TEORIA DE SISTEMAS – MATEMÁTICA ELEMENTAR E SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO – ESTABELECENDO RELAÇÕES EM UM ESTUDO COLABORATIVO

Leticia Guimarães Rangel

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Victor Augusto Giraldo

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2015

TEORIA DE SISTEMAS – MATEMÁTICA ELEMENTAR E SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO – ESTABELECENDO RELAÇÕES EM UM ESTUDO COLABORATIVO

Leticia Guimarães Rangel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof. Victor Augusto Giraldo, D.Sc.

Prof. Claudia Maria Lima Werner, D.Sc.

Prof. Gert Felix Schubring, D.Sc.

Prof. Jonei Cerqueira Barbosa, D.Sc.

Prof. Marcelo Miranda Viana da Silva, D.Sc.

Prof. Yuriko Yamamoto Baldin, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

FEVEREIRO DE 2015

Rangel, Leticia Guimarães

Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo/Leticia Guimarães Rangel. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015

IX, 258 p.: il.; 29,7 cm

Orientadores: Nelson Maculan Filho

Victor Augusto Giraldo

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/ Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2015

Referências Bibliográficas: p. 243 – 258.

1. Formação do professor de matemática. 2. Felix Klein – Dupla descontinuidade, translação histórica e Elementarização. 3. Concept Study. 4. Estudo colaborativo. 5. Números Racionais. I. Maculan Filho, Nelson *et al*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Education is the most powerful weapon we can use to change the world.

Nelson Mandela

Agradecimentos

Este trabalho não teria se tornado realidade sem o apoio de muitas pessoas. Ele é produto da confiança, da determinação e da paixão de indivíduos comprometidos com a educação e com a matemática.

Ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE-UFRJ, pela possibilidade de realizar este trabalho.

Ao Colégio de Aplicação da UFRJ, na figura da sua atual diretora, Maria Luiza Mesquita da Rocha, e da sua ex-diretora, Celina Maria de Souza Costa, pelo compromisso com a educação básica de qualidade e pelo suporte institucional.

Ao professor Nelson Maculan, pela confiança, pelo apoio e, especialmente, pela simplicidade e generosidade com que compartilha e exercita a sua sabedoria.

Ao professor Victor Giraldo, por transcender a orientação e transformar o desenvolvimento deste trabalho em um aprendizado sobre o exercício e o valor da pesquisa acadêmica e sobre a formação docente. Sua confiança, seu incentivo, sua parceria e sua amizade estão impressos neste trabalho e na minha vida.

Aos demais membros da banca pelas contribuições, que muito ajudaram na elaboração e na finalização do trabalho. Em especial, ao professor Gert Schubring, pela disponibilidade para conversas esclarecedoras e precisas.

Aos colegas professores que participaram do projeto de pesquisa, compartilhando seus saberes e dando vida a este trabalho e com os quais aprendi muito, especialmente, sobre o poder do trabalho colaborativo. Agradeço-os profundamente.

Aos colegas do CAp, com os quais compartilho minha prática, suporte essencial para minha identidade docente.

A todos os amigos que contribuíram, cada um a seu modo, para tornar este trabalho realidade. Em especial, agradeço a Priscila Dias, Cydara Cavedon Ripoll, Bruna Moustapha Corrêa, Aline Bernardes, Carolina Moura Brasil, Roberta Menduni Bortoloti, Tatiana Roque, Ana Teresa Oliveira, Maria Alice Gravina, Marisa Leal, Nei Rocha e Lucia Tinoco, pela parceria e pelo incentivo.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT-UFRJ), por me fazerem acreditar que este trabalho pode ir além.

Ao meu pai, pelo exemplo de integridade e por acreditar e torcer por mim. À minha mãe, por me fortalecer.

Ao Jerônimo, por simplesmente me amar.

Aos meus filhos, Guilherme, Gabriel e Rodrigo, minha maior inspiração para tudo na vida.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

TEORIA DE SISTEMAS – MATEMÁTICA ELEMENTAR E SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO – ESTABELECENDO RELAÇÕES EM UM ESTUDO COLABORATIVO

Leticia Guimarães Rangel
Fevereiro / 2015

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Victor Augusto Giraldo
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho tem como foco o desenvolvimento profissional do professor de matemática. Sob as premissas de que o conhecimento de matemática de um professor tem sua especificidade e de que essa especificidade tem implicações diretas para a formação e para a prática do professor (DAVIS, SIMMT, 2006; EVEN, BALL, 2009; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013), a investigação aqui apresentada visa a contribuir para a reflexão sobre o conhecimento de matemática para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). O estudo tem como referência teórica e metodológica a noção de *Concept Study* (DAVIS, 2010, DAVIS, RENERT, 2014), modelo de estudo coletivo em que professores compartilham de forma colaborativa sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e (re)elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. O conceito de número racional foi o tema disparador e orientador do estudo. Como conclusão, observa-se a contribuição de uma discussão colaborativa para o desenvolvimento de metassaberes do professor de matemática.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SYSTEMS THEORY – ELEMENTARY MATHEMATICS AND PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE – ESTABLISHING CONNECTIONS IN A COLLABORATIVE STUDY

Leticia Guimarães Rangel

February/2015

Advisors: Nelson Maculan Filho

Victor Augusto Giraldo

Department: Systems Engineering and Computer Science

The focus of this paper is the professional development of mathematics teachers. Under the assumptions that teachers' mathematical knowledge has its own specificities and that these specificities have direct implications for teachers' education and practice (DAVIS, SMMIT, 2006; EVEN, BALL, 2009; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013), this research aims to contribute with the reflection on mathematics knowledge for teaching (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). The study's theoretical and methodological framework is grounded upon the notion of Concept Study (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), a model of collective study in which participant teachers share their experiences and knowledge aiming for challenging and (re)building their own mathematical knowledge for teaching. The concept of rational number was a trigger and guideline for the study. Our conclusions suggest that the collective discussion played a key role for the development of participants' metaknowledge.

Sumário

PARTE II: O ESTUDO EMPÍRICO

INTRODUÇÃO

É inequívoco que a formação de um professor exige conhecimentos sobre o conteúdo a ser ensinado e sobre pedagogia. Questões que se estabelecem e determinam largamente a pesquisa em Educação Matemática emergem das articulações características e intrínsecas entre esses conhecimentos quando exigidos na prática docente. Nas últimas décadas, os saberes de conteúdo matemático necessários para o ensino, suas relações com a formação do professor e seu desenvolvimento para e a partir da prática de sala de aula têm sido foco da literatura de pesquisa nacional e internacional na área (e.g. FENNEMA, FRANKE, 1992; BALL et al, 2008, BALL et al. 2009; EVEN, BALL, 2009; DAVIS, 2010, 2014; DAVIS, SIMMT, 2006, KRAUSS et al, 2008; DOERR, LESH, 2003; MOREIRA, 2004, 2013; MOREIRA, DAVID, 2005; MOREIRA, FERREIRA, 2013; FIORENTINI, ET AL, 2002, FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013; GIRALDO GONZALEZ-MARTIN, SANTOS, 2009; PEREIRA et al, 2013). Diversos autores têm chamado atenção para um saber particular do professor, que articula conhecimentos da disciplina que ensinam com o contexto pedagógico. Dentre esses, destacam-se o trabalho de Shulman (1986, 1987), que propõe a noção de *saber pedagógico de conteúdo*, um conhecimento especial do professor que se constitui a partir do vínculo entre conteúdo e pedagogia. Especificamente no campo da educação matemática, destacam-se os trabalhos de Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008), que têm como referência as ideias de Shulman e que propõem a noção de *conhecimento de matemática para o ensino*. Trata-se de um conhecimento matemático necessário para o trabalho de ensino da matemática na educação básica. Por sua própria natureza, esse conhecimento não se esgota na formação inicial do professor (ainda que não prescinda de conhecimentos que devem ser adquiridos nessa etapa), desenvolvendo-se de forma constante e permanente ao longo da prática profissional.

A consideração das relações entre os conhecimentos necessários para o ensino também tem repercussões importantes (e às vezes implícitas) para os modelos de cursos de formação inicial e continuada dos professores de matemática. No Brasil, assim como em diversos outros países, os cursos de formação inicial têm sido frequentemente estruturados como um bloco de disciplinas de matemática avançada (que visam dar conta do conhecimento de conteúdo) justaposto a um bloco de disciplinas abordando aspectos psicológicos e sociológicos da educação e métodos e técnicas de ensino (que objetivam contemplar o conhecimento de pedagogia) (BALL et al, 2008; TATOO, LERMAN, NOVOTNÁ, 2009; MOREIRA, 2004; 2013; MOREIRA, DAVID, 2007; FIORENTINI ET al, 2012; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013). O reconhecimento de que o conhecimento de matemática necessário à tarefa de ensinar não pode ser integralmente alcançado com a formação inicial do professor, a formação continuada, ou a formação em serviço, também tem sido amplamente discutida, apontando para um movimento de mudança de modelos baseados no treinamento para modelos baseados na prática do professor. Esse movimento é sustentado por uma mudança de percepção da aprendizagem da docência: da metáfora da *aquisição* para a metáfora da *participação* (DAVIS, RENER T, 2009b; MATOS, POWELL, SZTAJN, 2009, PONTE et al, 2009; FIORENTINI, 2012; PEREIRA, BELFORT, MANDARINO, 2014; SEGADAS, NASSER, TINOCO, 2014, SBEM, 2003). Sob essa perspectiva, a formação do professor é concebida como um processo contínuo de desenvolvimento profissional.

A pesquisa na direção da compreensão da complexa relação entre o conhecimento de matemática com vistas ao ensino, a prática do professor e a aprendizagem dos estudantes da escola básica não aponta uma orientação absoluta que determine a formação e o desenvolvimento profissional do professor. Entender como o conhecimento de matemática para o ensino se desenvolve e determinar estratégias para que este seja construído pelos professores ao longo de sua formação é a motivação de uma linha importante na pesquisa em Educação Matemática, que aponta para a necessária valorização da prática.

Ball e seus colaboradores (BALL et al, 2008, BALL et al, 2009) entendem que a investigação sobre o assunto deve ser estabelecida a partir e com a observação da prática. A autora identifica três objetivos a serem alcançados: (i) a identificação do conteúdo disciplinar que importa à formação docente; (ii) o entendimento de formas de se estabelecer esse conhecimento e (iii) a determinação do que é necessário para aprender a utilizá-lo na prática letiva. Nessa mesma direção, Davis (2010, 2014) observa que a maioria dos estudos com foco no conhecimento do conteúdo disciplinar do professor de matemática com vistas ao ensino se baliza por descrições de características e/ou demonstrações de sua relação com a aprendizagem dos estudantes. Davis acredita que, "**para transformar as salas de aula, é necessário estabelecer concepções de transformação para a matemática dos professores**[1]" (DAVIS, 2010, p.I-64, tradução nossa, grifo nosso). Davis e Renert (2014) entendem que o conheci-

[1] No original: "...in order to transform classroom settings, there is a need to design transformative settings for teachers' mathematics." (DAVIS, 2010, p. I-64)

mento de matemática para o ensino compreende uma complexa rede de compreensões, disposições e competências que não são facilmente nomeadas ou mensuradas, não sendo ainda bem compreendido apesar de décadas de pesquisa.

As reflexões de Ball e Davis, que traduzem um cenário contemporâneo da pesquisa na área, sugerem paralelos com as ideias de Felix Klein sobre a formação docente. Em sua obra, hoje clássica, *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*[2], publicada pela primeira vez há mais de um século, Klein constata uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico, e a matemática acadêmica universitária. Klein identifica essa ruptura como uma *dupla descontinuidade*, que se estabelece na falta de conexão entre a matemática aprendida na escola básica e a matemática que determina os cursos de formação de professores.

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p.1)

Klein não compreende a *matemática elementar* e a *matemática superior* sob uma perspectiva de descontinuidade, ao contrário, qualifica essa percepção hierárquica e estanque como um obstáculo a ser vencido. Segundo Schubring (2014), Klein identifica como *matemática elementar* aquela que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a disciplina. Assim, não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior – são partes que se fundem e se articulam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência (SCHUBRING, 2003, 2014). Nesse sentido, cabe à escola não só a tarefa de difundir o conhecimento elementar, como também contribuir para a elementarização e para o desenvolvimento da própria Matemática. Para Klein, "o conhecimento dos professores deve ser muito maior do que aquele que deve ensinar a seus alunos" (KLEIN, 2010, p.162, tradução nossa). Sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino na escola básica, o autor considera que o professor não deve somente ter conhecimento específico sobre

---

[2] Na versão original, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, publicada em 1908 e 1909 – Obra em três volumes que traz lições de matemática elaboradas por Felix Klein para professores das séries finais do ensino básico.

os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender a sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência.

> Se [os futuros professores] não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos elementos intuitivos da matemática bem como das relações vitais entre seus ramos e as outras ciências. Se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico [dos conceitos e teorias matemáticas], seus passos serão muito inseguros (KLEIN, 2011, p.127)

Bass (2005), amparada pelas ideias de Klein, defende que os matemáticos que não se preocupam com a educação matemática perdem por deixarem de experimentar as sutilezas cognitivas e epistemológicas da matemática elementar que emergem do ensino. Kilpatrick (1992), em um estudo sobre a história da pesquisa em educação matemática, destaca a contribuição de Klein na fundamentação da raiz matemática desse campo da pesquisa. Kilpatrick ressalta o entendimento de Klein de que o desenvolvimento da Matemática como ciência exige mudanças substanciais na relação entre a matemática escolar e a e acadêmica, o que certamente implica em mudanças na formação do professor.

Reconhecendo o valor e a atualidade do trabalho de Klein e o desafio de lidar com a gigantesca produção científica conduzida pelo avanço da tecnologia digital, em 2008 – ano em que se celebrou o centenário da primeira edição da obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* – a União Matemática Internacional[3] (IMU) e a Comissão Internacional de Instrução Matemática[4] (ICMI) lançaram, o *Projeto Klein para o século XXI*, que tem como princípio norteador estabelecer conexões entre uma visão ampla da matemática como ciência e os conteúdos e suas abordagens na escola básica e nos cursos de graduação. O Projeto Klein visa à publicação, em várias línguas e em diversas mídias, de amplo material que ofereça a professores de matemática (especialmente dos anos finais do ensino básico) a estrutura, a profundidade, a organicidade, a vitalidade, a aplicabilidade, a estética e os valores da disciplina. Espera-se assim, que os professores sejam estimulados tanto a cultivar sua própria apreciação pela área como a transmiti-la a seus estudantes (BARTON, 2008). Neste sentido, no âmbito do Projeto Klein em Língua Portuguesa, está sendo produzido um livro cujo tema central é a abordagem de conceitos e conteúdos no ensino médio, tomando como base a fundamentação matemática dos assuntos e tendo como princípio a indissociabilidade entre o co-

---

[3] International Mathematical Union – IMU.

[4] International Commission on Mathematical Instruction – ICMI.

nhecimento de conteúdo de Matemática e a competência para o ensino – o Livro Companheiro do Professor De Matemática[5]. Pretende-se que esse livro seja, de fato, um livro companheiro do professor, contribuindo, em consonância com a perspectiva de Klein, para a constituição de um *metassaber* do professor, ou seja, de *um saber sobre o saber* (SCHUBRING, 2012, 2013).

O presente trabalho fica fortemente determinado pelo meu envolvimento pessoal com o Projeto Klein em Língua Portuguesa. A possibilidade de participar como uma das autoras do Livro Companheiro do Professor de Matemática veio ao encontro da preparação para o desenvolvimento do projeto de doutorado. A motivação inicial para o estudo, tem ainda a influência de minha atuação como docente do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp–UFRJ) desde de 1993, unidade escolar da UFRJ, vinculada ao *Centro de Filosofia e Ciências Humanas* (CFCH) da UFRJ, que tem como finalidade ensino, pesquisa e extensão na área de educação básica, constituindo-se em campo prioritário de estágio supervisionado para a formação de profissionais de educação e áreas afins. Assim, o CAp atua diretamente na formação inicial de professores dos cursos de Licenciatura da UFRJ e da UNIRIO (por convênio), orientando, acompanhando e avaliando o estágio dos licenciandos, e na formação continuada dos professores de educação básica, em cursos de pós-graduação ou em projetos de extensão. O trabalho no CAp despertou o interesse pela investigação sobre a formação de professores de Matemática. Mais especificamente, o interesse se volta para a constituição dos saberes docente, com especial atenção ao conhecimento de matemática para o ensino. A identificação com a proposta do Projeto Klein e o reconhecimento de sua relevância, foram determinantes para o delineamento e a orientação que moldam as questões de pesquisa deste trabalho.

Nesse cenário, emergiu, inicialmente, como uma perspectiva natural e interessante, relacionar o *saber pedagógico de conteúdo*, proposto por Shulman (1986, 1987), e a ideia de *matemática elementar*, no sentido de Klein (2010). Assim, o presente trabalho visa contribuir para a reflexão acerca da formação do professor de matemática do ensino básico e do desenvolvimento do conhecimento de matemática necessário para o ensino.

Mais especificamente, investiga-se como o reconhecimento de aspectos elementares e de metassaberes pode ter implicações na (re)construção do *saber pedagógico de conteúdo*. O estudo é desenvolvido tendo como referencial teórico e metodológico a noção de *concept*

[5] O Livro Companheiro de Professor de Matemática, desenvolvido no âmbito do projeto Klein em Língua Portuguesa, tem como autores, Victor Giraldo (UFRJ), Cydara Ripoll (UFRGS) e Leticia Rangel (UFRJ).

study (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), a partir de uma série de sessões de estudo colaborativo, desenvolvida com um grupo de professores de ensino básico, cujo tema condutor foi *números racionais*.

No Capítulo 1, fazemos uma revisão da literatura de pesquisa sobre os saberes necessários ao ensino, com especial atenção às ideias de Shulman (1986, 1987) e de Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Em seguida, no Capítulo 2, revisitamos algumas das principais ideias de Klein, tendo como referência principal Schubring (2003, 2014), com atenção particular à *dupla descontinuidade*, ao processo de *elementarização* e à *translação histórica*. A reflexão apresentada comporta ainda o objetivo de estabelecer relações entre as ideias de Klein e algumas concepções mais recentes que remetem ao entendimento de Klein sobre a Matemática e sobre a formação do professor, em alinhamento ou em diferença. No Capítulo 3, apresentamos a noção de *concept study* (Davis, 2010; Davis, Renert, 2014), usada como base teórica e metodológica para a investigação. Destacamos especialmente o alicerce teórico que sustenta essa noção, a condução da análise de um *concept study*, a noção de *substructing*. O Capítulo 4 apresenta as diretrizes do estudo, as questões de pesquisa e os princípios metodológicos da investigação. O Capítulo 5, em uma abordagem qualitativa, traz a análise do estudo. Finalizando, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e as considerações finais alcançadas pela pesquisa.

PARTE I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Capítulo 1

OS SABERES NECESSÁRIOS PARA O ENSINO E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

“Teaching is the highest form of understanding.”
Aristóteles

Este capítulo reúne a fundamentação teórica sobre os saberes necessários para o ensino e sobre a formação docente que sustenta premissas importantes na condução da investigação, no desenvolvimento da análise e nas conclusões deste trabalho. A tradução da expressão “knowledge” da língua inglesa para a portuguesa admite tanto o termo “saber” como o termo “conhecimento” (Dicionário Michaelis Online). Por outro lado, de acordo com os tradicionais dicionários da Língua Portuguesa, Aurélio e Houssais, “saber” e “conhecer” são entendidos como sinônimos. Entretanto, a literatura de pesquisa em educação às vezes estabelece uma distinção entre esses termos (e.g. GAMBOA, 2009). Em linhas gerais, o termo “conhecimento” é frequentemente associado a uma perspectiva epistemológica mais “objetivista”, que o concebe como algo externo e que deve ser atingido pelo individuo, enquanto o termo “saber” é associado a uma perspectiva mais “subjetivista”, que o relativiza em relação ao próprio sujeito. Consideramos que trabalho original de Shulman (1986, 1987) não se encontram elementos suficientes que o identifiquem com uma ou com outra perspectiva. Assim, essas possíveis identificações se apresentam nas diferentes formas como esse trabalho é apropriado por outros autores posteriores. Além disso, não é objetivo deste trabalho o aprofundamento na reflexão sobre a natureza epistemológica dos saberes necessários ao ensino, e sim reconhecer e discutir sua especificidade e sua relevância para a atividade de ensinar e, consequentemente para a formação do professor. Sendo assim, os termos “saber” e “conhecimento” serão tratados como sinônimos neste texto. No entanto, o seu uso não será inteiramente incidental. Especialmente em relação às ideias de Shulman e de Ball, que compõem um referencial teórico fundamental para o trabalho, propõe-se uma diferença de acento. Para a tradução das expressões que identificam a terminologia que sustenta as ideias de Shulman, "*knowledge*" será traduzido como "saber". Já para as expressões que identificam as categorias propostas por Ball e seus colegas, "*knowledge*" será traduzido como "conhecimento". Pretende-se apenas, com essa decisão, estabelecer uma diferença que contribua para a fluência da leitura e para a compreensão do texto, especialmente neste capítulo. Em qualquer outra situação, não há uma escolha à priori. Em caso de tradução ou não, os termos "saber" e "conhecimento" serão usados sem a atribuição de qualquer juízo de valor, respeitando o entendimento de que são sinônimos.

Para Kilpatrick (2008b), a pergunta elementar "o que é matemática?" admite diferentes respostas se a perspectiva de observação for a de um matemático ou a de um professor de matemática:

> A principal diferença entre matemáticos e educadores matemáticos está na forma como eles olham para a matemática. Para o matemático, é claro: Matemática é um corpo de conhecimentos e a disciplina acadêmica que estuda conceitos como quantidade, estrutura, espaço e mudança. Tem sido definida como a ciência da quantidade e do espaço, a ciência das relações, a ciência que tira as conclusões essenciais, e a ciência dos padrões. Independentemente da definição preferida, os matemáticos têm poucas dúvidas quanto ao que é a disciplina se eles seguem Courant e Robbins (1941)[6] ou Davis e Hersh (1981)[7].
>
> Educadores matemáticos têm menos certeza. [...] Educadores matemáticos não veem a matemática simplesmente como um corpo de conhecimento ou uma disciplina acadêmica, mas também como um campo de prática. Porque eles estão preocupados com a forma como a matemática é aprendida, compreendida e utilizada, tanto como com o que é, eles têm uma visão abrangente. Um matemático pode admitir que, sim, matemática aplicada é um ramo da matemática, mas um educador de matemática olha para além das aplicações, olha para as maneiras como as pessoas pensam sobre a matemática, como a usam em suas profissões e em suas vidas diárias, e como os alunos podem ser levados a conectar a matemática que eles veem na escola com a matemática no mundo em torno deles.[8] (KILPATRICK, 2008b, p.5, tradução nossa)

---

[6] Courant, R., Robbins, H. (1941). *What is mathematics?* London: Oxford University Press.

[7] Davis, P. J., Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.

[8] No Original: "A major difference between mathematicians and mathematics educators lies in the way they look at mathematics. To the mathematician, it is clear: Mathematics is the body of knowledge and the aca-

Para Fiorentini e Lorenzato (2009), as práticas dos professores de matemática e dos matemáticos são distintas em muitos aspectos e os conhecimentos que estão na base da profissão de matemáticos e de professores de matemática podem não pertencer à mesma vertente epistemológica. Embora estas tenham em comum a matemática, suas percepções podem ser diferentes. Segundo os autores, matemáticos tendem a conceber a matemática como um fim em si mesma e a priorizar conteúdos formais e uma prática voltada para a pesquisa em matemática – promovendo, quando ensinam, a educação *para* a matemática. Um educador matemático tende a conceber a matemática como um meio ou um instrumento importante à formação intelectual e social da criança, dos jovens e dos adultos, determinado, assim, a perspectiva de uma educação *pela* matemática. Fiorentini, Oliveira (2013), consonantes com o entendimento da diferença entre o conhecimento de matemática do professor e o conhecimento de matemática do matemático, destacam sua implicação nas formações acadêmicas de um e do outro profissional. Assim, a formação acadêmica do professor não deve ser a mesma que a formação acadêmica de um bacharel, o que não significa que a formação do professor seja diluída em relação a do matemático ou superficial, apenas tem necessidades e demandas diferentes.

Moreira (2004) entende que:

> A prática do matemático tem como uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais "de fronteira". Os tipos de objetos com os quais trabalha a matemática científica contemporânea, os níveis de abstração em que se colocam as questões em todos os seus ramos, atualmente, e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. [...] Por sua vez, a prática do professor de matemática da escola básica desenvolve-se num contexto educativo, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse caso, a natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada — e, muitas vezes, é o que dá sentido — aos princípios, às definições, às

---

demic discipline that studies such concepts as quantity, structure, space, and change. It has been defined as the science of quantity and space, the science of relations, the science that draws necessary conclusions, and the science of patterns. Regardless of the definition they prefer, mathematicians have few doubts as to what their subject is, whether they follow Courant and Robbins (1941) or Davis and Hersh (1981).

Mathematics educators are less sure. […] Mathematics educators see mathematics not simply as a body of knowledge or an academic discipline but also as a field of practice. Because they are concerned with how mathematics is learned, understood, and used as well as what it is, they take a comprehensive view. A mathematician might concede that, yes, applied mathematics is a branch of mathematics, but a mathematics educator looks beyond applications to ways in which people think about mathematics, how they use it in their occupations and daily lives, and how learners can be brought to connect the mathematics they see in school with the mathematics in the world around them." (KILPATRICK, 2008, p7)

> justificativas e argumentações, aos métodos e aos resultados da matemática escolar.

Para ilustrar o seu entendimento, Moreira cita o seguinte relato:

> O doutor Hung-Hsi Wu da Universidade da Califórnia em Berkeley, que também foi um matemático chave na reescrita da grade curricular, escreveu um artigo descrevendo sua avaliação da revisão dos padrões curriculares. Ele considera que os padrões curriculares originais são um documento refletido, evidenciando que se teve cuidado no estabelecimento de metas. Porém, no geral, Wu focou seu artigo sobre a importância da "matemática certa". Ele achou que havia muitos erros que precisavam ser corrigidos e tópicos que tinham sido omitidos e achou que havia uma mistura ambígua de assertivas pedagógicas com assertivas sobre o conteúdo. Por exemplo, Wu objetou fortemente contra um padrão geométrico para a quarta série que dizia: "Os alunos entendem e usam a relação entre os conceitos de perímetro e área e os relacionam a suas respectivas fórmulas". Ele argumenta que o problema é que "não há relação alguma entre perímetro e área ou entre volume e superfície, a menos que se trate da desigualdade isoperimétrica. Entretanto, esta seria completamente inadequada para alunos desse nível". Sobre tais erros, assim percebidos, Wu usa linguagem forte: "Eu lamento muito dizer que essa espécie de padrões curriculares matemáticos levaria à deterioração da educação matemática por um longo período". Embora esse padrão possa constituir um erro aos olhos de um matemático pesquisador, uma professora de quarta série explicou-nos como ela o interpreta: "Queremos que os alunos entendam, em seu nível, que perímetro anda em volta e a área recobre e que sejam capazes de explicar, por exemplo, no caso de um retângulo, porque $2\times C+2\times L$ pode ser entendido como medindo o andar em volta enquanto $L\times C$ conta o recobrimento (digamos, por telhas quadradas)". Pensamos que uma professora pode aprender mais sobre esse tópico a partir dos esclarecimentos e exemplos (eliminados pelo Conselho Estadual de Educação) nos padrões curriculares originais. Constatamos assim um sério rompimento de comunicação entre os membros da comunidade matemática, que valorizam construções abstratas precisas, e os membros da comunidade de educação do ensino médio, que aprenderam a interpretar as apresentações informais das ideias que as crianças usam à medida que desenvolvem o pensamento matemático. (BECKER; JACOB, 2000, p. 531, aspas no original, tradução de Baldino R.R; Apud MOREIRA, 2004))

Outros exemplos apontados por Moreira (2004) ressaltam a dimensão pedagógica associada à observação do desenvolvimento da matemática no contexto da escola em contraposição com a natureza da matemática no contexto científico. É o caso, por exemplo, do "erro" e das "demonstrações". Moreira observa que, no contexto da matemática científica, "o erro é um fenômeno lógico que expressa uma contradição com algum fato já estabelecido como "verdadeiro" "(MOREIRA, 2004, p.32, aspas como no original). No entanto, na escola, "é importante pensar o erro como um fenômeno psicológico que envolve aspectos diretamente relacionados ao desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem" (MOREIRA, ibid). Para Moreira, o papel central das demonstrações no contexto acadêmico, que caracteriza o universo de atuação de um matemático, "refere-se à inscrição de um determinado resultado entre os aceitos como verdadeiros pela comunidade científica". No entanto, no contexto da matemática escolar, para esse autor,

> a demonstração desempenha papéis essencialmente pedagógicos, tais como: a) contribuir para a construção de uma visão da disciplina na qual os resultados não sejam tomados como dados arbitrários, mas elementos de saber socialmente construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação; b) desenvolver a capacidade de argumentação. Por exemplo, a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros alunos uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los." (MOREIRA, 2004, p.28)

Moreira e David (2007) ressaltam, em sua conclusão, o entendimento de que:

> a formação matemática na licenciatura, ao adotar a perspectiva e os valores da Matemática Acadêmica, desconsidera importantes questões da prática docente escolar que não se ajustam a essa perspectivas e valores. As formas do conhecimento matemático associado ao tratamento escolar dessas questões não se identificam – algumas vezes chegam a se opor – à forma com que se estrutura o conhecimento matemático no processo de formação. Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da Matemática Científica e da Matemática Escolar nesse processo. (MOREIRA, DAVID, 2007, p.103)

O matemático e o professor de matemática do ensino básico exercem profissões distintas, o que exige, de seus processos de formação, olhares profissionais distintos para a matemática relevante em cada um dos seus campos de atuação profissional. O reconhecimento de que, dos pontos de vista do professor e do matemático, a matemática admite diferentes perspectivas, não implica no entendimento de uma separação estrita entre a matemática escolar e a matemática como objeto de construção científica e acadêmica. No entanto, destaca que estas precisam ser observadas a partir de suas especificidades. Assim, o conhecimento de matemática do professor deve ser observado no contexto dos saberes profissionais que compõem sua prática.

Os saberes necessários ao ensino de matemática são frequentemente discutidos como compostos a partir de três segmentos: *conhecimento de conteúdo*, que corresponde ao domínio do conteúdo de matemática, *conhecimento de pedagogia*, que corresponde ao conhecimento sobre ensino de uma maneira geral, e *conhecimento de didática*, que corresponde ao conhecimento sobre como ensinar matemática. Essa certamente é uma visão bastante simplificada da composição dos saberes necessários para a atividade de ensinar matemática. Para Barbara Jaworski, coordenadora do primeiro Grupo de Trabalho sobre Formação de Professores de Matemática do PME, realizado em 1987,

> "O Ensino de Matemática é complexo. Os professores precisam saber matemática, pedagogia relacionada à matemática, didática matemática, para transformar a matemática em atividade para os alunos nas salas de aula, elementos dos sistemas de ensino em que trabalham, incluindo currículo e avaliação, e sistemas sociais e contextos culturais nos quais a educação se estabelece. Além disso, os professores precisam conhecer intimamente os alunos com os quais trabalham e as particularidades das escolas em que ensinam. Cada um destes elementos pode ser discutido por si próprio, como se fosse independente dos demais. Por exemplo, *pedagogia relacionada com a matemática* pode ser considerada separadamente dos *sistemas sociais e contextos culturais em relação aos quais a educação acontece*. Na verdade, o que acorre na prática é um entrelaçamento dependente e complicado desses elementos, relacionado com as particularidades do contexto em que o ensino ocorre. Cada professor, e professores como comunidades locais ou globais, trabalha(m) nesta complexidade e experiencia(m) o entrelaçamento como parte de sua identidade profissional, com base em conhecimento tácito ou explícito."[9] (JAWARSKI, 2008, p.335, itálico como no original, tradução nossa)

Fennema e Franke (1992), tendo a Educação Matemática como ponto de partida, mas não se restringindo a ela, propuseram uma ampla revisão crítica da literatura acadêmica sobre a formação de professores, identificando e discutindo temas importantes da pesquisa sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática. Esses autores entendem que os conhecimentos necessários para o professor compõem um sistema amplo e integrado, em que é difícil isolar cada uma das partes. No entanto, para esses autores,

> "Enquanto muitos têm pesquisado sobre os componentes do conhecimento dos professores, apenas alguns componentes têm recebido maior atenção das

[9] No original: "Mathematics Teaching is complex. Teachers need to know mathematics, pedagogy related to mathematics, mathematics didactic in transforming mathematics in activity for learners in classrooms, elements of educational systems in which teachers work including curriculum and assessment, and social systems and cultural settings with respect to which education is located. In addition, teachers know intimately the students with whom they work and the particularities of the schools where teaching take place. Each of these elements can be discussed in its own right as if it is independent of the others. For example, *pedagogy related to mathematics* can be considered separately from *social systems and cultural settings with respect to which educations is located*. In fact what happens in practice is a complicated, dependent interweaving of these elements related to the particularities of context in which teaching takes place. Each teacher, and teachers as local or global communities, work(s) within this complexity and experience(s) the interweaving as part of their professional identity drawing on knowledge tacit or explicit." (JAWARSKI, 2008, p.335)

> pesquisas: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento da aprendizagem, o conhecimento da representação matemática e os conhecimentos pedagógicos"[10] (FENNEMA, FRANKE, 1992, p.148, tradução nossa)

Fennema e Frank organizam sua pesquisa a partir da identificação de cinco componentes substanciais: *Conhecimento de Matemática*, *Conhecimento de Representações Matemáticas*, *Conhecimento sobre os Estudantes*, *Conhecimento Geral sobre Ensino* e *Estruturas e Modelos Cognitivos para o Conhecimento do Professor*[11]. Apesar da distinção desses componentes, os autores reconhecem a importância da integração entre eles e esclarecem que a organização estabelecida na apresentação da sua investigação reflete o retrato da pesquisa sobre o tema:

> "Alguns têm estudado o conhecimento como integrado, mas a maioria não. Por causa da ênfase de muitos pesquisadores, fomos forçados a infringir nossa premissa sobre a importância da integração dos conhecimentos e começar com a consideração de alguns componentes individuais do conhecimento do professor. [...] Depois de examinar a investigação que tem sido feita sobre os componentes individuais, passamos para algumas propostas de estruturas e modelos integrados de conhecimento."[12] (FENNEMA, FRANKE, 1992, p. 148, tradução nossa)

Fennema e Franke reconhecem a prática como um aspecto subjacente e promovedor do desenvolvimento de alguns dos conhecimentos necessários ao professor: "ensinar é um processo dentro do qual novo conhecimento é criado. O conhecimento frequentemente se desenvolve com base no saber pedagógico dos professores e através de interações em sala de aula com o conteúdo ensinado e com os alunos na sala de aula"[13] (FENNEMA, FRANKE, 1992, p. 162, tradução nossa).

