seja  $V(C_{3k+2}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{3k}, v_{3k+2}\}$ . Considere uma orientação  $\vec{G}$  para  $G$  onde  $A(\vec{C}_{3k+2}) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{3k+1}v_{3k+2}, v_{3k+2}v_1\}$ . Usando novamente a afirmação 1 temos uma contradição porque a cor 2 do vértice  $v_{3k+2}$  incide na cor 1 do vértice  $v_1$  e a cor 1 do vértice  $v_1$  incide na cor 2 do vértice  $v_2$ .

□

**Teorema 4.3** *Seja  $G$  um grafo conexo.  $G \in \mathcal{CN}_3$  se e somente se,  $G$  ou é um  $K_3$  ou uma árvore.*

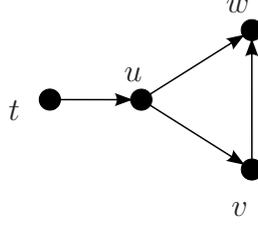


Figura 4.3: Grafo  $\vec{G}$  usado no Lema 4.2, onde  $\chi_o(G) \geq 4$ .

*Demonstração.* Seja  $G \in \mathcal{CN}_3$  um grafo conexo. Se  $G$  é acíclico então  $G$  é uma árvore. Se  $G$  não é acíclico, então pelo Lema 4.2  $G$  não pode ter 4 vértices, segue que  $G = K_3$ . Concluimos que  $G$  ou é  $K_3$  ou uma árvore. Suponha que  $G$  é  $K_3$  ou  $G$  é uma árvore. Reciprocamente, se  $G$  é um  $K_3$  então  $\chi_o(G) = 3$ . Se  $G$  é uma árvore, então  $\chi_o(G) = 3$  pela Proposição 3.4. Portanto  $G \in \mathcal{CN}_3$ .  $\square$

Agora vamos considerar o caso onde  $G$  é um grafo desconexo.

**Lema 4.4** *Seja  $G$  um grafo com  $q$  componentes conexas  $X_1, X_2, \dots, X_q$ ,  $q \geq 2$ , tal que para algum  $i$ ,  $X_i$  contém  $K_3$  como subgrafo,  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Se existe uma componente  $X_j$ ,  $i \neq j$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ , que contém  $K_3$  ou  $P_4$  como subgrafo, então  $\chi_o(G) \geq 4$ .*

*Demonstração.* Considere um grafo  $G$  com  $q$  componentes conexas  $X_1, X_2, \dots, X_q$ ,  $q \geq 2$ . Suponha que exista uma componente  $X_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$  tal que  $X_i$  tem  $K_3$  como subgrafo. Se existe uma componente  $X_j$ ,  $i \neq j$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ , tal que  $X_j$  contém  $K_3$  como subgrafo, obtemos um grafo orientado  $\vec{G}$  de  $G$  com  $\chi_o(\vec{G}) \geq 4$  da seguinte maneira: faça o subgrafo  $K_3$  da componente  $X_i$  um torneio direcionado e o subgrafo  $K_3$  da componente  $X_j$  um torneio transitivo. Seja  $\phi$  uma coloração orientada para  $\vec{G}$ . Os vértices do subgrafo  $K_3$  da componente  $X_i$ , têm 3 cores, suponha as cores  $\{1, 2, 3\}$  com a propriedade de que nenhuma cor domina as outras duas. Então os vértices do  $K_3$  da componente  $X_j$ , têm que ser coloridos com uma 4ª cor visto que uma cor domina as outras duas, portanto  $\chi_o(G) \geq 4$ .

Agora, suponha que existe uma componente  $X_j$  que contém  $P_4$  como subgrafo. No grafo orientado  $\vec{G}$  obtido de  $G$ , escolhamos a orientação transitiva  $\vec{K}_3$  para o subgrafo  $K_3$  da componente  $X_i$  e o caminho direcionado  $\vec{P}_4$  para o subgrafo  $P_4$  da componente  $X_j$ . Em uma coloração qualquer de  $\vec{G}$  assumimos que as cores 1, 2 e 3 são atribuídas aos vértices de  $\vec{K}_3$  da componente  $X_i$ . Escolhamos a coloração orientada de  $\vec{K}_3$  tal que o vértice com a cor 1 é a fonte e o vértice com a cor 2 é o sumidouro. Vamos demonstrar que, uma 4ª cor é requerida para colorir o subgrafo  $\vec{P}_4$  da componente  $X_j$ . Ao leitor sugerimos que siga a Figura 4.4.

Nós consideramos três casos:

*Caso 1:* (Atribuir a cor 1 para a fonte de  $\vec{P}_4$ ) Como o vértice com a cor 1 é predecessor do vértice com a cor 2 na coloração orientada de  $\vec{K}_3$ , podemos atribuir a cor 2 ao sucessor da fonte em  $\vec{P}_4$ . O vértice com cor 2 em  $\vec{K}_3$  é o sumidouro, assim não podemos atribuir qualquer uma das cores 1, 2 ou 3 ao sucessor do vértice com a cor 2 em  $\vec{P}_4$ . Uma quarta cor é necessária na componente  $X_j$ . Se a cor 3 é atribuída ao sucessor da fonte em  $\vec{P}_4$ . Podemos atribuir a cor 2 ao sucessor do vértice com a cor 3 em  $\vec{P}_4$ , mas novamente a cor 2 é atribuída ao vértice que não é sumidouro em  $\vec{P}_4$  e uma quarta cor é requerida na componente  $X_j$ .

*Caso 2:* (Atribuir a cor 2 a fonte de  $\vec{P}_4$ ) O vértice com a cor 2 na coloração orientada de  $\vec{K}_3$  é um sumidouro, assim nenhuma das cores 1, 2 ou 3 pode ser atribuída ao sucessor da fonte em  $\vec{P}_4$ . Uma quarta cor é requerida na componente  $X_j$ .

*Caso 3:* (Atribuir a cor 3 a fonte de  $\vec{P}_4$ ) Respeitando a restrição na coloração de  $\vec{K}_3$ , podemos atribuir a cor 2 ao sucessor da fonte em  $\vec{P}_4$ . Novamente, o sucessor do vértice com a cor 2 em  $\vec{P}_4$  não pode ser colorido com qualquer cor usada em  $\vec{K}_3$ . Uma quarta cor é requerida na componente  $X_j$ .

Concluimos que  $\chi_o(G) \geq 4$ . □

Segue do Lema 4.4, por exemplo, que os grafos  $K_3 \cup K_3 \notin \mathcal{CN}_3$  e  $K_3 \cup P_4 \notin \mathcal{CN}_3$  (Figura 4.4).

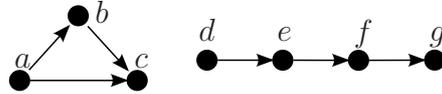


Figura 4.4: Grafo  $\vec{K}_3 \cup \vec{P}_4$ .

**Lema 4.5** *Seja  $F$  uma floresta com o conjunto  $\{T_1, T_2, \dots, T_q\}$  de  $q$  árvores disjuntas, então  $\chi_o(F) = \max\{\chi_o(T_i); i = 1, 2, \dots, q\}$ .*

*Demonstração.* Segue da demonstração da Proposição 3.4 que toda árvore tem homomorfismo no ciclo direcionado com 3 vértices  $\vec{C}_3$ . Assim todas as componentes de uma floresta têm homomorfismo em  $\vec{C}_3$  e obtemos o resultado. □

**Teorema 4.6** *Seja  $G$  um grafo.  $G \in \mathcal{CN}_3$ , se e somente se,  $G$  é uma floresta ou um  $K_3 \cup S$ , onde  $S$  é uma floresta de estrelas.*

*Demonstração.* Suponha que  $G \in \mathcal{CN}_3$ . Se  $G$  tem um ciclo, então existe pelo menos uma componente conexa  $X_i$  de  $G$  que tem um ciclo como subgrafo, e pelos Lemas 4.2 e 4.4 temos que  $X_i = K_3$ . Ainda pelo Lema 4.4 as componentes restantes

têm diâmetro inferior a 3, portanto  $G$  é a união disjunta de  $K_3$  e uma floresta de estrelas  $S$ . Se  $G \in \mathcal{CN}_3$  e  $G$  é acíclico, então  $G$  é uma floresta. Reciprocamente, suponha que  $G$  é uma floresta. Pelo Lema 4.5 concluímos que  $\chi_o(G) \leq 3$  e portanto  $G \in \mathcal{CN}_3$ . Agora suponha que  $G = K_3 \cup S$ . A componente conexa  $K_3$  pode ser orientada de duas formas diferentes, com orientação circular ou com orientação transitiva. Se a componente  $K_3$  tem orientação circular  $\vec{K}_3$ , sabemos pela Proposição 3.4 que existe um homomorfismo de  $\vec{S}$  em  $\vec{K}_3$  e  $\chi_o(G) \leq 3$ , portanto  $G \in \mathcal{CN}_3$ . Agora, considere a componente  $K_3$  com uma orientação transitiva  $\vec{K}'_3$ . Escolhemos a coloração orientada de  $\vec{K}'_3$  com as cores 1, 2 e 3, onde o vértice com a cor 1 é a fonte e o vértice com a cor 2 é o sumidouro. Definimos um homomorfismo da floresta de estrelas  $\vec{S}$  em  $\vec{K}'_3$  onde toda fonte em  $\vec{S}$  é mapeada no vértice com a cor 1 em  $\vec{K}'_3$ , todo sumidouro em  $\vec{S}$  é mapeado no vértice com a cor 2 em  $\vec{K}'_3$ , se o vértice não é nem fonte nem sumidouro em  $\vec{S}$ , então é mapeado no vértice com a cor 3 em  $\vec{K}'_3$ . Este homomorfismo é fácil de ser verificado, desde que somente um vértice com mais de um vizinho em  $\vec{S}$  pode ser mapeado no vértice com a cor 3 em  $\vec{K}'_3$ .  $\square$

## 4.2 Número cromático orientado da união disjunta de grafos

O estudo da classe  $\mathcal{CN}_3$  nos motivou a estudar o número cromático orientado de grafos desconexos, pois observamos que muitos grafos desconexos não pertencem a esta classe, apesar de suas componentes pertencerem. Na Figura 4.4, temos um exemplo onde o número cromático orientado do grafo  $G = K_3 \cup P_4$  é maior do que o número cromático orientado de cada uma das suas componentes.

Na Figura 4.5, onde  $G = K_4 \cup P_5$ , considere a orientação  $\vec{G}$  de  $G$  em que  $\vec{K}_4$  é o torneio transitivo e  $\vec{P}_5$  é o caminho direcionado. Usando as restrições da 4-coloração orientada de  $\vec{K}_4$  na componente  $\vec{P}_5$ , sabemos que  $\vec{P}_5$  não pode ser colorido somente com quatro cores e uma quinta cor é requerida, assim o grafo  $G = K_4 \cup P_5 \notin \mathcal{CN}_4$ . Portanto, temos outro exemplo onde  $\chi_o(G) > \max\{\chi_o(K_4); \chi_o(P_5)\}$ , onde  $K_4$  e  $P_5$  são componentes de  $G$ .



Figura 4.5: Grafo  $\vec{K}_4 \cup \vec{P}_5$ .

Agora, vamos obter o número cromático orientado da união disjunta entre o

grafo completo e outros grafos como estrelas, árvores, florestas e o próprio completo. Também utilizamos o torneio  $\vec{K}_5^U$  (Figura 3.16) para obter o número cromático orientado da união disjunta entre o ciclo e outros grafos que pertencem a  $\mathcal{CN}_4$ . A seguir, apresentamos alguns teoremas estruturais que serão usados no estabelecimento do número cromático orientado das classes estudadas.

**Teorema 4.7** *Se  $G$  é um grafo com duas componentes conexas  $G_1$  e  $G_2$ , onde  $G_1$  é o grafo completo  $K_p$ ,  $p \geq 3$ , e  $G_2$  é o grafo tal que todos grafos orientados  $\vec{G}_2$  têm um homomorfismo  $f$  para o caminho direcionado  $\vec{P}_3$ , então  $\chi_o(G) = p$ .*

*Demonstração.* Como  $G$  é supergrafo de  $K_p$ ,  $\chi_o(G) \geq p$ . Para mostrar que  $\chi_o(G) \leq p$ , é suficiente exibir uma  $p$ -coloração orientada para qualquer orientação  $\vec{G}$  de  $G$ . Dada uma orientação  $\vec{G}$  de  $G$ . Colorimos  $\vec{K}_p$  com  $p$  cores:  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ . Como  $p \geq 3$ , existe um  $\vec{K}_3$  transitivo ou um  $\vec{K}_3$  circular subgrafo de  $\vec{K}_p$ . Em qualquer dos dois existe um caminho direcionado  $\vec{P}_3$ . Portanto, existe um caminho direcionado  $\vec{P}_3$  subgrafo de  $\vec{K}_p$  que assumimos ser nas cores 1, 2, 3. Colorimos  $\vec{G}_2$  com as cores apropriadas usando o homomorfismo  $f : V(\vec{G}_2) \rightarrow \vec{P}_3$ .  $\square$

**Corolário 4.8** *Se  $G = K_p \cup S$ , onde  $S$  é uma floresta de estrelas, e  $K_p$  o grafo completo em  $p$  vértices,  $p \geq 3$ , então  $\chi_o(G) = p$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.7, é suficiente demonstrarmos que toda orientação  $\vec{S}$  de  $S$ , tem um homomorfismo para o caminho direcionado  $\vec{P}_3$ . Consideramos  $A(\vec{P}_3) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ .

Para toda orientação  $\vec{S}$  de  $S$ , podemos dividir o conjunto de vértices em três conjuntos distintos. O conjunto com um único vértice  $s$ , onde  $s$  é vizinho de todos os outros vértices. Então vamos dividir os vizinhos de  $s$  em dois conjuntos disjuntos, o conjunto de sucessores de  $s$  denotado por  $Suc(s)$  e o conjunto de predecessores de  $s$  denotado por  $Pred(s)$ .

Seja  $f : V(\vec{S}) \rightarrow V(\vec{P}_3)$  tal que

$$f(v) = \begin{cases} v_2, & \text{se } v = s, \\ v_1, & \text{se } v = r \quad \forall r \in Pred(s), \\ v_3, & \text{se } v = t \quad \forall t \in Suc(s). \end{cases}$$

Para cada fonte  $r \in V(\vec{S})$ ,  $rs \in A(\vec{S})$  e  $f(r)f(s) = v_1v_2 \in A(\vec{P}_3)$ . Para cada sumidouro  $t \in V(\vec{S})$ ,  $st \in A(\vec{S})$  e  $f(s)f(t) = v_2v_3 \in A(\vec{P}_3)$ . Assim, se  $xy \in A(\vec{S})$  então  $f(x)f(y) \in A(\vec{P}_3)$ .  $\square$

**Teorema 4.9** *Se  $G$  é um grafo com duas componentes conexas  $G_1$  e  $G_2$ , onde  $G_1$  é um grafo completo  $K_p$ ,  $p \geq 3$ , e toda orientação  $\vec{G}_2$  de  $G_2$  tem um homomorfismo no torneio circular  $\vec{K}_3$ , tal que  $G_2$  tem diâmetro maior que  $p$ , então  $\chi_o(G) = p + 1$ .*

*Demonstração.* Vamos provar que  $\chi_o(G) \geq p + 1$ . Considere  $\vec{G}$ , onde  $\vec{G}_1$  é transitivo,  $G_2$  tem diâmetro maior que  $p$  e  $\vec{G}_2$  contém uma geodésica direcionada. Neste caso, o grafo de cor de  $\vec{G}_2$  é  $\vec{K}_3$  circular. Como em qualquer coloração de  $\vec{G}$  o grafo induzido por 3 vértices de  $\vec{G}_1$  satisfaz que uma cor domina as outras duas, uma cor adicional às  $p$  cores que colorem  $\vec{G}_1$ , é necessária para colorir  $\vec{G}_2$ . Vamos demonstrar que  $\chi_o(G) \leq p + 1$ . Dada uma orientação  $\vec{G}$ , colorimos  $\vec{K}_p$  com  $p$  cores. Tomamos 2 destas  $p$  cores e com uma adicional colorimos apropriadamente  $\vec{K}_3$  circular. Através do homomorfismo  $f : V(\vec{G}_2) \rightarrow \vec{K}_3$  circular colorimos  $\vec{G}_2$  com 3 cores. Logo  $\chi_o(G) \leq p + 1$ .  $\square$

**Corolário 4.10** *Sejam  $P$ ,  $T$ ,  $F$  respectivamente um caminho, uma árvore e uma floresta, onde  $P$ ,  $T$  e  $F$  têm diâmetro maior que  $p$ . Sejam também  $C_3$  o ciclo com 3 vértices e  $K_p$  o grafo completo com  $p$  vértices,  $p \geq 3$ . Se  $G$  é um dos grafos,  $G = K_p \cup P$  ou  $G = K_p \cup T$  ou  $G = K_p \cup F$  ou  $G = K_p \cup C_3$ , então  $\chi_o(G) = p + 1$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente do Teorema 4.9 e da Proposição 3.4.  $\square$

Seja  $G = K_4 \cup P_4$ , observamos que para toda orientação  $\vec{K}_4$  de  $K_4$  existe um caminho direcionado  $\vec{P}_4$  como subgrafo, veja Figura 3.17. Todas as orientações  $\vec{P}_4$  de  $P_4$  têm homomorfismo no ciclo direcionado  $\vec{C}_3$ , porém o diâmetro de  $P_4$  é igual a  $p$ . Assim, o grafo  $G$  não satisfaz as condições do Teorema 4.9. De fato  $\chi_o(G) = p = 4$ .

**Teorema 4.11** *Dado um grafo  $G$ . Se  $G \in \mathcal{CN}_4$  e  $C$  um ciclo, então  $\chi_o(G \cup C_n) \leq 5$  em particular  $\chi_o(G \cup C_5) = 5$ .*

*Demonstração.* A partir de um resultado, afirmado por Sopena [44], nós sabemos que se  $\vec{C}_n$  não é o ciclo direcionado em 5 vértices, então  $\chi_o(C_n) \leq 4$ , e que se  $\vec{C}_n$  é o ciclo direcionado em 5 vértices, então  $\chi_o(\vec{C}_n) = 5$ .

Considere  $\vec{G} \cup \vec{C}_n$ , e que  $\vec{C}_n$  não é o ciclo direcionado em 5 vértices. Então ambos  $G$  e  $C_n$  pertencem a  $\mathcal{CN}_4$ . Assim, existe um homomorfismo a partir de  $G$  para um torneio em 4 vértices e existe um homomorfismo a partir de  $C_n$  para um torneio em 4 vértices. A partir do Lema 3.14 existe um homomorfismo a partir de  $G \cup C_n$  para  $K_5^U$ , então  $\chi_o(G \cup C) \leq 5$ .

Considere  $G \cup \vec{C}_5$ , onde  $\vec{C}_5$  é o ciclo direcionado em 5 vértices. Pelo Lema 4.1,  $\chi_o(\vec{C}_5) = 5$ . Pelo Lema 3.14 todo  $G \in \mathcal{CN}_4$  tem um homomorfismo em  $K_5^U$  (Figura 3.16). Como  $\vec{K}_5^U$  tem o ciclo direcionado 1, 2, 3, 4, 5, 1 como subgrafo, o

ciclo direcionado  $\vec{C}_5$  também tem homomorfismo em  $\vec{K}_5^U$ . Portanto,  $\chi_o(G \cup C_5) = 5$  possui  $\vec{K}_5^U$  como grafo de cor.  $\square$

**Corolário 4.12** *Se  $G = C \cup C$  ou  $G = C \cup P$  ou  $G = C \cup T$  ou  $G = C \cup K_4$ , então  $\chi_o(G) \leq 5$ , onde  $C, P, T, K_4$  são respectivamente um ciclo, um caminho, uma árvore e o grafo completo com 4 vértices.*

*Demonstração.* Segue diretamente do Teorema 4.11, porque todas orientações de  $C, P, T$  e  $K_4$  têm pelo menos um homomorfismo em  $\vec{K}_5^U$ .  $\square$

**Lema 4.13** *Seja  $\phi$  uma coloração orientada de  $\vec{K}_p \cup \vec{K}_q$ . Se  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  são subgrafos induzidos de  $\vec{K}_p$  e  $\vec{K}_q$  respectivamente, tal que  $\exists u \in V(\vec{G}_1)$  se e somente se  $\exists a \in V(\vec{G}_2)$  com  $\phi(u) = \phi(a)$ , então  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  são isomorfos.*

*Demonstração.* Como  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  são subgrafos induzidos pelos vértices de torneios, então  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  também são torneios. Na coloração orientada  $\phi$  de  $\vec{K}_p \cup \vec{K}_q$  não existem cores idênticas entre os vértices de  $\vec{G}_1$ , bem como entre os vértices de  $\vec{G}_2$ . Por hipótese sabemos que as mesmas cores atribuídas por  $\phi$  para  $\vec{G}_1$ , também são atribuídas para  $\vec{G}_2$ , assim  $|V(\vec{G}_1)| = |V(\vec{G}_2)|$ .

Para quaisquer  $u, v \in V(\vec{G}_1)$  e quaisquer  $a, b \in V(\vec{G}_2)$  tal que  $\phi(u) = \phi(a)$  e  $\phi(v) = \phi(b)$ . Definimos o isomorfismo  $f : V(\vec{G}_1) \rightarrow V(\vec{G}_2)$  tal que  $uv \in A(\vec{G}_1)$  se e somente se  $f(u)f(v) \in A(\vec{G}_2)$ , onde  $f(u) \mapsto a$  e  $f(v) \mapsto b$ .  $\square$

Dado  $G = K_p \cup K_q$  e  $\vec{G}$  uma orientação de  $G$ . O núcleo de  $\vec{G}$  é o maior inteiro  $x$  tal que  $\exists \vec{T}_1 = \vec{K}_x$  subgrafo de  $\vec{K}_p$  e  $\exists \vec{T}_2 = \vec{K}_x$  subgrafo de  $\vec{K}_q$  tal que  $\vec{T}_1$  é isomorfo a  $\vec{T}_2$ . A alma gêmea  $Ag(p, q) = r$  é o núcleo mínimo entre todas as orientações  $\vec{G}$  de  $G = K_p \cup K_q$ . Note que alternativamente, sejam  $K_p$  e  $K_q$  grafos completos, e  $\vec{K}$  o conjunto de todos os torneios. Considere as coleções  $P$  e  $Q$  consistindo de todas as orientações de  $K_p$  e  $K_q$  respectivamente. Definimos o conjunto  $L = \{\vec{K}^l \in \vec{K}; |V(\vec{K}^l)| = \max\{|V(\vec{K}^j)|; \vec{K}^j \subseteq \vec{K}_p, \vec{K}^j \subseteq \vec{K}_q\}, \forall \vec{K}_p' \in P \text{ e } \forall \vec{K}_q' \in Q\}$ . Seja  $r = Ag(p, q) = \min\{|V(\vec{K}^l)|; \forall \vec{K}^l \in L\}$ .

**Teorema 4.14** *Se  $G = K_p \cup K_q$ , então  $\chi_o(G) = p + q - r$ .*

*Demonstração.* Seja  $\vec{K}_r$  um torneio com  $r$  vértices, onde  $r = \min\{|V(\vec{K}^l)|; \forall \vec{K}^l \in L\}$ . Denotamos por  $\vec{K}_r^p$  um subgrafo  $\vec{K}_r$  de  $\vec{K}_p$  e  $\vec{K}_r^q$  um subgrafo  $\vec{K}_r$  de  $\vec{K}_q$ . Desde que  $\vec{K}_r^p$  e  $\vec{K}_r^q$  são isomorfos, podemos atribuir  $r$  cores idênticas para os vértice de ambos grafos. Como  $r \leq q \leq p$  restam  $p + q - 2r$  vértices para ser coloridos. Então  $\chi_o(K_p \cup K_q) \leq p + q - 2r + r = p + q - r$ .

Pelo Lema 4.13, o número máximo de cores em comum usadas em ambos  $\vec{K}_p$  e  $\vec{K}_q$  é  $r$ , caso contrário contradizemos a cardinalidade de  $\vec{K}_r$ . Portanto  $\chi_o(K_p \cup K_q) = p + q - r$ .  $\square$

Tabela 4.1: Valores de  $Ag(p, q)$  com  $p := 1, 2, 3, 4, 5$  e  $q := 1, 2, 3, 4, 5$ .

$Ag(p, q)$	1	2	3	4	5	...
1	1	1	1	1	1	...
2	1	2	2	2	2	...
3	1	2	2	2	2	...
4	1	2	2	3	3	...
5	1	2	2	3	3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

O valor de  $Ag(p, q)$  com  $p := 1, 2, 3, 4, 5$  e  $q := 1, 2, 3, 4, 5$  pode ser visto pela análise das orientações nas Figuras 3.17 e 3.18. Para ver que  $Ag(4, 3) = Ag(4, 4) = 3$ , veja que todas as orientações de  $K_4$  na Figura 3.17 têm um  $\vec{K}_3$  transitivo, e que nenhum par de torneios na Figura 3.17 são isomorfos. Assim, se  $\min\{p, q\} = 3$ , então  $Ag(p, q) \geq 3$ . Em particular o valor de  $Ag(5, 5)$  pode ser visto observando as Figuras 3.18(a) e 3.18(l). Pois, os grafos orientados  $\vec{K}_5^1$  e  $\vec{K}_5^{12}$  da Figura 3.18 são vértice-transitivos, e  $\vec{K}_5^1 - \{v\}$  e  $\vec{K}_5^{12} - \{v\}$  são isomorfos, respectivamente, aos grafos orientados  $K_4^1$  e  $K_4^4$  da Figura 3.17. Porém,  $K_4^1$  e  $K_4^4$  não são isomorfos.

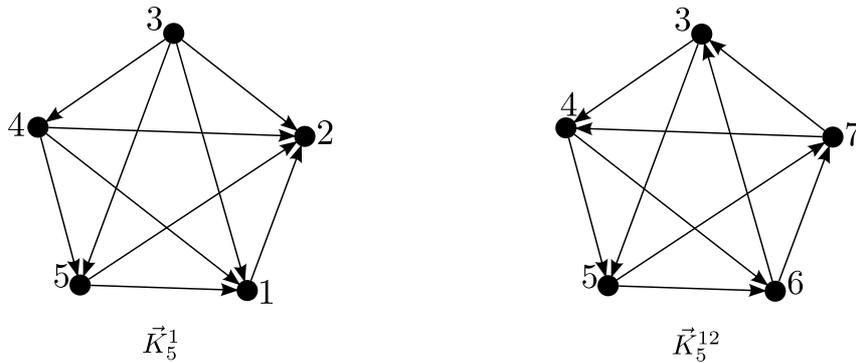


Figura 4.6:  $\chi_o(K_5 \cup K_5) = 7$  – Uma 7 coloração orientada ótima de  $\vec{K}_5^1 \cup \vec{K}_5^{12}$ .

Em geral poderíamos perguntar:

**Pergunta 4.15** *Dados  $p$  e  $q$  inteiros positivos, qual a complexidade de determinar  $Ag(p, q)$ ?*

Ainda não sabemos classificar este problema, mas mais especificamente, consideramos, a seguir, dois problemas de decisão relacionados as definições de núcleo

Tabela 4.2: Valores para o  $\chi_o(K_p \cup K_q)$

$\chi_o(K_p \cup K_q)$	1	2	3	4	5	...
1	1	2	3	4	5	...
2	2	2	3	4	5	...
3	3	3	4	5	6	...
4	4	4	5	5	6	...
5	5	5	6	6	7	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

de dois torneios e alma gêmea.

NÚCLEO DE DOIS TORNEIOS

INSTÂNCIA: Torneios  $\vec{K}_p$  e  $\vec{K}_q$ , e inteiro positivo  $r$ .

PERGUNTA: Existem conjuntos de vértices  $S_1 \subset \vec{K}_p$  e  $S_2 \subset \vec{K}_q$  com  $|S_1| = |S_2| \geq r$ , tal que  $\vec{K}_p[S_1]$  é isomorfo a  $\vec{K}_q[S_2]$ ?

ALMA GÊMEA

INSTÂNCIA: Inteiros positivos  $p, q$  e  $r$ .

PERGUNTA: Existem dois torneios  $\vec{K}_p$  e  $\vec{K}_q$ , tal que existem dois conjuntos de vértices  $S_1 \subset \vec{K}_p$  e  $S_2 \subset \vec{K}_q$  com  $|S_1| = |S_2| \leq r$ , tal que  $\vec{K}_p[S_1]$  é isomorfo a  $\vec{K}_q[S_2]$ ?

Que também não sabemos classificar. Na Tabela 4.3 apresentamos os nossos resultados sobre limites para o número cromático orientado da união disjunta entre alguns grafos.

Tabela 4.3:  $\chi_o(G_1 \cup G_2)$  da união disjunta

$\cup$	$K_p, p \geq 3$	$P_3$	$K_3$	diâmetro $> 3$ e homomorfismo $p/\vec{P}_3$ direcionado	diâmetro $> 3$ e homomorfismo $p/\vec{K}_3$ direcionado	$C_n$
$K_q, q \geq 3$	$p + q - Ag(p, q)$	$q$	$q + 1$	$q$	$q + 1$	se $q \leq 4, \leq 5$ se $q \geq 5, \leq q + 4$
Floresta de $S_n$ 's	$p$	3	3	3	3	$\leq 5$
$\mathcal{CN}_4$	se $p \leq 4, \leq 5$ se $p \geq 5, \leq p + 4 - Ag(p, 4)$	4	$\leq 5$	4	5	$\leq 5$

# Capítulo 5

## Sobre a complexidade do problema da coloração orientada

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados presentes na literatura sobre a complexidade do problema da coloração orientada e demonstramos que  $\text{OCN}_k$  é NP-completo mesmo quando restrito a grafos conexos orientados acíclicos, planares, bipartidos com grau no máximo 3.

Lembramos que se  $G$  é conexo, dizemos que  $\vec{G}$  é conexo (o mesmo para planares, e bipartidos). O grau máximo de  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$  e definimos  $\Delta(\vec{G}) = \Delta(G) = \Delta$ .

Ao final dedicamos uma seção aos nossos resultados apresentados no VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2013) [12].

### 5.1 Introdução e Resultados prévios

O NÚMERO CROMÁTICO ORIENTADO ( $\text{OCN}_k$ ) foi introduzido por Klostermeyer e MacGillivray [28].

NÚMERO CROMÁTICO ORIENTADO ( $\text{OCN}_k$ )

INSTÂNCIA: Grafo orientado  $\vec{G} = (V, A)$  e um inteiro positivo  $k$ .

PERGUNTA:  $\vec{G}$  tem uma  $k$ -coloração orientada?

Um grafo orientado  $\vec{G}$  admite uma  $k$ -coloração orientada se e somente se existe um torneio  $\vec{T}$  com  $k$  vértices, tal que  $\vec{G}$  tem um homomorfismo para  $\vec{T}$ . Uma das referências mais importantes para o estabelecimento da complexidade de  $\text{OCN}_k$  é o artigo de Bang-Jensen, Hell e MacGillivray [3] de 1988. Eles provaram que se  $\vec{T}$  é um torneio com pelo menos dois ciclos, então decidir se um digrafo  $\vec{G}$  tem um homomorfismo para  $\vec{T}$  é NP-completo. Klostermeyer e MacGillivray [28] provaram

em 2004 usando [3], que  $OCN_4$  é NP-completo. Eles estabeleceram uma dicotomia *P versus* NP-completo com respeito ao número de cores:  $OCN_k$  é polinomial se  $k \leq 3$  e NP-completo se  $k > 3$ .

**Teorema 5.1 (Klostermeyer and MacGillivray [28])** *Seja  $k$  um inteiro positivo. Se  $k \leq 3$ , então  $OCN_k$  pode ser decidido em tempo polinomial. Se  $k \geq 4$ , então  $OCN_k$  é NP-completo, mesmo quando a entrada é restrita a grafos orientados conexos.*

Pelo grande interesse, a complexidade do problema  $OCN_k$  tem sido estudada exaustivamente. Dois artigos recentes apresentaram provas para NP-completude [18, 23], ambos usando o problema NP-completo 3-SAT e cada um adicionando algumas melhorias nos resultados preliminares.

### 3-SATISFABILIDADE (3-SAT)

INSTÂNCIA: Conjunto  $U$  de variáveis e coleção  $C$  de cláusulas sobre  $U$ ,  $|U| = n$  e  $|C| = m$ , tal que cada cláusula  $c \in C$  tem  $|c| = 3$ ;

PERGUNTA: Existe uma atribuição de verdade para  $U$  satisfazendo cada cláusula de  $C$ ?

Em 2006, Culus e Demange [18] apresentaram 2 resultados.

### **Teorema 5.2 (Culus e Demange [18])**

- (i)  $OCN_4$  é NP-completo mesmo se a entrada é restrita a grafos orientados bipartidos com  $\Delta = \max(p + 3; 7)$ .
- (ii)  $OCN_4$  é NP-completo mesmo se a entrada é restrita a grafos orientados acíclicos com  $\Delta = \max(p + 3; 6)$ .

Onde  $p$  denota o número máximo de ocorrências de um literal. Recentemente, em 2010, Ganian and Hliněný [23] melhoraram o resultado de Culus e Demange demonstrando que

**Teorema 5.3 (Ganian and Hliněný [23])**  *$OCN_4$  é NP-completo para grafos conexos orientados acíclicos com  $\Delta = \max(p + 2; 4)$ .*

Observamos que não era conhecido se  $OCN_k$  é NP-completo para grafos acíclicos e bipartidos com  $\Delta = 3$ .

Para estender o resultado de NP-completude para grafos orientados bipartidos e grafos orientados acíclicos, Culus e Demange [18] usaram a técnica de construção por componentes com três grafos diferentes. Culus e Demange [18] reduziram 3-SAT para  $OCN_k$ . O grafo orientado  $\vec{G}$  obtido nesta redução para a instância de  $OCN_k$ , pode ser

bipartido ou livre de circuito, dependendo do grafo  $\vec{T}_i$  associado com cada variável da instância de 3-SAT. Apesar de não ter sido feito, se Culus e Demange tivessem usado P3-SAT $_{\vec{3}}$  ao invés de 3-SAT eles teriam obtido uma prova que o resultado que  $\mathcal{CN}_4$  é NP-completo mesmo para grafos conexos orientados acíclicos, planares com grau máximo limitado.

## 5.2 NP-completude de grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos com grau máximo 3

Uma pergunta natural quando estudamos a complexidade de um problema de decisão em teoria dos grafos é determinar para quais classes de grafos e para quais limites sobre os graus dos vértices o problema permanece NP-completo. Isso pode ser muito útil no conhecimento e na investigação da verdadeira dificuldade de um problema combinatório. Nesta seção, demonstramos que  $\text{OCN}_k$  é NP-completo mesmo quando restrito a grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos com grau no máximo 3. Nosso resultado também estabelece uma dicotomia P *versus* NP-completo com respeito ao grau máximo  $\Delta$  de uma instância  $\vec{G}$ , pois se  $\Delta \leq 2$  sabemos que  $\text{OCN}_k$  é um problema polinomial [40], isto é:  $\text{OCN}_4$  é NP-completo mesmo para grafos conexos orientados acíclicos, planares, bipartidos, com  $\Delta(G) = 3$ . Este resultado é obtido usando o problema NP-completo:

### PLANAR 3-SAT COM NO MÁXIMO 3 OCORRÊNCIAS POR VARIÁVEL (P3-SAT $_{\vec{3}}$ )

INSTÂNCIA:  $I = (U, C)$ , onde  $U$  é um conjunto de variáveis *booleanas* e  $C$  uma coleção de cláusulas sobre  $U$ ,  $|U| = n$  e  $|C| = m$ , tal que: (i) cada cláusula  $c \in C$  satisfaz  $|c| = 3$  ou  $|c| = 2$ ; (ii) cada variável tem 3 ou 2 ocorrências e cada literal negativo ocorre uma única vez em  $C$ ; (iii) O grafo bipartido  $G = (V, E)$  é planar, onde  $V = U \cup C$  e  $E$  contém o par  $(u, c)$  se e somente se  $u$  ou  $\bar{u}$  pertence a cláusula  $c$ .