Tardif, que se dedica ao estudo dos saberes docente de uma maneira geral, ou seja, sem foco específico na formação do professor de matemática, mas que tem influenciado a pesqui-

---

[10] No original: "While many have speculated on the components of teacher knowledge, only a few components have received major attention from researches: content knowledge, knowledge of learning, knowledge of mathematical representation and pedagogical knowledge." (FENNEMA, FRANKE, 1992, p.148)

[11] No original, "Knowledge of Mathematics", "Knowledge of mathematical Representations"; "Teachers' knowledge of Students", "Teachers' General Knowledge of Teaching and Decision-Making" e "Frameworks and Cognitive Models of Teachers Knowledge", respectivamente. (FENNEMA, FRANKE, 1992)

[12] No original: "Some have studied knowledge as integrated, but most have not. Because of the emphasis of many researchers, we have been forced to violate our premise of the importance of the integration of knowledge and start with a consideration of some individuals components of teacher knowledge. […] After examining the research that has been done with individual components, we shall move on to some hypothesized frameworks and models of integrated knowledge." (FENNEMA, FRANKE, 1992, p.148)

[13] No original: "teaching is a process within which new knowledge is created. Knowledge often develops based on the teachers' pedagogical knowledge and through classroom interactions with the subject matter and the students in the classroom" (FENNEMA, FRANKE, 1992, p.162)

sa nacional e internacional sobre os saberes docentes dos professores de matemática, também descreve a prática dos professores como uma atividade complexa, que se constitui a partir de saberes diversos:

> "Um segundo fio condutor de que me sirvo há muito tempo é a ideia de diversidade ou de pluralidade do saber docente. De fato, [...] quando questionamos os professores sobre o seu saber, eles se referem a conhecimentos e a um saber-fazer pessoais, falam dos saberes curriculares, dos programas e dos livros didáticos, apoiam-se em conhecimentos disciplinares relativos às matérias ensinadas, fiam-se em sua própria experiência e apontam certos elementos de sua formação profissional. Em suma, o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, porque envolve, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e um saber-fazer bastante diversos, provenientes de fontes variadas e, provavelmente, de natureza diferente. (TARDIF, 2012, p. 17)

Para Tardif e seus colaboradores (TARDIF et al 1991, TARDIF 2012), os saberes docentes envolvem de forma imbricada conhecimentos, competências, habilidades e atitudes: "o saber docente é um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional, dos saberes das disciplinas, curriculares e experienciais" (TARDIF, 2012, p.36). A partir desse entendimento, o autor propõe e discute uma classificação para os saberes dos professores associada à natureza diversa de suas origens, às diferentes formas de aquisição e às relações entre esses saberes, distinguindo quatro tipos de saberes profissionais dos professores, que, sucintamente, podem ser descritos como: (i) *Saberes da formação profissional*, que dizem respeito ao conjunto de saberes transmitidos pelas instituições de formação de professores, incluindo os saberes pedagógicos relacionados às técnicas e métodos de ensino; (ii) *Saberes disciplinares*, que correspondem aos diversos campos de conhecimento (por exemplo, matemática, história, biologia, etc) e que são saberes transmitidos nos cursos e departamentos universitários independentemente das faculdades de educação e dos cursos de formação de professores; (iii) *Saberes curriculares*, que correspondem a conhecimentos socialmente definidos e produzidos pela instituição escolar, que apresentam-se, concretamente, sob a forma de programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que os professores devem aprender e aplicar; e (iv) *Saberes experienciais*, que são produzidos pelos próprios professores como resultado do exercício da atividade profissional no espaço escolar. Tardif analisa ainda as relações dos professores com seus próprios saberes, destacando que os saberes experienciais se diferenciam em relação aos demais por não imporem uma relação de distanciamento:

> “Nossa pesquisa indica que o corpo docente, na impossibilidade de controlar os saberes disciplinares, curriculares e da formação profissional, produz ou tenta produzir saberes através dos quais ele compreende e domina a sua prática. Esses saberes lhe permitem, em contrapartida, distanciar-se dos saberes adquiridos fora dessa prática.” (TARDIF, 2012, p. 48)

Tardif considera o estudo científico da prática profissional como “o estudo do *conjunto* dos saberes utilizados *realmente* pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar todas as suas tarefas”. (TARDIF, 2012, p. 255, itálico como no original). Nesse sentido, para o autor, os saberes docentes: (i) são *temporais*, ou seja, são adquiridos com o tempo; (ii) são *plurais e heterogêneos*, ou seja, constituem-se de elementos oriundos de diferentes fontes como sua cultura pessoal, sua história escolar sua formação profissional, textos didáticos escolares, assim como pelas experiências de trabalho com outros, (iii) são personalizados e situados, isto é, não podem ser reduzidos à cognição e devem levar em conta a história de vida dos professores como seres sociais; e (iv) *carregam as marcas do ser humano*, ou seja, são influenciados pelo próprio professor e pela sua relação com os alunos.

Para Ponte (2000), o conhecimento que o professor de Matemática usa em sua atividade profissional constitui um dos principais temas de estudo em Educação Matemática: “O *conhecimento matemático* dos professores está entre os aspectos que têm merecido maior atenção dos investigadores” (PONTE, 2000, p.2). Na verdade, a proposição “sem um bom conhecimento de Matemática não é possível ensinar bem a Matemática” é incontornável. Para esse autor, importa saber, por exemplo, em que consiste esse conhecimento, qual a sua natureza, como se desenvolve, qual a sua relação com a prática profissional, qual a sua relação com a teoria educacional e qual o lugar que nele ocupa o conhecimento da Matemática.

Noddings (1992) discute especificamente a formação profissional do professor de matemática e destaca que um dos maiores desafios enfrentados é definir e descrever o conhecimento necessário para a prática. A autora ressalta a falta de cooperação natural entre os dois grupos de influência na formação do professor de matemática, os professores da área de educação e os matemáticos acadêmicos. Essa falta de cooperação, segundo a autora, não contribui positivamente para a formação profissional dos professores de matemática. Nesse sentido, Noddings reconhece a importância do papel da noção de ***saber pedagógico de conteúdo***[14]”, apresentado por Lee Shulman (1986, 1987) como um tipo especial de conhecimento próprio do professor que relaciona conteúdo e pedagogia – nas palavras de Shulman, “um amálgama especial de conteúdo e pedagogia” (SHULMAN, 1987, p.8). Para a autora, essa expressão

[14] No original: “*Pedagogical content knowledge*.”

reflete um "grito político", que exige a investigação sobre a identidade e a descrição desse corpo de conhecimento e de como ele se manifesta e interfere na prática do professor: "**a expressão "saber pedagógico de conteúdo" é mais um grito de guerra político do que um rótulo para um corpo real de conhecimento**"[15] (NODDINGS, 1992, p.198, tradução nossa, aspas como no original, grifo nosso). Em particular, essa autora reconhece que o **conhecimento de matemática de um professor tem sua especificidade e que essa especificidade tem implicações na prática e também na formação do professor**:

> "Conhecimento de matemática pode não ser suficiente para descrever o conhecimento profissional dos professores. O que um professor de matemática sabe que outra pessoa com preparação matemática semelhante não sabe? Que conhecimento especializado tem um professor? [...] A pesquisa sobre o conhecimento do professor é crucial não só para a condução do ensino em si, mas também para a formação do professor"[16] (NODDINGS, 1992, p.202, tradução nossa).

Para Davis e Renert, a noção de saber pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987), "ressaltou a importante distinção entre o *conhecimento de matemática para ser usado* (por matemáticos, físicos, engenheiros, etc., e, em última análise, para os estudantes) e o *conhecimento de matemática para ser o ensino* (isto é, usado por professores em processos didáticos)"[17] (DAVIS, RENERT, 2014, p.9, itálico como no original, tradução nossa)

Ponte (2000) entende que

> "se para ser professor de Matemática é preciso saber Matemática, não é menos verdade que para se ser professor é preciso um *conhecimento profissional* que envolve, para além do conhecimento relativo às disciplinas de leccionação, o conhecimento didáctico (o *pedagogical content knowledge* de Shulman, 1986), o conhecimento do currículo e o conhecimento dos processos de aprendizagem."(PONTE, 2000, p.3)

Para Ponte e Chapman (2006), na investigação sobre o conhecimento profissional necessário a um professor "dois construtos principais são necessários: o conhecimento do pro-

---

[15] No original: "The expression "pedagogical content knowledge" is more a political rallying cry than a label for an actual body of knowledge." (NODDINGS, 1992, p.198, aspas como no original)

[16] No original: "Knowledge of mathematics cannot be sufficient to describe the professional knowledge of teachers. What does a mathematics teacher know that similar mathematical preparation does not? What specialized knowledge does teacher have? […] Research on teacher knowledge is crucial not only for the conduct of teaching itself but also for teacher preparation." (NODDINGS, 1992, p.202)

[17] No original: "The addition of PCK to the M_4T mix highlighted an important distinction between mathematical knowledge that is structured to be uses (by mathematicians, physicists, engineers, etc., and ultimately bya students) and mathematical knowledge that is structured to be taught (i.e., used by teachers in the didactic process)." (DAVIS, RENERT, 2014, p.9, itálico como no original)

fessor e a prática do professor. [18]" (PONTE, CHAPMAN, 2006, p.1, tradução nossa). Para esses atores, esses construtos não são independentes um do outro, no entanto tratá-los separadamente destaca suas características únicas. Ponte, Chapman (2006, 2008) também reconhecem a importância da noção de saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986) para o estudo do saber do professor para o ensino de Matemática e destacam sua contribuição para a pesquisa em Educação Matemática: "a noção de saber pedagógico de conteúdo de Shulman tem ajudado os educadores matemáticos a dar sentido a importantes aspectos sobre o ensino de matemática".[19] (PONTE, CHAPMAN, 2008, p.230, tradução nossa).

Ball e Bass (2003), em um estudo que documenta o ensino de matemática ao longo de um ano letivo em uma turma que, no modelo americano, corresponde ao terceiro ano escolar do ensino fundamental no Brasil, investigam o conhecimento de matemática necessário para o ensino. A partir de um panorama de estudos que têm buscado estabelecer a natureza e identificar os elementos dos conhecimentos necessários ao professor de matemática, a pesquisa realizada por Ball e Bass, destaca a estreita relação entre o conhecimento de matemática dos professores e a qualidade da sua prática: "Estudos observacionais envolvendo professores iniciantes e experientes revelam que a compreensão e a destreza do professor em relação ao conteúdo matemático afeta a qualidade da sua prática de ensinar"[20] (BALL, BASS, 2003, p.3, tradução nossa). Como exemplo, os autores relatam o estudo realizado por Elsenhart et al (1993), que descreve o caso de uma professora do ensino básico que, apesar de ter tido, em sua formação inicial, cursos de matemática avançada, não sabia apresentar uma representação correta para a divisão de frações que explicasse porquê o processo de "inverter e multiplicar" funciona. No entanto, Ball e Bass acreditam que o conhecimento de matemática necessário para o ensino "requer transcender à compreensão tácita que caracteriza grande parte do conhecimento pessoal de matemática"[21] (BALL, BASS, 2003, p.4, tradução nossa). Para esses autores, "oportunidades de os professores aprenderem matemática devem incluir experiências

[18] No original: "In order to examine such activity, we assume that two main constructs are required: teacher knowledge and teacher practice. These constructs are not independent of each other, but we treat them separately to highlight their unique." (PONTE, CHAPMAN, 2006, p.1)

[19] No original: "Shulman's notion of PCK has helped mathematics educators to make sense of important aspects of mathematics teaching practice." (PONTE, CHAMPMAN, 2008, p.230)

[20] No original: "Observational studies of beginning and experienced teachers reveal that teacher's understanding of and agility with the mathematical content does affect the quality of their teaching." (BALL, BASS, 2003, p.1)

[21] No original: "Knowing mathematics for teaching requires a transcendence of the tacit understanding that characterizes much personal knowledge." (BALL, BASS, 2003, p.4)

de descompactar ideias, procedimento e princípios matemáticos familiares"[22] (BALL, BASS, 2003, p.13, tradução nossa).

Ball e Cohen (1999) acreditam que aprender a ensinar envolve aprendizagem sobre o conteúdo a ser ensinado, sobre pedagogia e sobre os estudantes e que a prática é uma fonte essencial no processo de formação do professor: "a melhor maneira de melhorar o ensino e a aprendizagem do professor (para o ensino) seria criar a capacidade de melhorar muito a aprendizagem sobre o ensino como parte do ensino"[23] (BALL, COHEN, 1999, p.11, tradução nossa). Para Ball e seus colegas (BALL, COHEN, 1999, BALL, BASS, 2003, BALL, THAMES, PHELPS, 2008), uma importante contribuição para o estudo sobre o conhecimento de matemática necessário para o ensino foi a noção de *saber pedagógico de conteúdo* (SHULMAN, 1986, 1987), que distingue um saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino.

> "Ao analisar as demandas matemáticas do ensino, buscamos identificar o conhecimento matemático que é exigido pelo trabalho realizado pelos professores em sua prática. Nesse sentido, definimos o conhecimento matemático que estamos estudando como conhecimento matemático "implicado pelo ensino", em outras palavras, *o conhecimento matemático necessário para executar as tarefas recorrentes de ensinar matemática.* "[24] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.399, tradução nossa, aspas e itálico como no original)

Em seu trabalho, Shulman ilumina especialmente a atenção ao conhecimento de conteúdo no corpo de conhecimentos necessários ao professor, identificando um *paradigma perdido*. Shulman (1986) observa os conhecimentos necessários para o ensino a partir de uma classificação que distingue especialmente três categorias: *saber de conteúdo, saber pedagógico de conteúdo e saber sobre currículo*. Embora o trabalho de Shulman não seja especificamente sobre o ensino de matemática, ele, reconhecidamente, tem sido referência para muitos pesquisadores em Educação Matemática. Tendo como referência a observação da prática de sala de aula e as ideias de Shulman, com especial atenção ao saber de conteúdo e ao saber pedagógico de conteúdo, Ball e seus colegas (BALL, BASS, 2000, BALL, BASS, 2003; BALL, THAMES, PHELPS, 2008, HILL, BALL, CHILLING, 2008) propõem um modelo para

---

[22] No original: "Teachers' opportunities to learn mathematics should include experiences in unpacking familiar mathematical ideas, procedure, and principles." (BALL, BASS, 2003, p.13)

[23] No original: "The best way to improve both teaching and teacher learning would be to create the capacity for much better learning about teaching as a part of teaching." (BALL; COHEN, 1999, p.11)

[24] No original: "In analyzing the mathematical demands of teaching, we seek to identify mathematical knowledge that is demanded by the work teachers do. To pursue this, we define the mathematical knowledge we are studying as mathematical knowledge "entailed by teaching"—in other words, *mathematical knowledge needed to perform the recurrent tasks of teaching mathematics to students*." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.399, aspas e itálico como no original)

composição dos saberes docentes dos professores de matemática: a noção de conhecimento matemático para o ensino.

De maneira geral, os estudos sobre a formação profissional dos professores e a constituição dos saberes necessários para o ensino reconhecem a prática como uma dimensão de produção de saberes docente (SHULMAN, 1986, 1987; BALL, COHEN, 1999; BALL, BASS, 2003; BALL, HILL, 2008; SBEM, 2003; MIZUCAMI, 2005; PONTE, 2006, 2008; EVEN, BALL, 2008; MOREIRA, DAVID, 2005; MOREIRA, 2012; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013; DAVIS, RENERT, 2014). Esse entendimento fundamenta o reconhecimento de que, por sua própria natureza, a construção dos saberes necessários para o ensino de Matemática não pode ser reduzida à formação inicial do professor. A formação do professor, com especial atenção à construção dos saberes docente deve ser entendida como um processo permanente, que tem início no curso graduação e se desenvolve continuamente com a prática docente – um processo que visa ao desenvolvimento do professor como profissional.

> A formação do professor tem que ser concebida como um processo contínuo de desenvolvimento profissional. (SBEM, 2003)

De acordo com Passo, Nardi e Arrunda (2010), talvez pelo fato de serem denominações introduzidas mais recentemente (na última década), ainda são poucos os artigos que buscam mapear de forma diferente a "formação do professor" e o "desenvolvimento profissional do professor". Contudo, esses autores destacam como parâmetro a contribuição de Ponte (1995) que contempla o entendimento atribuído a essas expressões também neste trabalho:

> A noção de desenvolvimento profissional é uma noção próxima da noção de formação. Mas não é uma noção equivalente. Registremos as principais diferenças:
>
> — a formação está muito associada à ideia de "frequentar" cursos, numa lógica mais ou menos "escolar"; o desenvolvimento profissional processa-se através de múltiplas formas e processos, que inclui a frequência de cursos mas também outras actividades como projectos, trocas de experiências, leituras, reflexões,...
>
> — na formação o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo-lhe absorver os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos; com o desenvolvimento profissional está-se a pensar num movimento de dentro para fora, na medida em que toma as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projectos que quer empreender e ao modo como os quer executar; ou seja: o professor é objecto de formação mas é sujeito no desenvolvimento profissional;
>
> — na formação atende-se principalmente (se não exclusivamente) àquilo em que o professor é carente; no desenvolvimento profissional parte-se dos aspectos que o professor já tem mas que podem ser desenvolvidos...

—a formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos (ou por disciplinas, como na formação inicial...); faz-se formação em avaliação, em MS-DOS, em cultura islâmica; o desenvolvimento profissional, embora possa incidir em cada momento num ou noutro aspecto, tende sempre a implicar a pessoa do professor como um todo;

— a formação parte invariavelmente da teoria e muitas vezes (talvez na maior parte) não chega a sair da teoria; a desenvolvimento profissional tanto pode partir da teoria como da prática; e, em qualquer caso, tende a considerar a teoria e a prática duma forma interligada.

Falar em termos de desenvolvimento profissional não é portanto equivalente a falar em termos de formação. A introdução deste conceito representa uma nova perspectiva de olhar os professores. Ao se valorizar o seu desenvolvimento profissional, eles deixam de ser vistos como meros receptáculos de formação passando, pelo contrário, a ser tidos como profissionais autónomos e responsáveis com múltiplas facetas e potencialidades próprias. (PONTE, 1995, aspas como no original, p.2-3)

Neste capítulo, o objetivo é discutir os saberes necessários ao ensino e à formação e ao desenvolvimento profissional do professor de matemática com particular atenção às noções de *saber pedagógico de conteúdo* (SHULMAN, 1986, 1987) e de *conhecimento de matemática para o ensino* (BALL, 2003; BALL et al, 2008). No entanto, é importante destacar que, o foco particular na dimensão do conhecimento de conteúdo para o ensino não pretende defender ou promulgar uma visão estanque ou simplificada para os diversos elementos que compõem os saberes docentes.

1.1 O SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO E O PARADIGMA PERDIDO – A CONTRIBUIÇÃO DE SHULMAN

No panorama da pesquisa sobre os saberes necessários para o ensino, destaca-se a contribuição de Lee Shulman (1986, 1987). Ainda que o trabalho do autor não trate especificamente do conhecimento do professor de matemática, têm sido uma referência central para a pesquisa em educação matemática (e.g. BALL, THAMES, PHELPS, 2008; MISHIRA, KOELER, 2006, SZTAJN, 2007; PALIS, 2010, MIZUCAMI, 2004, MOREIRA, 2004, 2012, RIBEIRO, 2012).

Em 1986, Shulman, em seu artigo – hoje clássico – *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, discute concepções sobre o conhecimento do professor e identifica um domínio especial desse conhecimento, introduzindo a noção de *saber pedagógico de conteú-*

do[25] no cenário da pesquisa em educação. Tomando como referência a análise de ações relativas à habilitação e à formação de professores nos Estados Unidos nas décadas de 1970 e 1980, Shulman conduz a discussão acerca do tema com foco no conhecimento do conteúdo a ser ensinado. O autor distingue o *saber de conteúdo*[26], relativo exclusivamente à matéria a ser ensinada sem compromissos com o ensino, do *saber pedagógico de conteúdo*, que extrapola o conhecimento do conteúdo disciplinar *per se*, contemplando a dimensão do conhecimento *sobre* conteúdo *para* o ensino, percebido como um conhecimento que congrega conteúdo e pedagogia de forma indissociável e articulada.

> Em relação ao saber pedagógico de conteúdo, eu incluo, para os assuntos mais regularmente ensinados em uma disciplina, as formas mais eficientes de representação das ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – em outras palavras, as maneiras de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros.[27] (SHULMAN, 1986, p.9, tradução nossa)

O *saber pedagógico de conteúdo* não pode ser identificado ao saber de pedagogia nem ao saber de conteúdo, ainda que se estabeleça a partir dessas dimensões do conhecimento. Constitui-se como um do saber sobre o conteúdo para o ensino.

Por exemplo, todo professor de matemática deve conhecer a definição formal da operação de divisão envolvendo números naturais, deve saber que o algoritmo usual dessa operação se baseia na estrutura posicional do sistema de numeração decimal e deve ser capaz de efetuar corretamente esse algoritmo, descrevendo detalhadamente e justificando formalmente cada uma das etapas que o compõe. No entanto, para um professor, é necessário, também identificar situações resolvidas por meio da operação de divisão a partir de ideias de repartição e de comparação ou medida; reconhecer a relação intrínseca da divisão com as demais operações básicas; identificar diferentes formas de decomposições e de reagrupamento da representação decimal dos números que permitam diversificar e tornar mais simples a execução do algoritmo usual e compor e justificar outras formas de algoritmos e, sobretudo; *reconhecer a relevância de cada um desses aspectos para a aprendizagem, sendo capaz de articulá-los para estabelecer estratégias de ensino, levando em conta as especificidades de cada*

---

[25] No original, "*pedagogical content knowledge*".

[26] No original, "*content knowledge*".

[27] No original: "Within the category of pedagogical content knowledge I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations – in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others."(SHULMAN, 1986, p.9)

contexto de aprendizagem. Por exemplo, a operação $583 \div 7$ pode ser resolvida de diversas formas, dentre as quais:

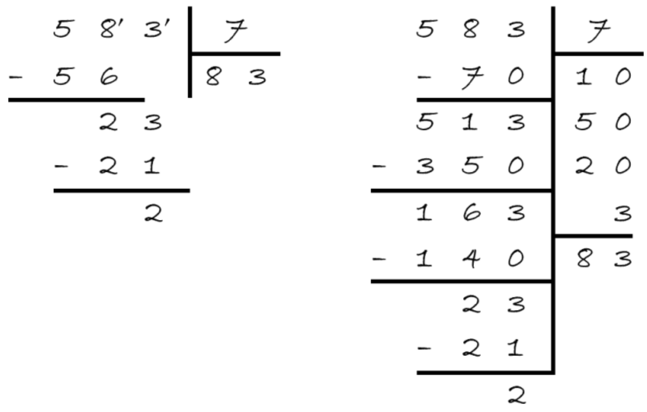
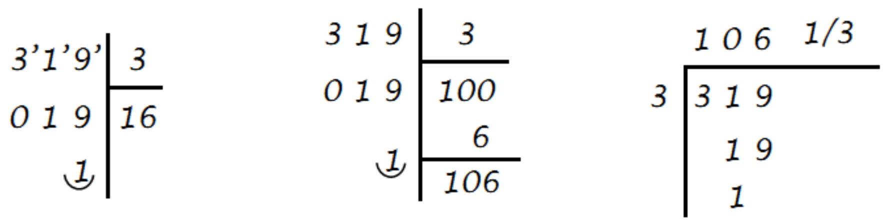


Figura 1.1: Exemplos de divisões: por ordem e por estimativa

O algoritmo apresentado à esquerda, mais usual no contexto de ensino no Brasil, é frequentemente chamado de *algoritmo por ordens*, enquanto que o da direita é conhecido como *algoritmo por estimativas*. Ambos são desenvolvidos a partir do mesmo processo, envolvendo subtrações sucessivas e a adição de quocientes. Do ponto de vista do conhecimento matemático *per se*, talvez a única informação relevante seja a de que o algoritmo por ordens, otimiza os passos envolvidos. No entanto, do ponto de vista do conhecimento matemático para o ensino, é fundamental o reconhecimento de que o uso do algoritmo por estimativas pode contribuir para a compreensão dos alunos sobre a operação de divisão e sobre a natureza do próprio algoritmo. Não é difícil observar que esse processo pode traduzir mais claramente o entendimento de que “7 cabe pelo menos 10 vezes em 583” ou que “na divisão de 583 em 7 partes iguais, em cada uma das partes haverá pelo menos 10 unidades”. Somente um conhecimento profundo de aspectos conceituais particulares da operação de divisão e da estrutura de seu algoritmo pode munir o professor com a habilidade de reconhecer a relevância para o ensino do uso de diferentes algoritmos (que podem ser matematicamente equivalentes) e de identificar em que situações pedagógicas o uso de determinado algoritmo é vantajoso.

Assim, fica ilustrado o *saber pedagógico de conteúdo*, que envolve, por exemplo, a habilidade de identificar características particulares de diferentes formas de registros e procedimentos associados ao algoritmo da divisão (Figura 1.2), e de reconhecer a relevância dessas características para a aprendizagem dos alunos, levando em conta as especificidades de cada contexto escolar.



Procedimento A Procedimento B Procedimento C

Figura 1.2: Procedimentos de execução da divisão.

Em relação aos procedimentos ilustrados, é possível inferir, por exemplo, que o estudante que desenvolveu o cálculo A, apesar de fazer uso do algorítmo da divisão com atenção às ordens do sistema decimal de numeração, parece não ser capaz de fazer uma avaliação crítica do processo e do resultado e, talvez, nem saiba de fato operar a divisão, desenvolvendo o algoritmo como uma sequência de regras descoladas da operação em si. Já o estudante que desenvolveu o procedimento B efetua a divisão a partir de estimativas e subtrações sucessivas, o que não exige necessariamente a observação das ordens. Já o estudante associado ao procedimento C extrapola o universo dos números naturais, ampliando a divisão ao universo dos números racionais.

Para Shulman, o cenário acadêmico americano na década de 1980 (época da publicação do artigo) revela que a ênfase em aspectos pedagógicos se sobrepõe à atenção ao conteúdo a ser ensino: “sob a necessária simplificação da complexidade do ensino, pesquisadores ignoram um aspecto central da vida da sala de aula: o conteúdo disciplinar”[28] (SHULMAN,1986, p.6, tradução nossa). A desconsideração da importância do conhecimento do conteúdo disciplinar como um aspecto componente da competência para o ensino é identificado por Shulman como um *paradigma perdido*[29]. Uma contribuição importante do trabalho de Shulman (1986, 1987) foi estabelecer novo rumo para o estudo sobre o conhecimento docente, determinando o conteúdo como elemento substantivo.

> Ao chamar a atenção para o paradigma perdido, ou a ausência virtual de pesquisas focadas diretamente no conhecimento de conteúdo dos professores, Shulman e seus colegas definiram uma perspectiva que destacou o caráter de relevância do conteúdo diante da natureza do ensino. No entanto, eles também procuraram especificar como o conhecimento do conteúdo para o ensino é diferente do conhecimento do conteúdo disciplinar. Isto teve im-

[28] No original: “In their necessary simplification of the complexities of classroom teaching, investigators ignored one central aspect of classroom life: the subject matter.” (SHULMAN,1986, p.6)

[29] No original: “*missing paradigm*”.

plicações importantes para a discussão emergente de que o ensino é um trabalho profissional com sua própria base de conhecimento profissional.[30] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.392, tradução nossa)

Nesse sentido, sob a perspectiva da formação profissional e do desenvolvimento docente, emergem diversas questões que têm determinado largamente a investigação em educação e, especialmente, em educação matemática: Por exemplo, *Qual a origem e em que aspectos se sustentam as explicações dadas pelos professores em suas aulas? Em que garantias de verdade os professores se apoiam e que garantias de verdade procuram transmitir aos alunos? Com base em que critérios decidem sobre o que e como ensinar? Que representações empregam para o ensino de determinado conteúdo? Como lidam e enfrentam as dificuldades de seus alunos? Como se estabelece o conhecimento necessário para o ensino de uma disciplina?*

Em uma investigação com foco no conhecimento de matemática de estudantes de cursos universitários para formação de professores de matemática da escola básica (equivalentes à nossa licenciatura), Ball (1988) propõe uma investigação acerca do conhecimento desses estudantes sobre a operação de divisão a partir da observação de três contextos diferentes: *divisão envolvendo frações*, *divisão por zero* e *divisão no contexto de equações algébricas*. Em relação à divisão envolvendo frações, a pesquisadora solicita aos futuros professores que desenvolvam uma representação – uma história, um modelo, uma Figura, uma situação do mundo real – para a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$.

Desta forma, Ball pretende verificar que tipos de estratégias os futuros professores adotariam para discutir, em sala de aula, o significado da operação de divisão no caso em que o divisor é um número fracionário. Dos 18 estudantes participantes da investigação, apenas 5 foram capazes de sugerir representações apropriadas; enquanto outros 5 apresentaram representações impróprias, e os 8 restantes declararam-se incapazes de sugerir qualquer representação. Ball destaca que mesmo as 5 respostas consideradas satisfatórias não eram isentas de problemas. De acordo com a pesquisadora, os resultados observados sugerem um conhecimento bastante restrito desses estudantes sobre a operação de divisão, sendo insuficiente para capacitá-los para o ensino. Em particular, eles associavam a divisão apenas à interpretação de

---

[30] No original: “In drawing attention to the missing paradigm, or the virtual absence of research focused directly on teacher content knowledge, Shulman and his colleagues defined a perspective that highlighted the content-intensive nature of teaching. However, they also sought to specify the ways in which content knowledge for teaching is distinct from disciplinary content knowledge. This had important implications for informing an emerging argument that teaching is professional work with its own unique professional knowledge base.”(BALL, THEMES, PHELPS, 2008, p.392)

partição, não considerando a intepretação de comparação ou medida, mais adequada ao universo de números racionais.

A partir da investigação sobre os três contextos observados, Ball questiona a estrutura dos cursos em nível de graduação para a formação de professores de Matemática nos Estados Unidos. Para isso, a autora identifica e questiona três suposições que se manifestam de forma implícita nos modelos adotados por esses cursos: (1) *os conteúdos da matemática escolar são simples e comumente entendidos;* (2) *portanto, não precisam ser reaprendidos no curso universitário*; e (3) *as disciplinas de matemática universitária são suficientes para equipar os futuros professores com um saber amplo e profundo da matemática escolar*. Desta forma, Ball não atribui os resultados do estudo a qualquer "deficiência" particular dos participantes da investigação, e sim a características estruturais dos cursos de formação inicial de professor de Matemática nos Estados Unidos. Essas características estão relacionadas com uma concepção particular sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino. Segundo essa concepção, a matemática a ser ensinada no ensino básico é "simples demais" para se constituir em objeto de cursos universitários, podendo ser alcançada apenas por meio do estudo dos conteúdos próprios da matemática universitária (que não são aqueles que o professor ensinará em sua futura prática docente). Sob essa perspectiva, não há profundidade nos conteúdos da Matemática escolar e esses não exigem um saber que seja específico da tarefa de ensinar, ou seja, um saber próprio do professor – Dessa forma, o saber de conteúdo necessário ao professor é compreendido como uma "versão simplificada" do saber de conteúdo *per se*, sendo reduzido ao conhecimento de algumas definições e à execução de procedimentos e algoritmos. Uma implicação das suposições apontadas por Ball é revelar o caráter inócuo dos cursos de formação inicial de professores de Matemática para o propósito a que se destinam – é como se esses cursos tivessem pouca relação efetiva com a capacitação dos professores ao ensino, levando-os a buscar outras referências (particularmente, sua própria experiência prévia como alunos da educação básica) para construir sua prática docente. O trabalho de Ball revela que as concepções sobre os saberes de conteúdo necessários para o ensino podem ter sérias implicações nas estruturas dos cursos universitários de formação de professores e no perfil do professor formado.

1.2 AS CATEGORIAS DO SABER NECESSÁRIO PARA O ENSINO SEGUNDO SHULMAN

Shulman, em sua atuação como pesquisador[31], orienta sua investigação com destaque para o conhecimento do professor acerca do conteúdo com o propósito de ensino e para a busca por caminhos para desenvolver esse conhecimento. Em seu artigo, hoje também clássico, *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform* (SHULMAN, 1987), o autor discute a *base do saber para o ensino*[32].

Shulman entende que a base do saber para o ensino se configura um repertório profissional de conhecimentos necessários à prática docente. Para o pesquisador essa base de conhecimento se estabelece a partir de categorias subjacentes à compreensão que o professor necessita para promover a aprendizagem de seus alunos (SHULMAN, 1986, 1987). Objetivando identificar essas categorias, Shulman apresenta uma lista mínima a ser contemplada:

- Saber de conteúdo[33];
- Saber pedagógico[34] – com especial referência a princípios gerais e estratégias de manejo de classe e de organização que parecem transcender ao saber de conteúdo específico.
- Saber sobre currículo[35] – com particular compreensão sobre materiais e programas que servem como ferramentas de trabalho dos professores;
- Saber pedagógico de conteúdo[36] – amálgama especial entre conteúdo e pedagogia que estabelece uma forma própria e especial de entendimento profissional e que é particular ao campo da docência.
- Saber sobre os alunos e de suas características;
- Saber sobre os contextos educacionais, que incluem desde o funcionamento de grupos ou de turmas e gestão e financiamento de distritos educacionais a características de comunidades e culturas;

---

31 Shulman, nos anos 80, dirigia o programa de pesquisa "*Knowledge Growth in Teaching*". Baseado em estudos de casos, esse programa concentrava sua atenção na evolução de professores da *high School* americana. Os participantes eram graduados recentes com boa formação na disciplina específica de atuação. A investigação sobre o processo de formação desses professores para a docência buscava identificar em que medida uma boa formação relativa ao conteúdo disciplinar se traduzia em conhecimento necessário para o ensino dessa disciplina.

32 No original: "*knowledge base of teaching".*

33 No original: "*content knowledge".*

34 No original: "*general* pedagogical *knowledge*".

35 No original: *"curriculum knowledge".*

36 No original: "*pedagogical content knowledge".*

- Saberes sobre os fins, propósito e valores educacionais e sobre seus fundamentos filosóficos e históricos.[37] (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa)

O autor destaca que, "dentre essas categorias, o saber pedagógico de conteúdo é de interesse especial, porque identifica o corpo de conhecimento próprio para o ensino"[38] (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa). Quatro das categorias identificadas são relativas a aspectos gerais do saber necessário à docência – *saber pedagógico*, *saber sobre os alunos*, *saber sobre contextos educacionais* e *saberes históricos e filosóficos de educação*. Ainda que Shulman deixe claro o reconhecimento do valor dessas categorias, elas não representam o foco de sua pesquisa. Shulman afirma que seu trabalho "não tem a intenção de diminuir a importância do saber pedagógico ou das habilidades no desenvolvimento de um professor [...]. Mero conhecimento do conteúdo é provavelmente tão inútil quanto habilidade pedagógica franqueada do conteúdo"[39] (SHULMAN, 1986, p. 8, tradução nossa). As categorias identificadas por Shulman devem ser percebidas como partes essenciais de um todo, sem que seja necessário determinar fronteiras precisas entre elas. O objetivo não é estabelecer categorias estanques, nas quais seja possível classificar cada aspecto do conhecimento do professor, mas reconhecer que, isoladamente, nenhuma delas sustenta o saber necessário para o ensino.

Sob a perspectiva do conteúdo, nessa categorização se apresentam (i) o saber de conteúdo, (ii) o saber sobre o currículo e (iii) o saber pedagógico de conteúdo. Shulman (1986) distingue particularmente cada uma dessas categorias. O saber de conteúdo se refere ao objeto de ensino em si, concebido como estrutura substantiva da disciplina correspondente. É relativo à quantidade e à organização do conteúdo a ser ensinado. Esse conhecimento não se

---

[37] No Original: "At minimum, they would include:
— content knowledge;
— general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter;
— curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers;
— pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding;
— knowledge of learners and their characteristics;
— knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and
— knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds." (SHULMAN, 1987, p. 8)

[38] No original: "Among those categories, pedagogical content knowledge is of special interest be-cause it identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching." (SHULMAN, 1987, p. 8)

[39] No original: "Our work does not intend to denigrate the importance of pedagogical understanding or skill in the development of a teacher or in enhancing the effectiveness of instruction. Mere content knowledge is likely to be as useless pedagogically as content-free skill." (SHULMAN, 1986, p. 8)

resume à detenção de conceitos e fatos relativos ao conteúdo, requer também a compreensão de suas estruturas e regras e dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica. Relativamente ao saber de conteúdo, Shulman comenta que:

> O professor precisa não apenas compreender *como* algo se dá, o professor deve ir além compreendendo *porque* isso se dá, com base em que fundamentos pode ser afirmado e sob que circunstâncias nossas crenças sobre o tema podem ser enfraquecidas ou mesmo negadas. Além disso, espera-se que o professor entenda porque determinado tópico é particularmente importante para disciplina, enquanto outro pode ser um tanto periférico[40]. (Shulman, Ibid., p.9, itálico como no original, tradução nossa).

O saber sobre o currículo é entendido como o conjunto de programas curriculares e de orientações relativos ao ensino da disciplina com atenção ao nível de escolaridade, à variedade e à adequação de materiais didáticos disponíveis e à articulação horizontal/vertical do conteúdo curricular.

Entre as categorias que ancoram a base do saber para docência com referência ao conteúdo, Shulman (1986, 1987) dispensa especial e ampla atenção ao saber pedagógico de conteúdo, que descreve como uma forma particular de conhecimento do conteúdo que incorpora aspectos do conteúdo que são relativos ao seu ensino. Shulman considera que este saber:

> [...] identifica diferentes corpos do conhecimento necessário à docência. Ele representa a combinação de conteúdo e pedagogia em um entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos e apresentados no processo de ensino.[41] (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa)

O saber pedagógico de conteúdo, também caracterizado por Shulman como um "amálgama entre conteúdo e pedagogia" (SHULMAN, 1987, p.8), vai além do saber de conteúdo a ser ensinado por si só, alcançando a dimensão do saber da disciplina para o ensino. Giraldo, em um estudo das ideias de Shulman, indica que "o saber pedagógico de conteúdo não se refere a um conhecimento *sobre* a pedagogia, abstratamente pensada, mas sim *sobre* o próprio conteúdo em sua dimensão pedagógica – que o articula a um determinado contexto de ensino" (GIRALDO, 2009, p.1). Inclui a compreensão do que facilita ou dificulta o aprendi-

---

[40] No original: "The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand *why* it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. Moreover, we expect the teacher to understand why a given topic is particularly central to a discipline whereas another may be somewhat peripheral." (Shulman, 1986, p.9, itálico como no original)

[41] No original: "…identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction." (SHULMAN, 1987, p. 8)

zado discente de determinado conceito e a formulação da apresentação do conteúdo de forma a torná-lo compreensível para os alunos, incluindo estabelecer e fazer uso da forma mais apropriada e eficiente de representações, analogias, ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações. Inclui também conhecimentos a respeito das concepções prévias dos estudantes de diferentes idades, níveis e antecedentes escolares relativos a tópicos tradicionais do conteúdo. Nesse sentido, a investigação com foco no saber pedagógico de conteúdo pode estabelecer um elo interessante e importante entre a pesquisa que objetiva o ensino e a formação de professores e a pesquisa que investiga a aprendizagem dos estudantes.

A orientação de Shulman determina que o professor assume papel protagonista na construção do saber pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987). Convergente com esse entendimento, Sztajn (2002), indica que "o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar de diversos modos, a partir de diferentes perspectivas, estabelecendo relações entre vários tópicos e entre sua disciplina e as demais" (SZTAJN, 2002, p.19). Segundo a autora, é o saber pedagógico de conteúdo que "distingue aquele (professor) que 'apenas' sabe uma disciplina daquele que é capaz de ensiná-la" (SZTAJN, 2002, p.19, aspas como no original). Mizucami (2004) contribui com a indicação de que este saber se configura em um conhecimento de importância fundamental em processos de aprendizagem da docência, sendo o único em que o professor estabelece uma relação de protagonismo e autoria. É aprendido no exercício profissional, ainda que não dispense outros conhecimentos que o professor deve aprender em sua formação. Ball e Bass (2003) identificam o saber pedagógico de conteúdo como "um tipo único de conhecimento que entrelaça conteúdo com aspectos de ensino e de aprendizagem"[42] (BALL, BASS, 2003, p.4, tradução nossa). Ball, Thames, Phelps (2008) ratificam que a concepção deste saber foi fundada a partir da observação da ação docente em estudo dirigido por Shulman (SHULMAN, 1987). Esse estudo se pautou na investigação sobre a prática de professores eficientes (professores que têm, reconhecidamente, sucesso ao ensinar), identificando estratégias e recursos didáticos usados por esses professores de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos sem que fosse atingida a integridade do conteúdo disciplinar

> Observar veteranos ensinando o mesmo tópico que oferece dificuldade para professores novatos nos ajudou a focar a atenção (da pesquisa) nos tipos de conhecimentos e habilidades necessários a assuntos bem exigentes (em relação ao ensino). Ao focalizar o ensino de tópicos específicos – equa-

[42] No original: "Pedagogical knowledge is a unique kind of knowledge that intertwines content with aspects of teaching and learning. " (BALL, BASS, 2003,p.4)

ções quadráticas, o subcontinente indiano, fotossíntese – aprendemos como tipos particulares de conhecimento do conteúdo e de estratégias pedagógicas necessariamente interagem nas mentes dos professores.[43] (SHULMAN, 1987, p.5, tradução nossa).

Para Moreira (2004), "o conhecimento pedagógico de conteúdo [...], trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas" (MOREIRA, 2004, p.40). Moreira (2004) também discute em que medida a noção de ***conhecimento pedagógico do conteúdo*** se distancia (ou se aproxima) da ideia de ***transposição didática*** de Chevallard defendendo que:

> Embora o conhecimento pedagógico do conteúdo possa ser visto, essencialmente, como um amálgama entre pedagogia e conteúdo — que se destina a tornar mais compreensível, para o aluno, um determinado objeto de ensino — uma diferença fundamental desse conceito em relação à noção de transposição didática de Chevallard é, a nosso ver, a fonte que engendra o primeiro como uma construção de saber: a prática docente em sala de aula. Nesse sentido, o conhecimento pedagógico do conteúdo não é algo produzido e regulado a partir do exterior da escola e que deva ser transladado para ela, mas, ao contrário, trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas. O conceito proposto por Shulman refere-se a um saber proveniente da prática docente escolar. (MOREIRA, 2004, p.40)

As ideias de Shulman (1986, 1987), com particular atenção à identificação de um paradigma perdido, à proposição de uma nova perspectiva para o saber docente e à sugestão de uma dimensão do saber do professor que é particular e que congrega o saber sobre conteúdo a ser ensinado com o saber pedagógico, se configuram em referências importantes para a produção científica em educação, em particular em educação matemática. O trabalho de Shulman oferece ainda uma referência importante para a orientação e o estudo de modelos de formação docente. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), nas duas décadas seguintes à publicação, os referidos trabalhos foram citados por mais de 1200 artigos em periódicos arbitrados de áreas diversas. Mais ainda, a importância desses trabalhos se amplia quando observado seu alcance que, segundo esses autores, compreende citações registradas em artigos de 125 periódicos de áreas diversas. Predominantemente, o interesse apontado tem foco específico no saber pedagógico de conteúdo (BALL, THAMES, PELPS, 2008, p.14).

---

[43] No original: "Watching veterans such as Nancy teach the same material that poses difficulties for novice teachers helped focus our attention on what kinds of knowledge and skill were needed to teach demanding materials well. By focusing on the teaching of particular topics — Huck Finn, quadratic equations, the Indian subcontinent, photosynthesis — we learned how particular kinds of content knowledge and pedagogical strategies necessarily interacted in the minds of teachers." (SHULMAN, 1987, p.5)

Cury (2012) discute o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo a partir da observação dos erros dos alunos, propondo a expressão "conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros". Partindo das ideias iniciais de Shulman, esse conhecimento se constitui a partir do conhecimento de conteúdo explorado na observação e na análise dos erros dos alunos ao desenvolverem atividades didáticas. Para Cury, trata-se de um domínio do conhecimento necessário ao professor diferente daquele que é exigido durante os cursos típicos de graduação.

> O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros exige muito mais do que o simples conhecimento do conteúdo ou da pedagogia. Esse conhecimento deve incluir uma compreensão do que faz aquele determinado conteúdo fácil ou difícil; das concepções errôneas que os alunos têm sobre o conceito ou sobre suas operações e propriedades; das formas de auxiliar os alunos a desconstruir tais concepções. (CURY, 2012, p. 37)

A noção de saber pedagógico de conteúdo se configura como um eixo reconhecidamente importante e particular na construção dos saberes necessários para o ensino de matemática. Graeber e Tirosh (2008), amparados em revisão bibliográfica de trabalhos que propõem extensões ou modificações do referencial de Shulman, afirmam que a evolução das ideias propostas pelo pesquisador se estabelece no sentido de ampliar as definições originais. Em especial, essas autoras relacionam trabalhos que propõem extensões, adaptações e críticas às ideias de Shulman. Dentre as críticas destacadas por essas autoras estão, por exemplo, os fatos de (i) a taxonomia proposta por Shulman não considerar as crenças e os valores dos professores; (ii) ser ancorada em um modelo didático dirigido pelo professor, não se adequando, portanto, a modelos alternativos, por exemplo, em que o professor não tem o papel central no processo ou em que os alunos têm papéis mais autônomos; e (iii) passar a ideia do saber pedagógico de conteúdo como um "corpo" de conhecimento predeterminado, que deve ser atingido pelo professor, mais do que um processo de construção.

Graeber e Tirosh (2008) destacam que

> o fato de que muitos pesquisadores não oferecem uma definição para o "conhecimento pedagógico de conteúdo", mas sim tentam caracterizá-lo com listas ou com exemplos, é outra indicação de que o conceito é ainda pouco definido. Na prossecução do trabalho sobre o conhecimento pedagógico de conteúdo, uma série de questões, nem todas independentes, têm surgido. Essas questões incluem: (i) o papel das crenças e dos valores no desenvolvimento do conhecimento pedagógico de conteúdo dos professores; (ii) se os diferentes paradigmas de ensino/aprendizagem requerem diferentes componentes do conhecimento pedagógico de conteúdo, e (iii) quais os métodos

> aprimorados para a avaliação do conhecimento pedagógico de conteúdo.[44] (GRAEBER, TIROSH, 2008, p. 124, tradução nossa).

Para Ball, Thames e Phelps (2008), as ideais de Shulman permitiram muitos desdobramentos na pesquisa, aportando trabalhos com objetivos diversos. Por exemplo, (i) trabalhos que mostram que a forma como o professor conhece o conteúdo influencia na forma como ele ensina esse conteúdo (e.g. Grossman, 1990, Wilson and Wineburg , 1988 e Ball, 1990) [45], (ii) trabalhos que visavam investigar o conhecimento que os professores precisam para lidar com as concepções e os equívocos comuns da aprendizagem dos alunos (e.g. Wineburg, 1990, Smith and Anderson, 1984, Carpenter, Franke,, Levi, 2003; Carpenter, Levi, 2000) [46] e (iii) trabalhos que destacam que os modelos de formação do professor denunciam uma lacuma entre o conteúdo matemático que os professores aprendem em sua formação inicial e o que é exigido em sua prática profissional (e.g. BALL, 1988, Ma, 1999, Borko et al.,1992[47]). No entanto, Ball, Thames e Phelps observam ainda que, em relação a esses trabalhos, o saber pedagógico de conteúdo não é claramente distinguido, ou seja, não há uma visão unânime entre esses autores sobre o que é o saber pedagógico de conteúdo. Em alguns, o saber pedagógico de conteúdo é referido como simplesmente conhecimento do conteúdo e, em outros, como algo que é em grande parte habilidade pedagógica. Para Ball, Thames e Phelps, os entendimentos de saber pedagógico de conteúdo apresentados em muitos desses trabalhos são

---

[44] No original: "The fact that many researchers do not offer a definition of PCK but rather attempt to characterize it with lists or examples is another indication that the concept is still somewhat ill defined. In Pursuing work on PCK, a number of questions, not all unrelated, have arisen. These include: (i) the role of beliefs and values in the development of teachers PCK; (ii) whether difference teaching/learning paradigms require different components of PCK, and (iii) what are improved methods for assessing PCK." (GRAEBER&TIROSH, 2008, p. 124)

[45] Grossman, P. L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledand teacher education. New York: Teachers College Press;

Wilson, S. M.,, Wineburg, S. S. (1988). Peering at history through different lenses: The role of disciplinary perspectives in teaching history. Teachers College Record, 89(4), 525-539;

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. Elementary School Journal 90, 449-466.

[46] Wineburg, S. (1990). Historical problem-solving: A study of the cognitive processes used in the evaluation of documentary evidence. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, Palo Alto, CA.

Smith, E. L.,, Anderson, C. W. (1984). Plants as producers: A case study of elementary science teaching. Journal of Research in Science Teaching, 21(7), 685-698.

Carpenter, T. P., Franke, M. L.,, Levi, L. (2003). Thinking mathe-matically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P.,, Levi, L. (2000). Developing conceptions of alge-braic reasoning in the primary grades (research report). Madison:University of Wisconsin-Madison, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

[47] Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D., Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? Journal for Research in Mathematics Education, 23(3), 194-222.

superficiais, não deixando claro o limite entre o conhecimento pedagógico do conteúdo e outras formas de conhecimento dos professores ou sendo amplas a ponto de admitirem a inclusão de praticamente qualquer pacote de conhecimentos e crenças dos professores. No entanto, admitem o poder das ideais de Shulman, reconhecendo que "o ensino exige um tipo especial de conhecimento de conteúdo"[48] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.394, tradução nossa) e que, por isso, investem na pesquisa e na discussão sobre o tema.

Ponte e Chapman (2006, 2008) também reconhecem a noção de saber pedagógico de conteúdo como importante para a pesquisa em educação, iluminando questões sobre a prática profissional do professor e apontando a perspectiva de combinar o conhecimento do conteúdo e a pedagogia. No entanto, esses autores não deixam de observar que esta noção tem sido alvo de críticas importantes, especialmente em relação a questões epistemológicas desses conhecimentos, apontando o estudo de Fenstermache (1994) como referência. Nesse estudo, que não se dirige especificamente ao ensino de matemática, Fenstermacher discute a natureza do conhecimento a partir de uma revisão das concepções de conhecimento apresentadas em uma amostra de investigações sobre o ensino. Sobre o trabalho de Shulman, esse autor destaca críticas em relação às categorias propostas de um modo geral e especificamente em relação ao saber pedagógico de conteúdo, por exemplo, questionando se o saber pedagógico de conteúdo é formal, é prático ou é uma mistura dos dois e apontando a dificuldade para se estabelecer um enquadramento epistemológico para essa categoria de conhecimento.

> Shulman e seus colegas claramente se concentram sobre o conhecimento dos professores, de tal forma que aprofundaram nosso entendimento sobre as interconexões entre o conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico, em uma análise epistemológica é difícil isolar e analisar.[49] (FENSTERMACHER, 1994, p.16, tradução nossa)

Por fim, cabe observar que mesmo Shulman é critico de suas ideias, reconhecendo-as como uma contribuição inicial, não finalizada, cabendo novas descobertas e refinamento:

> A base de conhecimento para o ensino não é fixa nem final. Apesar de o ensino estar entre as profissões mais antigas do mundo, a pesquisa em educação, especialmente o estudo sistemático do ensino, é relativamente novo. Nós podemos ser capazes de oferecer um argumento convincente para as linhas gerais e para as categorias de base de conhecimento para o ensino. No

---

[48] No original: "teaching requires a special kind of content knowledge."'(BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.394)

[49] No original: "Though Shulman and his colleagues clearly focus on the topic of teacher knowledge, in ways that have deepened our understanding of the interconnections between content knowledge and pedagogical knowledge, their epistemological framing is difficult to isolate and analyze." (FENSTERMACHER, 1994, p.16)

> entanto, tornar-se-á bastante claro que muito, se não a maioria, da base de conhecimento proposta precisa ainda ser descoberta, inventada e refinada.[50] (SHULMAN, 1987, p.12, tradução nossa)

Ponte e Chapman (2006), também ressaltam as críticas de Shulman ao modelo proposto por ele mesmo:

> "em seu próprio ponto de vista, o modelo deve dar mais ênfase à ação, deve considerar questões de afeto, motivação ou paixão, deve prestar atenção para o papel da comunidade de professores e não só o professor como indivíduo, e seu ponto de partida deve incluir estudantes, comunidade e currículo e não apenas o conhecimento do conteúdo."[51] (PONTE, CHAPMAN, 2008, p. 229, tradução nossa)

Não são objetivos deste trabalho discutir, criticar nem expandir o modelo proposto por Shulman. No entanto, entendemos que as críticas às ideias de Shulman (1986, 1987) são relevantes e corroboram sua importância na mesma medida em que o seu valor como referência fica evidente na incidência de citações e de fundamentações em que se apresenta. As críticas têm um papel fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, contribuindo para a reflexão de uma maneira geral, para apontar novos caminhos ou para confirmar ou refutar conclusões e resultados. Sustentamos o entendimento de que as categorias propostas por Shulman têm importância fundamental por reunirem concomitantemente a distinção e a relação entre elementos que compõem uma base de saberes para o ensino, fomentando assim o desenvolvimento da reflexão sobre a formação do professor. De acordo com as ideias de Shulman, por exemplo, um professor tem que saber o conteúdo *per se* e tem que saber pedagogia, mas tem também que compor um saber que envolve essas duas dimensões de forma indissociável. Discutir a distinção, a interseção, a relação ou mesmo reconhecer a existência desses saberes fomenta o desenvolvimento da pesquisa sobre os saberes necessários à prática profissional de um professor.

Nesse sentido, reconhecemos o valor da discussão sobre as fronteiras das categorias propostas por Shulman, o que expõe a complexidade da composição da base de saberes docente. No entanto, neste trabalho não pretendemos discutir o delineamento dessas fronteiras.

---

[50] No original: "A knowledge base for teaching is not fixed and final. Although teaching is among the world's oldest professions, educational research, especially the systematic study of teaching, is a relatively new enterprise. We may be able to offer a compelling argument for the broad outlines and categories of the knowledge base for teaching. It will, however, become abundantly clear that much, if not most, of the proposed knowledge base remains to be discovered, invented, and refined." (SHULMAN, 1987, p.12)

[51] No original: "In his own view, it should have more emphasis on the level of action, should consider issues of affect, motivation or passion, should pay attention to the role of the community of teachers and not only the individual teacher, and its starting point should include students, community, and curriculum and not only content knowledge." (PONTE, CHAMPMAN, 2008, p. 229)

Estamos particularmente interessados na relevância do reconhecimento da existência de um saber de matemática próprio do professor – *o saber pedagógico de conteúdo* – que é essencialmente diferente do saber de matemática do matemático e que não pode ser entendido como uma diluição ou simplificação do saber de matemática do matemático. Pretendemos contribuir para a reflexão sobre o desenvolvimento deste saber.

Assim, a noção de saber pedagógico de conteúdo ampara o reconhecimento e a identificação de um saber de matemática para o ensino, que não pode prescindir da prática do professor e que envolve um processo permanente de reflexão, exigindo do professor engajamento e postura protagonista diante da sua ação profissional. Não entendemos que o saber pedagógico de conteúdo possa ser considerado como um corpo de conhecimento estabelecido a priori, que o professor tenha que alcançar, mas o percebemos a partir de um processo permanente de desenvolvimento, que acompanha o professor ao longo de sua vida profissional: "O desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo continua para além do licenciamento do professor (ou da sua certificação inicial) e deve ser uma parte integrante do seu desenvolvimento profissional em serviço"[52] (COCHRAN et al, 1993, p. 18, tradução nossa).

1.3 O CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO SEGUNDO BALL

Certamente, na direção da compreensão da complexa relação existente entre o conhecimento do conteúdo disciplinar do professor de Matemática, sua prática e a aprendizagem dos estudantes da escola básica, a pesquisa em Educação Matemática ainda não permite uma conclusão "definitiva" nem uma orientação que determinem de forma absoluta a formação e o desenvolvimento profissional do professor. Ainda há muito a ser investigado e discutido, por exemplo, sobre a natureza desse saber, sobre as formas como ele se estabelece e sobre estratégias para que seja apropriado pelos professores. (GRAEBER, TIROSH, 2008; BALL et al, 2008; EVEN, BALL, 2009; BALL et al. 2009; NEUBRAND, 2009; FIORENTINI et al, 2002; MOREIRA, DAVID, 2005).

Tendo como referência fundamental as ideias de Shulman, Debora Ball e seus colegas (BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008) têm se dedicado à pesquisa

[52] No original: "PCK development continues beyond initial licensure (or certification) and should be an integral part of in-service professional development" (COCHRAN et al, 1993, p.18)

com foco especial na formação do professor de Matemática e na investigação dos saberes docente. Ainda que o trabalho desses pesquisadores se volte especialmente para o ensino de matemática nos primeiros anos escolares (no Brasil, o equivalente às séries iniciais do ensino fundamental), sua contribuição para a reflexão sobre a formação do professor de matemática do ensino básico em geral, sobre as características e as especificidades do trabalho desses professores e, especialmente sobre os saberes necessários a esses professores tem inspirado e fundamentado muitos trabalhos em educação matemática (e.g., ROWLAND, 2008; HILL et al, 2008; RIBEIRO 2009, 2012; MOREIRA, 2012).

Ball e seus colaboradores desenvolveram um modelo teórico para investigar os saberes do professor necessários para o ensino de matemática, que tem como alicerce a prática do professor – *teoria baseada na prática*[53] (BALL, COHEN, 1999; BALL, BASS, 2003). Seu objetivo é melhorar a aprendizagem e o ensino de matemática a partir da investigação sobre as demandas de matemáticas que emergem da prática.

> Assim, em vez de investigar o que os professores precisam saber a partir da observação do que eles precisam ensinar, ou através da análise do currículo que usam, decidimos nos concentrar em sua prática. O que os professores fazem, e como o que eles fazem, exige raciocínio, visão, compreensão e habilidade matemática? Começamos a tentar descobrir as formas em que a matemática está envolvida em suas demandas regulares do dia-a-dia, momento a momento. Essa análise sustenta o desenvolvimento de uma teoria baseada na prática para o conhecimento matemático para o ensino.[54] (BALL, BASS, 2003, p.5, tradução nossa)

A noção de conhecimento matemático para o ensino, desenvolvida por Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2000; BALL, BASS, 2003; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; HILL, BALL, CHILLING, 2008), tem influência dos trabalhos de Shulman e da noção de saber pedagógico de conteúdo, complementando essas noções a partir de aspetos observados na prática de sala de aula. Os estudos de Ball e seus colaboradores conduzem a um "refinamento para o popular conceito de *saber pedagógico do conteúdo* e ao conceito mais amplo de

---

[53] No original: "*practice-based theory*" (BALL; BASS, 2003)

[54] No original: "Hence, instead of investigating what teachers need to know by looking at what they need to teach, or by examining the curricula they use, we decided to focus on their work. What do teachers do, and how does what they do demand mathematical reasoning, insight, understanding, and skill? We began to try to unearth the ways in which mathematics is entailed by its regular day-to-day, moment-to-moment demands. The analyses help to support the development of a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching." (BALL; BASS, 2003, p.5)

conhecimento de conteúdo para o ensino"[55] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 390, itálico como no original, tradução nossa):

> Por "conhecimento matemático para o ensino", queremos significar os conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensino da matemática. É importante notar que a expressão termina com ensino, não com professores. Ela está preocupada com as tarefas envolvidas no ensino e com as exigências matemáticas dessas tarefas.[56] (BALL, THAMES, PHELPS, 200, p. 395, tradução nossa)

Para Ball e seus colaboradores,

> o ensino exige uma forma especializada de conhecimento de conteúdo puro – "puro" porque não é misturado com o conhecimento sobre os estudantes nem com o conhecimento de pedagogia e, portanto, distinto do conhecimento pedagógico do conteúdo identificado por Shulman e seus colegas e "especializada", porque não é necessária ou usada em outras configurações senão em ensino da matemática.[57] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. P. 396, tradução nossa, aspas como no original)

Ball (1990) introduz a expressão "conhecimento sobre matemática" como uma forma de estabelecer distinção em relação à expressão "conhecimento de conteúdo" e de enfatizar a natureza do conhecimento do professor:

> Outra dimensão crítica do conhecimento de conteúdo para o ensino é o conhecimento *sobre* a matemática. Isto inclui a compreensão sobre a natureza do conhecimento matemático e da matemática como um campo. O que conta como uma "resposta" em matemática? O que estabelece a validade de uma resposta? O que está envolvido no fazer matemática?[58] (BALL, 1990, p.458, tradução nossa, aspas e itálico como no original)

[55] No original: "In particular, these studies have led us to hypothesize some refinements to the popular concept of pedagogical content knowledge and to the broader concept of content knowledge for teaching." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 390, itálico como no original)

[56] No original: "By "mathematical knowledge for teaching," we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics. Important to note here is that our definition begins with teaching, not teachers. It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. P. 395)

[57] No original: "Perhaps most interesting to us has been evidence that teaching may require a specialized form of pure subject matter knowledge—"pure" because it is not mixed with knowledge of students or pedagogy and is thus distinct from the pedagogical content knowledge identified by Shulman and his colleagues and "specialized" because it is not needed or used in settings other than mathematics teaching. This uniqueness is what makes this content knowledge special." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. P. 396)

[58] No original: "Another critical dimension of subject matter knowledge for teaching is knowledge *about* mathematics. This includes understanding about the nature of mathematical knowledge and of mathematics as a field. What counts as an "answer" in mathematics? What establishes the validity of an answer? What is involved in doing mathematics?" (BALL, 1990, p.458, aspas e itálico como no original)

Para Ball e seus colaboradores, “um professor precisa saber mais matemática e de forma diferente – não menos”[59] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. P. 396, tradução nossa, grifo nosso).

Ball e seus colegas ilustram o seu entendimento sobre a especificidade do conhecimento de matemática necessário para o ensino a partir de exemplos simples, como nas seguintes subtrações:

Cálculo A	**Cálculo B**	**Cálculo C**	**Cálculo D**	**Cálculo E**
307	307	307	307	299
- 168	- 168	- 168	- 168	- 160
261	169	- 1	2	139
		- 60	30	
		200	107	
		139	139	

Figura 1.3: Exemplo de subtrações simples (BALL, THAMES, PHELPS, 2008)

Para identificar que os resultados das subtrações A e B estão errados, não há necessidade de qualquer conhecimento especializado, basta apenas saber efetuar uma subtração. No entanto, um professor precisa ir além da constatação do erro e de forma bastante particular, sendo eficiente e fluente na análise dos erros matemáticos revelados pelos alunos e suas atividades. No exemplo A, é muito provável que o estudante tenha chegado a cada dígito do resultado a partir da subtração dos dígitos correspondentes nos termos envolvidos. Assim, em 261, o algarismo 1 é obtido pelo cálculo “8 – 7” e o 2 por “3 – 1”. Já no cálculo realizado em B, o erro sugere que o estudante tenha obtido o algarismo 9 do resultado 169 a partir do cálculo de “17 – 8”, indicando que “1” foi “emprestado” de “3”. Assim, o algarismo 1 de 169 resultaria de “2 – 1”. Esse aluno, muito provavelmente, não compreendeu bem o processo (e a necessidade) de decomposição para cálculos como o proposto. Além disso, não fica evidente o que o levou ao algarismo 6 do resultado 169. Nos dois casos, fica claro que os alunos ainda precisam de intervenção especializada para alcançar os conhecimentos matemáticos exigidos na compreensão e no cálculo de uma subtração. Os exemplos C e D ilustram que não é só para intervir no erro cometido por um aluno que o professor precisará de um conhecimento especializado de conteúdo, também para reconhecer possíveis raciocínios não padro-

[59] No original: “A teacher needs to know more, and different, mathematics—not less.” (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. P. 396)

nizados que conduzam às soluções corretas. Muitas vezes, esses procedimentos não tradicionais podem ser formas significativas para promover o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes. Por exemplo, é importante que um aluno identifique a equivalência que caracteriza as subtrações “307 – 168” e “299 – 160”, que aparece no exemplo E, que pode ser um recurso para facilitar o procedimento de cálculo.

Em outros exemplos (BALL, HILL, BASS, 2005, BALL, BASS, 2003), a questão envolvida não é cálculo, nem envolve números, mas envolve o papel fundamental da definição no contexto matemático. Por exemplo, a definição de polígonos, muito frequentemente apresentada nos textos didáticos de forma inadequada, como em “uma forma bidimensional plana fechada cujos lados são formados por segmentos de retas”[60] (BALL, BASS, 2003, p.8, tradução nossa), ou de forma não compatível com o segmento escolar, como em “uma curva plana fechada simples formada por segmentos de reta”[61] (BALL, BASS, 2003, p.8, tradução nossa). Nesses casos, é exigido do professor a identificação e a seleção de definições que sejam matematicamente consistentes e que sejam apropriadas para o ensino e a aprendizagem na escola básica.

> Para determinar uma definição matematicamente apropriada e utilizável para "polígono", um professor pode tentar desenvolver uma definição adequada (ao ensino básico), melhor do que aquelas encontradas nos livros didáticos disponíveis. Considere este esforço:
>
> Uma sequência de três ou mais segmentos de reta no plano, cada um terminando onde o outro começa, e o último terminando onde o primeiro começa. Exceto por esses pontos finais, compartilhados apenas por dois segmentos vizinhos, os segmentos de reta não têm outros pontos em comum [62](BALL, BASS, 2003, p 8, itálico como no original)

Tendo como referência a noção de *conhecimento de matemática para o ensino*, Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, HILL, BALL, CHILLING, 2008, BALL, BASS, 2009) propõem um modelo para os domínios do conhecimento de conteúdo para o ensino que se funda em subdivisões de duas das categorias propostas por Shulman (1986,

[60] No original: “a closet flat two-dimensional shape whose sides are formed by lines segments”. (BALL, BASS, 2003, p 8)

[61] No original: “a simple closed plane curve formed by straight line”. (BALL, BASS, 2003, p 8)

[62] No original: “To determine a mathematically appropriate and usable definition for "polygon", a teacher might try to develop a suitable definition, better than those found in the available textbooks. Consider this effort: A sequence of three or more line segments in the plane, each one ending where the next one begins, and the last one ending where the first begins. Except for these end points, shared only by two neighboring segments, the line segments have no other points in common.” (BALL, BASS, 2003, p 8)

1987): *saber de conteúdo* e *saber pedagógico de conteúdo*. Cada uma dessas fica subdividida em três:

- o saber de conteúdo subdivide-se em: *conhecimento especializado do conteúdo*[63] (SCK), *conhecimento comum do conteúdo*[64] (CCK) e *conhecimento de horizonte do conteúdo*[65] e
- o saber pedagógico de conteúdo se divide em: *conhecimento do conteúdo e do ensino*[66] (KCT); c*onhecimento do conteúdo e dos alunos*[67] (KCS) e *conhecimento do conteúdo e do currículo* (KCC)[68][69] (Figura 1.4).

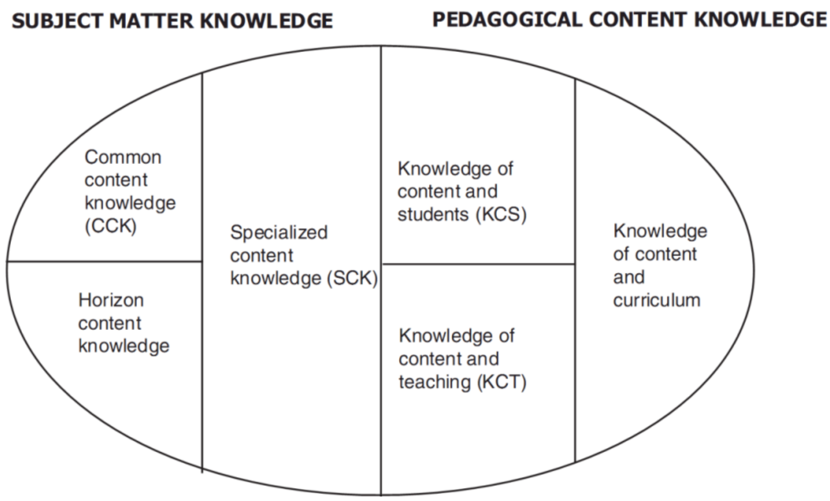


Figura 1.4: Mathematical knowledge for teaching (Ball, Thames, Phelps, 2008, p.403)

Sobre as categorias referentes ao saber de conteúdo, Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; HILL, BALL, CHILLING, 2008) explicam que:

(i) O ***Conhecimento Comum do Conteúdo*** **(CCK)** identifica um conhecimento que não é exclusivo dos professores, que outros profissionais com formação matemática também têm e utilizam. Está envolvido em ser capaz de resolver problemas

---

[63] No original: “Specialized Content Knowledge (SCK)”

[64] No original: “Common Content Knowledge (CCK)”

[65] No original: “Horizon Content Knowledge (HCK)”

[66] No original: “Knowledge of Content and Teaching (KCT)”

[67] No original: “Knowledge of Content and Students (KCS)”

[68] No original: “Knowledge of Content and Curriculum(KCC)”

[69] Optamos por manter as siglas que identificam as categorias do modelo proposto por Ball e seus colegas como no original, correspondendo, portanto, às expressões em língua inglesa: SCK – *Specialized Content Knowledge*; CCK: *Common Content Knowledge*, KCT: *Knowledge of Content and Teaching* e KCS: *Knowledge of Content and Students*.

matemáticos corretamente e em identificar uma resposta errada. Assim, o professor precisa conhecer o conteúdo que ensina para, por exemplo, ser capaz de reconhecer se a solução dada por um aluno está correta ou não, se uma definição apresentada em um texto didático é inconsistente ou não, e ser capaz de usar corretamente a linguagem e os símbolos matemáticos. O termo comum registra o reconhecimento de que não se trata de um conhecimento exclusivo do professor nem da tarefa de ensinar, no entanto, não se refere a um conhecimento que "todos" tenham.