PERGUNTA: Existe uma atribuição de verdade para  $U$  satisfazendo cada cláusula de  $C$ ?

A seguir construímos a instância  $\vec{G} = (V, A)$  e  $k = 4$  para o problema  $\text{OCN}_k$  definido a partir da instância  $I = (U, C)$  de P3-SAT $_{\vec{3}}$ .

### 5.2.1 A instância especial $\vec{G} = (V, A)$ e $k$ de $\text{OCN}_k$

Seja  $\vec{G} = (V, A)$  um grafo orientado e  $\phi$  uma coloração orientada de  $\vec{G}$ . Denotamos os vértices de  $\vec{G}$  por letras minúsculas e as cores da coloração orientada  $\phi$  por letras maiúsculas. Quando houver mais de uma possibilidade de cor para um vértice,

listamos as cores separadas por uma barra “|” para representar a lista de cores permitidas para o vértice.

Usamos a técnica de construção por componentes. Para este propósito, a partir da instância  $I = (U, C)$  de  $\text{P3-SAT}_3$ , construímos para cada variável  $u_i$  de  $U$  uma componente *Truth Setting*  $\vec{T}_i$  e para cada cláusula  $c_j$  de  $C$  uma componente *Satisfaction Testing*  $\vec{S}_j$ .

O *Truth Setting*  $\vec{T}_i$  é construído de algumas cópias do grafo orientado que denominamos por *água-viva*  $\vec{J}_i^d$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ , descrita pelo conjunto de vértices  $V(\vec{J}_i^d) = \{i_i^d, j_i^d, k_i^d, \ell_i^d, m_i^d, n_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d, s_i^d, t_i^d, u_i^d, v_i^d, x_i^d\}$  e pelo conjunto de arestas  $A(\vec{J}_i^d) = \{i_i^d k_i^d, j_i^d i_i^d, k_i^d n_i^d, j_i^d \ell_i^d, m_i^d \ell_i^d, n_i^d m_i^d, \ell_i^d o_i^d, m_i^d p_i^d, n_i^d q_i^d, o_i^d p_i^d, q_i^d p_i^d, r_i^d o_i^d, q_i^d r_i^d, r_i^d s_i^d, s_i^d t_i^d, t_i^d u_i^d, u_i^d v_i^d, v_i^d x_i^d\}$ . Veja Figura 5.1 (a).

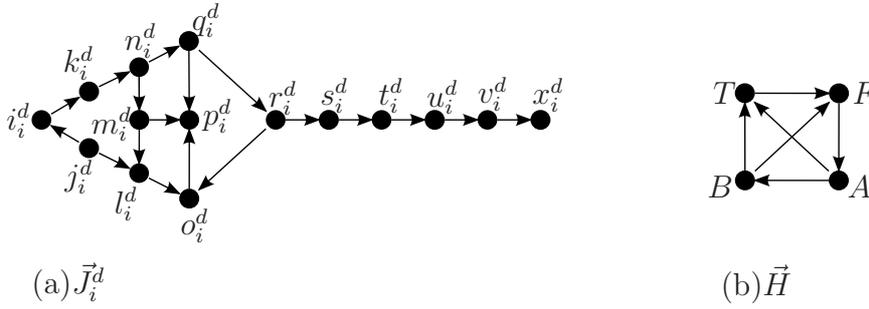


Figura 5.1: (a) Água-viva  $\vec{J}_i^d$  e (b) grafo de cor  $\vec{H}$  para  $\vec{J}_i^d$ .

**Lema 5.4** Se  $\vec{G} = (V, A)$  contém  $\vec{J}_i^d$  como subgrafo,  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$  e as cores  $A, T, B, F$  (não necessariamente distintas) são respectivamente atribuídas aos vértices  $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$ , então:

1.  $\chi_o(\vec{G}) \geq 4$  e as cores atribuídas aos vértices  $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$  devem ser distintas.
2. O grafo de cor de  $\vec{G}$  é o torneio  $\vec{H}$  com 4 vértices com a seguinte relação entre as seis cores  $A(\vec{H}) = \{AB, AT, BT, BF, TF, FA\}$  (Figura 5.1 (b)).
3. As cores permitidas para os vértices  $i_i^d, j_i^d, k_i^d, l_i^d, m_i^d, n_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d, s_i^d, t_i^d, u_i^d, v_i^d, x_i^d$  de  $\vec{J}_i^d$  são respectivamente  $T, B, F, F, B, A, A, T, B, F, A, B|T, T|F, F|A, A|B|T$ .

*Demonstração.* Para provar (1) observe que para cada par de vértices em  $\{o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d\}$  existe um caminho de tamanho 2 ou 1 conectando os vértices no par.

Para provar (2) note que por hipótese  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$ , assim ao vértice  $n_i^d$  é atribuída a cor  $A$ . Como  $q_i^d p_i^d, q_i^d r_i^d \in A(\vec{G})$ , a cor de  $q_i^d$  é  $B$ , e as cores de  $p_i^d$  e  $r_i^d$  são  $T$  e  $F$ . Como  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$ ,  $\ell_i^d o_i^d, o_i^d p_i^d, n_i^d q_i^d \in A(\vec{G})$ , cor de  $o_i^d$  e de  $n_i^d$  é  $A$ , e as cores de  $p_i^d$  e  $q_i^d$  são  $T$  e  $B$ , temos que a cor de  $\ell_i^d$  tem que ser  $F$ . Como  $m_i^d$  é incidente a 3 cores diferentes:  $A, F$  e  $T$ , e  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$ , a cor de  $m_i^d$  tem que ser  $B$ . Assim  $k_i^d n_i^d \in A(\vec{G})$ ,

e a única cor em  $\{A, B, F, T\}$  que incide na cor  $A$  é  $F$ , a cor de  $k_i^d$  tem que ser  $F$ . Note que a cor dos vértices  $\ell_i^d$  e  $k_i^d$  é  $F$ , e como a cor  $F$  é incidente na cor  $A$ , então aos vértices  $j_i^d$  e  $i_i^d$  têm que ser atribuídas, respectivamente, as cores  $B$  e  $T$ . Como a cor  $B$  é incidente a cor  $T$  e  $j_i^d i_i^d \in A(\vec{G})$ , finalmente atribuímos a cor  $B$  para o vértice  $j_i^d$  e a cor  $T$  ao vértice  $i_i^d$ . As cores atribuídas definem o grafo de cor com 4 vértices e as arestas  $AB, AT, BT, BF, TF, FA$  na Figura 5.1(b).

Para provar (3) é suficiente seguir o grafo de cor da Figura 5.1(b) para obter as cores apresentadas na Figura 5.1(a).  $\square$

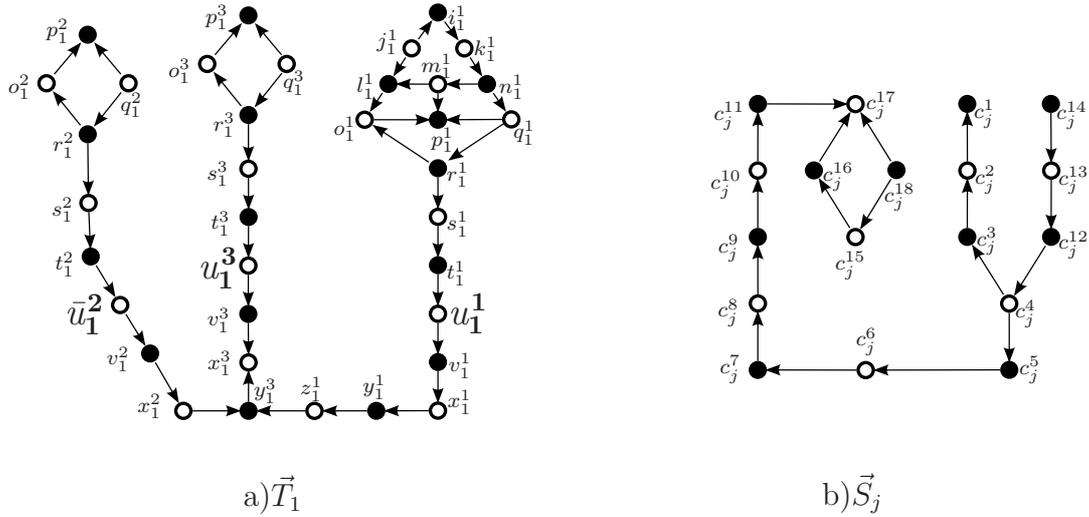


Figura 5.2: (a) Componente *Truth Setting*  $\vec{T}_1$  para a variável  $u_1$ , (b) componente *Satisfaction Testing*  $\vec{S}_j$ .

Agora definimos a componente *Truth Setting*  $\vec{T}_i$  (Figura 5.2(a)):  $V(\vec{T}_1) = V(\vec{J}_1^1) \cup V(\vec{J}_1^2) \cup V(\vec{J}_1^3) \cup \{y_1^1, y_1^3, z_1^1\} \setminus \bigcup_{d=2}^3 \{i_i^d, j_i^d, k_i^d, \ell_i^d, m_i^d, n_i^d\}$ , para  $i \geq 2$ , definimos  $V(\vec{T}_i) = V(\vec{J}_i^1) \cup V(\vec{J}_i^2) \cup V(\vec{J}_i^3) \cup \{y_i^1, y_i^3, z_i^1\} \setminus \bigcup_{d=1}^3 \{i_i^d, j_i^d, k_i^d, \ell_i^d, m_i^d, n_i^d\}$ ,  $A(\vec{T}_i) = A(\vec{J}_i^1) \cup A(\vec{J}_i^2) \cup A(\vec{J}_i^3) \cup \{y_i^3 x_i^3, x_i^2 y_i^3, z_i^1 y_i^3, y_i^1 z_i^1, x_i^1 y_i^1\}$ . A construção de  $\vec{T}_i$  é concluída renomeando o vértice  $u_i^2$  como  $\bar{u}_i^2$ .

Para cada cláusula  $c_j \in C$ , existe uma componente *Satisfaction Testing*  $\vec{S}_j$  (Figura 5.2(b)), onde  $V(\vec{S}_j) = \{c_j^k : k := 1, 2, \dots, 18\}$ , e  $A(\vec{S}_j) = \{c_j^2 c_j^1, c_j^3 c_j^2, c_j^4 c_j^3, c_j^4 c_j^5, c_j^5 c_j^6, c_j^6 c_j^7, c_j^7 c_j^8, c_j^8 c_j^9, c_j^9 c_j^{10}, c_j^{10} c_j^{11}, c_j^{11} c_j^{17}, c_j^{15} c_j^{16}, c_j^{18} c_j^{15}, c_j^{16} c_j^{17}, c_j^{18} c_j^{17}, c_j^{14} c_j^{13}, c_j^{13} c_j^{12}, c_j^{12} c_j^4\}$ .

A única parte da construção de  $\vec{G}$  que depende de quais literais ocorrem em quais cláusulas, é o conjunto  $A_j$  descrito a seguir. Se  $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \in C$  então  $A_j = \{c_j^{11} \lambda_{i_1}^{d_1}, c_j^1 c_j^{15}, \lambda_{i_2}^{d_2} c_j^{14}\}$ , se  $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3}) \in C$  então  $A_j = \{c_j^{11} \lambda_{i_1}^{d_1}, c_j^1 \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3} c_j^{14}\}$ , onde  $\lambda_{i_1}^{d_1} \in \{u_{i_1}^{d_1}, \bar{u}_{i_1}^{d_1}\}$  de  $\vec{T}_{i_1}$ ,  $\lambda_{i_2}^{d_2} \in \{u_{i_2}^{d_2}, \bar{u}_{i_2}^{d_2}\}$  de  $\vec{T}_{i_2}$ ,  $\lambda_{i_3}^{d_3} \in \{u_{i_3}^{d_3}, \bar{u}_{i_3}^{d_3}\}$  de  $\vec{T}_{i_3}$ . Assim,  $V(\vec{G}) = \bigcup_{i=1}^n \left( V(\vec{T}_i) \right) \cup \bigcup_{j=1}^m \left( V(\vec{S}_j) \right)$  e  $A(\vec{G}) = \bigcup_{i=1}^n \left( A(\vec{T}_i) \right) \cup \bigcup_{j=1}^m \left( A(\vec{S}_j) \cup A_j \right)$ .

Agora, consideramos o grafo bipartido planar  $((U, C), A(U \cup C))$ , e obtemos um

desenho planar para  $G$  substituindo os vértices  $u_i \in U$  pelos grafos correspondentes a  $\vec{T}_i$  e no lugar dos vértices  $c_j \in C$  os grafos correspondentes a  $\vec{S}_j$ . A seguir, provamos alguns lemas estruturais sobre  $\vec{G}$ . Oferecemos na Figura 5.3 um exemplo da instância  $(\vec{G}, 4)$  obtido a partir da instância P3-SAT<sub>3</sub>  $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_3, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$ .

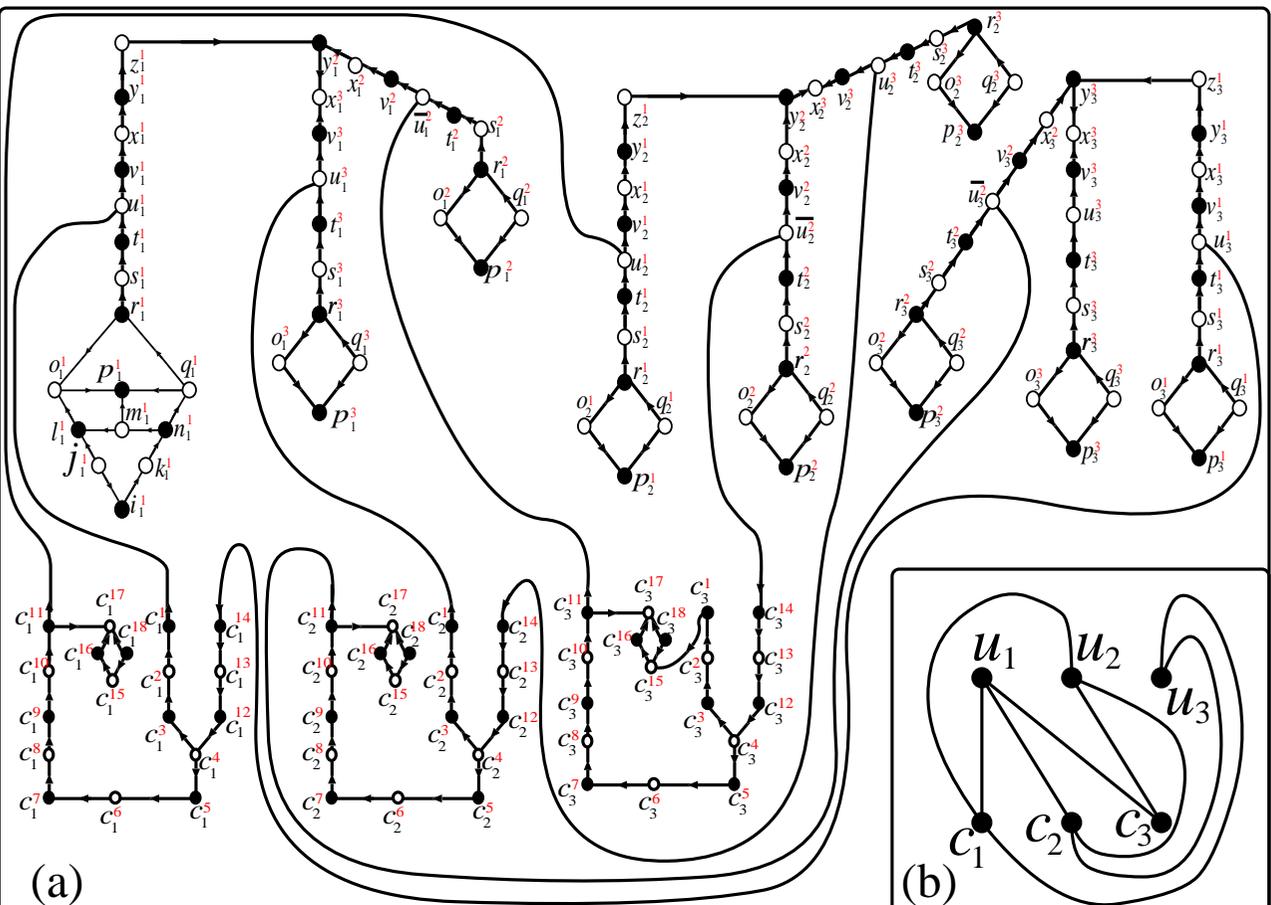


Figura 5.3: (a) Grafo  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  e inteiro  $k = 4$ , obtido da instância de P3-SAT<sub>3</sub>  $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_3, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$ , and (b) Desenho planar do bipartido  $B = ((U \cup C), \vec{E}(B))$  para instância  $I$ .

## 5.2.2 Propriedades estruturais do grafo $\vec{G}$

Por favor siga a Figura 5.4.

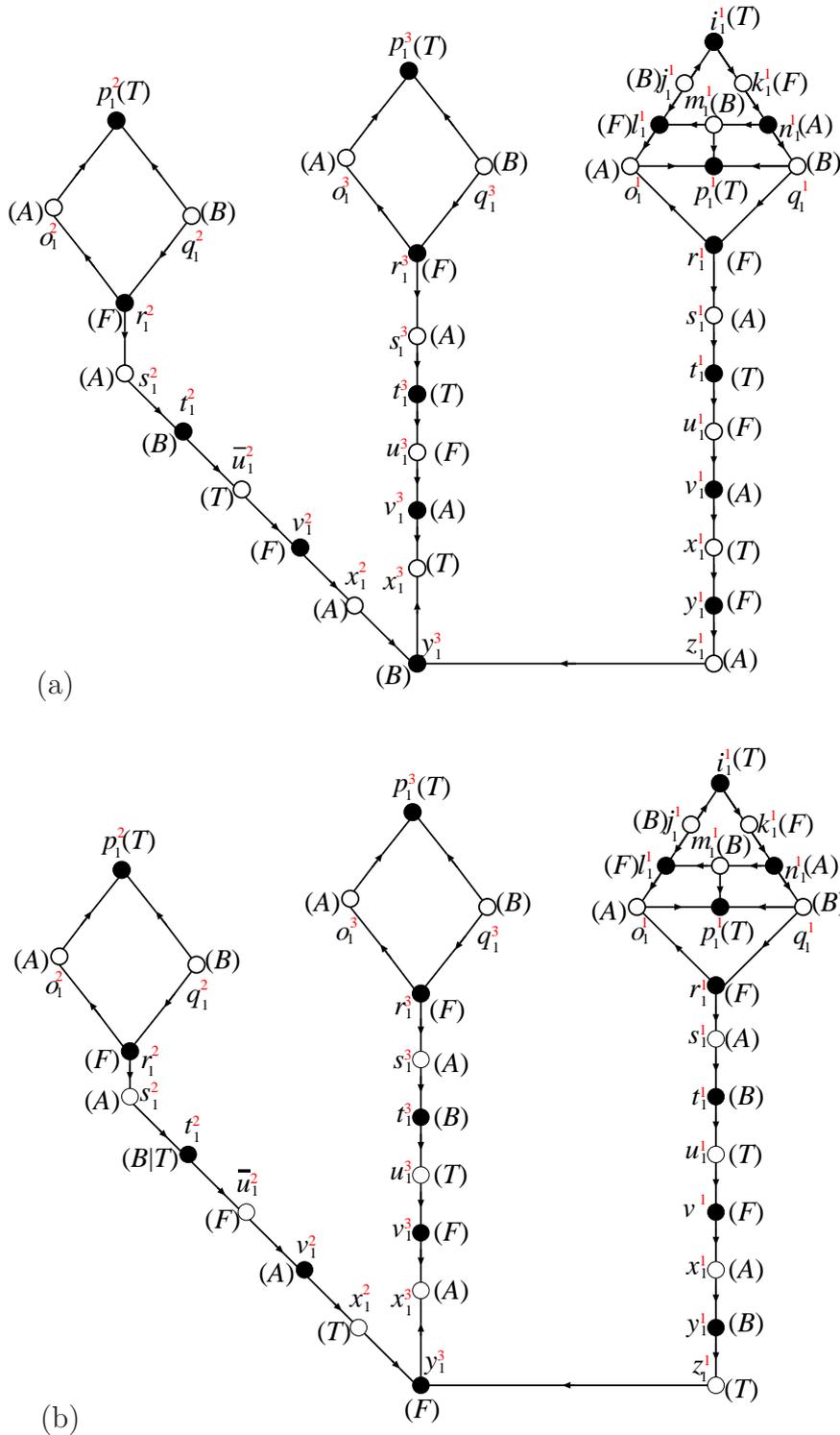


Figura 5.4: As duas atribuições de cores possíveis para  $\bar{u}_1^2$ ,  $u_1^3$  e  $u_1^1$ . Figura 5.4(a): a atribuição  $(\bar{u}_1^2, u_1^3, u_1^1) = (T, F, F)$  e Figura 5.4(b):  $(\bar{u}_1^2, u_1^3, u_1^1) = (F, T, T)$ .

**Lema 5.5** Se  $\vec{G} = (V, A)$  contém  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_i$  como subgrafo,  $i \geq 2$ ,  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$  e as cores  $A, T, B, F$  são respectivamente atribuídas aos vértices  $o_1^1, p_1^1, q_1^1, r_1^1$ , então para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  as cores  $T, F, F$  são, respectivamente, atribuídas aos vértices  $\overline{u}_i^2, u_i^3$  e  $u_i^1$ , ou as cores  $F, T, T$  são, respectivamente, atribuídas aos vértices  $\overline{u}_i^2, u_i^3$  e  $u_i^1$ .

*Demonstração.* Primeiro note que  $\vec{J}_1^d$  é um subgrafo de  $\vec{T}_1$ . Consequentemente, pelo Lema 5.4(3) a cor  $F$  é atribuída para o vértice  $r_1^1$ . Por hipótese  $\chi_o(\vec{G}) \leq 4$ , e pelo Lema 5.4(2) checamos na Tabela 5.1 que as cores  $A, T, B, F$  são, respectivamente, atribuídas para os vértices  $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$ . Na Tabela 5.1 fixamos as cores para  $r_i^d$  e então checamos as cores admissíveis para os vértices restantes  $o_i^d, p_i^d$  e  $q_i^d$  nesta ordem.

Tabela 5.1: Cores para os vértices  $r_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d$  do grafo  $T_i, i \geq 2$ .

Cor de $r_i^d$	Cor admissível p/ $o_i^d$	Cor admissível p/ $p_i^d$	Cor admissível p/ $q_i^d$
$F$	$A$	$T$	$B$
$A$	$B T$	$T F$	Nenhuma
$B$	$T F$	$F A$	Nenhuma
$T$	$F$	$A$	Nenhuma

Como  $r_i^d s_i^d, s_i^d t_i^d$  e  $t_i^d u_i^d \in A(\vec{G})$ , temos que a cor  $A$  é atribuída para o vértice  $s_i^d$ , e a cor  $B$  ou  $T$  é atribuída para o vértice  $t_i^d$ , portanto para o vértice  $u_i^d$  é atribuída a cor  $T$  ou  $F$ . Agora, consideramos dois casos de acordo com a cor  $T$  ou a cor  $F$  ser atribuída para o vértice  $u_i^1$ . Usamos recorrentemente o Lema 5.4.

1. Suponha que a cor  $T$  é atribuída para o vértice  $u_i^1$ , por favor acompanhe na Figura 5.4(b). Assim a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $v_i^1$  e a cor  $A$  é atribuída ao vértice  $x_i^1$ . Consequentemente, uma das cores  $B|T$  é atribuída ao vértice  $y_i^1$ , uma das cores  $T|F$  é atribuída ao vértice  $z_i^1$ , e uma das cores  $F|A$  é atribuída ao vértice  $y_i^3$ . Pelo Lema 5.4, sabemos que o vértice  $x_i^2$  recebe uma cor em  $A|B|T$ . Se por absurdo a cor  $A$  é atribuída ao vértice  $y_i^3$ , então não existe cor para ser atribuída ao vértice  $x_i^2$ . Assim, a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $y_i^3$ . Então, a cor  $T$  é atribuída ao vértice  $z_i^1$  e a cor  $B$  ao vértice  $y_i^1$ . Como a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $y_i^3$ , a cor  $A$  é atribuída ao vértice  $x_i^3$ . A cor  $F$  é atribuída ao vértice  $v_i^3$ . Como somente as cores  $T$  ou  $F$  podem ser atribuídas ao vértice  $u_i^3$ , então para o vértice  $v_i^3$  é atribuída a cor  $F$ . Como  $u_i^3 v_i^3 \in A(\vec{G})$ , então a cor  $T$  tem que ser atribuída ao vértice  $u_i^3$ . Como a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $y_i^3$ , uma das cores  $B|T$  é atribuída a  $x_i^2$ . Segue que uma das cores  $A|B$  é atribuída a  $v_i^2$ . Por absurdo, se a cor  $B$  é atribuída a  $v_i^2$ , então a cor  $A$

é atribuída a  $\overline{u_i^2}$ , uma contradição. Portanto, a cor  $A$  é atribuída a  $v_i^2$ , e a cor  $F$  é atribuída a  $\overline{u_i^2}$ .

2. Suponha que a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $u_i^1$ , por favor acompanhe a Figura 5.4(a). Similarmente ao primeiro caso, provamos que a cor  $F$  é atribuída ao vértice  $v_i^2$  e a cor  $T$  é atribuída ao vértice  $\overline{u_i^2}$ .

□

**Lema 5.6** *Se  $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3})$  [ $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2})$ ]  $\in C$ , então existe uma 4-coloração orientada  $\phi$  para  $\vec{G}$ , usando o grafo de cor  $\vec{H}$  descrito no Lemma 5.4(2), se e somente se  $(\phi(\lambda_{i_1}^{d_1}), \phi(\lambda_{i_2}^{d_2}), \phi(\lambda_{i_3}^{d_3})) \neq (F, F, F)$  [ $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \neq (F, F)$ ], onde  $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$  são os vértices de  $\vec{T}_{i_1}, \vec{T}_{i_2}, \vec{T}_{i_3}$  adjacente aos vértices de  $\vec{S}_j$ .*

*Demonstração.* Fazemos esta demonstração por exaustão. Primeiro na Tabela 5.2 avaliamos todas as cores que podem ser atribuídas à sequência de vértices  $(c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{14})$  quando as cores  $T, F$  são atribuídas a  $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$ , excluindo apenas o caso  $F, F, F$ .

Tabela 5.2: Avaliação de cores para os vértices  $(c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{14})$ .

$(\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3})$	$(c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{14})$
$T, T, T$	$B, A, F, T, F, A, B, T, F, A, B, B, A, F$
$T, T, F$	$A, F, B T, A, B T, F T, A F, A B T, B F T, A F, A B, F, B T, A$
$T, F, T$	$B T, A, F, T, F, A, B, T, F, A, B, B, A, F$
$T, F, F$	$T, B, A, F, A, B, F, A, B T, A F, A B, T, B, A$
$F, T, T$	$B, A, F, T, F, A, B, T, F, A, B, B, A, F$
$F, T, F$	$A, F, B T, A, B T, F, A, B T, F, A, B, F, B T, A$
$F, F, T$	$B T, A, F, T, F, A, B, T, F, A, B, B, A, F$

Pelo mesmo argumento usado no Lema 5.5 para colorir  $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$ , a sequência de vértices  $(c_j^{15}, c_j^{16}, c_j^{17}, c_j^{18})$  sempre têm a sequência de cores  $(F, A, T, B)$ , por isso omitimos estes vértices na Tabela 5.2 na segunda coluna. Por conveniência, oferecemos na Figura 5.5 todas as atribuições possíveis de cores.

Suponha que  $(F, F, F)$  é atribuído à sequência de vértices  $(\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3})$ , por favor siga a Figura 5.5(i). Assim,  $c_j^{11} \lambda_{i_1}^{d_1}, c_j^{11} c_j^{17} \in A(\vec{G})$ ,  $\phi(\lambda_{i_1}^{d_1}) = F$  e  $\phi(c_j^{17}) = T$ , então a cor  $B$  é atribuída ao vértice  $c_j^{11}$ . Avaliando a sequência  $(c_j^{14}, c_j^{13}, c_j^{12})$  obtemos que as cores possíveis são  $(A, B|T, T|F)$ , e pela avaliação da sequência  $(c_j^1, c_j^2, c_j^3)$  obtemos que as cores possíveis são  $(T|B, B|A, A|F)$ . Como  $c_j^4 c_j^3 \in A(\vec{G})$  então podemos atribuir o conjunto de cores  $\{B, F, T\}$  para  $c_j^4$ , por outro lado  $c_j^{12} c_j^4 \in A(\vec{G})$  e podemos atribuir o conjunto de cores  $\{F, A\}$  para  $c_j^4$ , assim a cor  $F$  é atribuída a  $c_j^4$ , e

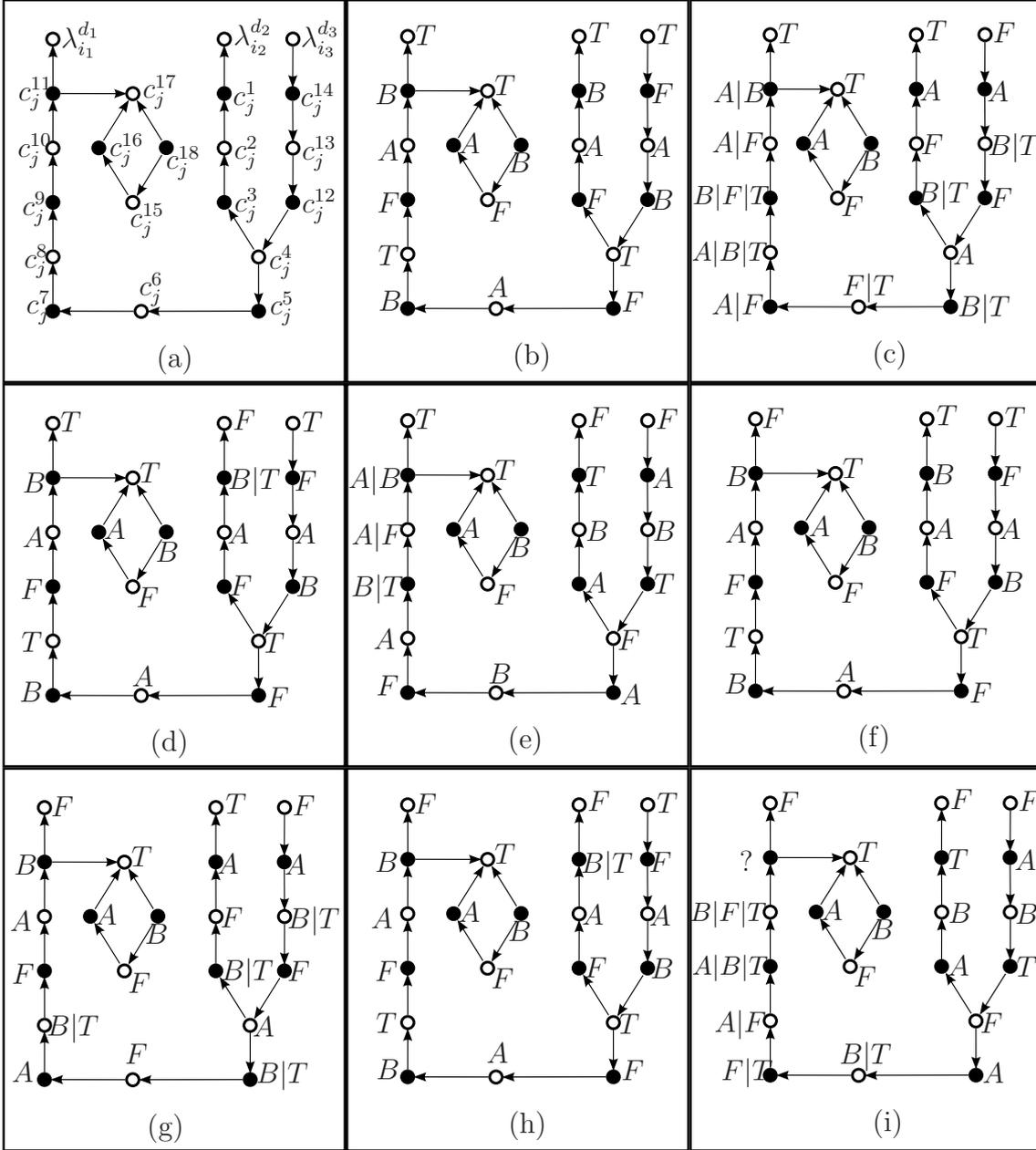


Figura 5.5: componente *Satisfaction Testing*  $S_j$  obtido da cláusula  $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3})$  mais os três vértices  $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$  das três correspondentes Componentes *Truth Setting* (a). Coloração orientada de  $S_j$  quando as cores  $T$  e  $F$  são atribuídas aos vértices  $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$  (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i). Conflito no vértice  $c_j^{11}$  quando consideramos as cores  $F, F, F$  atribuídas aos vértices  $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$  (i).

temos uma nova avaliação  $(T, B, A, A, B, T)$  para a sequência  $(c_j^1, c_j^2, c_j^3, c_j^{14}, c_j^{13}, c_j^{12})$ . Novamente, pela avaliação da sequência  $(c_j^5, c_j^6, c_j^7, c_j^8, c_j^9, c_j^{10})$  obtemos que as cores possíveis são  $(A, B|T, F|T, A|F, A|B|T, B|F|T)$ . Como as cores  $B, F, T$  podem ser atribuídas para  $c_j^{10}$ , temos uma contradição com nossa suposição de que a cor  $B$  é atribuída ao vértice  $c_j^{11}$ , assim  $c_j^{10}c_j^{11} \in A(\vec{G})$ .

□

**Teorema 5.7**  $OCN_4$  é NP-completo mesmo para grafos conexos orientados acíclicos, planares, bipartidos, com  $\Delta(G) = 3$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $OCN_4$  esta em NP, pois podemos checar em tempo polinomial no tamanho da entrada, que entre cada par de cores em classes de cores diferentes, se as arestas têm a mesma direção.

Agora, demonstramos que a instância  $I = (U, C)$  de PLANAR 3-SAT $_{\bar{3}}$  é satisfatível se e somente se o grafo  $\vec{G}$  tem uma 4-coloração orientada.

Considere  $I = (U, C)$  uma instância de P3-SAT $_{\bar{3}}$ , e  $\vec{G} = (V, A)$  obtido como descrito. Por construção, o grafo subjacente  $G = (V, E)$  é planar, bipartido e com grau máximo 3. Oferecemos na Figura 5.3 uma instância  $\vec{G} = (V, A)$ .