(ii) O ***Conhecimento Especializado do Conteúdo*** **(SCK)** se refere a um conhecimento matemático que é específico do professor, um conhecimento que não é tipicamente necessário para outros propósitos que não o ensino. A exigência desse conhecimento se apresenta, por exemplo, na procura por padrões nos erros dos estudantes ou na avaliação de uma solução ou de uma abordagem fora do padrão tradicionalmente conhecido, como no exemplo da subtração. Assim, a demanda de conhecimento de conteúdo no ensino envolve uma espécie de descompactação de matemática que não é necessária em outros contextos. Uma lista de tarefas cotidianas de ensino que ilustram essa especificidade é apresentada por Ball, Thames, Phelps (2008) – (Figura 1.5).

(iii) O ***Conhecimento de Horizonte do Conteúdo*** **(CHK)** se refere a um aspecto particular do conhecimento de conteúdo que abarca a inter-relação entre tópicos da matemática. Em particular, para um professor essa relação deve ser observada também levando em conta a sequência e o aprofundamento da abordagem dos assuntos ao longo nos anos escolares.

> Professores da primeira série, por exemplo, podem precisar saber como a matemática que ensinam está relacionada com a que os estudantes vão aprender na terceira série, para serem capazes de definir a base matemática para o que virá. Também inclui a útil visão de ver conexões com ideias matemáticas bem mais posteriores. Ter este tipo de conhecimento de horizonte da matemática pode ajudar na tomada de decisões sobre como, por exemplo, falar da reta numérica.[70] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa)

[70] No original: "First-grade teachers, for example, may need to know how the mathematics they teach is related to the mathematics students will learn in third grade to be able to set the mathematical foundation for what will come later. It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas. Having this sort of knowledge of the mathematical horizon can help in making decisions about how, for example, to talk about the number line." (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403)

Mathematical Tasks of Teaching

Presenting mathematical ideas
Responding to students' "why" questions
Finding an example to make a specific mathematical point
Recognizing what is involved in using a particular representation
Linking representations to underlying ideas and to other representations
Connecting a topic being taught to topics from prior or future years
Explaining mathematical goals and purposes to parents
Appraising and adapting the mathematical content of textbooks
Modifying tasks to be either easier or harder
Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly)
Giving or evaluating mathematical explanations
Choosing and developing useable definitions
Using mathematical notation and language and critiquing its use
Asking productive mathematical questions
Selecting representations for particular purposes
Inspecting equivalencies

Figura 1.5: Tarefas do ensino de matemática segundo Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.400)

Ball e Bass (2009) dão especial atenção a esta categoria do conhecimento de matemática para o ensino, afirmando que

> o ensino exige uma noção de como a matemática em questão em um determinado momento da escolaridade está relacionada às ideias, às estruturas e aos princípios mais amplos da matemática. Algumas podem ser aquelas que os alunos vão aprender em séries posteriores; algumas podem estar no coração do que é fazer matemática. Atenção ao horizonte matemático é, portanto, importante para orientar o ensino na incorporação conjunta de previsão pedagógica e da integridade matemática. .[71] (BALL, BASS, 2009, p. 5 e 6, tradução nossa)

Assim, o conhecimento de horizonte da matemática, envolve aspectos da matemática que, embora podendo não estar explicitamente contidos no currículo do ensino básico, não deixam de ser importantes para a aprendizagem do aluno, na medida em que revelam e conferem sentido ao que está sendo estudado diante da compreensão da Matemática. Para Ball e Bass (2009) é essa dimensão do conhecimento do professor que orienta, por exemplo, as seguintes responsabilidades e ações dos professores:

[71] No original: "We see that teaching requires a sense of how the mathematics at play now is related to larger mathematical ideas, structures, and principles. Some may be ones that students will learn in later grades; some may be at the heart of what doing mathematics is. Attention to the mathematical horizon is thus important in orienting instruction to embody both pedagogical foresight and mathematical integrity." (BALL, BASS, 2009, p.5 e 6)

— Fazer julgamentos sobre a importância da matemática
— Perceber significado matemático no que os alunos dizem
— Destacar e ressaltar pontos-chave
— Antecipar e fazer conexões
— Perceber e avaliar oportunidades matemáticas
— Reconhecer distorções matemáticas ou possíveis precursores de confusão ou de deturpação matemáticas posteriores.[72] (BALL, BASS, 2009, p.6, tradução nossa)

Ball e Bass (2009) destacam quatro elementos que constituem essa categoria do conhecimento do professor:

1) o senso das questões matemáticas envolvidas no estágio "local" do ensino
2) as ideias e as estruturas principais da disciplina
3) práticas matemáticas que são chave
4) valores e senso matemáticos centrais.[73]
(BALL, BASS, 2009, p.6, tradução nossa, aspas como no original)

Para explicar melhor suas ideias e ilustrar seu ponto de vista, Ball e Bass (2009) apresentam um exemplo bastante simples, próprio das séries iniciais: classificação de números naturais como pares ou ímpares. Na situação descrita, fica explícito o diálogo entre uma professora e seus alunos diante do questionamento do fato de 6 ser ou não ser ímpar. A discussão envolve lidar com a compreensão da fatoração de um número, com as definições de número par e de número ímpar e com a relação entre esses dois conceitos. Nesse contexto, são destacados alguns aspectos que ilustram os quatro elementos que, segundo essas autoras, constituem o conhecimento de horizonte do conteúdo (Figura 1.6). Por exemplo,

- “fatoração” diz respeito ao elemento 1, ou seja, à noção da matemática envolvida no assunto em tela;
- “sistema numérico” diz respeito ao elemento 2, isto é, a um aspecto estrutural da matemática;
- “lidar com definições” diz respeito ao elemento 3, isto é, a uma prática essencial da matemática;

[72] No original: — Making judgments about mathematical importance; — Hearing mathematical significance in what students are saying; — Highlighting and underscoring key points; — Anticipating and making connections; — Noticing and evaluating mathematical opportunities; — Catching mathematical distortions or possible precursors to later mathematical confusion or misrepresentation. (BALL, BASS, 2009, p.6)

[73] No original: “1) A sense of the mathematical environment surrounding the current “location” in instruction; 2) Major disciplinary ideas and structures; 3) Key mathematical practices; 4) Core mathematical values and sensibilities.” (BALL, BASS, 2009, p.6, aspas como no original)

- “ser preciso” diz respeito ao elemento 4, isto é, a valores que constituem a Matemática.

Element	Possible examples from this episode
1) A sense of the mathematical environment surrounding the current “location” in instruction.	Definitions, factorization, modular arithmetic
2) Major disciplinary ideas and structures	Number systems, even and odd, powers, number theoretic concepts
3) Key mathematical practices	Establishing correspondences and equivalence, choosing representations, questioning, using definitions, proving
4) Core mathematical values and sensibilities	Precision, care with mathematical language consistency, parsimony, coherence, connections

Figura 1.6: Destaque de aspectos característicos para os quatro elementos constituintes do conhecimento do horizonte do conteúdo a partir de uma situação didática envolvendo os conceitos de número par e de número ímpar. (BALL, BASS, 2009, p.8)

Para Ball e Bass (2009), esta categoria do conhecimento de matemática para o ensino ressoa de forma complementar às ideias de Klein:

> Felix Klein ofereceu a ideia fascinante e muito citada de “uma perspectiva superior sobre matemática elementar”. Nossa noção de “conhecimento do horizonte" complementa a dele. Nós temos como hipótese que esse conhecimento é um tipo de perspectiva elementar sobre um conhecimento avançado que equipa os professores com uma visão e uma orientação mais amplas e também mais particulares para o seu trabalho.[74] (BALL, BASS, 2009, p.11, tradução nossa, aspas como no original)

Ball e seus colegas (BALL, BASS, 2009) acreditam que esta categoria tem forte influência na aprendizagem dos estudantes, oferecendo ao professor, a partir de uma visão mais ampla sobre o conteúdo, melhor capacidade para a sua prática. Dessa forma, o professor pode estabelecer relação do que ensina com assuntos anteriores ou posteriores em relação à matemática e ao ensino da disciplina. No entanto, Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, BALL, BASS, 2009) reconhecem também que ainda há muito que ser investigado nesse sentido,

[74] No original: “Felix Klein (1924) offered the attractive and oft cited idea of “a higher perspective on elementary mathematics”. Our notion of “horizon knowledge” complements his. We hypothesize it as a kind of elementary perspective on advanced knowledge that equips teachers with a broader and also more particular vision and orientation for their work.” (BALL, BASS, 2009, p.10, aspas como no original)

> Há muitas questões importantes que ainda estão pouco desenvolvidas ou não estão resolvidas. [...] Por mais atraente que a noção possa ser, por exemplo, não temos nenhuma evidência de que tal perspectiva matemática produza alguma melhora na eficácia dos professores ou na aprendizagem dos alunos. Nós não sabemos como estimar o quão longe ou em que direção a relevância pedagógica e a utilidade do conhecimento de horizonte se estende. Nós não sabemos o nível de detalhe que é necessário para que o conhecimento de horizonte seja útil. Além disso, nós não sabemos como conhecimento de horizonte pode ser prestativamente adquirido e desenvolvido e não temos, até agora, formas de avaliar ou medir esse conhecimento.[75] (BALL, BASS, 2009, p.11, tradução nossa)

Ball, Thames e Phelps (2008) reconhecem que têm dúvidas em relação a essa categoria fazer parte do conhecimento de conteúdo ou se pode estar envolvida, segundo o modelo que propõem, em outras categorias do conhecimento de matemática para o ensino. Na verdade, Ball e seus colegas ampliam esse questionamento, destacando que, de modo geral, estabelecer uma separação estrita entre as categorias identificadas em seu modelo não é simples. Uma mesma tarefa desempenhada por um professor pode mobilizar diferentes categorias de conhecimento. Por exemplo, a seleção de uma lista de exemplos numéricos para investigar a compreensão dos estudantes sobre a ordenação de números decimais certamente envolve conhecimento comum de conteúdo e conhecimento especializado de conteúdo. O professor deve ser capaz de ordenar corretamente esses números e de escolher uma sequência que envolva questões relevantes sobre o assunto. Além disso, o professor precisa saber que dificuldades os alunos provavelmente revelarão em relação à lista escolhida e decidir o que fazer diante dessas dificuldades. Essas últimas demandas dizem respeito a categorias associadas, segundo o modelo proposto por Ball e seus colaboradores, a dimensão do saber pedagógico de conteúdo: conhecimento de conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino.

O *Conhecimento do Conteúdo e dos estudantes (*KCS) refere-se a um conhecimento que combina conhecimento sobre os estudantes e sobre matemática. Essa categoria de conhecimento envolve, por exemplo, ser capaz de antecipar o que os alunos conseguirão compreender mais facilmente e o que lhes oferecerá maior dificuldade, o que gerará confusão, o que motivará ou interessará aos alunos. Todas essas ações requerem uma interação entre o conhe-

[75] No original: “There are many important issues that are as yet undeveloped or unresolved and form the directions in which we and our colleagues are now working. As appealing as the notion may be, for example, we have no evidence that such mathematical perspective produces improvements in teachers’ effectiveness or in pupils’ learning. We do not know how to estimate how far out or in what direction the pedagogically relevant and useful horizon extends. We do not know the level of detail that is needed for horizon knowledge to be useful. Moreover, we do not know how horizon knowledge can be helpfully acquired and developed, and we do not, as yet, have ways to assess or measure it.” (BALL, BASS, 2009, p.11)

cimento de matemática e a familiaridade com os estudantes e com o seu desenvolvimento cognitivo. Em matemática, por exemplo, Behr et al (1992) e Fuson (1992) investigam a aprendizagem dos estudantes, identificando como os estudantes aprendem e que dificuldades apresentam na aprendizagem de números e de operações. Hill, Ball, Schiling (2008) entendem que o conhecimento de matemática e dos estudantes contempla saber como os estudantes pensam sobre, sabem e aprendem matemática. Esses autores investigam particularmente essa categoria do conhecimento de matemática para o ensino, objetivando discutir o conceito e formas de desenvolvê-lo e de mensurá-lo. Para isso, desenvolvem, aplicam e analisam um questionário de múltipla escolha aplicado a professores. Para Hill, Ball e Schiling, os testes, ainda que não conclusivos, apontam êxito, indicando que os professores parecem ter esse tipo de conhecimento; mostrando familiaridade, por exemplo, com erros comuns dos alunos e que se trata de um conhecimento distinto do conhecimento de conteúdo e do conhecimento de pedagogia. No entanto, medi-lo parece não ser uma tarefa simples. Além disso, não alcançaram o impacto desse conhecimento na aprendizagem dos alunos.

O *Conhecimento do Conteúdo e do ensino (*KCT) é um tipo de conhecimento do professor que combina conhecimento sobre matemática e sobre o ensino da disciplina. Assim, envolve, por exemplo, decidir sobre os exemplos a serem usados e em que sequência, para que conduzam o aprofundamento do assunto, avaliar as vantagens e as desvantagens de uma representação para o ensino de um determinado assunto, identificar e avaliar metodologias e procedimentos pedagógicos e decidir como aproveitar as intervenções e as dúvidas dos alunos. Todas essas ações requerem uma interação entre o conhecimento de matemática e a familiaridade com questões pedagógicas que afetam a aprendizagem dos estudantes.

O *Conhecimento do Conteúdo e do currículo* identifica o conhecimento que combina o conteúdo com as finalidades e os programas próprios de um determinado nível de ensino. A identificação dessa categoria não é diferente da proposta por Shulman (1986, 1987).

Hurrell (2013), a partir do estudo e da análise dos trabalhos de Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), organiza uma lista de questões que pretende ilustrar a abrangência de cada uma das categorias identificadas no modelo proposto por Ball e seus colegas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; HILL, BALL, CHILLING, 2008, BALL, BASS, 2009) para o conhecimento de matemática necessário para o ensino – Figura 1.7.

Domain	**Examples**. Are you able to:
Common Content Knowledge (CCK)	• calculate an answer correctly? • solve mathematical problems correctly? • understand the mathematics you teach? • recognise when a student gives a wrong answer? • recognise when a text book is inaccurate or gives an inaccurate definition? • use terms and notations correctly?
Specialised Content Knowledge (SCK)	• present mathematical ideas? • respond to students' why questions? • find an example to make a specific mathematical point? • recognise what is involved in using a particular representation? • link representations to underlying ideas and to other representations? • connect a topic being taught to topics from prior or future years? • explain mathematical goals and purposes to parents? • appraise and adapt the mathematical content of textbooks? • modify tasks to be either easier or harder? • evaluate the plausibility of students' claims? • give or evaluate mathematical explanations? • choose and develop useable definitions? • use mathematical notation and language and critiquing its use? • ask productive mathematical questions? • select representations for particular purposes?
Knowledge at the mathematical horizon	• make connections across the topics in mathematics? • make connections between the different strands in mathematics? • articulate how the mathematics you teach fits into the mathematics which comes later?
Knowledge of Content and Students (KCS)	• anticipate what students are likely to think? • predict what students will find interesting and motivating when choosing an example? • anticipate what a student will find difficult and easy when completing a task? • hear and interpret students' emerging and incomplete ideas? • recognise and articulate misconceptions students carry about particular mathematics content?
Knowledge of Content and Teaching (KCT)	• sequence mathematical content? • select examples to take students deeper into mathematical content? • select appropriate representations to illustrate the content?
Knowledge of Content and Curriculum (KCC)	• articulate the strands in the curriculum? • articulate the proficiencies from the mathematics curriculum? • articulate a familiarity with the structure of the mathematics curriculum?

Figura 1.7: Questões que ilustram as categorias do conhecimento de matemática para o ensino, segundo Hurrel (2013) com base em Ball, Thames e Phelps (2008)

Para Hurrel (2013), o modelo proposto por Ball e seus colaboradores, tem restrições. Por exemplo, a distinção entre conhecimento comum de conteúdo e conhecimento especializado de conteúdo não é clara e a organização espacial do diagrama que representa o modelo (Figura 1.3) sugere, a partir da comparação entre as áreas reservadas para cada categoria, maior importância para um determinado conhecimento em relação a outro – assim o conhecimento comum de conteúdo poderia ser entendido como menos importante do que conhecimento especializado de conteúdo. Hurrel propõe um refinamento para o modelo de Ball e seus colaboradores que associa cada uma das categorias a regiões de mesma área e que destaca a inter-relação entre as categorias identificadas (Figura 1.8):

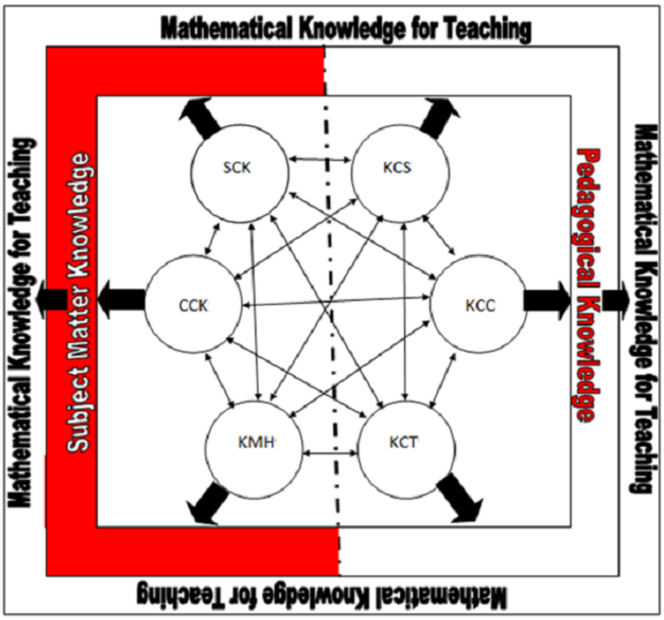


Figura 1.8: Interpretação de Hurrel para o modelo de Ball

Cury (2012), que tem como referência as ideias de Shulman para propor e discutir a noção de saber pedagógico de conteúdo dos erros, discute também o modelo proposto por Ball e seus colaboradores. Para Cury (2012), “se um professor, ao analisar um erro cometido por um aluno, sabe o que aconteceu porque já viu muitos alunos cometendo o mesmo tipo de erro, esse professor está usando o que Ball e seus colegas chamam de conhecimento do conteúdo e dos estudantes” (CURY, 2012, p.32). No entanto, Cury observa que esse tipo de conhecimento pode ser incluído na categoria saber pedagógico de conteúdo proposta por Shulman, pois “faz um amálgama entre conhecimento de conteúdo e de pedagogia, o que mostra sua (do professor) compreensão da tarefa de ensinar” (CURY, 2012, p.32 e 33). Cury observa ainda que, de acordo com o modelo proposto por Ball e seus colaboradores, decidir qual método ou procedimento funciona melhor no ensino de um determinado tópico envolve conhecimento matemático e habilidades importantes para o ensino, mas não requer conhecimento dos alunos. No entanto, Cury não concorda integralmente com esse entendimento. Para a autora, “a escolha de um procedimento para ensinar um determinado conteúdo exige conhecimento dos alunos” (CURY, 2012, p. 28).

Silverman e Thompson (2008) percebem pioneirismo no trabalho de Ball e seus colegas por investigarem os saberes necessários ao professor de matemática a partir da observação das demandas reais na prática de sala de aula, mas destacam a importância da investigação no sentido da melhor compreensão desse saber e sobre como ele se desenvolve:

> Ball e seus colegas se concentraram em formas especiais que os professores devem saber a matemática, que são visíveis durante o processo de instrução, tais como representações criadas durante a realização de um cálculo e questões associadas com definições básicas de termos. Seu foco é na forma com que os professores lidam com esta matemática visível (durante o processo de instrução), que são sensíveis para o entendimento dos alunos. Concordamos que este foco é essencial para identificar e partilhar as melhores práticas de ensino. Mas também questionamos, "Que entendimentos matemáticos permitem ao professor agir dessa maneira espontaneamente? Como esses entendimentos podem ser desenvolvidos?"[76] (SILVERMAN, THOMPSON, 2008, p. 500, tradução nossa, aspas como no original)

1.4 A FORMAÇÃO E O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR.

> *A formação inicial do professor é certamente necessária para a atuação profissional. No entanto, não é suficiente*.

O 15th ICMI Study[77] teve como foco a formação e o desenvolvimento profissional do professor de matemática ao redor do mundo e envolveu pesquisadores de vários países, culminando com uma conferência realizada no Brasil em maio de 2005 e, posteriormente, com a publicação do volume: *15th ICMI Study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (EVEN, BALL, 2009). Com a premissa de que a formação e o desenvolvimento profissional dos professores são a chave para a oportunidade de aprendizagem da matemática por parte dos estudantes, o *15th ICMI Study* investigou práticas e programas de

[76] No original: "Ball and her colleagues have focused on special ways teachers must know the mathematics, which are visible during instruction, such as representations created during a computation and issues associated with the standard definitions of terms. Their focus is on the ways teachers treat this visible mathematics, which are sensitive to students' understanding of it. We accept this focus as essential for identifying and sharing best practices of teaching. But we also ask the question, "What mathematical understandings allow a teacher to act in these ways spontaneously? How might these understandings develop?" (SILVERMAN, THOMPSON, 2008, p. 500, aspas como no original)

[77] Os *ICMI studies* compõem uma linha de ação importante do ICMI, se configurando em um conjunto de atividades de pesquisa sobre um tema de particular importância para a educação matemática contemporânea. Cada *ICMI Study*, desenvolvido em torno de uma conferência internacional, envolve os principais estudiosos e profissionais no assunto em questão, sendo eles designados pela Comissão Executiva da ICMI. Ao final, tem-se a publicação de um volume que visa promover e apoiar a discussão e a ação em níveis internacional, regional ou institucional (http://www.mathunion.org/icmi/conferences/icmi-studies/introduction/).

formação de professores de matemática em diferentes países, contribuindo para a discussão sobre a formação do professor de matemática.

Segundo as organizadoras do estudo, Ruhana Even e Deborah Ball (EVEN, BALL, 2009), três principais razões justificam o estudo: (i) Os professores desempenham um papel central na aprendizagem de matemática dos estudantes. Preocupações em relação à aprendizagem dos estudantes impõem atenção aos professores, ao que o trabalho de ensinar exige e ao que professores sabem e precisam saber, (ii) Nenhum esforço para melhorar as oportunidades de os alunos aprenderem matemática pode ter sucesso sem atenção paralela às oportunidades de aprendizagem de os seus professores; (iii) A formação profissional dos professores é uma ação grandiosa, e, embora a pesquisa sobre a formação de professores de matemática seja relativamente nova, está também em rápida expansão.

Na apresentação do estudo, Even e Ball destacam a importância e a necessidade do desenvolvimento da pesquisa sobre a formação dos professores de matemática. Segundo essas autoras, ainda há muito a aprender sobre como acompanhar e conectar o conhecimento e a formação profissional dos professores de Matemática com a sua prática e a entender sobre como essa formação pode ter uma efetiva intervenção no processo de aprender para ensinar Matemática. Even, Ball reconhecem que a formação do professor de Matemática se apresenta ainda pouco eficiente na preparação para a prática:

> Temos mais a compreender sobre como a formação do professor pode ter uma intervenção efetiva no complexo processo de aprender a ensinar matemática, que muito frequentemente, é mais influenciado pelas experiências anteriores dos professores como aprendizes ou por contextos de seu trabalho profissional[78]" (EVEN, BALL, 2009, p.2, tradução nossa)

Assim, o estudo conduzido pela ICMI teve como foco as formações inicial e continuada de professores atuantes em todos os níveis da educação básica e a publicação resultante da Conferência foi organizada a partir de duas vertentes principais, que identificam, segundo Even e Ball, desafios críticos para a formação do professor:

(i) A primeira vertente, editada por Steve Lerman, analisou questões sobre a formação inicial e o apoio aos professores na fase inicial de sua vida profissional, investigando como os professores de diferentes países são recrutados e preparados, com um foco particular sobre a forma como a sua preparação para ensi-

[78] No original: "We have more to understand about how teacher education can be an effective intervention in the complex process of learning to teach mathematics, which is all too often most influenced by teachers' prior experiences as learners or by the contexts of their professional work." (EVEN, BALL, 2009, p.3)

nar matemática é combinada com outros aspectos gerais da formação acadêmica profissional.

(ii) A segunda vertente, editada por Barbara Jaworski, teve como foco a investigação sobre o papel da experiência na aprendizagem do ensinar e a separação entre conhecimento formal e prática. Nesta vertente, são estudadas abordagens alternativas para "construir uma ponte" nesta divisão endêmica e para apoiar a aprendizagem dos professores para a e na prática. Esta vertente é explorada em todos os estágios de desenvolvimento profissional dos professores – formação inicial ou pré-serviço (correspondentes à licenciatura no Brasil), nos primeiros anos de prática e na prática continuada (ou seja, ao longo da carreira docente).

Em ambas as vertentes, o estudo buscou conhecer sobre como os professores em diferentes países aprendem a matemática que precisam para o seu trabalho e como o desafio de ensinar é tratado no âmbito das oportunidades de aprendizagem profissional de professores.

	Fases do desenvolvimento do professor	
	Formação inicial do professor (licenciandos e anos iniciais de ensino)	Práticas Continuadas
Vertente I: Programas de formação de professores (recrutamento, estrutura, currículo e primeiros anos)	SIM	NÃO
Vertente II: Aprendizagem profissional para e na prática	SIM	SIM

Figura 1.9: Tabela resumo do escopo e foco do 15th ICMI Study. (EVEN, BALL, 2009, p.4)

A tabela apresentada na Figura 1.9, deixa claro que, na vertente 1, o foco foi apenas na formação inicial do professor e nos anos iniciais de prática. Já a vertente 2 teve como foco a aprendizagem profissional na e a partir da prática em todas as fases de desenvolvimento profissional dos professores.

As questões centrais que conduziram a vertente I do estudo dizem respeito a:

i. A estrutura de formação dos professores: Como é, e como dever ser, a estrutura de formação do professor? Quem ensina ao professor? Com que qualificação? Quanto tempo leva a formação do professor e como é a distribuição entre estudo formal e formação prática? Que habilidades profissionais, que atitudes devem ser adquiridas para o ensino de matemática? Como os professores são preparados para saber matemática para ensinar?

ii. O recrutamento e a retenção: Quem ingressa na carreira de professor? Que incentivos recebe para tal?

iii. O currículo de formação dos professores: Como os professores são preparados para saber matemática para ensinar? Como os professores estão sendo preparados para lidar com contextos particulares e com a diversidade?

iv. Os primeiros anos de prática: Quais as condições de trabalho dos professores nos primeiros anos de prática? Que tipo de suporte esses professores recebem?

v. Quais os problemas prementes na formação inicial dos professores e como estão sendo encarados.

A vertente I do estudo determinou três temas principais, que aglutinaram e organizaram as questões centrais a partir dos trabalhos apresentados – Figura 1.10).

Temas identificados na vertente 1 do 15th ICMI Study: ***Formação inicial do professor de matemática***	
Tema 1	**A preparação dos professores** *Que trata de questões sobre a estrutura da formação inicial dos professores e das questões de currículo.*
Tema 2	**Experiência dos professores estagiários e os primeiros anos de prática** *Que aborda as questões próprias da experiência dos professores enquanto estagiários e em seus anos iniciais de prática. É discutida também a relação entre o que se aprende na universidade e as demandas reais da prática.*
Tema 3	**Atividades e conhecimento do educador matemático** *Que alcança questões sobre o formador do professor e a formação de educadores de matemática.*

Figura 1.10: Temas identificados na vertente I do 15th ICMI Study
(EVEN, BALL, 2009)

A vertente II destaca, em particular, a preocupação com o equilíbrio entre o conhecimento teórico e o conhecimento que advém da prática. Assim, a reflexão desenvolvida nessa seção do estudo foi conduzida pela questão central: ***Como os professores podem aprender***

para a prática, na e a partir da prática? Esta seção do estudo identificou quatro temas de investigação, destacados no quadro apresentado na Figura 1.11:

Temas identificados na vertente 2 do 15th ICMI Study: *Aprendendo na e a partir da prática*	
Tema 1	**Desenvolvimento do ensino na e a partir da prática**: *O que se sabe sobre as características do processo de desenvolvimento da experiência profissional no ensino da matemática? Que fatores são reconhecidos? Quais as questões que estamos cientes? Existem valores de referência no desenvolvimento de professores?*
Tema 2	**Processos de aprendizagem e de prática**: *Qual é o papel da reflexão (cognição), colaboração (aprendizagem social), comunicação (desenvolvimento compartilhado de repertório e significados em pedagogia), e ambientes sócio-institucional ou sociocultural?*
Tema 3	**Modelos, ferramentas e estratégias para apoiar a aprendizagem na e a partir da prática:** *Que modelos, ferramentas e estratégias existentes podem ser usados para a aprendizagem do professor, considerando os diversos níveis escolares e instituições culturais? Este tema trata, por exemplo, de questões como tarefas instrucionais, estudos de aula, troca e reflexão coletiva sobre experiências de aprendizagem, comunidades de aprendizagem e aprendizagem em ambientes virtuais.*
Tema 4	**Equilíbrio entre conteúdo matemático e pedagogia:** *Qual a relação entre o desenvolvimento de conteúdo matemático e desenvolvimento pedagógico.*

Figura 1.11: Temas identificados na seção II do 15th ICMI Study (JAWORSKI, 2009)

No Brasil, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) elaborou o documento “Subsídios para a Discussão de Propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática: Uma Contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática” (SBEM, 2003) com o propósito de contribuir para as discussões sobre os Cursos de Licenciatura em Matemática. Este documento é fruto de um processo coletivo de discussão que teve como fórum principal o I Seminário Nacional para a Discussão dos Cursos de Licenciatura em Matemática, realizado na Bahia em 2003. Sobre a formação docente, o estudo conduzido pela SBEM aponta a necessidade de romper com a dicotomia entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos específicos e com a dicotomia entre teoria e prática. O estudo reconhece ainda uma ruptura entre a formação profissional e prática do professor de matemática e destaca a especificidade da formação desse professor:

> Estudos de diferentes autores apontam que o profissional da educação básica, principalmente nos seus primeiros anos profissionais, reproduz a prática de seus professores. O processo de escolarização, do Ensino Fundamental ao Superior, colabora para que o professor construa seus sistemas de crenças, concepções e representações sobre ensino de Matemática. Esses sistemas são reforçados, principalmente na Licenciatura, por uma prática mais ou menos cristalizada e defendida por muitos professores que aí atuam de que não se deve ensinar conteúdos diferentes dos tratados no Bacharelado, mas sim torná-los mais fracos, sem aprofundamento. O que se precisa é de uma mudança de foco, pois a questão não é essa. Não se trata de enfraquecer o conteúdo e sim de ensinar o que realmente é relevante e que tenha significado e sentido para a formação do professor de Matemática, garantindo não só sua aprendizagem, mas que esse saber passe a fazer parte de sua prática. (SBEM, 2003, p.25)

O documento destaca ainda a especificidade e o caráter contínuo dessa formação:

> Ao elaborar propostas para a formação inicial de professores de Matemática é importante não se esquecer que essa formação é um processo contínuo, que se inicia bem antes do ingresso na Licenciatura, passa nesta por um período intensivo e organizado de aprendizagem de conhecimentos fundamentais para o exercício da profissão docente e continua a desenvolver-se, depois dessa formação inicial, à medida em que o professor reflete sobre sua prática profissional e busca conhecimentos e alternativas para superar os problemas e desafios que encontra pela frente. Em resumo, a formação do professor tem que ser concebida como um processo contínuo de desenvolvimento profissional. (SBEM, 2003, p.4)

Nesse sentido, segundo o estudo da SBEM, as atividades de formação que ocorrem após a graduação do professor (usualmente conhecidas no Brasil pelo termo genérico “formação continuada”) devem desempenhar o importante papel de promover e consolidar a reflexão sobre as experiências advindas da prática, constituindo espaços que ofereçam a oportunidade de discutir coletivamente, por exemplo, o conteúdo matemático escolar, as abordagens pedagógicas, o uso e a adequação de materiais e recursos didáticos. A formação continuada não deve se resumir a um conjunto de atividades visando apenas a ensinar o conteúdo matemático ao professor ou repetir modelos e abordagens próprios dos cursos graduação. A formação continuada deve buscar articular a reflexão sobre conteúdo e pedagogia, contribuído para o desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino, a partir da vivência e com as problemáticas e os saberes que emergem da prática.

Fiorentini e seus colaboradores (FIORENTINI et al, 2002) apresentam uma revisão da pesquisa brasileira sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor, a partir do levantamento, da análise, da classificação de dissertações e teses defendidas no Brasil entre 1970 e 2000. O estudo classificou os trabalhos selecionados destacando dois grupos a partir dos focos temáticos: formação inicial e formação continuada. Em cada um dos grupos, os estudos foram organizados a partir de temas, identificados pelos autores como subfocos – Figura 1.12.