Suponha que existe uma atribuição de verdade  $\eta$  para  $U$  satisfazendo cada cláusula de  $C$ . Definimos uma coloração orientada para  $\vec{G}$  definindo uma orientação de  $T_i$  onde as cores  $T, T, F$  são, respectivamente, atribuídas aos vértices  $u_i^1, u_i^3, \bar{u}_i^2$  se e somente se  $u_i = T$  em  $\eta$ , para cada cláusula satisfeita definimos uma orientação adequada de  $S_j$  ilustrada na Figura 5.5. Suponha que existe uma 4-coloração orientada para  $\vec{G}$ . Definimos uma atribuição de verdade  $\eta$  para  $U$  satisfazendo cada cláusula de  $C$ , onde  $u_i$  é definido como verdadeiro se e somente se as cores  $T, T, F$  são, respectivamente, atribuídas para os vértices  $u_i^1, u_i^3, \bar{u}_i^2$ . Para verificar que esta é uma atribuição de verdade é suficiente observar que a atribuição da tripla  $F, F, F$  para os vértices literais de uma mesma cláusula gera o conflito definido na Figura 5.5(i). □

Oferecemos na Figura 5.6 um exemplo de atribuição de uma 4-coloração para instância  $\vec{G} = (V, A)$  obtido da satisfatível P3-SAT $_{\bar{3}}$   $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1, u_2, u_3), (u_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$  pela atribuição de verdade  $u_1 = \bar{u}_2 = u_3 = T$ .

Atualmente, o estado da arte do problema  $OCN_k, k \geq 4$  pode ser visto na Tabela 5.3.

Para a conveniência do leitor, oferecemos na Figura 5.3 um exemplo de atribuição de uma 4-coloração para o grafo  $\vec{G} = (V, A)$  obtido a partir da instância  $I = (U, C)$  de P3-SAT $_{\bar{3}}$ . No Corolário 5.8 provamos que  $OCN_4$  é NP-completo mesmo para grafos cúbicos planares.

**Corolário 5.8**  $OCN_4$  é NP-completo mesmo para grafos cúbicos conexos orientados planares.

*Demonstração.* Agora construímos outra instância cúbica planar  $\vec{G}'$  a partir de  $\vec{G}$ , tal que  $\vec{G}'$  tem uma 4-coloração orientada se e somente se  $\vec{G}$  tem uma 4-coloração orientada. Para isso, observe que o grafo orientado especial  $\vec{G}$  tem vértices somente com os

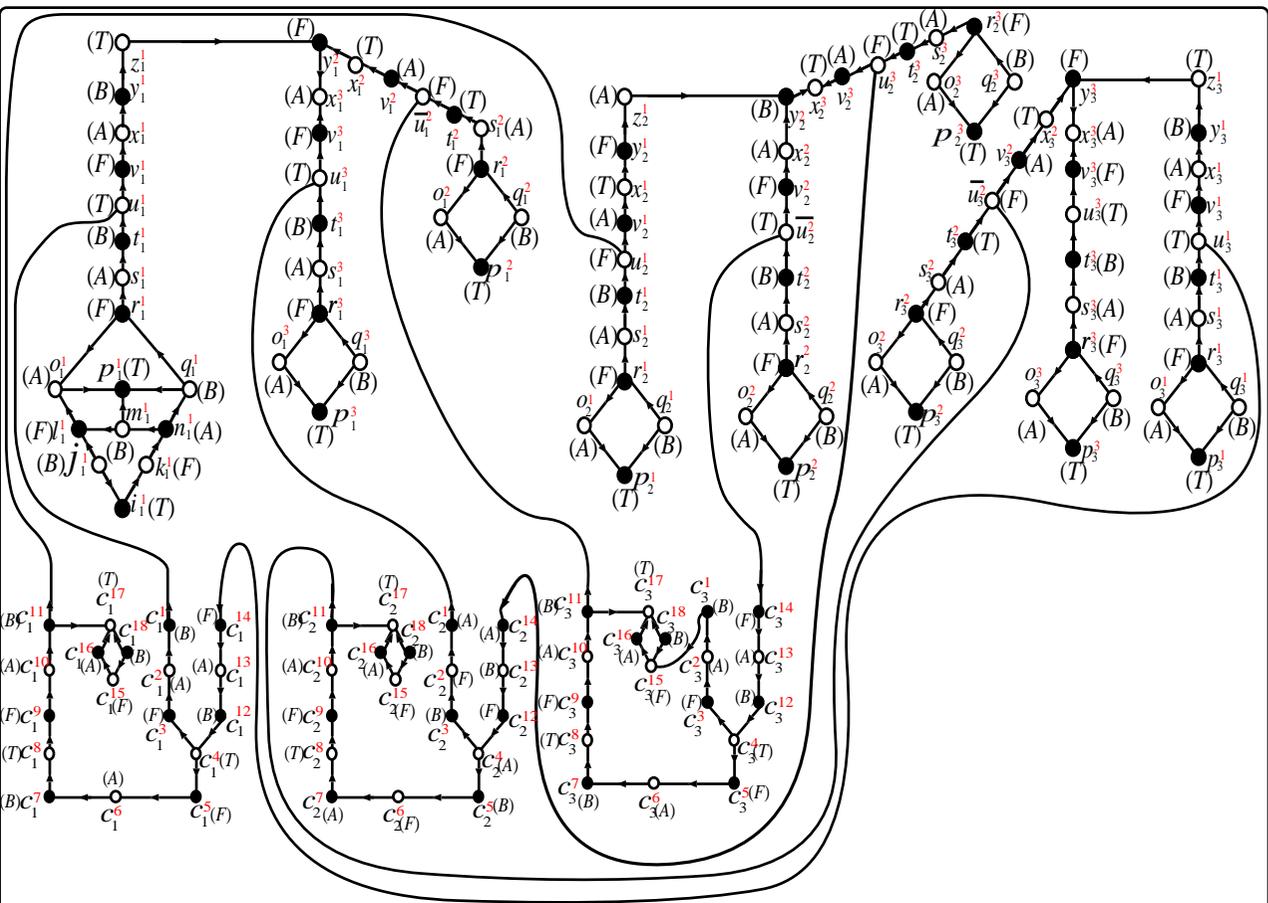


Figura 5.6: 4-coloração orientada para o grafo orientado  $\vec{G}$  obtido da instância satisfatível P3-SAT $_3$   $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1, u_2, u_3), (u_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\})$  pela atribuição de verdade  $u_1 = T = \bar{u}_2 = u_3$ .

graus 2 e 3. Para construir  $\vec{G}'$  nós consideramos para cada vértice  $v$  de grau 2 de  $\vec{G}$  o gadget adicional.  $G_d(v) = (\{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5\}, \{v'_2v'_1, v'_2v'_3, v'_4v'_1, v'_4v'_3, v'_5v'_2, v'_5v'_4\})$  na Figura 5.7(a), mais a aresta  $v'_1v$ . Observe que qualquer que seja a cor em  $\{A, B, F, T\}$  assumida pelo vértice  $v$ , existe uma coloração correspondente na Figura 5.7(b), na Figura 5.7(c) e na Figura 5.7(d) que pode ser estendida para o gadget  $G_d(v)$ . Agora o grafo  $G'$  é cúbico e planar. E a instância  $I = (U, C)$  é satisfatível se e somente se  $\vec{G}'$  tem uma 4-coloração orientada. Note que  $\vec{G}'$  não é nem bipartido, nem acíclico.  $\square$

Tabela 5.3: Estado da arte para NP-Completo do problema  $OCN_k$ .

[3]	Decidir se um digrafo tem homomorfismo para um torneio $\vec{T}$ com pelo menos dois ciclos direcionados, é NP-completo.
[28]	$OCN_4$ é NP-completo.
[18]	$OCN_4$ é NP-completo para grafos orientados acíclicos com $\Delta = \max(p+3, 6)$ . $OCN_4$ é NP-completo para grafos orientados bipartidos com $\Delta = \max(p+3, 7)$ .
[23]	$OCN_4$ é NP-completo para grafos orientados acíclicos com $\Delta = \max(p+2, 4)$ .
[12]	$OCN_4$ é NP-completo para grafos orientados acíclicos, planares, bipartidos com $\Delta = 3$ .

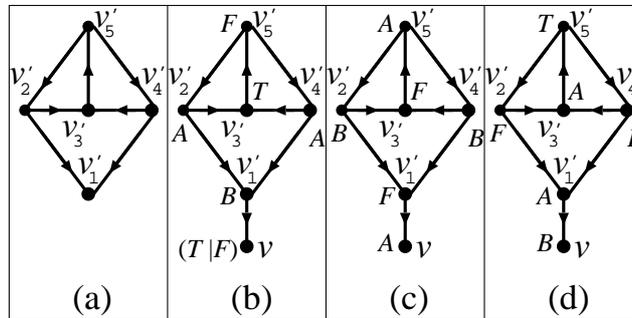


Figura 5.7: Grafo orientado para o Corolário 5.8.

# Capítulo 6

## Limites para o número cromático orientado de grafos orientados acíclicos com grau máximo 3

Neste capítulo apresentamos o limite superior 8 e um algoritmo linear para determinar uma 8-coloração orientada de grafos orientados acíclicos com  $\Delta \leq 3$  [15]. Observamos que este algoritmo é uma 2-aproximação para  $\text{OCN}_k$  em grafos acíclicos com  $\Delta \leq 3$ , pois  $\text{OCN}_3$  é um problema polinomial.

Em 1997 Sopena [40] provou que se  $\vec{G}$  é um grafo orientado com  $\Delta \leq 3$ , então  $\chi_o(\vec{G}) \leq 16$ . Sopena e Vignal [45], provaram que se  $\vec{G}$  é um grafo orientado com  $\Delta \leq 3$ , então  $\chi_o(\vec{G}) \leq 11$ . Em 1997 Sopena [40] conjecturou:

**Conjectura 6.1** *Se  $\vec{G}$  é um grafo orientado tal que  $\Delta \leq 3$  e o grafo subjacente  $G$  é conexo, então  $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$ .*

Demonstramos que: Se  $\vec{G}$  é acíclico com  $\Delta \leq 3$ , então  $\chi_o(\vec{G}) \leq 8$ . De fato, provamos que existe um torneio  $\vec{R}$  com 8 vértices tal que  $\vec{G}$  é  $\vec{R}$ -colorível. Escrevemos também um algoritmo de tempo linear para computar uma  $\vec{R}$ -coloração para  $\vec{G}$ .

### 6.1 O grafo de cor $\vec{R}$

Seja  $\vec{G}$  um grafo orientado acíclico com  $\Delta \leq 3$ . Nesta seção, apresentamos um grafo orientado  $\vec{R}$  com 8 vértices tal que  $\vec{G}$  admite uma  $\vec{R}$ -coloração. Para descrever o grafo orientado  $\vec{R}$ , primeiro vamos considerar a definição do torneio de Paley. O torneio de Paley é utilizado em muitos artigos sobre limites para o número cromático orientado, veja por exemplo [40], [45], [33], [21]. Seja  $p$  uma potência de primo tal que  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . O *Torneio de Paley*  $\vec{QR}_p$  é um grafo orientado com conjunto de vértices  $V(\vec{QR}_p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$  tal que  $xy \in A(\vec{QR}_p)$  se e somente se  $y-x$  é um resíduo quadrático diferente de  $p$ . Aqui estamos interessados apenas em  $\vec{QR}_7$ , que é

o torneio com conjunto de vértices  $V(\vec{QR}_7) = \{0, 1, \dots, 6\}$  tal que  $xy \in A(\vec{QR}_7)$  se e somente se  $y - x \equiv 1, 2$  ou  $4 \pmod{7}$ . Na Figura 6.1 apresentamos o Torneio de Paley  $\vec{QR}_7$ .

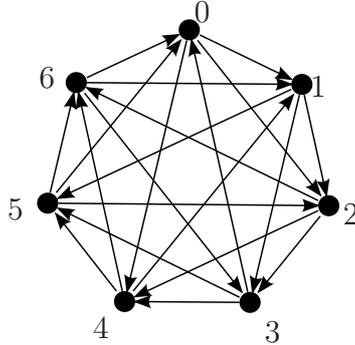


Figura 6.1: Torneio de Paley com 7 vértices  $\vec{QR}_7$ .

Existe uma infinidade de grafos acíclicos orientados com  $\Delta \leq 3$  que não são  $\vec{QR}_7$ -coloríveis. Observe que o torneio transitivo  $\vec{T}_4$ , na Figura 6.2(a), é um grafo orientado acíclico com  $\Delta(\vec{T}_4) = 3$ , que não é  $\vec{QR}_7$ -colorível. Note que cada vértice  $v \in V(\vec{QR}_7)$  tem 3 sucessores, que sempre formam entre si um ciclo direcionado. O mesmo ocorre com os predecessores de  $v$ . Assim, não existe homomorfismo de  $\vec{T}_4$  em  $\vec{QR}_7$  pois os 3 sucessores do vértice  $v_1 \in V(\vec{T}_4)$  definem um grafo acíclico, veja Figura 6.2(a). Na Figura 6.2(b) apresentamos um grafo orientado acíclico  $\vec{G}$  com  $\Delta(\vec{G}) \leq 3$  que não é  $\vec{QR}_7$ -colorível. Com o grafo  $\vec{G}$  e uma árvore  $F$  podemos construir uma família infinita de grafos com  $\Delta \leq 3$  que não são  $\vec{QR}_7$ -coloríveis. Por exemplo, no grafo da Figura 6.2(c) basta definir qualquer orientação  $\vec{F}$  para  $F$  e identificar um vértice de grau 1 em  $\vec{F}$  com o vértice  $v_5$  de uma cópia do grafo orientado  $\vec{G}$  da Figura 6.2(b).

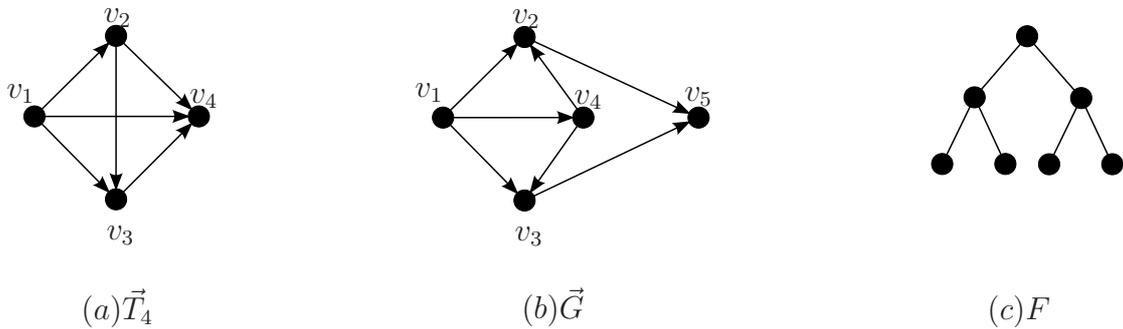


Figura 6.2: (a) Torneio transitivo  $\vec{T}_4$ , (b) Grafo orientado  $\vec{G}$  com  $\Delta(\vec{G}) \leq 3$ . (c) Uma árvore  $F$  onde identificamos algum vértice de grau 1 com  $v_5 \in V(\vec{G})$ .

Por fim, construímos o grafo  $\vec{R}$  a partir de  $\vec{QR}_7$  pela adição do vértice  $s$ , e o conjunto de arcos  $\vec{S} = \{sv : v \in V(\vec{QR}_7)\}$ . Consideramos as cores  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  atribuídas para os vértices de  $\vec{QR}_7$  e a cor 7 atribuída para o vértice  $s$ . Na Figura 6.3

ilustramos o grafo orientado  $\vec{R}$  com 8 vértices, que tem um vértice fonte  $s$  a mais que o grafo  $\vec{QR}_7$ .

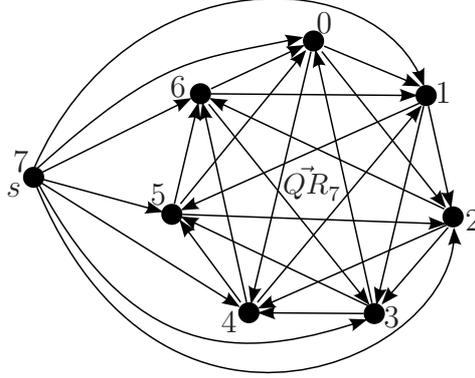


Figura 6.3: Grafo orientado  $\vec{R}$  com 8 vértices.

## 6.2 $\vec{R}$ -coloração de um grafo orientado acíclico $\vec{G}$ com $\Delta(\vec{G}) = 3$

Nesta seção apresentamos uma demonstração de que um grafo orientado acíclico  $\vec{G}$  com  $\Delta(\vec{G}) = 3$  é  $\vec{R}$ -colorível utilizando indução no número de vértices. Adicionalmente obtemos um algoritmo de tempo linear para atribuir uma  $\vec{R}$ -coloração para  $\vec{G}$ .

**Lema 6.2 (Sopena [40])** *Se  $\vec{QR}_7$  é o torneio de Paley com 7 vértices, então para cada arco  $xy \in A(\vec{QR}_7)$  existem  $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  tal que  $ax, ay, xb, by, cx, yc, xd, yd \in A(\vec{QR}_7)$ .*

Foi demonstrado em [40] que  $\vec{QR}_7$  é o menor grafo orientado que satisfaz a propriedade do Lema 6.2.

Seja  $\vec{G}$  um grafo orientado,  $u, v, w \in V(\vec{G})$ , e  $\phi$  uma  $\vec{R}$ -coloração para  $\vec{G} \setminus \{w\}$ , onde  $u$  e  $v$  recebem as cores  $\phi(u), \phi(v)$  em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . A função  $triple(w, \phi(u), \phi(v)) = k$  é a menor cor  $k$  em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , tal que  $k$  tem a mesma relação de adjacência com  $\phi(u)$  e  $\phi(v)$  em  $\vec{QR}_7$ , que  $w$  tem com  $u$  e  $v$  em  $\vec{G}$ . Vamos acompanhar um exemplo utilizando a Figura 6.1. Se  $wu, vw \in A(\vec{G})$ ,  $\phi(u) = 0$  e  $\phi(v) = 1$ , então  $triple(w, \phi(u), \phi(v)) = 3$ . Note que as cores incidentes em 0 são 3, 5, 6, enquanto as cores em que 1 incide são 2, 3 e 5.

**Lema 6.3** *Seja  $\phi$  uma  $\vec{R}$ -coloração de um grafo acíclico orientado  $\vec{G}$  com  $\Delta \leq 3$ . Se existe um vértice  $x \in V(\vec{G})$ , tal que  $deg_{\vec{G}}^+(x) = 3$  e  $\phi(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , então uma nova  $\vec{R}$ -coloração  $\phi'$  pode ser definida a partir de  $\phi$  pela substituição da cor  $\phi(x)$  pela cor  $\phi'(x) = 7$ .*

*Demonstração.* Veja que o vértice  $s$  é predecessor de todos os vértices de  $V(\vec{R}) \setminus s$  que são os vértices de  $\vec{QR}_7$ . Como  $\deg_G^+(x) = 3$ , não existe conflito se substituirmos  $\phi(x)$  pela cor  $\phi'(x) = 7$ .  $\square$

**Lema 6.4** *Seja  $\phi$  uma  $\vec{R}$ -coloração de um grafo orientado acíclico  $\vec{G}$  com  $\Delta \leq 3$ . Se existe um vértice  $x \in V(\vec{G})$ , tal que  $\deg_G(x) \leq 2$  e  $\phi(x) = 7$ , então uma nova  $\vec{R}$ -coloração  $\phi'(x) = \text{triple}(x, \phi(y), \phi(z))$ , onde  $\{y, z\} = N_G(x)$ , pode ser definida a partir de  $\phi$  substituindo a cor  $\phi(x)$  pela cor  $\phi'(x)$  em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .*

*Demonstração.* Se  $\phi(x) = 7$  e  $\deg_G(x) \leq 2$ , então  $x$  é uma fonte. Se  $\deg_G(x) = 0$ , então qualquer cor em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pode ser atribuída para  $x$ . Suponha que  $1 \leq \deg_G(x) \leq 2$ . Seja  $N_G(x) = \{u_1, u_{\deg_G(x)}\}$ . Pelo Lema 6.2, a cor:  $\text{triple}(x, \phi(u_1), \phi(u_{\deg_G(x)}))$  em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pode ser atribuída para  $x$ .  $\square$

**Teorema 6.5** *Se  $\vec{G}$  é um grafo acíclico orientado,  $\Delta \leq 3$ , então existe uma  $\vec{R}$ -coloração para  $\vec{G}$ .*

*Demonstração.* Por indução no número de vértices  $n = |V(\vec{G})|$ . Por hipótese  $\vec{G}$  é acíclico, então existe pelo menos uma fonte  $s \in V(\vec{G})$ . Se  $n = 1$ , então atribuímos qualquer cor de  $\vec{QR}_7$  para este vértice. Suponha que para qualquer  $n \leq p$ ,  $p \geq 1$ , a afirmação é verdadeira. Seja  $\vec{G}$  um grafo orientado acíclico com  $\Delta(\vec{G}) = 3$  e  $n = p+1$  vértices. Dividimos a demonstração em três casos de acordo com  $\deg_G^+(s)$  para uma fonte  $s$  em  $\vec{G}$ :

1.  $\deg_G^+(s) = 3$ , onde  $sa, sb, sc \in A(\vec{G})$ , Figura 6.4 (a).

Construímos  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{G}$  pela remoção do vértice  $s$  de  $\vec{G}$ . Note que  $\vec{H}$  é acíclico desde que não inserimos um novo arco em  $\vec{G}$ . Por hipótese de indução atribuímos uma  $\vec{R}$ -coloração  $\phi_{\vec{H}}$  para  $\vec{H}$ . Pelo Lema 6.4, podemos obter uma nova  $\vec{R}$ -coloração  $\phi'_{\vec{H}}$  para  $\vec{H}$  onde todo vértice de grau 2 recebe uma cor em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Agora usamos  $\phi'_{\vec{H}}$  para definir uma coloração orientada  $\phi_{\vec{G}}$  para  $\vec{G}$ . Como os vértices  $a, b, c$  têm grau 2 em  $\vec{H}$ , a cor 7 pode ser considerada não ter sido atribuída a nenhum dos vértices  $a, b, c$  em  $\phi'_{\vec{H}}$ . Obtemos  $\vec{G}$  de  $\vec{H}$  retornando o vértice  $s$  e os seus respectivos arcos. Finalmente, fazemos  $\phi_{\vec{G}}(s) = 7$ , e obtemos uma  $\vec{R}$ -coloração válida para  $\vec{G}$  pois no grafo  $\vec{R}$  o vértice 7 aponta para qualquer cor em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

2.  $\deg_G^+(s) = 2$ , onde  $sa, sb \in A(\vec{G})$ , Figura 6.4 (b).

Construímos  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{G}$  pela remoção do vértice  $s$  de  $\vec{G}$ . Note que  $\vec{H}$  é acíclico desde que não inserimos um novo arco em  $\vec{G}$ . Por hipótese de indução

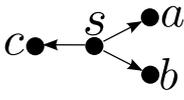
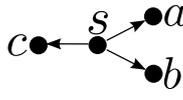
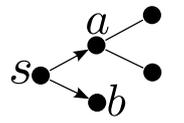
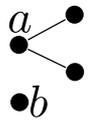
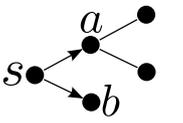
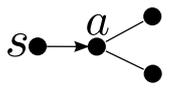
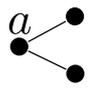
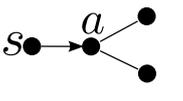
	$\vec{G}$	$\vec{H}$	$\vec{G}$
(a) $deg_{\vec{G}}^+(s) = 3$			
(b) $deg_{\vec{G}}^+(s) = 2$			
(c) $deg_{\vec{G}}^+(s) = 1$			

Figura 6.4: (a) Caso para  $d_G^+(s) = 3$ , (b) Caso para  $d_G^+(s) = 2$ , (c) Caso para  $d_G^+(s) = 1$ .

atribuímos uma  $\vec{R}$ -coloração  $\phi_{\vec{H}}$  para  $\vec{H}$ . Agora usamos  $\phi_{\vec{H}}$  para definir uma coloração orientada  $\phi_{\vec{G}}$  para  $\vec{G}$ . Se  $\phi(a) = 7$  ou  $\phi(b) = 7$ , então pelo Lema 6.4 podemos trocar a cor de  $a$  ou a cor de  $b$  por uma cor de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Obtemos  $\vec{G}$  de  $\vec{H}$  retornando o vértice  $s$  e os arcos  $sa$  e  $sb$ , pelos Lemas 6.2 e 6.4 podemos atribuir pelo menos uma cor em  $\vec{QR}_7$  para  $s$ .

3.  $d_G^+(s) = 1$ , Figura 6.4 (c).

Suponha que  $sa \in A(\vec{G})$ . Nós construímos  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{G}$  pela remoção do vértice  $s$  de  $\vec{G}$ . Note que  $\vec{H}$  é acíclico desde que não inserimos um novo arco em  $\vec{G}$ . Por hipótese de indução atribuímos uma  $\vec{R}$ -coloração  $\phi_{\vec{H}}$  para  $\vec{H}$ . Agora usamos  $\phi_{\vec{H}}$  para definir uma coloração orientada  $\phi_{\vec{G}}$  para  $\vec{G}$ . Se  $\phi(a) = 7$ , então pelo Lema 6.4 alteramos a cor do vértice  $a$  para uma cor em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Obtemos  $\vec{G}$  de  $\vec{H}$  retornando o vértice  $s$  e o arco  $sa$ , pelos Lemas 6.2 e 6.4 podemos atribuir pelo menos uma cor em  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  para  $s$ .

□

A demonstração do Teorema 6.5 fornece um algoritmo de tempo linear para colorir um grafo acíclico orientado com  $\Delta \leq 3$ .

### 6.3 Um algoritmo para uma $\vec{R}$ -coloração de um grafo orientado acíclico $\vec{G}$ com $\Delta(\vec{G}) = 3$

Nosso procedimento segue diretamente da demonstração do Teorema 6.5. Agora descrevemos o algoritmo  $\vec{R}$ -coloração que gera uma 8-coloração de um grafo orientado acíclico  $\vec{G} = (V, A)$  com  $\Delta \leq 3$  e  $n = |V|$  vértices.

---

**Algoritmo 6.1:**  $\vec{R}$ -coloração. Tempo de execução  $O(n)$

---

**Entrada:** Um grafo orientado acíclico  $\vec{G}$  com  $\Delta \leq 3$   
**Saída:** Uma  $\vec{R}$ -coloração orientada para  $\vec{G}$ .

- 1 Procedimento Color( $G_i$ ).
- 2 **início**
- 3     Extraia\_fonte( $s_i$ );
- 4     **se** ( $|V(\vec{G}_i)| > 1$ ) **então**
- 5         **se** fonte  $s_i$  em  $\vec{G}_i$  tal que ( $deg_{\vec{G}_i}(s_i) = 3$ ) **então**
- 6             color( $\vec{G}_{i-1} = \vec{G}_i \setminus s_i$ );
- 7              $\phi(s_i) \leftarrow 7$ ;
- 8         **fim**
- 9         **se** fonte  $s_i$  em  $\vec{G}_i$  tal que ( $deg_{\vec{G}_i}(s_i) = 2$ ) **então**
- 10             color( $\vec{G}_{i-1} = \vec{G}_i \setminus s_i$ );
- 11             %Seja  $N_{\vec{G}_i}(s_i) = \{a_i, b_i\}$ ;
- 12              $\phi(s_i) \leftarrow triple(s(i), \phi(a_i), \phi(b_i))$ ;
- 13         **fim**
- 14         **se** fonte  $s_i$  em  $\vec{G}_i$  tal que ( $deg_{\vec{G}_i}(s_i) = 1$ ) **então**
- 15             color( $\vec{G}_{i-1} = \vec{G}_i \setminus s_i$ );
- 16             %Seja  $N_{\vec{G}_i}(s_i) = \{a_i\}$ ;
- 17              $\phi(s_i) \leftarrow triple(s(i), \phi(a_i), \phi(a_i))$ ;
- 18         **fim**
- 19     **fim**
- 20     **senão**
- 21          $\phi(v) \leftarrow 0$ ;
- 22     **fim**
- 23 **fim**
- 24 **início**
- 25     Rode uma Ordenação Topológica em  $G$ ;
- 26     Color( $G_n = G$ );
- 27 **fim**

---

Lembramos que a Ordenação Topológica toma  $O(m)$  passos e que em um grafo com  $\Delta = 3$ ,  $m = O(n)$ . Dada uma instância  $\vec{G}_n$  com  $n$  vértices, o algoritmo color( $\vec{G}_n$ ) seleciona uma fonte  $s \in V(\vec{G}_n)$  que é fornecida em sequência pela Ordenação Topológica e remove esta fonte de  $\vec{G}_n$ , este processo se repete até que o grafo tenha apenas um vértice. Em seguida, o algoritmo retorna as fontes na ordem

inversa da remoção com uma cor já atribuída. A complexidade em cada passo é de  $O(1)$ . Lembramos que o valor de  $n$  é decrementado em cada passo e que precisamos de  $n - 1$  passos, assim a complexidade do algoritmo é  $O(n)$ .

Na Figura 6.5 ilustramos a execução passo a passo do procedimento  $\text{color}(\vec{G}_n)$  onde  $\vec{G}_n$  é a orientação do grafo de Petersen exibido na Figura 6.5(a). Para auxiliar o leitor, listamos as fontes  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , que são removidas em cada passo do algoritmo, que compreendem as Figuras de 6.5(a) até 6.5(i). Em (b) o vértice  $s_{10} = v_3$ . Em (c) o vértice  $s_9 = v_{10}$ . Em (d) o vértice  $s_8 = v_9$ . Em (e) o vértice  $s_7 = v_8$ . Em (f) o vértice  $s_6 = v_2$ . Em (g) o vértice  $s_5 = v_1$ . Em (h) o vértice  $s_4 = v_7$ . Em (i) o vértice  $s_3 = v_6$ . Em (j) temos o grafo  $\vec{G}_1$ . Listamos também as cores que são atribuídas aos vértices, que compreendem as Figuras de 6.5(k) até 6.5(t). Em (k)  $\phi(v_4) \leftarrow 0$ . Em (l)  $\phi(v_5) \leftarrow \text{triple}(v_5, \phi(v_4), \phi(v_4)) = 3$ . Em (m)  $\phi(v_6) \leftarrow \text{triple}(v_6, \phi(v_5), \phi(v_5)) = 1$ . Em (n)  $\phi(v_7) \leftarrow \text{triple}(v_7, \phi(v_6), \phi(v_6)) = 0$ . Em (o)  $\phi(v_1) \leftarrow \text{triple}(v_1, \phi(v_5), \phi(v_5)) = 1$ . Em (p)  $\phi(v_2) \leftarrow \text{triple}(v_2, \phi(v_1), \phi(v_1)) = 0$ . Em (q)  $\phi(v_8) \leftarrow \text{triple}(v_8, \phi(v_1), \phi(v_7)) = 6$ . Em (r)  $\phi(v_9) \leftarrow \text{triple}(v_9, \phi(v_4), \phi(v_8)) = 5$ . Em (s)  $\phi(v_{10}) \leftarrow 7$ . Em (t)  $\phi(v_3) \leftarrow 7$ .

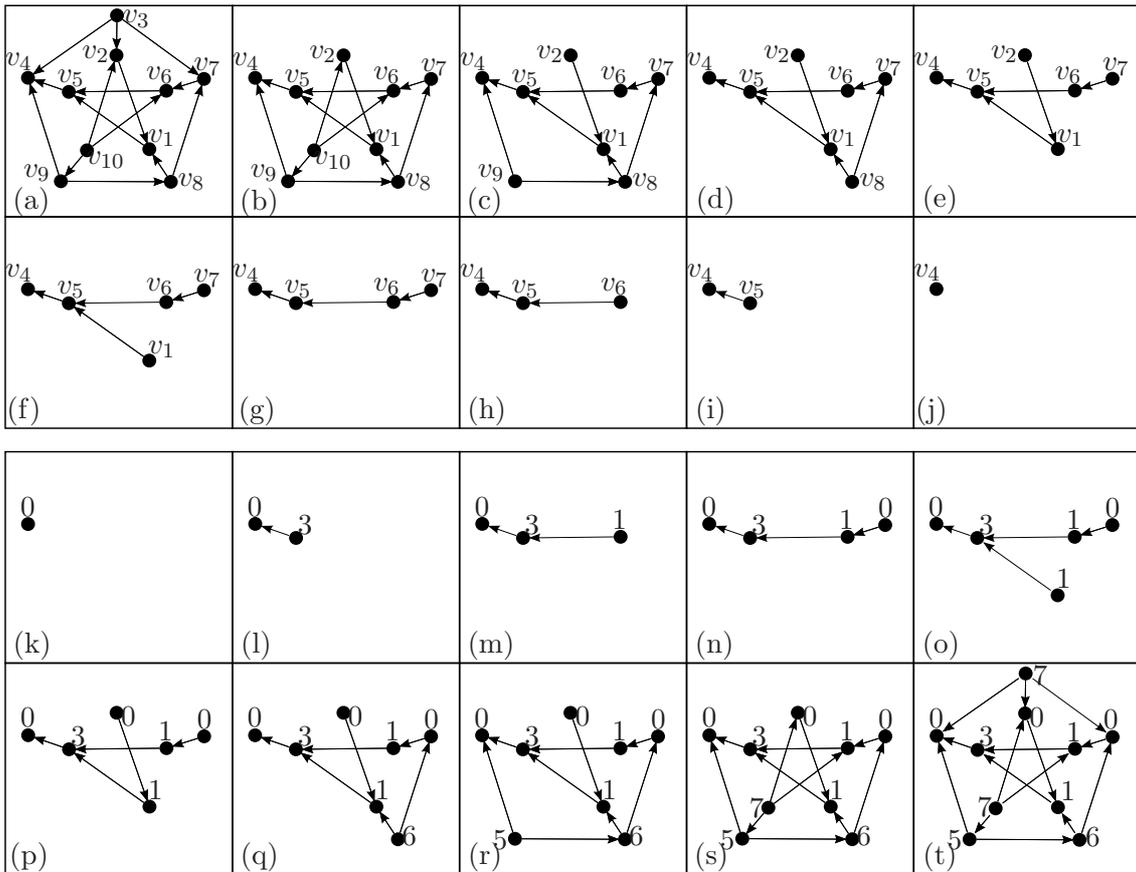


Figura 6.5: Passos da execução do procedimento  $\text{colour}(\vec{G}_{10})$  onde  $\vec{G}_{10}$  é a orientação do grafo de Petersen da Figura (a).

Depois que demonstramos que todo grafo acíclico com  $\Delta \leq 3$  tem uma 8 co-

loração orientada, nosso objetivo passou a ser o de encontrar um grafo  $\vec{G}$  com  $\Delta \leq 3$  e  $\chi_o(\vec{G}) = 8$  para refutar de vez a conjectura de Sopena [40], ou talvez provar a conjectura. Decidimos no início do ano de 2013 que seria interessante começar pelos grafos cúbicos, porque já tínhamos bancos de dados na literatura e cobririam uma vasta quantidade do universo dos grafos com  $\Delta \leq 3$ .

# Capítulo 7

## Argumentos a favor e contra a conjectura de Sopena

Nesta seção apresentamos nossas análises realizadas na tentativa de estabelecer o número cromático orientado para grafos com  $\Delta \leq 3$ . Primeiro apresentamos resultados computacionais que comprovam que todos os grafos cúbicos até 18 vértices podem ser coloridos por um único grafo de cor com 7 vértices. Por fim, apresentamos alguns torneios com 7 vértices que não são grafos de cor para os grafos com  $\Delta \leq 3$ . Os arquivos fontes dos programas e também arquivos dos resultados computacionais estarão disponíveis para consulta em <http://www.inf.ufg.br/hebert/>.