Foco	**Subfoco**	**Quantidade**
Formação Inicial	Estudos de programas e cursos	24
	Práticas de ensino e estágio supervisionado	12
	Estudo de outras disciplinas	6
	Atividades extracurriculares	5
	Formação, pensamento e prática de formadores	4
	Outras questões específicas de formação docente	8
Formação Continuada	Modelos, programas, proposta e projetos	15
	Cursos de atualização e especialização	6
	Investiga a própria prática de formador	3
	Grupos ou práticas colaborativas	14
	Iniciação e evolução profissional do professor	13

Figura 1.12: Distribuição dos estudos analisados por Fiorentini et al (2002, p.142)

Fiorentini et al (2002) concluem que, em relação à formação inicial, os problemas detectados em 2000 eram semelhantes àqueles identificados nas décadas de 70 e 80 e encerravam, dentre outras, as seguintes questões: desarticulações entre teoria e prática, entre conteúdo matemático e pedagogia e entre formação e realidade escolar. Os estudos que indicavam avanço em relação à formação inicial dos professores apontavam que mudanças nas estruturas curriculares dos cursos de licenciatura devem envolver o coletivo de formadores – destacado o problema da *formação do formador*. Já sobre a formação continuada, os autores observaram uma mudança paradigmática em relação à concepção de pesquisa e de processo de formação docente que estão em atuação: os estudos das décadas de 70 e 80 tinham, majoritariamente, como concepção subjacente o *treinamento*, enquanto que os estudos das décadas seguintes apontavam uma "virada paradigmática" em relação ao modo de produção de conhecimentos pedagógicos. Para Fiorentini e seus colegas, "os professores da escola passam a ser vistos como sujeitos do conhecimento que possuem" (p.157).

> Esse movimento mostra que o sentido da pesquisa, associado à formação continuada de professores, passa de uma concepção de pesquisa *para* professores para uma concepção de pesquisa *com* os professores, de maneira que ambos constituem-se pesquisadores e produtores de saberes. (FIORENTINI et al, 2002, p.158)

Moreira e David (2005), em um estudo que investiga a formação inicial do professor de matemática a partir do debate sobre os conteúdos matemáticos (mais especificamente, sobre números), observam que a questão da integração entre conteúdos matemáticos, pedagogia e a prática docente se apresenta ainda como atual. Para esses autores, há

> questões que se colocam para o professor na prática da educação matemática escolar e que são ignoradas ou tratadas de forma insuficiente ou inadequada pelo processo de formação na licenciatura. Acreditamos que uma compreensão profunda dessas particulares formas com que a formação matemática do licenciando se desconecta da prática docente na escola, por um lado, ainda está por se desenvolver e, por outro, é condição necessária para que se possa avançar no sentido de elaboração de propostas alternativas mais eficazes. (DAVID, MOREIRA, 2005, p. 51).

Com base em seu estudo, Moreira e David (2005) concluem:

> Em suma, o que o estudo nos sugere é que, tendo em vista as inadequações e insuficiências apontadas, a articulação do processo de formação na licenciatura com as questões postas pela prática docente escolar, mais do que tentar integrar à prática escolar uma formação específica orientada pela matemática científica – o fracasso histórico das disciplinas integradoras reforça a hipótese de que tal formação possa não ser "integrável" – demandaria uma concepção de formação "de conteúdo" que leve em conta a especificidade do destino profissional do licenciado e tome como referência central a matemática escolar. Isso pressupõe evidentemente o desenvolvimento, por meio de outros estudos e pesquisas, de uma compreensão aprofundada das relações entre matemática científica e matemática escolar e do papel de cada uma delas na prática docente escolar. (DAVID, MOREIRA, 2005, p. 59)

Moreira (2012) propõe uma reflexão sobre a estrutura curricular dos cursos de formação inicial de professores de matemática no Brasil que aponta a necessidade urgente de repensar os modelos praticados nos cursos de licenciatura. Moreira lembra do modelo conhecido como “3+1”, que marca o nascimento das licenciaturas no Brasil em meados dos anos 30: estrutura de formação inicial do professor que se organiza a partir de duas etapas: uma etapa inicial, de cerca de três anos, com ênfase nos conteúdos específicos de Matemática seguida de outra, com cerca de um ano, dedicada à didática. Esse modelo, segundo o autor, pode ser associado à fórmula “Licenciatura = Bacharelado + Didática”. Assim, a estrutura 3+1 é perfeitamente consistente a visão de que

> o futuro professor, no processo de obter o licenciamento para ensinar, passa por uma primeira etapa de aprender o conteúdo (3 anos de matemática) e depois por uma etapa de aprender a transmitir (1 ano de didática). A lógica subjacente é que o bom professor precisa, antes de tudo, deter o conhecimento. Mas isso não basta, há professores que sabem muito, mas não sabem transmitir. É preciso, também, saber ensinar. (MOREIRA, 2012, p. 1139)

De acordo com as orientações oficiais para a formação docente, o modelo “3+1” já não determina as estruturas curriculares dos cursos de licenciatura. De maneira geral, as disciplinas de caráter pedagógico (didática, psicologia, filosofia e estágio, por exemplo) já não se resumem a 25% da formação do professor e, consequentemente, as disciplinas voltadas aos conteúdos específicos de matemática não mais ocupam 75% da grade curricular. Isso, a princípio, seria suficiente para confirmar que o modelo “3+1” não persistiu. No entanto, para Moreira (2012), no Brasil, “a licenciatura saiu do 3+1, mas o 3+1 ainda não saiu da licenciatura” (MOREIRA, 2012, p.1137). Com essa afirmação, Moreira chama a atenção para a separação entre as disciplinas de conteúdo específico e as disciplinas de ensino, que segundo ele, persiste. Assim, as disciplinas de conteúdo específico são planejadas e desenvolvidas de forma dissociada das questões próprias do ensino. Para Moreira, mesmo o bloco de disciplinas integradoras, prescritas por ordem legal na década de 80, não produziu os resultados esperados. Esse autor defende que é urgente e necessário romper essa lógica: “Se a proposta de um bloco de disciplinas integradoras fracassou, e não damos conta de juntar matemática e ensino no processo de formação, como esperar que o professor o faça, na sua prática?”(MOREIRA, 2012, p.1142). Para Moreira a saída para essa questão passa pela busca de respostas às seguintes questões:

> 1. Que matemática o professor vai ensinar na escola básica? (conhecer a Prática)
> 2. Que matemática deve ele conhecer para ensinar essa da escola? (desenhar a Formação)
> Juntando as duas questões acima numa só, podemos nos colocar a seguinte pergunta:

> 3. Existe uma forma de conhecer matemática que seja especificamente apropriada para o trabalho profissional do professor da escola básica? Em outras palavras: existe uma forma de conhecimento matemático que se associa a um olhar profissional (docente) para a sala de aula de matemática da escola?(MOREIRA, 2012, p.1142)

Nesse sentido, Moreira destaca especialmente as contribuições de Shulman (1996, 1987), de Ball, Thames e Phelps (2008), de Moreira e David (2005, 2008) e de Sullivan e Wood (2008), que apontam e reconhecem um saber de matemática para o ensino. Para Moreira, a superação do modelo 3+1 passa por uma estrutura de formação matemática que seja amparada pela identificação de saberes próprios do professor, identificados a partir da sua relevância na prática profissional. Segundo Moreira, outro grande desafio no sentido da superação de uma formação que aliena conteúdo e ensino está em buscar entender melhor o papel da matemática acadêmica na formação do professor da escola básica, investigando o papel e a eventual contribuição da matemática acadêmica para a composição do conhecimento de matemática necessário para o ensino. Para Moreira, esse movimento de pesquisa começa a tomar corpo no cenário internacional, embora de forma ainda tímida.

Manrique (2009), tendo como referência importante os resultados da pesquisa Novos Rumos da Licenciatura (CANDAU, 1988), põe em questão se a formação docente do professor de matemática no Brasil propicia a articulação de conhecimentos de conteúdo matemático e de conhecimentos pedagógicos de modo a compor o conhecimento profissional necessário para a prática do professor. Para Manrique, essa articulação não se efetiva, se configurando como um dos principais problemas da formação inicial do professor de matemática no Brasil. Dentre outros aspectos, essa autora destaca também que um dos desafios a serem enfrentados no cenário contemporâneo da formação do professor de matemática

> refere-se ao lugar secundário ocupado pela formação de professores no modelo de universidade brasileira. Dentro desse quadro, a formação de professores é considerada atividade de menor categoria e quem a ela se dedica é pouco valorizado. Decorre daí uma ordem hierárquica na academia universitária, as atividades de pesquisa e de pós-graduação possuem reconhecimento e ênfase, a dedicação ao ensino e à formação de professores supõe perda de prestígio acadêmico. (MANRIQUE, 2009, p.530)

Para Fiorentini (2012), a comunidade acadêmica tem falhado em formar professores e em contribuir para a produção de conhecimentos que transformem qualitativamente as práticas escolares. Segundo esse autor, um dos aspectos que contribui para essa falha diz respeito ao distanciamento do formador do professor da pratica da escola básica:

> O problema é que a maioria dos pesquisadores-formadores que atuam nas licenciaturas, ao menos nas grandes universidades públicas brasileiras, são bacharéis que, embora possuam conhecimento sólido em um dos campos científicos e procuram realizar estudos neste âmbito, obtiveram pouca formação didático-pedagógica para explorar esses conhecimentos na perspectiva da docência na escola básica. A maioria sequer fez licenciatura e, quando a faziam esta se constituía em um bacharelado disfarçado. Ou seja, esses formadores são geralmente cientistas que passaram do bacharelado e do mestrado/doutorado em uma área científica direto para a docência na licenciatura, sem terem tido conhecimento teórico-prático sobre docência e sobre o ofício do professor escolar e seu contexto de trabalho. (FIORENTI, 2012, p.240)

Fiorentini e Oliveira (2013), em um trabalho que problematiza e discute o lugar da matemática na formação do futuro professor, em cursos de Licenciatura em Matemática, propõem a reflexão sobre a formação inicial do professor a partir da discussão sobre a matemática que permeia esse processo de formação. Esses autores entendem que “os professores precisam ampliar e melhorar a sua compreensão da matemática para poder ensiná-la bem, isto é, não basta saber fazer matemática ou resolver exercícios e problemas para ensiná-la, é necessário, também, ter um saber sobre esse conhecimento” (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p.929). Para Fiorentini e Oliveira, na formação docente, a matemática deve ser tratada de forma indissociada da prática do professor. Assim, “o professor de matemática precisa conhecer, com profundidade e diversidade, a matemática enquanto prática social e que diz respeito não apenas ao campo científico, mas, sobretudo, à matemática escolar e às múltiplas matemáticas presentes e mobilizadas/produzidas nas diferentes práticas cotidianas.” (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 924). De sua investigação, Fiorentini e Oliveira depreendem que, na formação do professor de matemática, existe uma quase tricotomia entre: (i) a *formação matemática*, que é praticamente desconectada das questões próprias do ensino e da aprendizagem da disciplina no ensino básico; (ii) a *formação didático-pedagógica*, geralmente dissociada da matemática e pouco articulada com as orientações e questões contemporâneas e (iii) a *prática profissional*, que reflete uma perpetuação de modelos tradicionalmente estabelecidos e muitas vezes distante das reflexões atuais da educação matemática.

Moreira e Ferreira (2013), em um estudo determinado pela 35ª Reunião Anual da Anped[79], discutem o lugar da matemática na licenciatura de forma articulada com o lugar (ou os

[79] AMPED - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - A ANPEd é uma associação sem fins lucrativos que congrega programas de pós-graduação *stricto sensu* em educação, professores e estudantes vinculados a estes programas e demais pesquisadores da área. Ela tem por finalidade o desenvolvi-

lugares) dos demais saberes que compõem a formação inicial do professor de matemática do ensino básico. Esse estudo reflete o interesse e a preocupação com a formação dos professores de matemática pela comunidade científica brasileira de educação matemática e por formadores de professores de matemática em geral, indicando a atualidade da agenda desse tema também no Brasil. Moreira e Ferreira destacam a necessidade de superar o modelo "3 + 1", ressaltando, a contribuição, nesse sentido, da produção cientifica em Educação Matemática:

> A consolidação nacional e internacional da Educação Matemática como campo de conhecimento e o consequente desenvolvimento de uma literatura de pesquisa especializada na formação do professor de matemática vieram contribuir decisivamente, para ampliar a compreensão a respeito dos saberes da profissão docente e, na mesma medida, dos saberes potencialmente relevantes para a formação na licenciatura. (MOREIRA, FERREIRA, 2013, p.984)

A formação continuada do professor de matemática da educação básica também tem sido foco da investigação e da ação de professores e de pesquisadores brasileiros, que, em experiências e modelos variados, ressaltam a importância da reflexão e da colaboração entre os atores envolvidos e da relação do processo com questões advindas da prática de sala de aula escolar.

Fiorentini (2012) ressalta que, também na formação continuada, se apresentam questões advindas do distanciamento entre o universo escolar e o mundo acadêmico universitário. Para esse autor, a falta de diálogo entre esses dois universos tem contribuído para que ocorram dois movimentos bastante diferentes e que em nada contribuem para o ensino e a aprendizagem da disciplina:

> Temos, de um lado, por iniciativa da comunidade acadêmica, o modelo da racionalidade técnica ou da transposição didática (CHEVALLARD, 1991), regulada por uma comunidade científica, de tradição disciplinar, e/ou pela comunidade de educadores, e que visa produzir conhecimentos e desenvolver e propor propostas didáticas e curriculares aos professores escolares e treiná-los para dominar e aplicar esses conhecimentos. De outro lado, temos a resistência escolar aos saberes oriundos da comunidade acadêmica e

---

mento da ciência, da educação e da cultura, dentro dos princípios da participação democrática, da liberdade e da justiça social.

Dentre seus objetivos destacam-se: fortalecer e promover o desenvolvimento do ensino de pós-graduação e da pesquisa em educação, procurando contribuir para sua consolidação e aperfeiçoamento, além do estímulo a experiências novas na área; incentivar a pesquisa educacional e os temas a ela relacionados; promover a participação das comunidades acadêmica e científica na formulação e desenvolvimento da política educacional do País, especialmente no tocante à pós-graduação.

(Texto da página de apresentação da Associacão: http://www.anped.org.br/anped/sobre-a-anped/apresentacao)

> o fenômeno da (re)produção praticamente independente de saberes escolares por parte da escola (conforme CHERVEL, 1990), os quais são geralmente preservados ou reproduzidos segundo parâmetros da tradição pedagógica. (FIORENTINI, 2012, p.241).

A percepção de Fiorentini sobre modelos de formação e de desenvolvimento profissional do professor de matemática se alinha ao entendimento de Matos, Powell, Sztajn (2009), que defendem que um movimento de mudança de modelos baseados no treinamento para modelos baseados na prática do professor reflete uma mudança de percepção da aprendizagem da docência: *da metáfora da aquisição para a metáfora da participação*.

Ponte et al (2009), a partir da análise de estudos sobre modelos de desenvolvimento profissional do professor *na* e *a partir* da prática, abordam o papel das *comunidades de aprendizagem* – configurações coletivas em que professores participantes aprendem a partir da troca de experiências, significados e conhecimento sobre a prática da escola.

> As comunidades de aprendizagem de professores são contextos especiais em que os professores aprendem. Estas comunidades de aprendizagem podem ser uma turma de professores estagiários ou em atuação ou de programa de especialização, ou podem ser um grupo de professores de uma escola que desenvolvem hábitos de trabalho em conjunto, ou qualquer outro grupo que seja constituído especialmente com a propósito de aprender, desenvolver ou investigar.[80] (PONTE et AL, 2009, p.197, tradução nossa)

As comunidades de aprendizagem podem envolver professores com características profissionais semelhantes ou não, por exemplo, podem ser professores que lecionam apenas em um segmento do ensino básico ou professores do ensino básico e professores do ensino superior. Um aspecto importante em uma comunidade de aprendizagem é a disposição dos participantes para aprender um com os outros. Um dos exemplos de comunidade de aprendizagem destacados por Ponte e seus colegas é descrito em Fiorentini et al (2005), que apresentam uma experiência de aprendizagem em trabalho colaborativo envolvendo professores do ensino básico e professores universitários dedicados à educação matemática. A experiência descrita investigou o assunto ângulos a partir de tarefas típicas do ensino básico envolvendo a noção de ângulo. As tarefas selecionadas foram desenvolvidas por alunos e discutidas pelos professores participantes. Segundo Fiorentini e seus colaboradores, a experiência de aprendi-

---

[80] No original: "Learning communities of teachers are special contexts in which teachers learn. Theses learning communities can be a class of pre-service, in-service or specialized teacher education program, or may be a group of teachers from one school who developed habits of working together, or any other group that was constituted especially with the purpose of learning, developing, or inquiring." (PONTE et AL, 2009, p.197)

zagem colaborativa que descrevem contribui para o desenvolvimento de todos os participantes:

> Os resultados mostram que a reflexão e a investigação colaborativa entre profissionais de diferentes pontos de vista e formações também diferentes contribuem para o desenvolvimento de todos os participantes, uma vez que eles (1) coproduzem novos significados e conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática e (2) compreendem melhor o seu trabalho, bem como o currículo, os alunos e o seu próprio papel como educadores.[81] (FIORENTINI et al, 2005, p. 1, tradução nossa)

Para Fiorentini (2012), no sentido de promover o desenvolvimento profissional do professor conciliando a ruptura entre formação conceitual e a prática, a atividade de formação deve promover

> uma aliança colaborativa entre formadores, pesquisadores e futuros professores da universidade e professores da escola básica, de modo que possam constituir comunidades investigativas locais, nas quais esses diferentes personagens possam juntos, estudar, analisar, investigar e escrever sobre o desafio de ensinar e aprender nas escolas, negociando o currículo desejável e possível para cada realidade. (FIORENTINI, 2012, p.239).

Fiorentini (2005, 2006, 2012) descreve a experiência do Grupo de Sábado (GdS), que, segundo o autor, se constitui em um "grupo de professores de Matemática que se reúne na Faculdade de Educação da Unicamp para refletir, investigar e escrever sobre a própria prática docente" (FIORENTINI, 2006, p.13). O GdS congrega professores de ensino básico da região de Campinas (SP), interessados em estudar a prática docente, e professores universitários, interessados em estudar o desenvolvimento profissional dos professores, em um contexto colaborativo de reflexão e investigação sobre a prática docente. Fiorentini (2012) relata detalhadamente as etapas que marcaram o desenvolvimento e o amadurecimento do GdS como uma comunidade de aprendizagem, destacando o caráter colaborativo e investigativo do trabalho desenvolvido. O GdS tem como objetivos a formação e o desenvolvimento profissional contínuo dos professores a partir da reflexão sobre a prática de sala de aula, sem perder de vista o caráter investigativo e de pesquisa inerentes à prática do professor, ou seja, observando a prática do professor para além da prática do dia a dia de sala de aula.

> o trabalho colaborativo, mediado pela reflexão e investigação sobre a própria prática, é uma estratégia poderosa de educação contínua de profes-

---

[81] No original: "The results show that collaborative reflection and investigation among professionals with different views and backgrounds contribute to the development of all participants, once they (1) co-produce new significations and knowledge on mathematics teaching and learning and (2) understand their work better, as well as the curriculum, the students and their own role as educators." (FIORENTINI et al, 2005, p. 1)

> sores, pois o professor, frente aos desafios diários, busca, continuamente, com o grupo, novos saberes e arrisca-se em novas experiências docentes, ressignificando permanentemente sua prática e seus saberes. [...] O professor não apenas acompanha e recebe novos conhecimentos e ideias, mas, também troca e contribui, tornando-se protagonista da cultura profissional de seu campo de trabalho. O grupo pode ser o espaço de formação e de constituição profissional do professor e de construção de sua identidade, pois é com o outro que ele se torna continuamente professor. (FIORENTINI, 2006, p. 34)

Fiorentini defende que

> a constituição de comunidades críticas e colaborativas, envolvendo formadores, pesquisadores, professores e futuros professores, que assume a pesquisa como postura e prática social, representa um contexto rico e poderoso de desenvolvimento profissional, de transformação das práticas pedagógicas e curriculares, de produção de conhecimentos e de construção uma nova cultura de ensinar e aprender matemáticas nas escolas. E as práticas de pesquisa dessas comunidades investigativas locais não se limitam apenas a realizar estudos empíricos. (FIORENTINI, 2012, p. 250)

Pereira, Belfort e Mandarino (2014) também reconhecem a importância da formação continuada dos professores e da articulação desta com a prática: “Torna-se necessário reconhecer o professor como sujeito em permanente formação e, como consequência, propor a capacitação docente para professores em sala de aula.” (PEREIRA, BELFORT, MANDARINO, 2014, p. 290). Nessa direção, discutem a experiência do Pró-letramento em Matemática, que se constitui como uma política pública nacional de formação continuada de professores dos anos iniciais desenvolvida em diversos estados brasileiros, por meio de parceria entre o MEC, diversas secretarias Estaduais e Municipais de Educação e a Rede Nacional de Formação Continuada de Professores da Educação Básica, formada por Instituições de Ensino Superior brasileiras. Na reflexão proposta, as autoras apresentam a análise de dois fascículos do material didático de matemática à luz dos modelos teóricos de Tardif (2012), Shulman (1986, 1987) e Perrenoud (2000).

O pró-letramento, como ação de formação continuada, envolve ativamente o professor no próprio processo de formação na medida em que as atividades discutidas nas etapas de formação teórica, amparadas pelos fascículos, chegam à sala de aula dos professores participantes na forma de atividades a serem desenvolvidas com os alunos e na análise do desenvolvimento dessas atividades. Dessa maneira, envolvem a prática de sala de aula no processo. Além disso, a metodologia prevê, em cada núcleo de ação do projeto, a discussão, envolvendo todo o grupo de professores participantes, sobre os resultados observados na aplicação e na análise das atividades realizada com os alunos. Assim, esse modelo de formação reconhece a dimensão colaborativa como um elemento importante na formação do professor.

Segadas, Nasser e Tinoco (2014) reconhecem a necessidade de complementação da formação inicial dos professores do ensino básico e entendem que esse processo deve buscar identificar e integrar conteúdos disciplinares próprios da prática docente dos professores de matemática. Ancoradas no longo trabalho desenvolvido junto ao Projeto Fundão – Matemática[82] – grupo de pesquisa e extensão universitária, fundado na UFRJ, que visa ao desenvolvimento profissional de professores da disciplina há mais de 25 anos – essas autoras ressaltam a necessidade de desenvolver nos professores, ao longo de todas as etapas de sua formação, o saber pedagógico de conteúdo. A metodologia que ancora a ação do Projeto Fundão Matemática tem como norte o entendimento de que "se trata de um trabalho feito *por professores, para professores*" (p.266, itálico como no original) e sua orientação metodológica contempla grupos compostos por licenciandos, professores do ensino básico e professores universitários em um processo de reflexão colaborativo, organizados em torno de temas de interesse comum e reconhecidamente significativos no contexto do ensino de matemática e da formação docente para esse ensino. Por exemplo: ensino de álgebra, tecnologia no ensino de matemática e ensino de matemática para deficientes visuais. A investigação proposta por Segadas, Nasser e Tinoco, realizada a partir de questionários respondidos por professores participantes do Projeto Fundão Matemática, mostra que a influência do Projeto no desenvolvimento profissional desses professores alcança dimensões variadas, permitindo de fato que ampliem seu conhecimento para o ensino de matemática e sua autonomia e autoridade diante da sua própria prática:

> O impacto da participação dos professores no PF (Projeto Fundão – Matemática) pode ser resumido com o que nos diz Alice, que fez graduação em licenciatura na UFRJ e que, descrevendo, num sentido amplo, o que para si representou a influência do PF, afirmou: "A UFRJ me formou professora e o PF me transformou em educadora-pesquisadora" (SEGADAS, NASSER, TINOCO, 2014, p 284, aspas como no original).

A discussão sobre a composição dos saberes necessários para o ensino e os consequentes desdobramentos dessa composição para a formação profissional do professor apresentam-se em plena ebulição para a Educação Matemática e para a comunidade matemática em geral. Essa discussão é fortemente amparada no reconhecimento de que a aprendizagem e o desenvolvimento da Matemática estão intrinsicamente relacionados ao ensino da disciplina.

[82] Para maiores informações, acessar http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/.

(EVEN, BALL, 2009; KLEIN PROJECT; FIORENTINI et al, 2002; MOREIRA, FERREIRA, 2013). O conhecimento do conteúdo matemático e os conhecimentos de pedagogia são certamente necessários ao professor. No entanto, a prática profissional do professor exige um conhecimento particular de matemática, que, de certa forma, é diferente do conhecimento de matemática do matemático e de outros profissionais (KILPATRICK, 2008b, FIORENTINI, LORENZATO, 2009). Esse é um conhecimento que não pode ser descolado de aspectos conceituais estruturantes nem de questões próprias do ensino e da aprendizagem dos conceitos em si, de tal forma que esses componentes se fundem compondo um conhecimento particular e essencial ao professor. Investigar esse conhecimento e o seu desenvolvimento ao longo da formação profissional do professor é um dos objetivos de pesquisa em Educação Matemática (BALL, BASS, 2003, PONTE, CHAPMAN, 2006, BALL, THAMES, PHELPS, 2008, TARDIF, 1991, 2012). Referência importante para a reflexão sobre a formação do professor em geral, SHULMAN (1986, 1987) introduz a noção de *saber pedagógico de conteúdo* no cenário de pesquisa. Essa noção comporta a concepção de um saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino e tem motivado e fomentado a discussão sobre os saberes docentes do professor de matemática ao longo das últimas décadas (SZTAJN, 2007, BALL, THAMES, PHELPS, 2008, GRAEBER, TIROSH, 2008). Especialmente em relação ao saber do professor de matemática, as ideias de Shulman fundamentam o modelo proposto por Ball e seus colegas. Esse modelo é ancorado na observação da prática do professor, em uma abordagem "de baixo para cima", ou seja, que parte da observação da sala de aula. O modelo proposto por Ball e seus colaboradoes distingue a noção de *conhecimento matemático para o ensino*, organizado a partir de categorias que contemplam, à luz da matemática, o saber de conteúdo e o saber pedagógico de conteúdo, proclamados por Shulman (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, HILL, BALL, CHILLING, 2008, BALL, BASS, 2009).

A discussão sobre os saberes docentes abarca de forma impositiva a reflexão sobre concepções e modelos de formação docente, apontando que a formação inicial do professor não tem se apresentado como suficiente para munir os professores com o arsenal necessário para lidar com desafios que enfrentará na prática: É necessário aproximar e conciliar teoria e prática e reconhecer a prática como uma componente de produção de saberes docente. Assim, a formação do professor se constitui como um processo permanente e contínuo, que não pode prescindir da experiência e dos conhecimentos advindos da prática de sala de aula (BALL, 1988, NODDINGS, 1992, FIORENTINI, 2006, 2012, EVEN, BALL, 2009; MOREIRA, FERREIRA, 2013).

E a partir dessa perspectiva, que pretendemos contribuir para a reflexão sobre o desenvolvimento profissional do professor, com especial atenção para o conhecimento de conteúdo com vistas ao ensino. Para compor a fundamentação que sustentará e balizará a discussão e a investigação objetivadas, buscamos alicerces também: (i) nas *ideias de Klein*, por seu legado e pioneirismo para a discussão sobre os saberes docentes e para a formação do professor de matemática e pelo reconhecimento da atualidade de suas ideias (BASS, 2005, KILPATRICK, 2008a, 2008b, SCHUBRING, 2003, 2014) e (ii) na *metodologia de concept Stu*dy, proposta por Brent Davis e seus colaboradores (DAVIS, SIMMT, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, DAVIS, 2010), que oferece o estudo conceitual de assuntos matemáticos próprios da educação básica sem prescindir da prática do professor. Esses pilares da fundamentação teórica que norteiam este trabalho serão alvo dos próximos capítulos.

Capítulo 2

AS IDEIAS DE FELIX KLEIN – DUPLA DESCONTINUIDADE, TRANSLAÇÃO HISTÓRICA E ELEMENTARIZAÇÃO

"Felix Klein foi um distinto investigador. Mas foi também um professor inspirador."

Tradutores de Klein em Língua Inglesa.

A influência e a contribuição do matemático alemão Felix Klein[83] para a Matemática e para o ensino da disciplina é inquestionável, extrapola fronteiras físicas e acadêmicas e vence o tempo, apresentando-se ainda atual.

Em especial, destaca-se do seu legado a obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*[84]. Essa obra, hoje clássica, originou-se de notas de aulas dadas por Klein para cursos de formação de professores da Universidade de Göttingen. Publicado em 1908 e 1909, o compêndio é organizado em três volumes[85], o primeiro sobre aritmética, álgebra e análise, o segundo sobre geometria e o último, menos conhecido, mas não menos importante para Klein, contemplando temas teóricos e práticos de análise e de geometria (SCHUBRING, 2014, RODRIGUES, 2009). Defensor da percepção da Matemática como um todo orgânico (KLEIN, 2009; KILPATRICK, 2008a; SCHUBRING, 2014), Klein, concebeu esse trabalho com a intenção de "chamar a atenção dos professores de matemática e de ciências da escola

---

[83] Felix Christian Klein – 25/04/1849 (ou $5^2/2^2/43^2$, como o próprio Klein gostava de ressaltar), Düsseldorf, Alemanha – 22/06/1992, Göttingen, Alemanha.

[84] Na versão original, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Na versão em língua inglesa, Elementary Matehematics from na Advanced Standpoint.

[85] Embora os dois primeiros volumes tenham sido traduzidos para diversas línguas, o terceiro foi editado apenas no idioma original. O volume I foi editado recentemente em língua portuguesa pela Sociedade Portuguesa de Matemática (spm) em três partes (Klein, 2009, 2010b, 2011).

básica para o valor dos seus estudos acadêmicos, especialmente de Matemática pura"[86] (KLEIN, 2010a, p.v, tradução nossa). A visão abrangente da Matemática, preconizada por Klein, "desafiou professores e matemáticos a considerar a relação entre a aprendizagem da disciplina e a natureza disciplinar da matemática"[87] (BARTON, 2008, p.16, tradução nossa). Além de ter sido um matemático eminente, Klein preocupou-se com o ensino da disciplina, reconhecendo a importância e a especificidade da formação do professor para o desenvolvimento da Matemática como ciência. Segundo Schubring (1999), diante das questões que afligiam a educação matemática na Alemanha em sua época[88],

> Klein deu início a um estudo intenso e meticuloso do estado da educação matemática com o objetivo de descobrir as questões principais que poderiam estimular os professores de matemática. Tendo se familiarizado com alguns dos problemas mais importantes enfrentados pelos professores de matemática nas escolas. (SCHUBRING, 1999, p.43)

D'Anbrósio (2006) destaca que Klein esteve à frente da fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908, ressaltando, assim, o papel fundamental de Klein na consolidação da Educação Matemática como uma subárea da matemática e da educação, de natureza interdisciplinar. Para Bass (2005), Klein derramou a luz da Matemática disciplinar sobre a Matemática Escolar, levando em conta a especificidade da aprendizagem nesse nível de formação e sendo sensível aos desafios enfrentados pelos professores.

Objetiva-se aqui distinguir e discutir algumas das principais ideias apresentadas por Klein. O foco se estabelece especialmente nas concepções que alcançam a dimensão do conhecimento da disciplina para o ensino e sua relação com a formação docente. O estudo se desenvolverá a partir da identificação das contribuições de Klein com vista às seguintes questões:

---

86 No original: "(Volumes on Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint were) to bring to the attention of secondary school teachers of mathematics and science the significance for their professional work of their academic studies, especially their studies in pure mathematics" (KLEIN, 2010, p.v)

87 No original: "One hundred years ago, in 1908, Felix Klein's lectures on mathematics for secondary teachers were first published (in German). This comprehensive view of the field challenged both teachers and mathematicians to consider the relationship between learning mathematics and the nature of disciplinary mathematics." (BARTON, 2008, p.16)

88 Segundo Schubring (1999), "Embora mudanças estruturais nos sistemas educacionais de alguns estados europeus já estivessem em andamento, as reformas curriculares, por volta de 1900, estavam muito atrasadas. [...] Logo depois de 1900, ocorreram, em alguns países, iniciativas de reformas para a escola secundária [...]. Na Inglaterra Perry procurou enfatizar métodos de ensino prático, na Prússia, Felix Klein começou a forjar a ampla aliança que exigiria a reforma de toda a instrução matemática para que fosse orientada para o pensamento funcional." (SCHUBRING, 1999, pp.30, 31)

- O que é matemática elementar no sentido de Klein?
- Qual a relação entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica no sentido de Klein?
- Qual o papel da escola básica no desenvolvimento da Matemática, segundo ideias de Klein?
- Nessa perspectiva, que contribuições das ideias de Klein podem trazer para a reflexão acerca da formação dos saberes e da ação do professor da escola básica?

Este estudo se justifica na premissa de que a reflexão sobre essas questões não só aprofunda o entendimento sobre as concepções de Klein como sugere caminhos na direção da investigação acerca do conhecimento de conteúdo do professor de Matemática que atua na escola básica e do delineamento de formas de se estabelecer esse conhecimento.

Não é propósito deste trabalho discutir ou explicar o conhecimento de Matemática como ciência, no entanto, o entendimento dado à Matemática Escolar e à Matemática Científica, serão fundamentais para a reflexão proposta. Assim, neste trabalho, serão tomadas com o mesmo entendimento às expressões *Matemática Superior***,** *Matemática Científica*, *Matemática Acadêmica* e *Matemática Universitária*, como referência à matemática relativa à produção científica que permeia o ambiente acadêmico universitário, alcançando de forma ampla desde conteúdos ensinados nas disciplinas de formação até resultados produzidos a partir de pesquisas de ponta. Para Moreira e David, (2007), é o conhecimento matemático fundamental, "a partir do qual os outros saberes associados ao exercício da profissão (do professor) passam a ser sentidos" (MOREIRA, DAVID, 2007, p.15). Consonantes com esses autores, neste trabalho, serão usadas

> as expressões Matemática Cientifica e Matemática Acadêmica como sinônimos que se referem à Matemática como um corpo científico de conhecimento, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais. (MOREIRA, DAVID, 2007, p.20)

Já o termo *Matemática Escolar* contempla a matemática ensinada na escola básica[89], abrangendo a seleção e a organização dos conteúdos ensinados, as suas abordagens e particularidades regionais ou de unidades escolares específicas. Assim,

[89] Os contextos histórico e político educacional observados por Klein identificam como matemática escolar a matemática ensinada nas escolas de nível médio, ou escolas secundárias, alemãs (*Gymnasium e Oberralschule*). É objetivando a formação dos professores que atuam neste nível de ensino que Klein desenvolve seu trabalho. Na Alemanha, à época, a formação de professores que atuavam na formação inicial, escolas primárias, não exigia graduação em nível superior. Nessa época esses segmentos primário e secundário da

Matemática Escolar referir-se-á ao conjunto de saberes “validados”, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. (MOREIRA, DAVID, 2007, p.20)

Como em Moreira e David (2007), aqui Matemática Acadêmica e Matemática Escolar são entendidas como “referenciadas, em última instância, nas condições em que realizam as práticas respectivas do matemático e do professor de Matemática da escola” (MOREIRA, DAVID, 2007, p.21)

Na perspectiva de Klein, a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar não eram vistas de forma estanque, e sim como partes indissociáveis que determinam com igual importância o desenvolvimento da matemática por meio de um processo histórico. Segundo Schubring (2014), Klein não entendia uma transposição direta da Matemática Acadêmica para a Matemática Escolar, percebendo a relação entre os dois domínios de saber a partir de uma variável histórica:

> “É de suma importância para as pesquisas atuais sobre os programas do ensino de matemática, entender que Klein não optou por uma translação direta do novo saber matemático para a escola, mas percebeu a relação entre os dois domínios de saber como uma variável histórica, e assim propôs lidar com este desenvolvimento histórico como um processo de elementarização que ele chamou de ‘historical shifting’ – “translação histórica”: (SCHUBRING, 2014, p.50, aspas como no original):
>
>> O processo normal de desenvolvimento [...] da ciência é o seguinte: partes superiores e mais complicadas tornam-se paulatinamente mais elementares, devido ao aumento na capacidade de esclarecer os conceitos e à simplificação da exposição (“lei de translação histórica”). É tarefa da escola verificar se, dadas as necessidades da educação geral, a integração do conceito elementarizado no programa é necessária ou não (KLEIN, SCHIMMACK, 1907, p.90, apud Schubring, 2014, p.50)

Assim, por exemplo, Klein, em sua época, defendeu fortemente que o conceito de função, por seu caráter elementar, deveria permear todos os assuntos do currículo de matemática, desde o ensino básico. Para ele, esse processo sustentaria, de maneira natural, a valorização e a difusão do estudo do Cálculo, assunto tido como exclusivo da Matemática Superior. Klein chegou a criar um *slogan* que defendia essa ideia: *Functional reasoning* (raciocínio funcio-

---

escolaridade eram estritamente separados, socialmente e quanto ao saber. (SCHUBRING, comunicação pessoal, março de 2012). Neste documento, admitindo uma circunstância ideal, adotaremos a interpretação das ideias de Klein para um contexto em que matemática básica corresponde a toda matemática ensinada nas escolas de nível básico sem a preocupação de caracterizar inclusive a diferença entre, nos termos do Brasil, o ensino fundamental e o ensino médio, tratados como ensino básico. Essa opção reflete a defesa de uma postura política que entende que a formação do professor de matemática ou do que ensina matemática não pode prescindir de uma formação adequada em nível superior.

nal). O objetivo de Klein era aproximar a Matemática Superior da Matemática Escolar a partir do envolvimento de seus atores: matemáticos e professores, respectivamente (SCHUBRING, 1999, KILPATRICK, 2008b).

O estudo aqui apresentado objetiva evidenciar que esse entendimento de Klein é determinante para a compreensão de algumas das suas ideias, em particular para a identificação do fenômeno de *dupla descontinuidade* e para o entendimento da *elementarização da Matemática*. Além disso, as ideias de Klein têm desdobramentos para o reconhecimento da complexidade e da importância do saber de conteúdo necessário para o ensino da disciplina na escola básica e para a reflexão acerca da constituição desse saber e da formação docente.

2.1 DUPLA DESCONTINUIDADE

Na introdução de sua obra, *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, Klein identifica um problema que afligia a formação dos professores em sua época – a alienação entre a escola e a universidade[90]. Ou seja, o autor identifica uma ruptura entre a *Matemática Escolar*, e a *Matemática Superior*. Para o autor, à época, "universitários ocupavam-se exclusivamente de sua ciência sem se preocuparem com estabelecer conexões com a Matemática Escolar" (KLEIN, 2009, p.1).

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas em que esteve envolvido na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores, são confrontados com a necessidade de ensinar

[90] No início do século XX, o ensino de matemática vivia um movimento internacional de reformas metodológicas e curriculares. Segundo Schubring (1999, 2012), esse movimento, primeiro com esse caráter, teve como um dos impulsos mais significativos a conjuntura de modernização da Alemanha, determinada pela Revolução Industrial. Não insensível às dimensões social e econômica do desenvolvimento, o processo histórico de evolução da relação entre a matemática escolar e a matemática ensinada em cursos de nível superior buscava definir o que constituía a matemática escolar. A primeira vez que se estabeleceu uma relação genuína entre a matemática escolar e a matemática superior foi na Prússia, no início do século XIX, quando, como parte de uma reforma profunda no sistema educacional, a matemática passa a constituir uma das três bases do ensino secundário alemão de maior prestígio (*Gymnasium*). A implementação da reforma, que impunha novas demandas à formação dos professores de 5matemática, não obteve êxito nem significou pleno acordo entre as dimensões envolvidas. Em 1864, o processo culminou na primeira reunião de professores de matemática de diversos estados da Alemanha. Nessa ocasião, sob a tutela de uma postura tradicional, a matemática foi definida como ciência das quantidades, cabendo à matemática escolar as quantidades tratadas como fixas, limitadas e finitas e à matemática universitária a abordagem envolvendo variação. Esse posicionamento determina claramente a alienação entre a matemática escolar e o progresso da ciência. Observando as demandas científicas e técnicas da época, o atraso do ensino de matemática nas escolas de nível médio fica evidente no final do século XIX. Klein se mobiliza para intervir nesse cenário, assumindo papel fundamental no processo de reforma.

a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e, como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma conexão entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando seus estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p.1)

Com a identificação dessa ruptura, Klein aponta uma *dupla descontinuidade* – por um lado, durante a formação acadêmica do professor, há pouca relação entre a matemática estudada na universidade e aquela aprendida na formação básica e, por outro lado, em sua ação profissional, o professor da escola básica dificilmente consegue estabelecer relação entre a matemática que ensina e aquela que estudou em sua formação acadêmica. É justamente essa ruptura que mobiliza e motiva Klein a desenvolver seu trabalho.

> O meu objetivo consiste sempre em mostrar-vos *as conexões entre problemas de diferentes áreas*, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação destes problemas com os da Matemática Escolar. Espero que, desta forma, se torne mais fácil para o leitor adquirir a capacidade que eu considero o verdadeiro objectivo dos estudos académicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria actividade docente. (KLEIN, 2009, p,2, itálico como no original)

Klein identifica dois esforços que caracterizam a preocupação à época: (i) munir os conteúdos escolares com novas ideias resultantes do desenvolvimento da ciência e (ii) levar em conta, na formação universitária do professor da escola básica, as necessidades da sua ação profissional futura. A preocupação de Klein com o ensino da disciplina e com a formação do professor da escola básica fica evidente em sua aula inaugural, quando da sua admissão em Erlanger (ROWE, 1983, 1985). Para Klein, "As universidades devem estar atentas ao ensino nas escolas preparatórias (escolas de nível médio), e, portanto, dar especial importância à formação de professores desse nível de ensino"[91] (KLEIN, 1923, p.18; apud ROWE, 1983, p.451, tradução nossa).

> É de notar que este desenvolvimento moderno passou por cima das escolas sem ter, na maior parte dos casos, o menor efeito no ensino secundário, um mal a que tenho aludido muitas vezes. O Professor consegue continuar a conviver com a análise algébrica, apesar das suas dificuldades e imperfeições, e evita a elegância do cálculo infinitesimal [...]. A razão para isto acontecer reside, provavelmente, no fato de o ensino da matemática nas es-

[91] No original: "The universities should pay heed to the preparatory teaching in the schools, and thus place particular emphasis on the education of school teachers." (KLEIN, 1923, p.18; apud ROWE, 1983, p.451)

> colas e o subsequente caminho da investigação terem perdido todo o contato um com o outro [...]. As escolas secundárias pouco se importam com saber se, e como, os teoremas são generalizados na universidade, aceitando-se muitas definições que talvez sejam suficientes no presente, mas que não vão chegar para satisfazer necessidades posteriores. Reciprocamente é frequente que a universidade pouco se preocupe com fazer a ligação com o que foi ensinado na escola, desprezando às vezes isto ou aquilo com pouca consideração e com observação desapropriada: "Já deram isto na escola secundária". (KLEIN, 2011, p.20)

Em um estudo sobre a história da pesquisa em Educação Matemática, Kilpatrick (1992) destaca a contribuição de Klein na fundamentação da raiz Matemática desse campo da pesquisa. Kilpatrick observa que Klein acreditava que, para o desenvolvimento da Matemática como ciência, eram necessárias mudanças substanciais na Matemática Escolar e na relação entre as dimensões escolar e acadêmica da Matemática, com especial atenção à formação do professor.

2.2 O CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA DO PROFESSOR – A CONCEPÇÃO DE KLEIN SOBRE O CONHECIMENTO DE CONTEÚDO NECESSÁRIO PRA O ENSINO

Segundo Kilpatrick (2008a), para Klein, o problema do currículo do ensino secundário não era uma questão de insuficiência de tempo nem de inadequação do conteúdo, era o reflexo de questões relativas à formação do professor.

> [para os professores universitários de matemática] se apresenta a tarefa de elevar os padrões da educação matemática dos futuros professores para um nível ainda não visto há muitos anos... Se nós educarmos melhores professores, então o ensino de matemática vai melhorar por si só, assim como o modelo velho e consignado será preenchido por um conteúdo novo, revitalizado.
>
> [Portanto,] nós, como professores universitários, exigimos não só que nossos estudantes, após a conclusão dos seus estudos, saibam o que deve ser ensinado nas escolas. Queremos que o futuro professor esteja acima da disciplina que lecionará, que ele tenha uma concepção atualizada do conhecimento em seu campo, que, de maneira geral, ele seja capaz de acompanhar

seu desenvolvimento[92]. (KLEIN in ROWE, 1985, p.139; apud KILPATRICK, 2008a, p.3, tradução nossa)

Segundo Kilpatrick (2008a) e Schubring (2014), na tradução do título original da obra de Klein – *Elementarmathmatik vom höheren Standpunkte aus* – para a língua inglesa, houve um engano. A expressão "*vom höheren standpunkte*" teria sido mais bem traduzida se, ao invés de "*from an advanced standpoint*" (de um ponto de vista avançado), tivesse sido adotado "*from an higher standpoint*" (de um ponto de vista superior). Para esses autores, não só o termo *higher* (superior, no sentido de mais alto, elevado) corresponde a uma tradução direta de *höheren*, como também exprime melhor a concepção de Klein sobre o seu trabalho e sobre a Matemática.

> *Advanced* (avançado) pode significar *higher* (superior), mas sua conotação se alinha mais a "mais desenvolvido" ou "mais adiante no espaço ou no tempo". Klein quis enfatizar que seu curso daria aos futuros professores uma visão melhor e mais panorâmica da Matemática. [...] Ele queria que esses professores "ficassem acima" da disciplina que ensinariam. [93] (KILPATRICK, 2008a, p.11-12, itálico e aspas como no original, tradução nossa)

Em sua proposta, Klein dirige sua obra a futuros professores que já trazem em sua formação anterior algum conhecimento sobre os principais ramos da Matemática e busca mostrar a eles como esses ramos se articulam entre si e como se relacionam com a Matemática Escolar. Pretende assim proporcionar aos futuros professores uma visão ao mesmo tempo ampliada e panorâmica da disciplina, que os permita identificar relações e conexões entre os assuntos e entre esses e a matemática que deve ensinar na escola básica. Segundo Schubring (2014), ao abordar a Matemática a partir das interligações e das conexões entre partes comumente entendidas como estanques, oferecendo uma visão sintética para a matemática, "Klein expôs explicitamente a tarefa epistemológica de sua obra" (SHUBRING, 2014, p.43).

Para Klein "o professor deve ter muito mais conhecimento do que os que expõe aos seus alunos" (KLEIN, 2011, p.29). Sobre o conhecimento de conteúdo necessário para o en-

---

[92] No original: "At stake [for university teachers of mathematics] is the task... of raising the standards of mathematical education for later teaching candidates to a level that has not been seen for many years. If we educate better teachers, then mathematics instruction will improve by itself, as the old consigned form will be filled with a new, revitalized content! . . .

[Therefore,] we, as university teachers, require not only that our students, on completion of their studies, know what must be taught in the schools. We want the future teacher to stand above his subject, that he have a conception of the present state of knowledge in his field, and that he generally be capable of following its further development." (KLEIN, in ROWE, 1985, p. 139, apud KILPATRICK, 2008a, p.3)

[93] No original: "*Advanced* can mean *higher*, but its connotation is more like "more developed" or "further along in space or time." Klein wanted to emphasize that his courses would give prospective teachers a better, more panoramic view of the landscape of mathematics. As noted above, he wanted those teachers to "stand above" their subject." (KILPATRICK, 2008a, p.11-12, itálico e aspas como no original)

sino da escola básica, Klein indica que o professor não deve somente ter conhecimento sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacionar e articular diferentes conceitos e teorias e compreender a natureza científica e a evolução histórica desses conceitos.

> Se [os futuros professores] não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos elementos intuitivos da matemática bem como das relações vitais entre áreas próximas e se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico [dos conceitos e teorias matemáticas], seus passos serão inseguros. (KLEIN, 2011, p.127)

Para o autor, é fundamental que o professor esteja familiarizado com as questões e as dificuldades envolvidas na estrutura do assunto que ensina para que possa conduzir seus alunos à aprendizagem. Para Klein, o conhecimento de conteúdo necessário para o ensino na escola básica é particular e deve oferecer ao professor uma visão da Matemática que não observa os assuntos de forma pontual nem isolada, mas que permita percebê-los de forma abrangente e articulada, reconhecendo suas complexidades epistemológicas e seu desenvolvimento histórico.

Kilpatrick (2008a) confirma esse entendimento indicando que Klein, percebeu

> a importância de defender o desenvolvimento do um conhecimento de matemática dos professores que ia além do conhecimento do que eles deveriam ensinar e era mais do que um sinótico de um típico curso universitário de matemática. [...] Os professores precisam de um conhecimento especializado de matemática e de habilidades que lhe darão uma perspectiva ampla sobre o campo e lhes equiparão para trabalhar como os alunos. [94] (KILPATRICK, 2008a, p.12, tradução nossa)

O entendimento de Klein sobre o conhecimento de Matemática do professor sugere alinhamento a ideias atuais sobre o tema, identificadas como *conhecimento de conteúdo para o ensino* (SHULMAN, 1986, 1987; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, BASS, 2009).

> Pensar adequadamente sobre o *saber de conteúdo* [relativo a um professor] exige ir além do conhecimento de fatos ou de conceitos de um domínio. [...] Professores não devem ser somente capazes de definir para os estudantes as verdades aceitas em um domínio. Eles devem também ser capazes de explicar porque uma proposição particular é considerada garantida, porque vale a pena conhecê-la e como se relaciona com outras proposições. [...] O professor não precisa saber apenas *que* algo é de determinada forma, o

[94] No original: "Klein, Pólya, and Freudenthal all saw the value of helping teachers develop mathematical knowledge that went beyond the content they would teach and was more synoptic than the typical university mathematics course. They all saw that teachers need to know more than how to do the mathematics they are teaching; teachers need the specialized mathematical knowledge and skill that will give them a broad perspective on the field and equip them to work with learners." (KILPATRICK, 2008, p.12)

professor deve saber ainda *porque* é dessa forma, em que bases sua garantia pode ser afirmada, e sob que circunstâncias ou crenças sua justificação pode ser enfraquecida ou negada. Mais ainda, esperamos que um professor saiba porque um tópico específico é particularmente central para a disciplina enquanto que outro pode ser um tanto periférico. [95] (SHULMAN, 1986, p.9, tradução nossa)

Ball e Bass (2009) afirmam que há complementariedade entre a concepção de *conhecimento de matemática para o ensino* (BALL, BASS, 2003; BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e as ideias de Klein, identificando um subdomínio desse conhecimento que encerra,

> um tipo de perspectiva elementar em um conhecimento avançado que equipa os professores com uma visão e uma orientação mais amplas e também mais particulares sobre o seu trabalho. Isso pode incluir a capacidade de ver "por trás", a forma como os encontros anteriores informam os mais complexos, bem como a forma como os atuais irão moldar e interagir com os posteriores.[96] (BALL, BASS, 2009, p.10, aspas como no original, tradução nossa)

Relativamente à tradução do título da obra de Klein para a língua inglesa, de fato, o termo *advanced* (avançado) sugere para a *matemática elementar* uma conotação de atrasada, identificando partes estanques da Matemática e corroborando para o consentimento de uma descontinuidade entre a matemática elementar e a Matemática Superior. Certamente, sob a perspectiva do conhecimento de matemática do professor e sobre a concepção da Matemática como ciência, esse juízo é justamente o contrário do que Klein exprimia em seu trabalho, "Klein partiu de uma união entre elementar e superior". (SCHUBRING, 2014, p.41).

---

[95] No original: "To think properly about content knowledge requires going beyond knowledge of the facts or concepts of a domain. […] We expect that the subject matter content understanding of the teacher be at least equal to that of his or her lay colleague, the mere subject matter major. The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. Moreover, we expect the teacher to understand why a given topic is particularly central to a discipline whereas another may be somewhat peripheral." (SHULMAN, 1986, p.9)

[96] No original: "Felix Klein (1924) offered the attractive and oft-cited idea of "a higher perspective on elementary mathematics." Our notion of 'horizon knowledge' complements his. We hypothesize it as a kind of elementary perspective on advanced knowledge that equips teachers with a broader and also more particular vision and orientation for their work. This may include the capacity to see 'backwards,' to how earlier encounters inform more complex ones, as well as how current ones will shape and interact with later ones." (BALL, BASS, 2009, p.10)

2.3 MAS O QUE É MATEMÁTICA ELEMENTAR NO SENTIDO DE KLEIN?

Ancorado na compreensão da Matemática sob a ideia de um corpo orgânico, Klein qualifica a percepção hierárquica e estanque entre Matemática Escolar e Matemática Universitária como um obstáculo a ser vencido (KILPATRICK, 2008a; SCHUBRING, 2014). Para o autor, já no início da vida profissional, o professor precisa estar especialmente preparado para lidar com as questões que enfrentará. Seu entendimento fica claro quando se dirige ao estudante que acompanha as lições que compõem a sua obra,

> Se não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos *elementos fundamentais da matemática*, bem como das relações vitais entre os seus ramos e as outras ciências. Se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico, os vossos passos serão muito inseguros. Retirar-se-ão, então, para o campo da matemática pura mais moderna, e não serão compreendidos na escola secundária ou sucumbirão ao assalto, desistirão do que aprenderam na universidade, e, mesmo na vossa maneira de ensinar, deixar-se-ão enterrara na rotina tradicional. (KLEIN, 2009, p.127, itálico nosso)

Klein identifica como *matemática elementar* as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Assim, não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior – são partes que se fundem e se arranjam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência (SCHUBRING, 2003). Schubring (2003, 2014) afirma que essa visão de Klein corresponde às concepções do Iluminismo sobre como tornar uma ciência ensinável, ou como difundir um saber científico na sociedade. Neste sentido, não há diferenças de qualidade entre as partes elementares e as partes superiores. Os elementos são considerados como o "germe" das partes mais desenvolvidas (SCHUBRING, 2014, p42):

Jean d'Alembert (1717–1783), em sua contribuição para a reconhecida obra Iluminista, *Encyclopédie,* conceituou o que chamou de *elementarizar* uma ciência, estabelecendo conexão entre elementos e o todo, "Em geral, chama-se de elementos de um todo às partes primitivas e originais das quais se pode supor que este todo é formado". (D'ALEMBERT, 1755, apud SCHUBRING, 2003, p.63.) Assim, *Elementarizar* uma ciência significa identificar seus elementos. Idealmente, esse processo pressupõe uma seriação lógica e contínua de todas as proposições que determinam uma ciência.

> Essas proposições, reunidas em um corpo, formarão, propriamente falando, os elementos da ciência, pois esses *elementos* serão como um germe que seria suficiente desenvolver para conhecer os objetos da ciência bem detalhadamente. (D'ALEMBERT, 1755, apud SCHUBRING, 2003, p.65.)

Segundo Schubring (2014), a abordagem epistemológica proclamada por d'Alembert se reflete na obra de Klein na medida em que se propõe a explicar interligações e conexões entre as partes da matemática que são normalmente tratadas de forma estanque e a estabelecer ligações entre o particular e todo da matemática, visando ao entendimento e à apreciação da natureza dessa ciência.

Assim, na concepção de Klein, matemática elementar não é sinônimo de uma matemática facilitada, tampouco se refere a uma matemática simples ou fácil. Por exemplo, o conceito de número não é propriamente um conceito fácil, envolve em sua essência abstração e a noção de correspondência biunívoca, além de encerrar diferentes propriedades e características, determinando os diversos universos numéricos. O que há de fácil no conceito de números real? A história revela, a partir do percurso do conceito de número até sua concepção atual, que não se trata de algo fácil, nem que possa ser facilitado. No entanto, ninguém discute seu valor *elementar*, no sentido de Klein, para a Matemática. O mesmo vale para, por exemplo, os conceitos de variável e de função. Além disso, há que se observar que um conceito pode ser elementar para outro, que por sua vez será elementar para um terceiro. Por exemplo, o conceito de variável é elementar para o conceito de função e função para as equações diferenciais. Para as equações diferenciais é necessário que função adquira o estatuto de objeto, não cabendo apenas o seu entendimento como um processo – função será a solução de uma equação diferencial.

Figura 2.1: Esquema ilustrativo da relação entre os conceitos de variável, função e equações diferenciais.

A matemática elementar proclamada por Klein também não pode ser entendida como sinônimo de Matemática Escolar. No sentido de Klein, a matemática elementar integra a Matemática como um corpo de conhecimento, permeando todo o seu arcabouço teórico. No entanto, é natural que conceitos matemáticos elementares sejam tratados na formação matemática inicial, ou seja, na formação matemática básica, que é própria da escola. Assim, a matemática elementar é preponderante na Matemática Escolar, ainda que não seja exclusiva dessa dimensão. Além de necessariamente envolver a matemática elementar, a Matemática Escolar tem suas características e seus regulamentos próprios. Por exemplo, a operação de adição, no corpo da Matemática Superior, pode ser reduzida a uma relação binária definida em um determinado conjunto. No entanto, na Matemática Escolar, essa operação precisa ser munida de significado, sendo associada ao significado de reunir e às ideias de juntar e de acrescentar, exige a compreensão de procedimentos de cálculo e ser relacionada a situações e a problemas concretos. Desta forma, também a Matemática Escolar fica distanciada de uma ideia de matemática facilitada ou diluída. A Matemática Escolar compreende um conjunto de saberes próprios que não podem ser reduzidos a uma simples transposição dos saberes acadêmicos, muitas vezes associada à ideia de "simplificação" ou "facilitação" dos saberes acadêmicos.

Tendo como referência as ideias de Klein, Bass (2005) observa que, "Matemáticos que não voltam séria atenção à educação matemática, muitas vezes deixam de apreciar as sutilezas cognitivas e epistemológicas de ensino da matemática elementar" (BASS, 2005, p. 419, tradução nossa). Bass ilustra o seu entendimento, destacando a importância da matemática elementar tratada na escola a partir do destaque de um trecho do texto do próprio Klein:

> Apesar de existirem muitos exemplos que permitem clarificar o conceito de número negativo, não devemos pensar que a sua introdução na escola é fácil, longe disso. Apresenta-se aqui pela primeira vez a transição da matemática prática para a matemática formal, e para dar esse passo é necessária uma grande capacidade de abstração[97] (KLEIN, 2009, p.32, tradução nossa)

Esse entendimento, além de revelar a concepção de Klein sobre a relação entre o *saber elementar* e o *saber superior*, explica sua percepção sobre a relação desses com o *conhecimento de conteúdo* do professor. Mais ainda, sugere que o entendimento de Klein acerca do *saber de matemática* do professor se alinha às ideias atuais sobre o *conhecimento de conteúdo para o ensino* (SHULMAN, 1986, 1987; BALL, BASS, 2003; BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Klein enfatiza a importância fundamental de um ***metassaber*, isto é, um *saber sobre o saber***. Para Schubring (2012, 2014), esse *metassaber* tem um caráter essencialmente epistemológico, indicando que o saber do professor deve alcançar a dimensão da natureza desses

---

[97] No original: "Mathematicians who have not turned serious attention to mathematics education often fail to appreciate the cognitive and epistemological subtleties of elementary mathematics instruction. Here is a sample passage that evokes Klein's sensitivity to these matters. (BASS, 2005, p.149)

Let us realize once and emphatically how extraordinarily difficult in principle is the step, which is taken in school, when negative numbers are introduced. Here, for the first time, we meet the transition from concrete to formal Mathematics. The complete mastery of this transition requires a high order of ability in abstraction."(KLEIN, apud Bass, 2005) conceitos, indo além dos conceitos e teorias a serem ensinados, trata-se de "um tipo de saber que organiza e guia o professor na sua prática em sala de aula" (SCHUBRING, 2012, p.7). Schubring resgata a origem desse conceito, atribuindo-o a B. O. Smith, em seu livro "Teachers For The Real World" (1969). Nesse texto, Smith distingue um "saber *sobre* o conteúdo a ser ensinado":

> "Há muito é reconhecido que o conhecimento do professor sobre o conteúdo que ensina tem influência sobre o que esse professor faz em prática. [...] O conhecimento de psicologia do professor [...] também influencia em suas atitudes em relação a seus alunos e em certa medida molda como irá lidar com os alunos e com o conteúdo que ensina. Apenas recentemente, foi reconhecido que existe um outro tipo de conhecimento que pode influenciar o desempenho do professor: aquele usado ao pensar sobre o assunto e nas articulações lógicas usadas ao manipulá-lo. [...] O que é indicado aqui como saber *sobre* o conteúdo a ser ensinado"[98] (SMITH, 1969, p.125, tradução nossa, itálico como no original)

Para Schubring, "somente com uma própria visão da natureza e do desenvolvimento da Matemática, o professor há de ser capaz de fazer com que seus alunos construam conceitos matemáticos adequados" (SCHUBRING, 2012, p.7).

2.4 O Papel da Escola na Elementarização do Saber

O conceito de *matemática elementar* tem caráter fundamental para a percepção, nos termos de Klein, da relação entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica e, consequentemente, para a formação do professor e para o ensino e a aprendizagem da disciplina.

Historicamente, a relação entre Matemática, Matemáticos e Educação Matemática, é relativamente recente e ainda instável (SCHUBRING, 2003, 2014, BASS, 2005). Klein, a sua época, não é indiferente ao alheamento conjuntural entre a Matemática Escolar e o progresso da ciência, que reconhece no que identifica como dupla descontinuidade na formação do professor.

---

[98] No Original: "It has long been recognized that the teacher's knowledge of his subject matter has a controlling influence on what he does in the classroom. […] The teacher's psychological knowledge […] also influences his attitudes towards pupils and shapes in some degree how he will deal with pupils and the content of instruction. It has only recently been recognized that there is another sort of knowledge that can influence the performance of the teacher: that used in thinking about the subject matter and the logical operations used in manipulating it. […] What is meant here knowledge *about* subject matter." (SMITH, 1969, p.125, itálico como no original)

Em sua ação profissional, Klein impõe-se o desafio de alterar essa situação. Para esse propósito, o matemático não aprova o entendimento de uma transposição direta do saber matemático para a escola, segundo a qual cabe à escola apenas o papel de receber, sob uma postura passiva, o conhecimento produzido na academia. Klein lida com a relação entre esses domínios do saber a partir do entendimento de uma variável histórica, admitindo um processo de *elementarização* por meio do qual a Matemática Superior, à medida que é mais bem compreendida, permite a ampliação da possibilidade da compreensão e da difusão de seus conceitos – *translação histórica.* (SCHUBRING, 2014) Assim, cabe à escola não só difundir o conhecimento elementar, como também contribuir para a *elementarização* e para o desenvolvimento da própria Matemática.

Por exemplo, para Klein, em sua época, era fundamental que o conceito de função alcançasse a formação básica, ampliando a compreensão e difusão do estudo de cálculo. Em termos atuais, em uma comparação bastante simplificada, observamos a difusão de conhecimentos de matemática finita e de estatística, revelando demandas contemporâneas da pesquisa de fronteira. Na perspectiva da translação histórica, a escola assume papel de autoridade e independência na avaliação das necessidades do ensino e da formação, estabelecendo seleção e adaptações no conhecimento produzido na academia.

A ideia de *translação histórica* identificada no trabalho de Klein sugere paralelos com a ideia de Davis e Renert (DAVIS, RENERT, 2009b, 2014) acerca do papel do professor na produção de uma *matemática cultural*. Um dos pressupostos que determina um *concept study* (DAVIS, RENERT, 2009b; DAVIS, 2010, 2014) indica que, a partir seleção de interpretações particulares e da ênfase dada a elas em detrimento de outras, professores dão forma e substância à Matemática, constituindo assim uma *matemática cultural*.

> Nós usamos o termo (matemática cultural) para nos referirmos a toda e qualquer matemática que se estende a partir da matemática formal. Para ser preciso, vemos matemática formal como a matemática dos matemáticos – o critério dos resultados de matemática, desenvolvido ao longo de milhares de anos, o que está bem resumido em livros didáticos de matemática da escola básica. Matemática Cultural é tudo o que se encontra fora desse contexto. São as analogias, metáforas, aplicações, sistemas, discursos e práticas que se relacionam com a matemática, mas não são vistos tradicionalmente como matemática formal. [...] Mas, como a matemática da escola é a fonte principal de informação matemática para a maioria dos membros da nossa sociedade, a forma como a matemática é promulgada na escola é a maneira

como ela é entendida e promulgada pela sociedade como um todo.[99] (DAVIS, RENERT, 2014, p.105, tradução nossa)

O trabalho de Davis sugere que a discussão coletiva, em grupos de professores, com foco em conceitos matemáticos e a partir da troca de experiências com base na prática de sala aula (segundo a metodologia de *concept study*) pode contribuir para a constituição de uma *matemática cultural*, compartilhada pelos professores participantes. Essa matemática cultural constitui um componente essencial para a produção de conhecimento em matemática, pois forma o alicerce sobre o qual novo conhecimento pode ser produzido. Assim, a constituição de uma matemática cultural caracteriza, de forma não hierárquica à academia, o papel da escola no processo de translação histórica da matemática.

2.5 MATEMÁTICA ESCOLAR E MATEMÁTICA SUPERIOR – OUTRAS CONTRIBUIÇÕES

Reafirmando que não é propósito deste trabalho discutir ou explicar o conhecimento de Matemática como ciência, acredita-se que ampliar a reflexão sobre o tema com foco na caracterização da Matemática Escolar e da Matemática Científica será importante para a melhor compreensão da conceituação e da investigação aqui planejada. A caracterização dessas dimensões determina aspectos específicos sobre a relação entre a Matemática Científica e a Matemática Escolar e influencia ideias, concepções e ações acerca da formação do professor de Matemática. Serão elencadas, sem uma discussão maior, algumas referências que orientam a percepção dessa relação com especial atenção às ideias de Chevallard (1991) e Chervel (1990).

Neste estudo, percebe-se que, a noção de *translação histórica* indicada por Klein, pautada em uma relação intrincada entre a Matemática Escolar e a Matemática Científica que se funda nos processos de elementarização e de desenvolvimento da Matemática como ciência,

---

[99] No original: "We use the term to refer to any and all mathematics that extends formal mathematics. To be precise, we view formal mathematics as mathematicians' mathematics – the canon of mathematics results, developed, over thousands of years, which is neatly summarized in school mathematics textbooks. Cultural mathematics is all that resides outside of that. It is the analogies metaphors, applications, systems, discourses, and practices that relate to mathematics but are not traditionally seen as formal mathematics. […] But since school mathematics is the foremost source of mathematical information for most members of our society, the way mathematics is enacted in school is the way it is understood and enacted by society large." (DAVIS, RENERT, 2014, p.105)

adquire uma perspectiva fortemente diferente da ideia de ***transposição didática*** de Chevallard (1991). Em sua obra, Chevallard investiga o fenômeno da passagem do *saber sábio*[100] – entendido em consonância à ideia de Matemática Científica – ao *saber ensinado*[101] – aquele que determinará a Matemática Escolar. Para o autor,

> um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino.* O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um *objeto de ensino* é denominado transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p.45 – itálico e aspas como no original).

Nesse contexto, as ideias de *saber a ensinar* e de *saber ensinado* sustentam o saber escolar, cujo entendimento alinha-se à concepção de Matemática Escolar. O saber a ensinar é aquele selecionado para ser ensinado na escola básica, já o saber ensinado é aquele que alcança a sala de aula, registrado no plano de aula do professor. Ambos têm sua referência original no saber científico, reconhecido como um saber próprio da universidade.

A perspectiva de Chevallard não diverge do entendimento de uma componente histórica que pressupõe a indicação de partes essenciais que alinhavam as duas dimensões em tela, escolar e científica (PAIS, 2005). No entanto, entende-se que o autor concebe a Matemática Científica como uma fonte privilegiada de saber à qual o sistema escolar recorre e se adapta para determinar a matemática que deve contemplar (MOREIRA, DAVID, 2007). Nesse cenário, acata-se claramente uma cisão entre essas dimensões. Segundo Pais (2005), para Chevallard,

> o saber científico trata-se de um saber criado nas universidades e nos institutos de pesquisa, mas não está necessariamente vinculado ao ensino básico. Sua natureza é diferente do saber escolar". [...] Enquanto o saber científico é apresentado através de artigos, teses, livros e relatórios; o saber escolar é apresentado através de livros didáticos, programas e de outros materiais. (PAIS, 2005, p.21,22)

Já para Moreira, (2004),

> na noção de matemática escolar que deriva do processo de transposição didática de Chevallard, embora se conceda algum espaço de autonomia e de produção de conhecimento à prática do professor na sala de aula da escola, há, ao que nos parece, um hiper-dimensionamento do saber científico, reduzindo-se a matemática escolar a uma espécie de resultado do processo de didatização da matemática científica. (MOREIRA, 2004, pp.17,18)

---

[100] No original, em francês, *savoir savant.*

[101] No original, em francês, *savoir enseigné.*

Para Moreira (2004) a Matemática Escolar, como resultado do processo de transposição didática,

> se constituiria essencialmente através da adaptação, à escola, dos conceitos, métodos e técnicas da matemática científica — e, portanto, ainda que indiretamente, das suas normas e dos seus valores. Além disso, tal processo de adaptação estaria sujeito a uma "vigilância epistemológica" (termo do próprio Chevallard) que não permitiria "desvios" em relação ao conhecimento matemático científico. (MOREIRA, 2004, p.16)

Dessa forma, a Matemática Escolar pode ser entendida "como fundamentalmente "dada" (pela matemática científica), ao invés de "a ser explicada" (em termos de seus múltiplos condicionantes)" (MOREIRA, 2004, p.16).