### 7.1 Resultados computacionais e o torneio mágico

Usando o Algoritmo 7.1 de força bruta, verificamos até o momento que  $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$ , onde  $\vec{G}$  é um grafo cúbico qualquer com  $|V(\vec{G})| \leq 18$ . Nosso resultado computacional é uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena [40] de que: Se  $\vec{G}$  é conexo com  $\Delta \leq 3$ , então  $\chi_o(\vec{G}) \leq 7$ .

Nosso algoritmo gera todas as  $i = 2^m$  orientações  $\vec{G}^i$  possíveis para um grafo cúbico  $G$ , e então verifica se existe um homomorfismo de cada  $\vec{G}^i$  em pelo menos um torneio  $\vec{T}_7$  com 7 vértices. O número de torneios livres de isomorfismo com 7 vértices é igual a 456 [25, 27]. Estes torneios podem ser encontrados no site <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html> [31], e nós indexamos de 0, 1, 2, ..., 455.

Implementamos o Algoritmo 7.1 em linguagem C, e utilizamos matrizes de adjacência como nossa estrutura de dados para armazenar os grafos orientados. Fazemos uso de duas bases de dados disponibilizadas na internet por autores com diversos artigos na área de geração de grafos. Na primeira base de dados [10], <http://hog.grinvin.org/Cubic>, obtemos os grafos cúbicos com número de vértices

---

**Algoritmo 7.1:** OCN7

---

**Entrada:** Um grafo cúbico  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas

**Saída:** Uma 7 coloração orientada para toda orientação  $\vec{G}^i$  de  $G$ , ou um grafo orientado  $\vec{G}^i$  com 8 cores.

```
1 início
2   para  $i = 0$  até  $2^m - 1$  faça
3      $flag \leftarrow 0$ ;
4     Gerar orientação  $\vec{G}^i$  de  $G$ ;
5     para  $j = 0$  até 455 faça
6       se existe homomorfismo de  $\vec{G}^i$  para  $\vec{T}_7^j$  então
7         Armazene  $\vec{T}_7^j$ ;
8          $flag \leftarrow j$ ;
9          $j \leftarrow 455 + 1$ ;
10      fim
11     fim
12     se  $flag = 0$  então
13       retorna  $\vec{G}^i$ ;
14     fim
15   fim
16 fim
```

---

entre 4 e 24 com cintura 3, o número destes grafos foram também determinados teoricamente por Robinson and Wormald [38]. Na segunda base de dados [31], <<http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html>>, obtemos todos os 456 torneios livres de isomorfismo com 7 vértices.

Utilizando os computadores da grade computacional do grupo de inteligência artificial do Programa de engenharia de sistemas e computação GRID-IA/PESC/UFRJ, veja <[http://grid-ia.cos.ufrj.br:32593/index.php/Main\\_Page](http://grid-ia.cos.ufrj.br:32593/index.php/Main_Page)>, resolvemos o problema para grafos com até 18 vértices. Apresentamos na Tabela 7.1 alguns dados relativos aos grafos cúbicos e o tempo médio por instância que a nossa implementação do Algoritmo 7.1 gastou para ser executado em máquinas com diversas configurações, incluindo máquinas do Laboratório de Algoritmos e Combinatória do PESC/UFRJ e máquinas do GRID-IA/PESC/UFRJ.

Quando rodávamos o algoritmo para grafos cúbicos de 16 vértices, observamos que todos os grafos cúbicos podiam ser coloridos por um torneio especial -  $\vec{T}_7^{114}$ , o qual passou a ser, desde então, nosso melhor candidato para ser a “palheta” que provaria a conjectura. Denominamos então este torneio de  $\vec{T}_7^M = \vec{T}_7^{114}$  - o *torneio mágico* com 7 vértices exibido na Figura 7.1.

Verificamos que  $\vec{T}_7^M$  é o grafo de cor para todos os grafos cúbico com até 18 vértices. O torneio  $\vec{T}_7^M$  satisfaz a condição estabelecida no Teorema 3.15, ou seja, o torneio  $K_5^U$  da Figura 3.16 é seu subgrafo. A função  $f : V(K_5^U) \rightarrow V(\vec{T}_7^M)$  tal que

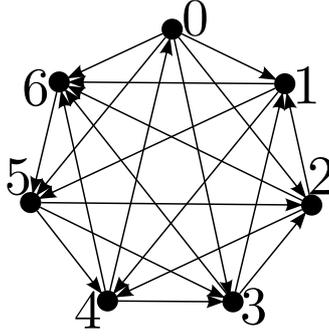


Figura 7.1: Torneio mágico com 7 vértices  $\vec{T}_7^M$ , no qual todo grafo cúbico orientado  $\vec{G}_n^i$  tem homomorfismo para  $\vec{T}_7^M$ , onde  $n \leq 18$ .

Tabela 7.1: Tempo por instância para uma implementação do Algoritmo 7.1 †.

(NV) n° de vértices	(NC) n° de cúbicos *	n° de orientações *	Tempo médio ‡
4	1	64	0,000
6	2	1024	0,000
8	5	20480	0,130
10	19	622592	1,995
12	85	$2,23 \times 10^7$	11,694
14	509	$1,07 \times 10^9$	29,859
16	4060	$6,81 \times 10^{10}$	453,181
18	41301	$5,54 \times 10^{12}$	3800,955
20	510489	$5,48 \times 10^{14}$	?

Observações:

† O algoritmo foi implementado em linguagem C;

\* Número de grafos cúbicos livres de isomorfismo, as instâncias foram obtidas em [10];

★ Nossa implementação gera todas as orientações, não removendo os isomorfismos. Fórmula =  $NC \times 2^{\frac{NV \cdot 3}{2}}$ ;

‡ Tempo médio em segundos por grafo cúbico não orientado, fixando  $j = 114$ .

$f(1) = 6, f(2) = 5, f(3) = 2, f(4) = 1, f(5) = 4$ , estabelece um homomorfismo de  $K_5^U$  em  $\vec{T}_7^M$ , como ambos grafos são torneios, a função também estabelece que  $K_5^U$  é um subgrafo de  $\vec{T}_7^M$ .

Apresentamos na Figura 7.2 dois grafos cúbicos orientados com 8 vértices e com número cromático orientado igual a 7, os números na figura representam uma  $\vec{T}_7^M$ -coloração geradas pelo computador utilizando o algoritmo 7.1 OCN7.

Atualmente, ainda rodamos o Algoritmo 7.1 OCN7 no GRID-IA/PESC/UFRJ. Prosseguimos, no momento de escrita desta Tese com a verificação dos cúbicos com 20 vértices. Resolvemos até então poucos grafos, todos coloridos por  $\vec{T}_7^M$ .

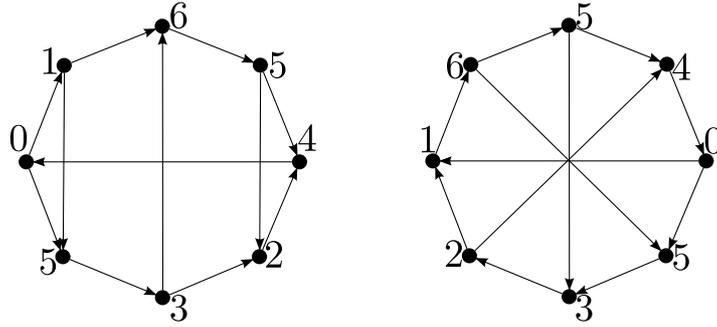


Figura 7.2: Dois grafos cúbicos orientados com  $\vec{T}_7^M$ -coloração.

## 7.2 Análise sobre torneios proibidos

Nesta seção, fazemos uma breve análise sobre alguns torneios com 7 vértices que não são palhetas para a classe dos grafos com  $\Delta \leq 3$ . Primeiro analisamos alguns grafos orientados com  $\Delta \leq 3$  que proíbem determinados torneios como palhetas. No Capítulo 6 apresentamos uma família de grafos com  $\Delta \leq 3$  que restringe o Torneio de Paley com 7 vértices  $\vec{QR}_7$  como palheta. Pelo Teorema 3.15 do Capítulo 3, sabemos também que toda palheta para os grafos cúbicos deve possuir o torneio  $\vec{K}_5^U$  como subgrafo. Assim, os torneios com 7 vértices que não possuem  $\vec{K}_5^U$  como subgrafo, também não são palhetas para os grafos com  $\Delta \leq 3$ .

Apresentamos na Figura 7.3 um grafo orientado  $\vec{G}_1$  com  $\Delta \leq 3$  que proíbe alguns torneios com 7 vértices com palheta. Como para quaisquer dois vértices  $x, y \in V(\vec{G}_1)$  existe um caminho direcionado de comprimento máximo 2, então  $\chi_o(\vec{G}_1) = 7$ . Como todo vértice de  $\vec{G}_1$  tem grau de saída pelo menos 1 e grau de entrada pelo menos 1, todo vértice de uma palheta com 7 vértices para  $\vec{G}_1$  também deve ter a mesma configuração. Assim, os torneios com 7 vértices com algum vértice que tem grau de saída igual a 6 ou grau de entrada igual a 6 não são palhetas para  $\vec{G}_1$ . De fato, a palheta com 7 vértices para a classe dos grafos com  $\Delta \leq 3$  deve ter  $\vec{G}_1$  como subgrafo.

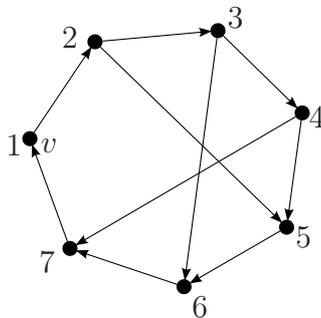


Figura 7.3:  $\vec{G}_1$  com  $\Delta \leq 3$  e  $\chi_o(\vec{G}) = 7$ .

Observamos que o vértice  $v \in V(\vec{G}_1)$  tem grau 2, e podemos construir uma

família de grafos orientados com  $\Delta \leq 3$  que tem as mesmas características apresentadas do grafo  $\vec{G}_1$ . Na Figura 7.4 usamos cinco cópias de  $\vec{G}_1$  para construir um grafo orientado  $\vec{G}_2$  com  $\chi_o(\vec{G}_2) = 7$ . Além disso, em  $\vec{G}_2$  existem pelo menos 4 cores distintas com grau de entrada 2 (vértices  $v_6, v_7, v_8, v_9$ ) e pelo menos 5 cores distintas com grau de saída 2 (vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ). Assim uma palheta para  $\vec{G}_2$  deve ter pelo menos 4 vértices distintos com grau de entrada 2, e pelo menos 5 vértices distintos com grau de saída 2.

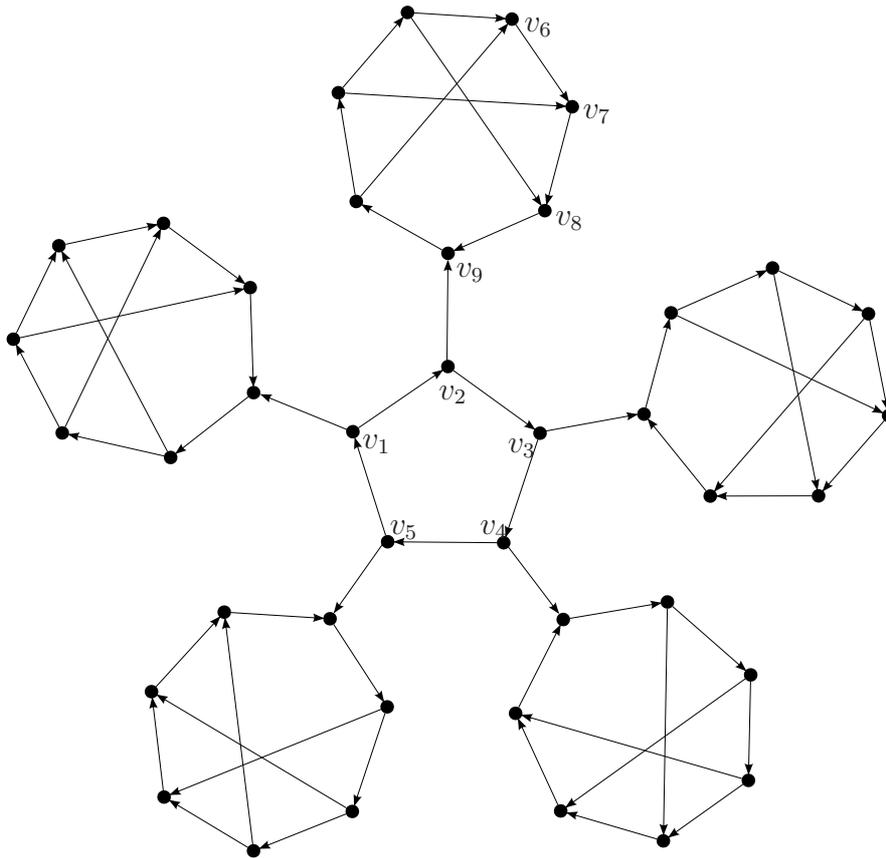


Figura 7.4:  $\vec{G}_2$  com  $\Delta \leq 3$  e  $\chi_o(\vec{G}) = 7$ .

Gostaríamos de encontrar outros grafos orientados com  $\Delta \leq 3$  que adicionam mais restrições estruturais a uma palheta, como restrições ao grau de saída ou ao de entrada dos vértices. Porém, esta tarefa não parece ser simples. Conforme apresentamos na seção anterior, o torneio  $\vec{T}_7^M$  pode colorir todos grafos cúbicos com até 18 vértices. O torneio  $\vec{T}_7^M$  também respeita todas as restrições apresentadas nesta seção. Assim, para determinar alguns torneios proibidos sem conhecer restrições estruturais sobre eles, resolvemos usar outro algoritmo de força bruta (similar ao Algoritmo 7.1) para verificar com ajuda computacional, quais dos 456 [25, 27] torneios livres de isomorfismo com 7 vértices são proibidos. Apresentamos na Tabela 7.2 todos os torneios proibidos para os grafos cúbicos com até 10 vértices, também apresentamos os torneios proibidos para os grafos cúbicos com 12 e 14 vértices que foram

determinados até o momento da escrita da tese. O número total de torneios proibidos é de 275, restando ainda 181 torneios que não foram determinados ou que não são proibidos.

**Pergunta 7.1** *Existe alguma característica estrutural comum aos 181 torneios restantes com 7 vértices?*

Tabela 7.2: Torneios proibidos com 7 vértices para cúbicos

Nº de vértices	Torneios proibidos
4	0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 15, 24, 27, 33, 34, 49, 52, 75, 100, 119, 147, 158, 202, 227, 248, 252, 258, 262, 266, 283, 284, 286, 315, 402, 418, 424, 437, 454, 455
6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 66, 67, 68, 70, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 91, 98, 99, 100, 102, 106, 107, 108, 111, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 132, 134, 135, 137, 138, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 155, 158, 159, 167, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 182, 191, 197, 202, 203, 204, 205, 206, 208, 209, 216, 217, 227, 230, 240, 242, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 256, 257, 258, 259, 261, 262, 263, 264, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 277, 278, 279, 280, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 295, 296, 297, 302, 303, 304, 305, 312, 314, 315, 316, 317, 318, 320, 328, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 349, 358, 364, 368, 379, 380, 383, 384, 386, 402, 403, 405, 407, 408, 409, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 424, 425, 427, 430, 431, 433, 437, 439, 441, 448, 449, 452, 453, 454, 455
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 59, 60, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 82, 84, 88, 91, 97, 98, 100, 101, 102, 106, 107, 108, 111, 117, 119, 120, 132, 134, 137, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 158, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 182, 185, 186, 195, 200, 202, 206, 209, 216, 221, 227, 248, 249, 250, 252, 253, 256, 257, 258, 259, 261, 262, 266, 267, 268, 269, 270, 272, 273, 277, 278, 279, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 295, 299, 300, 304, 306, 310, 315, 316, 317, 318, 320, 321, 325, 331, 337, 338, 339, 340, 342, 343, 346, 349, 375, 383, 384, 400, 402, 408, 411, 412, 418, 424, 430, 431, 437, 448, 455
10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 67, 68, 70, 75, 76, 77, 98, 100, 102, 106, 107, 108, 111, 120, 134, 135, 137, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 158, 172, 173, 174, 176, 179, 185, 191, 196, 197, 200, 202, 204, 206, 207, 208, 209, 221, 248, 249, 250, 252, 253, 256, 257, 258, 259, 261, 262, 266, 267, 268, 269, 270, 273, 275, 277, 278, 279, 280, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 295, 303, 304, 310, 315, 316, 317, 318, 320, 325, 331, 337, 338, 339, 342, 343, 346, 375, 384, 386, 400, 402, 405, 407, 408, 411, 412, 413, 424, 430, 431, 437, 448, 455
12	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 67, 68, 75, 76, 77, 100, 106, 107, 108, 120, 134, 137, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 151, 158, 172, 173, 174, 176, 177, 178, 179, 185, 202, 209, 251, 255, 260, 265, 276, 281, 301, 307,
14	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 74, 75, 76, 77, 96, 98, 100, 106, 107, 108, 120, 128, 129, 133, 134, 137, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 158, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 185, 191, 194, 196, 200, 202, 203, 204, 206, 207, 209, 221, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 266, 267, 268, 269, 270, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 295, 297, 302, 304, 310, 311, 315, 316, 317, 318, 320, 321, 325, 331, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 346, 375, 386, 402, 408, 411, 412, 413, 424, 431, 437, 444, 448, 455

# Capítulo 8

## Conclusões

Nesta tese, trabalhamos com o problema da coloração orientada para grafos e grafos orientados. Apresentamos na Figura 8.1 uma estrutura do trabalho desenvolvido nesta tese, neste diagrama os temas que continuam em desenvolvimento são representados pelas setas que não apontam para nenhum assunto.