Valente, (2003), observa que

> O entendimento dos saberes escolares, ancorado na teoria da transposição didática, dá-se a partir da análise da origem de conceitos que em algum momento fizeram parte do saber científico, e que sofreram um processo de transposição. Assim, dentro da perspectiva da didática das disciplinas, o significado dos conteúdos escolares deverá ser buscado na história das transposições efetuadas para constituí-lo. (p.5)

Assim, a escola básica, observada a partir da atuação do professor, não se furta a uma ação autoral. No entanto, sua influência se evidencia como agente que molda de forma particular o saber a ensinar e determina o saber ensinado, enfatizando a dimensão didático-pedagógica da intervenção. Pressupõem-se dessa forma uma influência estrita à Matemática Escolar que não alcança a Matemática Científica, podendo até determinar distorções (PAIS 2005). Destacando a relação entre pedagogia e conteúdo, Moreira e David (2003) analisam em que medida a noção de saber pedagógico de conteúdo de Shulman (1986) se distancia (ou se aproxima) da ideia de transposição didática de Chevallard (1991) e concluem:

> Embora o "conhecimento pedagógico do conteúdo" se refira, essencialmente, a uma mistura entre pedagogia e conteúdo — mistura essa que se destina a tornar mais compreensível, para o aluno, um determinado objeto de ensino — uma diferença fundamental desse conceito em relação à noção de transposição didática (CHEVALLARD, 1991) é, ao nosso ver, a fonte que engendra o primeiro como uma construção de saber: a prática docente em sala de aula, em oposição às teorias científicas da educação ou da didática da matemática. Nesse sentido, o "conhecimento pedagógico do conteúdo" não é algo produzido e regulado a partir do exterior da escola e que deva ser transladado para ela, mas, ao contrário, trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas. (MOREIRA, DAVID, 2003, p.70)

Entende-se aqui que na reflexão apresentada por Chevallard (1991), ainda que seja identificado um saber do professor que se estabelece a partir da prática letiva, não se delineiam especificamente considerações sobre o saber de conteúdo necessário ao professor da escola básica, nem se constitui um modelo que dê conta, de forma mais ampla, da complexidade que envolve os saberes docentes, a sua produção e a sua apropriação.

> Se a Matemática Escolar é concebida como mero subconjunto da Matemática Científica, a tendência é reduzir a primeira à parte elementar (no sentido de fácil) da última, com a consequente desqualificação do conhecimento matemático escolar frente ao acadêmico. Nesse processo, a matemática Escolar acaba se tornando apenas o componente fácil, simples e básico do complexo e sofisticado edifício da matemática Científica. Essa concepção pode implicar, ainda, a ideia de que não há muito sobre o que investigar, questionar ou refletir sobre a Matemática Escolar e associar a ela a condição de conhecimento naturalmente "dado" dentro do processo de formação profissional do professor. (MOREIRA E DAVID, 2007, p.34)

Moreira e David (2007) observam ainda que esse entendimento pode ter serias influencias para os modelos de formação do professor, corroborando para a uma percepção e uma organização que segregue conhecimentos que se referem ao conteúdo disciplinar e conhecimentos referentes ao desenvolvimento didático-pedagógico.

Chervel (1990), ao propor uma reflexão sobre o campo de pesquisa constituído pela história das disciplinas escolares, também contribui para a discussão sobre as relações entre a Matemática Científica, tratada como ciência de referência, e a Matemática Escolar, considerada na perspectiva da disciplina escolar. Esse autor defende um entendimento diferente do de Chevallard.

Valente (2003) destaca que, para Chervel, a disciplina escolar não representa uma vulgarização dos saberes científicos, não podendo ser reduzida a uma lista de conteúdos que devem ser ensinados e que é constituída fora do espaço escolar,

> a escola não se define por uma função de transmissão de saberes, ou de iniciação às ciências de referência [...] quando a escola recusa, ou expulsa depois de uma rodada, a ciência moderna não é certamente por incapacidade dos mestres de se adaptar, é simplesmente porque seu verdadeiro papel está em outro lugar e ao querer servir de reposição para alguns "saberes eruditos", ela se arrisca a não cumprir sua missão. (CHERVEL, 1990, pp.181, 182, aspas como no original).

Assim, Chervel defende que a Matemática Escolar seja parte integrante do universo de ensino da escola, se construindo historicamente a partir da prática e da cultura escolar. Nesse sentido, para Chervel,

> a disciplina escolar é constituída por combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam, evidentemente, em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207)

Valente (2003) observa que:

> As pesquisas de Chervel (1990) pretendem revelar-nos que as disciplinas escolares são criações espontâneas e originais do sistema escolar, isto é, a escola não vulgariza as ciências ou faz delas uma adaptação para os alunos; a escola constitui o lugar de criação das disciplinas (CHERVEL, 1990, p. 184.).
>
> Desse modo, as disciplinas escolares constituem, ao mesmo tempo, produto histórico do trabalho escolar e instrumento de trabalho pedagógico. Tudo que tiver que ser ensinado no cotidiano escolar deverá, portanto, passar pelo crivo do disciplinar. Deverá conformar-se segundo o modelo disciplinar. O saber a ser transmitido na escola, produto que ela mesma elaborou historicamente, segundo Chervel (1990), vem sempre acondicionado no interior das disciplinas escolares.(VALENTE, 2003, p.3)

Moreira (2004) observa que Chevel "ao mesmo tempo em que abre o caminho para se conceber a matemática escolar como uma construção fundamentalmente associada à prática e à cultura escolar, parece, por outro lado, fechar as portas à consideração dos múltiplos mecanismos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do espaço estritamente escolar" (MOREIRA, 2004, p.18).

As ideias de Chervel também não encerram um modelo que dê conta, de forma mais ampla, da complexidade que envolve os saberes docentes, a sua produção e a sua apropriação. Uma vez que admitem um distanciamento nas relações entre a Matemática Científica e a Matemática Escolar, permitem a dicotomia entre as diversas dimensões que compõem os saberes docentes, em particular não sustentando a ideia de um metassaber, nem de um saber de matemática para o ensino.

	Matemática Científica e Matemática Escolar	**Saber de matemática para o ensino**
Klein	A Matemática Científica e a Matemática Escolar estão imbricadas a partir de um processo de **translação histórica** sustentada pela elementarização.	Implica no reconhecimento de um saber do conteúdo que é próprio do professor – **metassaber**.
Chevallard	A Matemática Científica e Matemática Escolar se relacionam a partir do processo de **transposição de didática**, que estabelece uma relação hierárquica, segundo a qual a academia produz o saber sábio que é transformado em saber a ser ensinado e saber ensinado no ambiente escolar.	Não identificam o reconhecimento de um conhecimento de matemática próprio do professor, corroborando para modelos de formação que segreguem conteúdo disciplinar e conhecimentos didático-pedagógicos.
Chervel	A Matemática Escolar, observada a partir das disciplinas, é percebida como **criações espontâneas e originais do sistema escolar**, isto é, a escola não vulgariza as ciências ou faz delas uma adaptação para os alunos; a escola constitui o lugar de criação das disciplinas – indicando uma certa independência entre a Matemática Escolar e a Matemática Científica.	Ainda que contemple o conhecimento da disciplina de forma articulada com aspectos pedagógicos e com a prática, abre espaço para a admissão de uma dicotomia entre o saber científico e o saber escolar , o que certamente distancia a academia da escola.

Figura 2.2: Tabela resumo: ideias de Klein, Chevallard e Chervel

Encerra-se esta seção, com destaque para a evidente importância da contribuição de Klein para a Educação Matemática. Observadas sua fundação e sua abrangência minuciosa, a obra de Klein configura uma influência inaugural e profunda para a Educação Matemática como um campo de pesquisa, se apresentando ainda como inspiradora e atual

Capítulo 3

CONCEPT STUDY[102]: FUNDAMENTOS E PRESSUPOSTOS

> *"Para transformar as salas de aula, é necessário estabelecer concepções de transformação para a matemática dos professores."*
>
> Brent Davis

3.1 O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DISCIPLINAR DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Para Brent Davis[103], professor e coordenador de Pesquisa em Educação Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de Calgary, Canadá, a maioria dos estudos com foco no conhecimento do conteúdo disciplinar do professor de matemática com vistas ao ensino se baliza por descrições de características e/ou demonstrações de sua relação com a aprendizagem dos estudantes (Davis, 2010). Davis entende que, além de alcançar essas questões, é necessário que a investigação sobre o tema contemple a habilidade dos professores para o ensi-

---

[102] Nesta Seção alguns termos serão mantidos no idioma original, ou seja, em língua inglesa. Essa opção se justifica por não haver ainda um paralelo consolidado para a tradução desses termos na produção científica em língua portuguesa. Dentre eles, se destacam *concept study*, *complexity science*, *concept analysis* e *Lesson study*. Cumpre ressaltar que o termo *lesson study* já é observado com maior frequência na produção científica em língua portuguesa, admitindo a tradução *pesquisa de aula* (Baldin, 2009, Baldin, Felix, 2011).

[103] Brent Davis é professor e coordenador de Pesquisa em Educação Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de Calgary, Canadá (http://werklund.ucalgary.ca/profiles/brent-davis). Antes de ocupar este cargo na Universidade de Calgary, Davis atuou, na área de Educação Matemática, na Universidade de British Columbia (2006-2009 e 1994-1997), na Universidade de Alberta (2001-2006) e na Universidade de York, em Toronto (1997-2001). Brent Davis completou seu doutorado na área de educação matemática e currículo da Universidade de Alberta, em 1994. Durante a década de 1980, Davis atuou como professor em uma escola de ensino básico no norte de Alberta. Brent Davis é também autor e co-autor de livros sobre ensino e aprendizagem, pedagogia e pesquisa. (Informações disponíveis na página do autor: http://brentdaviscalgary.appspot.com/ – consulta em novembro de 2013).

no e em como ela se estabelece e se desenvolve. O autor acredita que, “para transformar as salas de aula, é necessário estabelecer concepções de transformação para a matemática dos professores”[104] (DAVIS, 2010, p.I-64, tradução nossa). Embasado em sua experiência de investigação (DAVIS, 2008a, 2008b, 2010, 2012, DAVIS, SIMMT, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b) o autor defende que o conhecimento de matemática dos professores para o ensino deve ser preponderantemente enquadrado sob uma perspectiva dinâmica, suplantando a ideia de um corpo estável de conhecimento. Para Davis, “o conhecimento de matemática do professor é tão extenso e tão dinâmico que não pode ser abarcado em um conjunto de recursos ou comprimido em período de estudo”[105] (DAVIS, RENERT, 2009b, p.41).

No artigo “*Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know*”, Davis e Simmt (2006) investigam o conhecimento de matemática do professor com vistas ao ensino, tendo como referência os conceitos de *matemática para o ensino* (BALL, BASS, 2003) e de *complexity science*[106] (DAVIS, SIMMT, 2003). Davis e Simmt (2006) defendem que “o conhecimento de matemática necessário para o ensino não é uma versão diluída da matemática formal”[107] (DAVIS, SIMMT, 2006, p 295, tradução nossa) e que esse conhecimento deve ser entendido como um ramo específico da Matemática. Para Davis e Renert (2014), o conhecimento de matemática para o ensino, necessário aos professores, apesar de décadas de intensa pesquisa, ainda não é bem compreendido.

> Matemática para o ensino compreende uma complexa rede de entendimentos, disposições e competências que não são facilmente nomeados nem medidos. A complexidade imbricada na matemática para o ensino deve ser experimentada – vista, ouvida e sentida.[108] (DAVIS, RENERT, 2014, p.3, tradução nossa)

---

[104] No original: “In order to transform classroom settings, there is a need to design transformative settings for teachers’mathematics.” (DAVIS, 2010, p.I-64)

[105] No original: “Teachers, mathematics knowledge is too extensive and too dynamics to capture in a set of resourses or compress into a course of study.” (DAVIS, RENERT, 2009b, p.41)

[106] *Complexity science* – De acordo com Davis, Smmit (DAVIS, SMMIT, 2003, 2006), a diversidade da abrangência do conceito de *complexity science* dificulta a formulação de uma única definição. Para esses autores, *complexity science* pode ser descrita como uma ciência dos sistemas de aprendizagem, em que a aprendizagem é entendida em termos de comportamentos adaptativos de fenômenos que surgem nas interações de múltiplos agentes. Trata-se de um modelo de estudo baseado em dinâmicas variadas, co-implicações e níveis integrados, incluindo o neurológico, o experiencial, o material/contextual, o social, o simbólico, o cultural e o ecológico – em vez de fenômenos isolados.

[107] No original: “The subject matter knowledge needed for teaching is not a watered down version of formal mathematics.” (DAVIS, SIMMT, 2006, p.295).

[108] No original: “M_4T (Mathematics for teaching) comprises a complex network of understandings, dispositions, and competencies that are not easily named or measured. The embodied complexity of M_4T must be experienced – seen, heard and felt.” (DAVIS, RENERT, 2014, p.3)

Com esse entendimento, os autores propõem uma discussão teórica sobre o conhecimento de matemática para o ensino usando *complexity science* (DAVIS, SIMMT, 2003, 2006) como referência para conduzir uma investigação que estuda a interação entre professores reunidos com o objetivo de aprender matemática para ensinar.

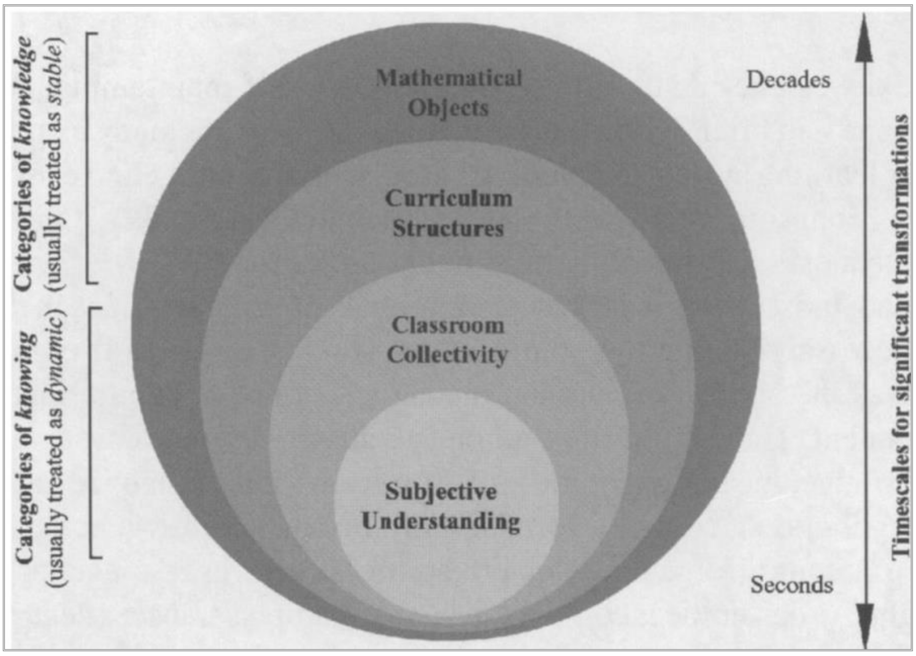


Figura 3.1: Modelo 1 representativo da concepção do conhecimento de matemática para o ensino sob a perspectiva de complexity science. segundo Davis, Simmt (DAVIS, SIMMT, 2006, p.296).

Davis e Simmt (2006) observam e discutem o conhecimento de matemática para o ensino a partir da identificação de quatro aspectos que, se aninham, integram e interagem de forma fluente na prática docente: (i) objetos matemáticos, (ii) estruturas curriculares, (iii) coletividade do ambiente escolar e (iv) entendimento subjetivo[109]. Na perspectiva desses autores, a concepção do conhecimento de matemática para o ensino não deve compreender fronteiras sólidas entre os aspectos indicados, enfatizando a integração e co-implicação em detrimento a uma percepção isolada. Uma imagem ilustrativa e esclarecedora dessa concepção pode ser observada na Figura 3.1.

Os aspectos destacados dizem respeito aos objetos matemáticos, às concepções pessoais dos professores sobre o conteúdo, às interpretações culturais compartilhadas no ambiente escolar e à estrutura curricular que envolve matemática e o ensino. Este modelo se faz crucial

---

[109] No original: "*Mathematical objects*, *Curriculum Structures*; *Classroom Collectivity* e *Subjective Understanding*." (DAVIS, SIMMT, 2006)

para o entendimento e a sustentação da intenção dos autores de não estabelecer distinção rígida entre as ideias de coletivo/individual para o conhecimento de matemática para o ensino. Para Davis, Simmt (2006), compreensões individuais devem ser percebidas como envolvidas e como desdobramentos do fenômeno, mais amplo, da dinâmica coletiva pelo qual, por exemplo, padrões aceitáveis de argumentação e temas de interesse comum são definidos. O modelo como concebido pelos autores permite ainda problematizar a distinção entre estável/dinâmico.

> [...] compreensões individuais tendem a ser percebidas como altamente voláteis (portanto capazes de serem facilmente afetadas, embora não necessariamente de forma previsível) enquanto a matemática formal é vista como altamente estável (e muitas vezes como pré-estabelecida ou fixada). Considerando um período relativamente curto de tempo, é possível observar modificações na compreensão de um indivíduo sobre uma determinada parte da matemática, modificações análogas do corpo da matemática levam muito tempo. [110] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.297, tradução nossa).

Para exemplificar a questão, os autores apresentam a introdução do zero no sistema numérico ocidental, que ocorreu ao longo de séculos em contraste com as etapas de aprendizagem que um estudante contemporâneo percorre até que seja apresentado a um sistema de numeração que admita o zero.

Amparados nas ideais descritas acima e confirmando a concepção do conhecimento de matemática para o ensino sob uma perspectiva dinâmica e fluente e que se estrutura a partir de domínios que coexistem, interagem entre si e se integram, Davis, Simmt,(2006), propõem um segundo modelo para enfatizar as relações nessa estrutura complexa, ilustrado a partir da Figura 3.2.

Com essa nova imagem, esses autores objetivam destacar a natureza do entrelaçamento entre as categorias de conhecimento dos professores de maneira diferente da ideia de *aninhamento*, evidenciada na imagem apresentada anteriormente (Figura 3.1). Segundo Davis e Simmt, nessa segunda versão (Figura 3.2,), a imagem que ilustra seu entendimento sobre as relações na estrutura complexa é especialmente importante para distinguir as categorias de *conhecimento estável (Knowledge)* e de *conhecimento dinâmico* (*knowing*) e para chamar a

[110] No original: "...individual understanding tends to be seen as highly volatile (hence able to be readily affected, although not necessarily in predictable ways), whereas formal mathematics is seen as highly stable (and, often, as pre given or fixed). Whereas in a relatively short span of time, one can observe the transformation of an individual's understanding of a particular piece of mathematics, analogous transformations to the body of mathematics take considerably longer." (DAVIS, SMMIT, 2006, p.297)

atenção para o entendimento de que as categorias do conhecimento do professor obedecem a dinâmicas semelhantes.

> [...] a distinção fundamental não é entre produto e processo, mas entre os aspectos relativamente estáveis do conhecimento matemático e as qualidades um pouco mais voláteis que sustentam essa estabilidade. O princípio organizador fundamental em nosso trabalho com os professores é que um entendimento forte dessas dinâmicas é crucial para uma pedagogia eficaz e é um aspecto central de seu conhecimento matemático. [...] Defendemos que para *professores*, o conhecimento da matemática estabelecida é inseparável do conhecimento de como a matemática é estabelecida.[111] (Davis, SIMMT, 2006, p.297, itálico como no original, tradução nossa)

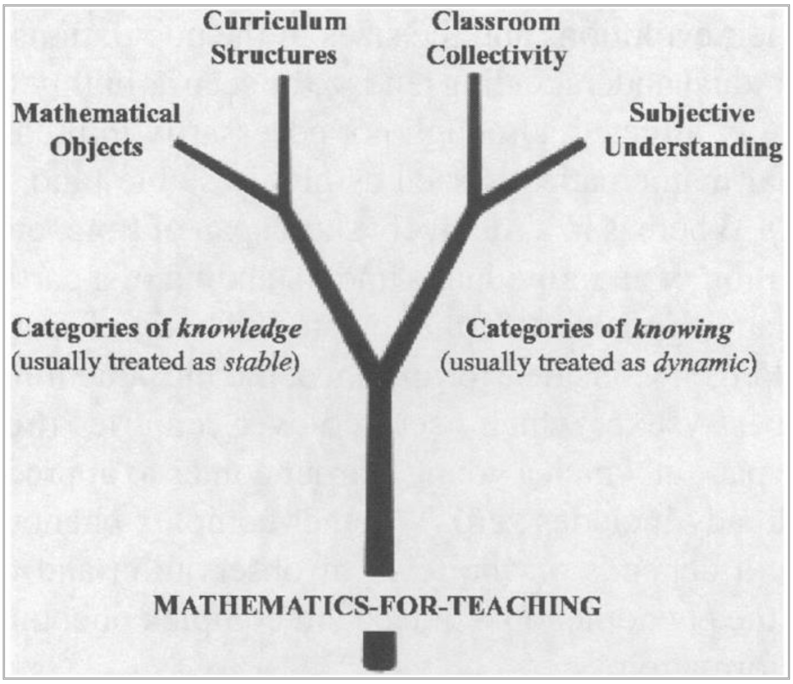


Figura 3.2: Modelo 2 representativo da concepção do conhecimento de matemática para o ensino sob a perspectiva da proposta de abordagem de pesquisa de Davis, Simmt (DAVIS, SIMMT, 2006, p.296).

No estudo apresentado por Davis e Simmt (2006), por exemplo, o conhecimento matemático dos professores sobre o conceito de multiplicação não foi considerado como separado (ou separável) do conhecimento de como o conceito pode ser ensinado, vinculando-o à práti-

[111] No original: "… the key distinction is not between product and process, but between relatively stable aspects of mathematical knowledge and the somewhat more volatile qualities that underpin that stability. A key organizing principle in our work with teachers is that strong senses of these dynamics are critical to effective pedagogy and a core aspect of their mathematical knowledge. […] we argue that, for teachers, knowledge of established mathematics is inseparable from knowledge of how mathematics is established." (DAVIS, SIMMT, 2009, p.297)

ca, nem de como o conceito pode ser articulado em um programa curricular. O trabalho desses autores está ancorado no pressuposto de que

> professores de matemática mais experientes têm conhecimento matemático suficiente para ensinar bem o assunto, embora grande parte desse *know-how* possa nunca ter sido considerado como um aspecto explícito da sua formação – e, de fato, pode não ser popularmente reconhecido como parte do corpo disciplinar formal de conhecimento.[112] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.298)

Para Davis e Renert (2014), a matemática para o ensino não pode ser entendida como um corpo estático de conhecimento, que pode estar compilado em um livro, por exemplo. Para esses autores, a matemática para o ensino é uma espécie de conhecimento que se faz real na ação, sendo inerente à flexibilidade de capacidade de resposta do professor em sua prática.

> Matemática para o ensino é uma forma de se relacionar com o conhecimento de matemática que possibilita ao professor estruturar situações de aprendizagem, interpretar conscientemente as ações dos alunos e ter flexibilidade para responder, de modo que permita aos alunos estender entendimentos e expandir o alcance de suas possibilidades de interpretações através do acesso a conexões poderosas e práticas apropriadas.[113] (DAVIS, RENERT, 2014, p.4, tradução nossa)

Assim, Davis e seus colaboradores propõem uma abordagem interpretativa que permite atender a aspectos explícitos e tácitos do conhecimento de matemática dos professores. Esses autores adotam um modelo para a investigação sobre o conhecimento de matemática para o ensino cujo foco se estabelece nas configurações e nos processos pelos quais o conhecimento dos professores é engajado, explicitado e envolvido. Em encontros pautados na reflexão coletiva, que sustentaram a investigação, os professores participantes são convidados a trabalhar em tarefas de interpretação e de resolução de problemas. Essas tarefas são desenvolvidas em torno de temas matemáticos selecionados pelos próprios professores de forma a permitir que alcançassem seu próprio conhecimento matemático para o ensino. Para Davis, Simmt (2006), essa metodologia envolve uma abordagem recursiva, no sentido de *complexity science*, resultando em elaborações do conhecimento dos professores participantes à medida que confrontam, analisam e misturam concepções, representações, conceitos e crenças. Assim, o método

[112] No original: "… most experienced mathematics teachers have sufficient mathematical knowledge to teach the subject well, although much of this know-how may never have been an explicit aspect of their educations - and, indeed, may not be popularly recognized as part of the formal disciplinary body of knowledge." (DAVIS, SIMMT, 2009, p.298)

[113] No original: "Mathematics for teaching is a way of being with mathematics knowledge that enables a teacher to structure learning situations, interpret student actions mindfully, and respond flexibly, in ways that enable learners to extend understanding and expand the range of their interpretive possibilities through access to powerful connections and appropriate practice." (DAVIS, RENERT, 2014, p.4)

é educativo, contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino.

3.2 *CONCEPT STUDY*

Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2008a, 2008b, 2010, 2011, 2012; DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014) identificam esse modelo de investigação como *concept study* – Estrutura de estudo coletivo em que professores compartilham sua experiência e seu conhecimento acumulado com o objetivo de questionar e elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. O estudo coletivo que caracteriza um *concept study* se desenvolve a partir da identificação, da interpretação, do questionamento, da proposição e da elaboração de imagens, metáforas, analogias, exemplos, exercícios, e aplicações que são evocadas (explicita ou implicitamente) sobre um determinado tópico de matemática analisado sob as perspectivas do ensino e da aprendizagem. Davis propõe *concept study* como um modelo potencialmente útil na formação inicial e continuada de professores.

O entendimento de *concept study* se estabelece a partir da combinação de duas noções importantes e atuais nas pesquisas em educação matemática: (i) *concept analysis* – com foco na explicação de estruturas lógicas e associações que são inerentes a conceitos matemáticos e (ii) *lesson study* – estrutura colaborativa em que professores se empenham em melhorar a qualidade de sua prática letiva.

Concept analysis, segundo Usiskin et al (2003), "envolve o rastreamento das origens e aplicações de um conceito, observando as diferentes formas em que aparece dentro e fora da matemática e examinando as várias representações e definições utilizadas para descrevê-lo incluindo suas consequências"[114] (USISKIN et al, 2003, p.1, apud Davis, 2010, p.I-65, tradução nossa). Assim, para Usiskin et al (2003), a questão "*o que paralelo significa?*" pode ser respondida com a ideia mais comumente encontrada nos livros escolares, que define retas paralelas no plano, mas também pode se referir a outras diferentes conceituações, como, por exemplo, planos paralelos, superfícies paralelas e vetores paralelos. As várias possibilidades evocam diferentes caracterizações: *ser correspondentemente equidistantes*; *ter interseção*

[114] No original: "Concept analysis involves tracing the origins and applications of a concept, looking at the different ways in which it appears both within and outside mathematics, and examining the various representations and definitions used to describe it and their consequences." (USISKIN et al, 2003, p.1, apud Davis, 2010, p.I-65).

vazia; *ter a mesma direção* e *ser obtida, uma a partir de outra, por translação*. No entanto, nenhuma dessas caracterizações é suficiente para definir retas paralelas no plano. Também não são equivalentes. Por exemplo, uma reta é paralela a si mesma apenas segundo as duas últimas caracterizações. Já em relação à primeira apenas se for admitida distância zero entre as retas. Já em relação à segunda, uma reta não é paralela a si mesma. Segundo Davis (2010), esses autores ampliam a descrição de *concept analysis* para incluir formas de representar ideias para os alunos, definições alternativas e suas implicações, história e evolução de conceitos, aplicações e interpretações dos aprendizes sobre o que estão aprendendo.

Lesson study, segundo Fernandez e Yoshida, se caracteriza por estruturas colaborativas nas quais "professores se envolvem para aperfeiçoar a qualidade da sua prática letiva e em enriquecer as experiências da aprendizagem de seus alunos"[115] (FERNANDEZ, YOSHIDA, 2004, p.2, apud Davis, 2010, p.I-65, tradução nossa). Davis destaca que, sob essa perspectiva, os estudos são orientados no sentido de fundar possibilidades pedagógicas que se estabelecem a partir de engajamento participativo, coletivo e permanente. (DAVIS, 2010). Baldin (BALDIN, 2009) destaca que *lesson study* é uma prática de pesquisa de origem japonesa, com mais de um século de história, que vem ganhando atenção mundial. Segundo essa autora,

> a Metodologia Lesson Study, como concebida e executada nas escolas japonesas, consiste em uma atividade de pesquisa de uma aula (ou uma sequência didática) por professores, sendo uma atividade de grupo formado por colegas professores, coordenadores pedagógicos e até mesmo dirigentes. (BALDIN, 2009, p.2)

Baldin (2009, 2011), que traduz *lesson study* como *pesquisa de aula*, esclarece que *lesson study* é uma atividade de pesquisa em grupo, geralmente realizada por professores de uma mesma disciplina, que propõe a oportunidade de os professores participantes refletirem sobre a própria prática de modo a promover e melhorar a aprendizagem efetiva de seus alunos. Tal proposta de estudo tem grande potencial para a formação docente e consiste, a partir da definição de um tema ou assunto do currículo escolar, essencialmente nas seguintes etapas: (i) planejamento de uma aula sobre o tema; (ii) execução dessa aula e (iii) reflexão sobre a aula dada. Essa última etapa vai além da melhoria da aula em análise, mas também objetiva o aprimoramento do professor.

A proposta de investigação de Davis se funda na combinação das ideias destacadas sobre *concept analysis* e *lesson study*. Assim, se traduz em um estudo coletivo e colaborativo,

---

[115] No original: "teachers engage in to improve the quality of their teaching and enrich student's learning experiences." (FERNANDEZ, YOSHIDA, 2004, p.2, apud Davis, 2010, p.I-65.)

que oferece aos professores participantes a oportunidade de refletirem sobre seus conhecimentos e sobre a sua prática, tendo como ponto de partida e como objeto de análise um conceito matemático.

Concept study se orienta a partir de quatro pressupostos:

> (i) No aspecto individual, entendimentos de conceitos matemáticos e concepções de matemática são emergentes.
> (ii) No aspecto cultural, professores são os participantes vitais na criação da matemática, principalmente por meio da seleção e da ênfase preferencial dada a interpretações particulares.
> (iii) Como aspecto coletivo social, o conhecimento de matemática dos professores é amplamente tácito, mas elementos cruciais desse conhecimento podem ser questionados em grupo.
> (iv) Saber individual e saber coletivo não podem ser dicotomizados; possibilidades coletivas envolvem e se desenrolam em entendimentos individuais.[116] (DAVIS, 2012, p.6, tradução nossa)

Davis e seus colaboradores (DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014, DAVIS, 2010, 2011, 2012) entendem que a escola e, consequentemente, os professores têm papel fundamental na construção e no desenvolvimento da matemática como ciência. Esse papel não está na produção direta de resultados matemáticos, como demonstrações de teoremas ou proposição de novas teorias, tampouco é um papel imediato. A contribuição da escola se estabelece em longo prazo, a partir de analogias, metáforas, aplicações, discursos e práticas que se relacionam com a matemática, mas que, tradicionalmente, não são vistos como matemática formal. Para esses autores, a matemática emergente do ensino, que se manifesta em um *concept study* por meio da reflexão dos professores participantes, encerra formas próprias do *fazer* matemática, constituindo uma matemática cultural. As reflexões partem de questionamentos, buscam significado, coerência e consistência, são coletivas e colaborativas e são validadas por todos os evolvidos.

> Professores são participantes vitais na criação de possibilidades matemáticas. Longe de serem agentes periféricos que passivamente transmitem resultados de matemática estabelecidos, os professores dão forma e substância a matemáticas culturais – isto é, não só a matemática formal, mas também para a gama de aplicações culturalmente situados, práticas e perspectivas que

[116] No original: "(i) At the individual level, understandings of mathematical concepts and conceptions of mathematics are emergent. (ii) At the cultural level, teachers are vital participants in the creation of mathematics, principally through the selection of and preferential emphasis given to particular interpretations over others. (iii) As the level of social collectives, teachers' knowledge of mathematics is largely tacit but critical elements of it can be made available to interrogation in group settings. (iv) Individual and collective knowing cannot be dichotomized; collective possibilities are enfolded in and unfold individual understandings."(DAVIS, 2012, p.6)

são ativadas pela matemática formal e por outros quadros de matemática de referência.[117] (DAVIS, RENERT, 2009b, p.45, tradução nossa)

Davis e seus colaboradores destacam também a relevância dos dois últimos pressupostos de um *concept study*, indicando que, sob a organização coletiva, a lista de metáforas, analogias e imagens estabelecidas para determinado conceito é superior em riqueza às interpretações estabelecidas individualmente por um docente.

Para Davis (DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014, DAVIS, 2010, 2011, 2012), relativamente ao conhecimento de matemática do professor, mais importante do que a variedade de representações que caracterizam esse conhecimento é a capacidade de realizar e reconhecer possíveis associações que podem emergir de forma explícita ou implícita entre essas representações. Tais associações ficam iminentes e são fundamentais no exercício da prática letiva. Davis e Simmt acreditam que:

> [...] uma competência chave (e talvez *a* competência chave) dos professores de matemática é a habilidade de mover-se entre imagens e metáforas subjacentes – isto é, de *traduzir* as noções de um sistema simbólico para outro.[118] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.303, itálico como no original, tradução nossa)

Para Davis (2012, 2014), um *concept study* permite uma (*re*)construção conceitual estabelecida a partir de um conhecimento já formado. Esse processo é identificado pelo autor como "*substruct*".

> *Substructing* é derivado do latim *sub*-, "debaixo, abaixo" e *struere* ", pilha, montagem" (e a raiz de *espargir* e *interpretar*, além de *estrutura* e *construção)*. *Substruct* se refere a construir debaixo de alguma coisa. Na indústria, *substruct* refere-se a reconstrução de um prédio sem demoli-lo – e, de preferência, sem interromper o seu uso. Da mesma forma, em *concept studies*, professores reelaboram conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los, quase que sem interrupção, no ensino.[119] (DAVIS, 2012, p.6, itálico como no original, tradução nossa)

---

117 No original: "[...] teachers are vital participants in the creation of mathematical possibilities. Far from being peripheral agents who passively transmit established results of mathematics, teachers give shape and substance to cultural mathematics – that is, not only to formal mathematics, but also to the range of culturally situated applications, practices, and perspectives that are enabled by formal mathematics and by other mathematical frames of reference." (DAVIS, RENERT, 2009b, p. 45)

118 No original: "We believe that a key (and perhaps *the* key) competence of mathematics teachers is the ability to move among underlying images and metaphors –that is, to *translate* notions from one symbolic system to another." (DAVIS, SIMMT, 2006, p.303, itálico como no original)

119 No original: "*Substructing* is derived from the Latin *sub*-, "under, from below" and *struere*, "pile, assemble" (and the root of *strew* and *construe*, in addition to *structure* and *construct*). To substruct is to build beneath something. In industry, *substruct* refers to reconstructing a building without demolishing it – and, ideally, without interrupting its use. Likewise, in concept studies, teachers rework mathematical concepts, sometimes

Assim, a partir desse processo, um *concept study* destaca e permite o acesso à profundidade e à amplitude de conhecimento dos professores sobre conceitos matemáticos e a (re)elaboração desse conhecimento. Em particular, reconhecendo o valor da dimensão colaborativa do estudo, Davis e Renert (2014) destacam sua compreensão de que a estrutura de um *concept study* se funda na "compreensão do *coletivo* como um agente de cognição, em oposição a uma *coleção* de agentes cognição"[120] (DAVIS, RENERT, 2014, p.53, itálico como no original, tradução nossa).