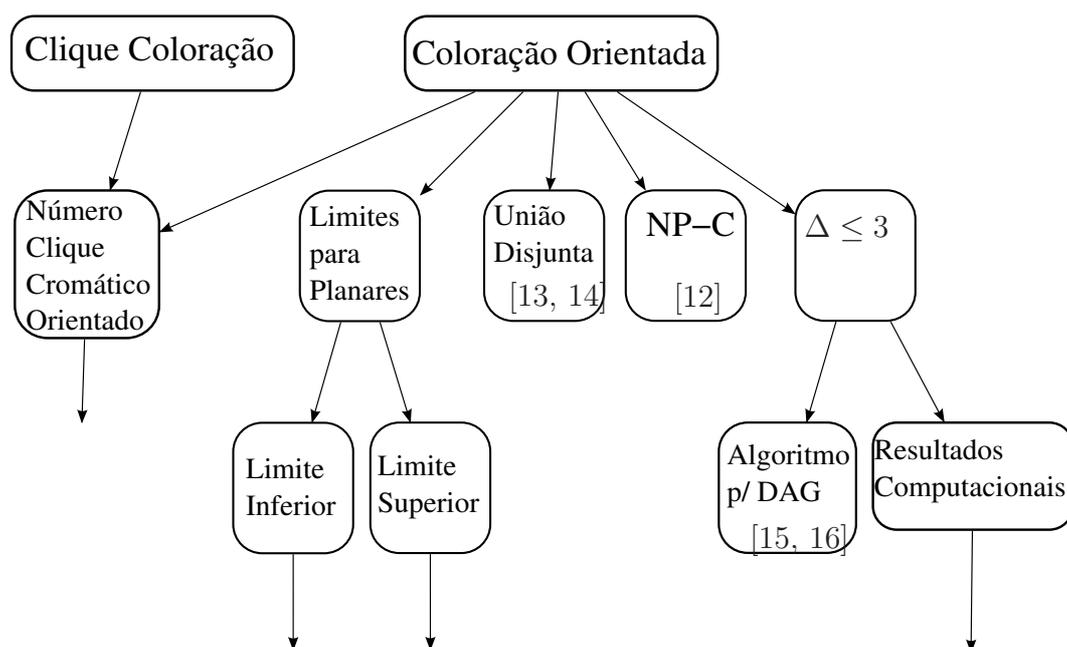


Figura 8.1: Diagrama do trabalho desenvolvido nesta tese.

Definimos o *número clique cromático orientado*  $\vec{\kappa}(G)$  de um grafo  $G$  combinando os problemas de clique coloração e coloração orientada. Demonstramos dois resultados que seguem da definição apresentada,  $\vec{\kappa}(K) = 2$  e  $\vec{\kappa}(C) = \chi_o(C)$ , onde  $K$  é um grafo completo e  $C$  é um ciclo. Observamos que esses conceitos não existiam na literatura. Acreditamos que esse tema tem muito a ser explorado. Por exemplo, um problema interessante é estudar a clique coloração orientada para classes especiais de grafos. Esse tema faz parte dos nossos trabalhos futuros.

Estudamos os limites para o problema da coloração orientada sobre grafos planares orientados  $\vec{\mathcal{P}}$ . Nós propomos uma técnica para tentar encontrar um grafo planar orientado  $\vec{G}$  com  $\chi_o(\vec{G}) \geq 16$ . Encontramos uma lacuna na demonstração apresentada por Sopena [42] para determinar que  $\chi_o(\vec{\mathcal{P}}) \geq 16$ . Também apresentamos um torneio com 5 vértices  $K_5^U$  que é subgrafo de todo grafo de cor para  $\vec{\mathcal{P}}$ , lembramos que  $K_5^U$  também é subgrafo de todo grafo de cor para os grafos cúbicos.

Podemos decidir em tempo polinomial se  $\vec{G}$  tem uma 3-coloração orientada [28], porém uma caracterização para estes grafos não era conhecida. Seja  $\mathcal{CN}_k = \{G; \chi_o(G) \leq k\}$ , nós apresentamos uma caracterização onde um grafo  $G \in \mathcal{CN}_3$  se e somente se:

- Quando  $G$  for conexo,  $G$  é um  $K_3$  ou uma árvore;
- Quando  $G$  for desconexo,  $G$  é uma floresta ou  $K_3 \cup S$ , onde  $S$  é uma floresta de estrelas.

O estudo da classe  $\mathcal{CN}_3$  nos motivou a estudar o número cromático orientado da união disjunta de grafos. Demonstramos que  $\chi_o(K_p \cup S) = p$ ,  $\chi_o(K_p \cup F) = p + 1$  e  $\chi_o(K_p \cup C_3) = p + 1$ ,  $p \geq 3$ , onde  $K_p$  é o grafo completo com  $p$  vértices,  $S$  é uma floresta de estrelas,  $F$  é uma floresta com diâmetro maior que  $p$  e  $C_3$  é o ciclo com 3 vértices. Uma pergunta natural que surge é:

**Pergunta 8.1** *Quais grafos pertencem a classe  $\mathcal{CN}_4$ ?*

Dado  $G = K_p \cup K_q$  e  $\vec{G}$  uma orientação de  $G$ . O *núcleo* de  $\vec{G}$  é o maior inteiro  $x$  tal que  $\exists \vec{T}_1 = \vec{K}_x$  subgrafo de  $\vec{K}_p$  e  $\exists \vec{T}_2 = \vec{K}_x$  subgrafo de  $\vec{K}_q$  tal que  $\vec{T}_1$  é isomorfo a  $\vec{T}_2$ . A *alma gêmea*  $Ag(p, q) = r$  é o núcleo mínimo entre todas as orientações  $\vec{G}$  de  $G = K_p \cup K_q$ . Demonstramos que  $\chi_o(K_p \cup K_q) = p + q - r$ .

**Pergunta 8.2** *Qual a complexidade para determinar  $Ag(p, q) = r$ ?*

Dados um grafo orientado  $\vec{G} = (V, A)$  e um inteiro positivo  $k$ , a pergunta do problema de decisão do NÚMERO CROMÁTICO ORIENTADO ( $\text{OCN}_k$ ) é:  $\vec{G}$  tem uma  $k$ -coloração orientada? Demonstramos que é NP-completo decidir se  $\vec{G}$  tem uma 4-coloração orientada, mesmo quando  $\vec{G}$  é acíclico, planar, bipartido e com grau no máximo 3. Nosso resultado, estabelece uma dicotomia P *versus* NP-completo com respeito ao grau máximo  $\Delta$  de uma instância  $\vec{G}$ , pois se  $\Delta(\vec{G}) \leq 2$  sabemos que  $\text{OCN}_k$  é um problema polinomial [40].

Seja  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  um grafo orientado, tal que o grafo subjacente  $G_{\Delta \leq 3}$  tem grau máximo 3. Estudamos o limite do número cromático orientado para  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$ , motivados pela conjectura de Sopena [40] que diz: Se  $G_{\Delta \leq 3}$  é conexo, então  $\chi_o(\vec{G}_{\Delta \leq 3}) \leq 7$ . Neste sentido, demonstramos que o número cromático orientado de grafos orientados acíclicos  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  é no máximo 8. Apresentamos o torneio  $\vec{R}$  com 8 vértices que pode

colorir  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  acíclico. Como consequência da demonstração, exibimos um algoritmo linear para atribuir uma  $\vec{R}$ -coloração para  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  acíclico.

**Pergunta 8.3** *Qual o menor  $k$  tal que  $\text{OCN}_k$  é polinomial e  $\text{OCN}_{k-1}$  é NP-Completo, quando restrito a grafos com  $\Delta = 3$ .*

Por último, motivados a encontrar um grafo orientado  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  conexo onde  $\chi_o(\vec{G}_{\Delta \leq 3}) \geq 8$ , usamos um algoritmo de força bruta para colorir pequenas instâncias de grafos cúbicos. Não encontramos o contra-exemplo exemplo desejado, porém apresentamos  $\vec{T}_7^M$  o torneio mágico com 7 vértices que é o grafo de cor para todos grafos cúbicos orientados com até 18 vértices. Este resultado computacional é uma evidência positiva para suportar a conjectura de Sopena [40]. Também conjecturamos o seguinte resultado:

**Conjectura 8.4** *Existe um único torneio  $\vec{T}_7$  com 7 vértices, tal que todo  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  tem homomorfismo para  $\vec{T}_7$ .*

Se esta conjectura for verdadeira, isto implicaria que mesmo se  $\vec{G}_{\Delta \leq 3}$  for desconexo, então  $\chi_o(\vec{G}_{\Delta \leq 3}) = 7$ .

No momento da conclusão da escrita da versão para a Banca de Candidatura de Doutorado, tinham sido coloridos aproximadamente  $6,149 \times 10^{12}$  grafos conexos cúbicos orientados: são  $1 \times 2^6$  de 4 vértices,  $2 \times 2^{\frac{6 \times 3}{2}}$  de 6 vértices,  $5 \times 2^{\frac{8 \times 3}{2}}$  de 8 vértices,  $19 \times 2^{\frac{10 \times 3}{2}}$  de 10 vértices,  $85 \times 2^{\frac{12 \times 3}{2}}$  de 12 vértices,  $509 \times 2^{\frac{14 \times 3}{2}}$  de 14 vértices,  $4060 \times 2^{\frac{16 \times 3}{2}}$  de 16 vértices,  $41301 \times 2^{\frac{18 \times 3}{2}}$  de 18 vértices, que totalizaram todos os grafos conexos cúbicos com menos de 18 vértices. Adicionalmente, foram coloridos aproximadamente 500 grafos conexos cúbicos com 20 vértices em um total de  $500 \times 2^{\frac{20 \times 3}{2}}$  grafos conexos cúbicos orientados com 20 vértices.

Até o momento, todos estes grafos orientados foram coloridos com  $T_7^M$  como palheta, e continuamos colorindo. Observe que o fato de todos estes grafos conexos cúbicos terem sido coloridos com a mesma palheta, implica que todos os grafos cúbicos, conexos ou não, orientados com menos de 18 vértices são coloridos com  $T_7^M$  como palheta. Os arquivos fontes dos programas e também arquivos dos resultados computacionais estarão disponíveis para consulta em <http://www.inf.ufg.br/hebert/>.

# Referências Bibliográficas

- [1] N. R. ARAVIND, N. NARAYANAN e C. R. SUBRAMANIAN. Oriented colouring of some graphs. Disponível em: <http://www.lri.fr/~narayana/oriented.pdf> e <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.163.4492&rep=rep1&type=pdf>, acesso em: Agosto de 2013.
- [2] G. BACSÓ, S. GRAVIER, A. GYÁRFÁS, M. PREISSMANN e A. SEBÓ. Coloring the maximal cliques of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 17, pp. 361–376, 2004.
- [3] J. BANG-JENSEN, P. HELL e G. MACGILLIVRAY. The complexity of coloring by semicomplete digraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 1, pp. 281–298, 1988.
- [4] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph Theory with Applications*. North Holland, New York, 1976.
- [5] O. V. BORODIN. On acyclic coloring of planar graphs. *Discrete Mathematics*, v. 25, pp. 221–236, 1979.
- [6] O. V. BORODIN e A. O. IVANOVA. An oriented 7-colouring of planar graphs with girth at least 7. *Sib. Electron. Math.*, v. 2, pp. 222–229, 2005.
- [7] O. V. BORODIN e A. O. IVANOVA. An oriented colouring of planar graphs with girth at least 4. *Sib. Electron. Math.*, v. 2, pp. 239–249, 2005.
- [8] O. V. BORODIN, A. V. KOSTOCHKA, J. NEŠETŘIL, A. RASPAUD e E. SO-PENA. On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, v. 206, pp. 77–89, 1999.
- [9] O. V. BORODIN, A. O. IVANOVA e A. V. KOSTOCHKA. Oriented 5-coloring of sparse plane graphs. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, v. 1, pp. 9–17, 2007.

- [10] G. BRINKMANN, J. GOEDGEBEUR, H. MÉLOT e K. COOLSAET. House of graphs: a database of interesting graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, pp. 311–314, 2013.
- [11] E. BROWN e K. B. REID. Doubly regular tournaments are equivalent to skew hadamard matrices. *Journal of Combinatorial Theory*, v. 12, pp. 332–338, 1972.
- [12] H. COELHO, L. FARIA, S. GRAVIER e S. KLEIN. Oriented coloring in planar, bipartite, bounded degree 3 acyclic oriented graphs, In: *Proceedings of the VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, LAGOS 2013, to appear in Electronic Notes in Discrete Mathematics.*, Playa del Carmen (Mexico).
- [13] H. COELHO, L. FARIA, S. GRAVIER e S. KLEIN. Uma caracterização dos grafos com número cromático orientado 3 e sobre o número cromático orientado de união de grafos, In: *Proceedings of the XLIII Brazilian Symposium on Operations Research, ISSN: 1518-1731*, pp. 2623–2631, Ubatuba (Brasil). 2011.
- [14] H. COELHO, L. FARIA, S. GRAVIER e S. KLEIN. On the oriented chromatic number of union of graphs, In: *Proceedings of 11th Cologne-Twente workshop on graphs and combinatorial optimization*, pp. 88–91, Munich (Germany). 2012.
- [15] H. COELHO, L. FARIA, S. GRAVIER e S. KLEIN. An oriented 8-coloring for acyclic oriented graphs with maximum degree 3, In: *Proceedings of 12th Cologne-Twente workshop on graphs and combinatorial optimization, ISSN: 0929-0672*, pp. 55–58, Enschede (Netherlands), . 2013.
- [16] H. COELHO, L. FARIA, S. GRAVIER e S. KLEIN. Coloração orientada de grafos com grau máximo 3, In: *Proceedings of the XLV Brazilian Symposium on Operations Research, ISSN: 1518-1731*, p. to appear, Natal (Brasil): SOBRAPO, . 2013.
- [17] B. COURCELLE. The monadic second order logic of graphs vi: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, v. 54, pp. 117–149, 1994.
- [18] J. CULUS e M. DEMANGE. Oriented coloring: Complexity and approximation. *32rd Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science - LNCS 3831*, pp. 226–236, 2006.

- [19] M. H. DOLAMA e E. SOPENA. On the oriented chromatic number of halin graphs. *Information Processing Letters*, v. 98, pp. 247–252, 2006.
- [20] J. DYBIZBAŃSKI e A. NENCA. Oriented chromatic number of grids is greter than 7. *Information Processing Letters*, v. 112, pp. 113–117, 2012.
- [21] L. ESPERET e P. OCHEM. Oriented colorings of 2-outerplanar graphs. *Information Processing Letters*, v. 101, pp. 215–219, 2007.
- [22] G. FERTIN, A. RASPAUD e A. ROYCHOWDHURY. On the oriented chromatic number of grids. *Information Processing Letters*, v. 85, pp. 261–266, 2003.
- [23] R. GANIAN e P. HLINĚNÝ. New results on the complexity of oriented colouring on restricted digraph classes. *SOFSEM'10, Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, v. 5901, pp. 428–439, 2010.
- [24] S. GRAVIER, C. HÓANG e F. MAFFRAY. Coloring the hypergraph of maximal cliques of a graph with no long path. *Discrete Mathematics*, v. 272, pp. 285–290, 2003.
- [25] J. L. GROSS e J. YELLEN. *Handbook of graph theory*. CRC press, New York, 2003.
- [26] A. L. P. GUEDES. *Hipergrafos Direcionados*. D.sc. tese, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [27] F. HARARY e E. M. PALMER. *Graphical Enumeration*. Academic Press, New York, 1973.
- [28] W. KLOSTERMEYER e G. MACGILLIVRAY. Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs. *Discrete Mathematics*, v. 274, pp. 161–172, 2004.
- [29] T. H. MARSHALL. On oriented graphs with certain extension properties. *Ars Combinatoria*, *In press*.
- [30] T. H. MARSHALL. Homomorphism bounds for oriented planar graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 55, pp. 175–190, 2007.
- [31] B. MCKAY. Combinatorial data. Disponível em: <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/>, acesso em: Agosto de 2013.
- [32] J. NEŠETŘIL, A. RASPAUD e E. SOPENA. Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Mathematics*, v. 165–166, pp. 519–530, 1997.

- [33] P. OCHEM. Oriented colorings of triangle-free planar graphs. *Information Processing Letters*, v. 92, pp. 71–76, 2004.
- [34] P. OCHEM e A. PINLOU. Oriented colorings of partial 2-trees. *Information Processing Letters*, v. 108, pp. 82–86, 2008.
- [35] A. PINLOU. An oriented coloring of planar graphs with girth at least five. *Discrete Mathematics*, v. 309, pp. 2108–2118, 2009.
- [36] A. PINLOU e E. SOPENA. Oriented vertex and arc colorings of outerplanar graphs. *Information Processing Letters*, v. 100, n. 3, pp. 97–104, 2006.
- [37] A. RASPAUD e E. SOPENA. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, v. 51, pp. 171–174, 1994.
- [38] R. W. ROBINSON e N. C. WORMALD. Numbers of cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 7, pp. 463–467, 1983.
- [39] E. SOPENA. Two problems on planar graphs. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.29.3147>, acesso em: Fevereiro de 2013. Labri Research Report.
- [40] E. SOPENA. The chromatic number of oriented graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 25, pp. 191–205, 1997.
- [41] E. SOPENA. Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, v. 229, pp. 359–369, 2001.
- [42] E. SOPENA. There exist oriented planar graphs with oriented chromatic number at least sixteen. *Information Processing Letters*, v. 81, pp. 309–312, 2002.
- [43] E. SOPENA. Upper oriented chromatic number of undirected graphs and oriented colorings of product graphs. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1005.2816>, acesso em: Agosto de 2013.
- [44] E. SOPENA. The oriented coloring page. Disponível em: [www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?n=TheOrientedColoringPage](http://www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?n=TheOrientedColoringPage), acesso em: Agosto de 2013.
- [45] E. SOPENA e L. VIGNAL. A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three. Disponível em: [citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.13.5615](http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.13.5615), acesso em: Agosto de 2013. LaBRI Research Report, Université Bordeaux I.
- [46] D. B. WEST. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2ª edição., 2001.