Em sessão plenária da *34th Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education (PME)*[121], Davis (2010) apresenta *concept study* como uma nova metodologia para a formação de professores, coerente e em evolução, apropriada para a investigação sobre do conhecimento de matemática do professor, sem perder de vista a sua dimensão pedagógica. As investigações de Davis e seus colaboradores (DAVIS, SIMMT, 2003, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b; 2014, DAVIS, 2008a, 2008b, 2010, 2011, 2012), ancoradas em tópicos do currículo escolar de matemática, têm como base o envolvimento de professores de matemática em encontros regulares ao longo de um período de tempo visando à formação continuada. Os grupos participantes são compostos por docentes que atuam na formação básica, contemplando desde séries iniciais até o nível mais alto desta etapa da escolaridade e praticamente todos os níveis são representados. Caracterizam também esses grupos, a diversidade quanto à experiência profissional (com professores recém formados até professores com décadas de experiência) e quanto à formação acadêmica. Em alguns grupos há também a participação de licenciandos.

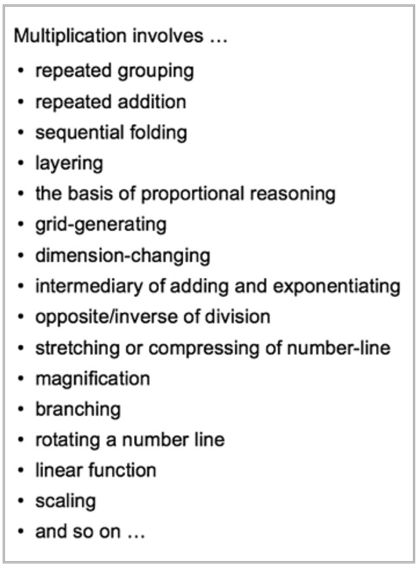
Nos relatos dessas investigações, destacam-se alguns aspectos que são entendidos como relevantes na compreensão e na configuração de um *concept study*. Cada estudo se desenvolve a partir de um tópico específico do currículo de matemática (os estudos destacados acima – DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b; DAVIS, 2008a, 2008b, 2010, 2011, 2012 – enfatizam a

radically, while using them almost without interruption in their teaching."(DAVIS, 2012, p.6, itálico como no original)

[120] No original: "We organized the activities of cohort around our understanding of the *collective* as a cognizing agent, as opposed to a *collection* of cognizing agents."(DAVIS, RENERT, 2014, p.53, itálico como no original)

[121] O *International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* é um grupo de pesquisadores, estabelecido em 1976 no Congresso Internacional de Educação Matemática (*International Congress on Mathematics Education ICME*) em Karlsruhe, Alemanha. São objetivos dessa organização: (i) Promover contatos e trocas internacionais de informações científicas na área referida; (ii) Promover e estimular pesquisa indisciplinar na área referida e (iii) promover um entendimento mais profundo e correto da psicologia e de outros aspectos do ensino e da aprendizagem da matemática e suas implicações. (Homepage: http://www.igpme.org/).

discussão em torno do conceito de multiplicação). O tópico escolhido determinará, durante o desenrolar das sessões, a variação de assuntos e de questões que caracterizarão o estudo. A contribuição dos participantes se dá à medida que compartilham interpretações e desdobramentos para as questões que emergem do próprio processo. Por exemplo, no estudo descrito em (DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b), conduzidos por esses autores, os participantes, a partir da pergunta inicial "*O que é multiplicação?*", organizados em pequenos grupos, propõem majoritariamente as ideias de "*adição repetitiva*" e "*agrupamento*" como resposta. Nos encontros seguintes, a reflexão inicial é ampliada para o estabelecimento de metáforas, imagens, analogias e aplicações ligadas à multiplicação, a lista estabelecida é apresentada na Figura 3.3. Já o estudo descrito em (DAVIS, 2008), que tem a multiplicação também como tema inicial, parte da questão "*Como o conceito de multiplicação se desdobra ao longo do currículo k-12*[122]*?*". Essa indagação determina a reflexão sobre como o conceito de multiplicação deve ser introduzido em sala de aula do ensino básico. À medida que a reflexão avança, este estudo leva o grupo a questionar se o número 1 é ou não um número primo. Esses exemplos deixam claro o caráter sequencial e a complexidade das relações estabelecidas. "Não se trata simplesmente de identificar o que *é*, mas contribuir para a produção de novas interpretações possíveis"[123] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.299 – itálico como no original, tradução nossa).


Multiplication involves …

- repeated grouping
- repeated addition
- sequential folding
- layering
- the basis of proportional reasoning
- grid-generating
- dimension-changing
- intermediary of adding and exponentiating
- opposite/inverse of division
- stretching or compressing of number-line
- magnification
- branching
- rotating a number line
- linear function
- scaling
- and so on …

Figura 3.3: Lista geral de ideias associadas à multiplicação (DAVIS, RENERT, 2009b, p.38).

[122] No original, K–12 curriculum. K–12 é a designação do período total de formação que corresponde à educação primaria e secundária nos EUA, Canadá e Austrália.

[123] No original: "It is not simply aimed at identifying what *is*, but contributes to the production of new interpretive possibilities." (DAVIS, SIMMT, 2006, p.299, itálico como no original)

3.3 O PAPEL DO PESQUISADOR

No desenvolvimento de um *concept study*, cabe ao pesquisador gerenciar e acompanhar o estudo. Davis, Simmt (2006) indicam que o seu papel principal, como pesquisadores,

> [...] é estruturar as tarefas que são significativas e adequadas aos participantes e organizar as configurações de forma a permitir que os participantes e suas ideias interajam. No contexto das discussões, como pesquisadores, ouvem em particular os comentários dos professores sobre como eles ensinam, como podem ensinar, e como devem ensinar. A medida que o estudo se desenvolve, frequentemente embutidos nas articulações, estão entendimentos profundos não apenas de conceitos matemáticos, mas da maneira pela qual conceitos matemáticos são desenvolvidos e aprendidos."[124] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.300, tradução nossa)

A análise de um *concept study* tem caráter interpretativo, permitindo aos pesquisadores alcançar aspectos explícitos e implícitos do conhecimento de matemática do professor. Davis (2008a) destaca que, talvez, a mais importante implicação de *concept studies* seja a forma como evidenciam que o conhecimento de matemática do professor é certamente diferente do conhecimento matemático de outros profissionais.

3.4 ÊNFASES DA ANÁLISE DE UM *CONCEPT STUDY*

A investigação proposta por Davis e seus colaboradores (DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014; DAVIS, 2008, 2010, 2011, 2012) prevê a identificação de ênfases para o desenvolvimento da análise. Essas ênfases contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelo grupo participante do estudo coletivo. Segundo Davis e Renert, "apenas a primeira ênfase pode ser descrita como intencional, as demais são emergentes, imprevisíveis, não planejadas, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais"[125] (DAVIS, RENERT, 2009b, p.38, tradução nossa). Buscando ilustrar a

---

[124] No original: "Our principal role as researchers, then, is to structure tasks that are meaningful and appropriate to participants and to organize the settings in ways that allow participants and their ideas to interact. In the context of these discussions, as researchers we listen in particular for teachers' commentaries on how they teach, might teach, and should teach. As we develop, often embedded in such articulations are profound understandings of not just mathematical concepts, but the manner in which mathematical concepts are developed and learned." (DAVIS, SIMMT, 2006, p.300)

[125] No original: "Only the first layer could be described as intentional in any structural sense. The others were emergent – unanticipated, unplanned, arising from shared interests, divergent knowing, and accidental encounters." (DAVIS, RENERT, 2009b, p.38)

identificação dessas ênfases, serão apresentadas a seguir algumas considerações que compõem os estudos descritos em (DAVIS, SIMMT, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014, DAVIS, 2008, 2010, 2012), todos pautados no assunto *multiplicação*.

A primeira ênfase, denominada *realizations* por Davis e seus colaboradores é aqui traduzida por *percepções*[126]. Essa ênfase é distinguida pela elaboração de uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora – Figura 4.3. Davis (2010) esclarece que o termo *percepções* é emprestado de Sfart (2008), que, segundo o autor, aponta que, "embora significados matemáticos abstratos atuem como substantivos nas enunciações matemáticas, são as *percepções* acessíveis desses significados que permitem às pessoas criar narrativas fundamentadas sobre eles"[127] (DAVIS, 2010, p.I-68, itálico como no original, tradução nossa).

Nos estudos descritos em (DAVIS, SIMMT, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, DAVIS, 2008, 2010, 2012), as questões disparadoras para a composição da lista que determina esta ênfase foram "*O que é multiplicação?*" e "*Como o conceito de multiplicação se desdobra ao longo do currículo k-12*[128]*?*". Davis (2010) esclarece que há pouca variação entre as listas estabelecidas nos estudos descritos em (DAVIS, RENERT, 2009b; DAVIS, SIMMT, 2006).

Refletindo o caráter de liberdade, de imprevisibilidade e autoral do processo que caracteriza um *concept study*, as demais ênfases variam de acordo com o estudo. A segunda ênfase, denominada nesses estudos por *estruturas*[129]ou por *panoramas*[130], observa as relações entre as *percepções* listadas na etapa anterior. Por exemplo, no estudo apresentado em (DAVIS, RENERT, 2009b), a segunda, ênfase identificada por *estruturas*[131], tem sua motivação a partir da identificação de situações modeladas pelas operações de multiplicação e de divisão e alcança a composição de um quadro que estabelece um panorama da abordagem do conceito de multiplicação ao longo dos anos da escola básica em que esses professores atuam. Esse quadro é apresentado na Figura 3.4.

---

[126] No original: *realizations*.

[127] No original: "While abstract mathematical signifiers act as nouns in mathematical utterances, it is the perceptually accessible *realizations* of these signifiers that enable people to create substantiating narratives about them." (DAVIS, 2010, p.I-68, itálico como no original)

[128] No original, *K–12 curriculum*. K–12 é a designação do período total de formação que corresponde à educação primaria e secundária nos EUA, Canadá e Austrália.

[129] No original: "*strutures"*.

[130] No original: "*landscapes"*.

[131] No original: "*strutures"*.

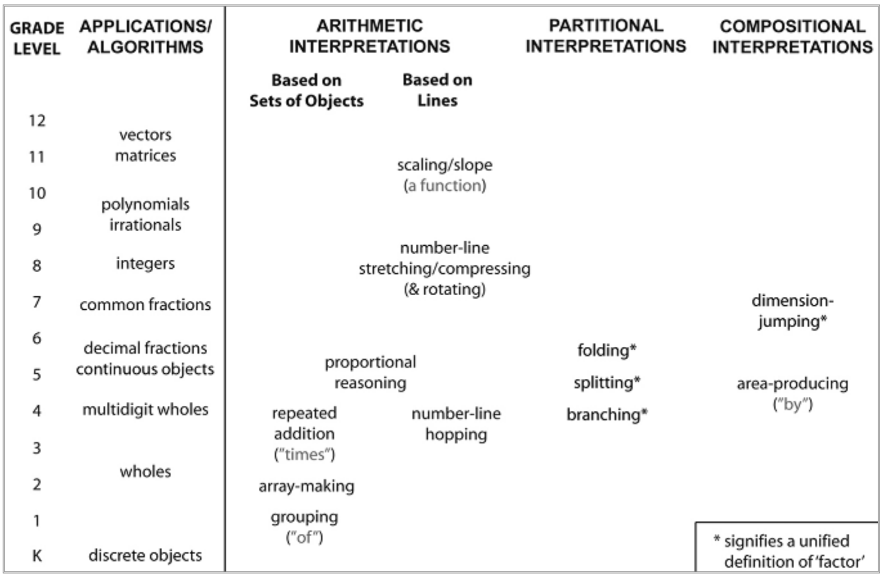


Figura 3.4: Quadro panorâmico da abordagem do conceito de multiplicação (DAVIS, RENERT, 2009b, p.38).

No estudo apresentado em (DAVIS, RENERT, 2009b), a terceira ênfase, identificado por *inferências*[132] ou *vínculos*[133], é marcada pela reflexão dos professores participantes estabelecida a partir da questão "*O número 1 é primo?*". Com base na discussão realizada nas etapas anteriores, essa ênfase passa a explorar a relevância e as implicações das diferentes interpretações associadas à multiplicação para a resposta da questão, determinando a ampliação da reflexão e o reconhecimento da importância e complexidade das conexões possíveis. No estudo publicado em (DAVIS 2012), esta ênfase também fica marcada pela composição de um quadro que destaca, a partir da discussão e da avaliação dos professores participantes ao longo das sessões do *concept study*, diferentes implicações relacionadas ao conceito de multiplicação, (Figura 3.5).

A próxima ênfase identificada nos estudos apresentados em (DAVIS, RENERT, 2009b e DAVIS 2012), é nomeada *combinações*[134]. Esta ênfase fica caracterizada, em ambos os estudos, pela possibilidade de quebra de concepções prévias, determinando possíveis novas concepções. Por exemplo, em (DAVIS 2012), essa ênfase é caracterizada pela proposição de estruturas que pretendem reunir representações aparentemente diferentes de multiplicação, Figura 3.6. As estruturas propostas são estabelecidas a partir de um arranjo retangular, o que remete à discussão travada ainda na ênfase das *percepções*.

---

[132] No original: "*reasoning*".

[133] No original: "*entailments*".

[134] No original: "*blends*".

If multiplying is ...	... a factor is ...	... a product is ...	... commutativity is ...	... a prime is ... (necessary conditions, but not sufficient)
REPEATED ADDITION	ADDEND or NUMBER OF ADDENDS (2 × 3: 2 added to itself 3 times or vice versa)	a SUM	2 + 2 + 2 = 3 + 3	sum of ones
REPEATED GROUPING	NUMBER OF GROUPS or NUMBER OF ELEMENTS IN EACH GROUP	a SUM: total number of all the elements in the groups (cardinality of the set)	2 groups of 3 = 3 groups of 2	one group, or one element in each group
MAKING A GRID OR RECTANGULAR ARRAY	DIMENSION: number of rows (number in each column) and number of columns (number in each row)	NUMBER of cells	90°-DEGREE ROTATION (a 2-by-3 grid has the same number of cells as a 3-by-2)	one of the dimensions has to be 1
SKIP COUNTING	SIZE OF THE JUMP and NUMBER OF JUMPS	END DESTINATION (the last number you land on)	*a* jumps of distance *b* lands you in the same place as *b* jumps of length *a*	must make only a single jump or jump one space at a time
SCALING	SCALE FACTOR and ORIGINAL MEASURE	MEASURE OF THE FINAL MAGNIFICATION/ REDUCTION	size *a* scaled by a factor of *b* gives the same result as size *b* scaled by a factor of size *a*	when a magnification/ reduction can only be reached in unit increments or directly
AREA GENERATION	DIMENSIONS (lengths and widths)	AREA	90°-ROTATION: $lw = wl$	one dimension must be 1
NUMBER-LINE STRETCHING AND COMPRESSING	SCALE FACTOR and STARTING POSITION ON UNALTERED NUMBER LINE	CORRESPONDING POSITION ON STRETCHED/ COMPRESSED NUMBER LINE	If *c* corresponds to *point a* when line is scaled by *b*, it will correspond to *point b* when scalar is *a*	to get to *point c*, you must EITHER start at 1 with a scalar of c OR vice versa
FOLDING	NUMBER OF HORIZONTAL AND VERTICAL DIVISIONS (made by the folds)	NUMBER OF LAYERS	folding into *a* layers, then into *b* layers gives the same number of layers as *b* first, then *a*	can only be folded directly using $a - 1$ folds
BRANCHING	NUMBER OF STEMS and NUMBER OF BRANCHES PER STEM	TOTAL NUMBER OF BRANCHES AT THE LAST LEVEL	*a* branches of *b* stems has the same product as *b* branches of *a* stems	must either have 1 stem or 1 branch/stem
LINEAR FUNCTION $y = mx$	SLOPE and *x*-COORDINATE	*y*-COORDINATE	If $y = c$ when $m = a$ and $x = b$, then $y = c$ when $m = b$ and $x = a$.	To get to the desired *y*-coordinate *c*, either $m = c$ and $x = 1$ or $m = 1$ and $x = c$.

Figura 3.5: Algumas implicações de diferentes percepções da multiplicação (DAVIS 2012, p.11)

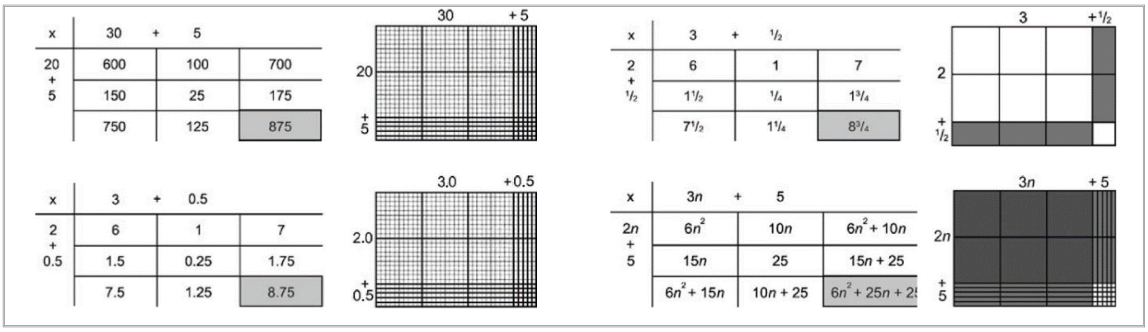


Figura 3.6: Representações para a multiplicação a partir de arranjos retangulares (DAVIS, RENERT, 2009b, p.40)

O estudo apresentado em (DAVIS, RENERT, 2009b) contempla ainda uma quinta ênfase, identificada por *participation* e aqui traduzida por *participação*[135]. Nesse caso, o estudo extrapola o tema multiplicação para alcançar questões diversas sobre o ensino da matemática. Uma ênfase análoga é identificada em (DAVIS, 2012) e denominada por *solução de problemas pedagógicos*[136]. No estudo mais recente, Davis destaca a reflexão realizada sobre questões que se apresentam na escola básica, que parecem simples quando propostas, mas cujas respostas não têm nada de simples, especialmente para que os estudantes de ensino básico. Por exemplo, "*∞ é um número?"* e "*Qual é a diferença entre indefinido, indeterminado e infinito?*".

Em (DAVIS, RENERT, 2009b), os autores afirmam que o estudo relatado mostrou-lhes que o conhecimento de matemática do professor para o ensino pode ser construído e refinado em processos colaborativos, envolvendo a participação de professores com experiências variadas. Destacam também que as sessões não foram todas sempre produtivas e que também as ênfases de análise não obedecem a uma organização linear, enfatizando o carácter de imprevisibilidade da condução e dos resultados desses estudos:

> "O processo de identificar as várias ênfases de entendimentos tácitos era não linear nem intermitente. Como não havia nenhum resultado claro de aprendizado nem recursos estruturados de acompanhamento, o grupo trabalhou com muitas pistas falsas. Alguns dias não pareceram ser produtivos de absolutamente. Envolver-se com a matemática desta maneira requer um tempo considerável para a reflexão e para o desenvolvimento de possibilidades emergentes.
>
> Por essa razão, os ingredientes necessários para *concept studies* não podem ser pré-determinados nem padronizados. Uma vez que *concept studies* se desenvolvem sobre conhecimentos tácitos e experiências específicas de seus participantes, cada estudo diferente geraria seus próprios resultados. Por exemplo, um *concept study* sobre multiplicação no contexto de professores em formação inicial pode não ter a profundidade da experiência, o imediatismo de aplicações em sala de aula, e a gama de conhecimentos de estruturas curriculares do nosso grupo de professores mais tes."[137](DAVIS, RENERT, 2009b, p.42, tradução nossa)

---

[135] No original: "*participation.*

[136] No original: "*pedagogical problem solving*".

[137] No original: "The process of excavating the various layers of tacit understandings was non-linear and intermittent. Since there were no clear learning out-comes or structured resources to follow, the group worked through many false leads. Some days did not appear to be productive at all. Engaging with mathematics in this manner requires considerable time for reflection and for development of emergent possibilities.

For that reason, the ingredients necessary for concept studies cannot be pre-determined or standardized. Since concept studies draw on the tacit knowledge and specific experiences of their participants, each different study would generate its own results. For example, a concept study of multiplication in the context of

Ênfases para o desenvolvimento da análise de um *concept study*		
Ênfase	**Característica**	**Exemplo** Com base nos estudos de Davis, Simmt, 2006, Davis, Renert, 2009a, 2009b e Davis, 2008, 2010, 2012
Percepções (Único previsível e intencional)	Esta ênfase fica distinguida pela elaboração de uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora.	A partir da questão "O que é multiplicação?" foi estabelecida a lista apresentada na Figura 3.3.
Estruturas ou panoramas	Esta etapa fica caracterizada pela observação de relações entre as percepções listadas na etapa anterior	Identificação de situações modeladas pelas operações de multiplicação e de divisão e a composição de um quadro que estabelece um panorama da abordagem do conceito de multiplicação ao longo dos anos da escola básica
Inferências ou Vínculos	Esta etapa a explora a relevância e as implicações das diferentes interpretações associadas ao conceito em tela, observando a importância e a complexidade das conexões possíveis.	Reflexão estabelecida a partir da questão "O número 1 é primo?"
Combinações	Esta etapa fica caracterizada pela quebra de concepções prévias, determinando possíveis novas concepções.	Proposição de estruturas que pretendem reunir representações aparentemente diferentes de multiplicação, Figura 3.6.
Participação	Nesse caso, o estudo extrapola o tema multiplicação para alcançar questões diversas sobre o ensino da matemática e sobre a própria matemática.	A reflexão se estabelece a partir da pergunta "o que é matemática?"

Figura 3.7: Quadro Resumo – Ênfases de análise de um *concept study*.

pre-service teacher education may lack the depth of experience, the immediacy of classroom applications, and the range of knowledge of curriculum structures of our group of senior teachers." (DAVIS, RENERT, 2009b, p.42)

Ampliando as considerações sobre os resultados obtidos a partir de um *concept study* Davis e Renert (2009b) reconhecem que o trabalho não oferece ainda a possibilidade de examinar o impacto do desenvolvimento de um *concept study* na qualidade e na forma de ensinar dos professores envolvidos e no interesse de seus estudantes pela Matemática. No entanto, em relação aos professores, os autores enfatizam como resultados de sua investigação o desenvolvimento da habilidade coletiva de investigar e reestruturar seus conhecimentos, o envolvimento emergente com a produção científica, que surge como demanda do processo, e a revelação da tendência de levar a vivência de uma prática interpretativa para suas salas de aula.

Dentre os resultados observados no *concept study* descrito em (DAVIS, 2010), Davis destaca a transformação na percepção da matemática por parte dos professores envolvidos, que, de acordo com o estudo, passam a entender a disciplina sob uma perspectiva não platônica[138]. Em relação a esses professores, segundo Davis, é possível identificar o desenvolvimento da habilidade coletiva de investigar e reestruturar seus conhecimentos. Observações nesse sentido também aparecem em destaque em outros trabalhos de Davis:

> Para os professores participantes – assim como para muitos de seus alunos – *concept study* é produtivo tanto para ampliar entendimentos pessoais quanto para despertar as histórias e evoluções das ideias matemáticas.[139] (DAVIS, 2008a, p.91, tradução nossa)
>
> "[...] Professores têm participação vital na criação de possibilidades matemáticas. Longe de serem agentes periféricos que passivamente estabelecem resultados matemáticos, professores dão forma e substância a matemáticas culturais – isto é, não só à matemática formal, mas também a uma gama de aplicações culturalmente situadas, práticas e perspectivas que são habilita-

---

[138] Segundo Davis, as intervenções dos professores durante o desenvolvimento de um *concept study* indicam de que forma estabelecem seu engajamento com a matemática. "Respostas simples são possíveis quando a matemática é percebida como um corpo estável e Platônico de conhecimento. Nesta perspectiva, respostas são inequívocas, independentes de qualquer conhecedor e encontradas em livros de matemática formal. Mas quando a matemática é vista como uma busca que envolve o homem, respostas dependem de definição e são negociadas por meio de metáforas e raciocínio que envolvem analogias. [...] Uma visão Platônica da matemática é a principal barreira para o evolução da pedagogia da matemática" (DAVIS, 2010, p.I-75, tradução nossa.) No original: "Simple answers are possible when mathematics is viewed as stable and Platonic body of knowledge. In that frame, answers are unequivocal, independent of any knower, and found in books of formal mathematics. But when mathematics is viewed as an evolving human pursuit, answers depend on setting and are negotiated through metaphors and analogical reasoning. [...] Platonic view of mathematics is a principal barrier for the evolution of mathematics pedagogy." (DAVIS, 2010, p.I-75)

[139] No original: "For the teacher participants - as well as for many of their students - concept study is both productive for extending personal understandings and becoming more awake of the histories and evolutions of mathematical ideas." (DAVIS, 2008a, p.91)

> das pela matemática formal e por outros modelos matemáticos de referência." [140](DAVIS, RENERT, 2009b, p.41, tradução nossa)

Em (DAVIS 2012), para ilustrar seu entendimento em relação ao potencial de *concept study* para o desenvolvimento do conhecimento de matemática do professor para o ensino, o autor destaca a depoimento de um dos professores participantes do estudo realizado. Nesse depoimento, o professor descreve sua "história" em relação ao ensino (da impossibilidade) da divisão por zero, que se inicia com uma dúvida pessoal: "Eu não tenho *qualquer* ideia de por que não é possível dividir por zero! Como eu vou ensinar isso?"[141] (DAVIS, 2012, p.16, itálico como no original, tradução nossa). Em seguida, esse professor relata o amadurecimento que alcançou com a experiência do ensino do assunto em três anos consecutivos: No primeiro ano, ele abordou o a divisão por zero a partir do entendimento da operação de divisão e de sua relação com outras operações (particularmente subtração e multiplicação) e observou que os alunos não diferenciavam os resultados de $8 \div 0$ e de $0 \div 8$. Segundo ele, para os alunos, ambas as respostas, "0" e "indefinido", significavam "*nada"*. No segundo ano, o professor optou pelo uso de modelos mais estruturados envolvendo subtrações sucessivas e multiplicação como operação inversa da divisão. Desta vez, observou que os alunos perceberam a diferença entre as operações propostas, mas não conseguiam explicar claramente as respostas obtidas. No terceiro ano, já tendo participado de um *concept study* sobre multiplicação, o professor optou por explorar mais intensamente, com os alunos, a diversidade de modelos de multiplicação que havia emergido desse estudo coletivo que havia participado (multiplicação como adição repetida, como agrupamento, como malha quadrangular e como área). Apenas após esse trabalho, abordou a divisão também a partir de modelos. Finalmente, chegou à divisão por zero e constatou que, em relação a essa divisão, os alunos apresentavam respostas do tipo: "Não faz sentido", o que serviu para explicar o termo "indefinido". Segundo Davis (2012), esse professor confirma o valor do *concept study* que realizou para a sua prática.

Davis (2012) completa deixando claro que este é um dos muitos depoimentos que tem recebido regularmente, vários deles apoiados em desdobramentos da realização do estudo coletivo na prática dos professores participantes. O autor destaca ainda o seu entendimento de

---

[140] No original: "... teachers are vital participants in the creation of mathematical possibilities. Far from being peripheral agents who passively transmit established results of mathematics, teachers give shape and substance to cultural mathematics – that is, not only to formal mathematics, but also to the range of culturally situated applications, practices, and perspectives that are enabled by formal mathematics and by other mathematical frames of reference." (DAVIS, RENERT, 2009b, p.41)

[141] No original: "I don't have *any* idea why you can't divide by zero! How can I teach that?" (DAVIS, 2012, p.16, itálico como no original)

que o principal benefício de um *concept study* não é de fato o estudo e a reformulação de conceitos relativos ao assunto central do estudo, por exemplo, multiplicação, mas a possibilidade de contribuir para uma mudança na atitude do professor frente ao conhecimento do conteúdo de maneira geral. Para Davis,

> "o principal benefício de *concept studies* não é tanto que eles promovam a familiaridade com os conceitos matemáticos especificamente reestruturados, mas que eles oferecem estratégias para refletir e reformular todos e quaisquer conceitos matemáticos. Professores participantes (de *concept studies*) relatam regularmente que a quantidade de tempo de suas aulas que dedicam à discussão ativa e explícita sobre interpretações (conceituais) aumentou dramaticamente. Em alguns casos, tornou-se o principal modo de abordagem. Em outras palavras, tomando o conhecimento disciplinar dos professores como um domínio emergente e participativo – pelo menos em relação ao grupo do estudo de que trata este relato – parece contribuir para transformações imediatas, generalizáveis, e sustentadas em transformações pedagógicas."[142] (DAVIS, 2012, p.18, tradução nossa).

Outro aspecto de um *concept study* que é destacado por Davis (2012) diz respeito à participação de professores mais experientes. Segundo Davis, esses professores inicialmente relutavam em apresentar suas interpretações, no entanto, à medida que começavam a fazê-lo eram capazes de ir muito além, alcançando novas interpretações e elaborações e ampliando articulações e conexões.

De maneira geral, Davis e seus colegas (DAVIS, 2008a, 2008b, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014, DAVIS, 2010, 2011, 2012), encerram que um *concept study* tem influência formadora e transformadora no conhecimento de matemática dos professores para o ensino.

Esses autores acreditam ainda que professores têm uma influência direta e profunda na formação matematicamente da população e, consequentemente, para o desenvolvimento da matemática e que, tendo como princípio a discussão sobre o conhecimento matemático sem perder de vista a prática do professor, um *concept study* permite a criação de novas possibilidades para o ensino da matemática.

---

[142] No original: "The key benefit of concept studies is not so much that they foster familiarity with specific substructed mathematical concepts, but that they impart strategies for substructing any and all mathematical concepts. Participating teachers regularly report that their amount of class time that they spend on active and explicit discussion of interpretations has increased dramatically. In some cases it has become the principal mode of engagement. In other words, casting teachers' disciplinary knowledge of teaching as an emergent, participatory domain – at least on the level of the group at the centre of this report – appears to contribute to immediate, generalizable, and sustained transformations in pedagogy." (DAVIS, 2012, p.18)

3.5 *CONCEPT STUDY*, POR QUÊ?

A opção pelo desenvolvimento de um *concept study* como eixo e procedimento de investigação da pesquisa em tela se funda particularmente a partir da identificação de alguns aspectos dessa metodologia:

(i) O entendimento dado ao saber do professor, especialmente reconhecendo um conhecimento de matemática com vistas ao ensino. Para Davis e seus colaboradores (DAVIS, SIMMT, 2003, 2006, DAVIS, 2008a, 2008b, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014; DAVIS, 2010, 2011, 2012) o conhecimento de matemática do professor não é entendido como uma versão diluída ou simplificada do conhecimento formal de matemática. Trata-se de um conhecimento específico que não pode abstrair a prática do professor, ou seja, o seu desenvolvimento é entendido *para* e *a partir* da prática. Em um *concept study*, o conhecimento de matemática do professor é tácito, mas adquire caráter dinâmico a partir de questionamentos que envolvem a reflexão colaborativa, que se estabelece tendo como referência a experiência dos professores participantes. Essa percepção para o saber do professor se alinha às percepções de Shulman (1986, 1987), Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008), de Klein (2009, SCHUBRING, 2013).

(ii) A dimensão dada ao conteúdo. Em um *concept study* o conteúdo (e a discussão sobre ele) não é o fim, mas o meio para acessar o saber do professor. Certamente, o conteúdo matemático tem papel substantivo em um *concept study*. No entanto, os pressupostos que fundamentam essa metodologia evidenciam que o protagonismo do conteúdo matemático é compartilhado com a prática do professor. Segundo Davis e seus colaboradores (DAVIS, SIMMT, 2003, 2006; DAVIS, 2008a, 2008b; DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014; DAVIS, 2010, 2011, 2012), o conhecimento de matemática para o ensino não se estrutura como um corpo estático de conhecimento, compilado em um livro ou alcançado integramente com a formação acadêmica de graduação, por exemplo. Para esses autores, a matemática para o ensino é uma espécie de conhecimento que se faz real na ação, sendo inerente à flexibilidade de capacidade de resposta do professor em sua prática. De acordo com Even, Ball (EVEN, BALL, 2009), *concept Study* é entendida como uma proposta para a formação de professores *na e a partir* da prática, que pode contribuir para a reflexão sobre a questão central destacadas pelas autoras : *Como os professores podem aprender para a prática, em e a partir da prática?*. Em particular, *concept study* ampliando a discussão sobre o papel da experiência na aprendizagem do ensinar e sobre a divisão entre conhecimento formal e prática, entendidos como desafios relacionados à questão anterior.

(iii) A característica colaborativa de um *concept study*. Em um concept study, os professores participantes compartilham suas experiências e seu conhecimento acumulado com o objetivo de questionar e elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino, sem que parem de exercer sua prática (*substructing*). Esse processo sustenta o desenvolvimento profissional dos participantes sob o entendimento de que a reflexão em um processo coletivo envolve e se desenrola em novas construções conceituais individuais. A constituição de grupos colaborativos, em que os professores tenham oportunidades de trocar impressões e experiências sobre sua própria prática tem sido apontada como um tipo de atividade importante para a formação continuada articulada com a prática. Este é o caso, por exemplo, do *grupo de sábado*, relatado por Fiorentini e seus colaboradores (FIORENTINI, 2006, 2013; FIORENTINI et al, 2005). A metodologia *concept study* tem sido apontada como uma prática para a formação continuada de professores (EVEN, BALL, 2009; DAVIS, 2010), no entanto, muito pouco (ou, talvez, nada) ainda se tem explorado sobre essa metodologia na literatura em Educação Matemática no Brasil.

PARTE II

O ESTUDO EMPÍRICO

Capítulo 4

A INVESTIGAÇÃO

PRINCÍPIOS, CAMINHOS E AS QUESTÕES CENTRAIS DE PESQUISA

A formação de professores continua sendo a função maior da Educação Matemática, paralelamente à busca de conhecimento sólido para ser aplicado. Os educadores matemáticos universitários precisam trabalhar junto com matemáticos e com professores de sala de aula no desenvolvimento da teoria e da prática. (KILPATRICK, 1996, p.99)

4.1 PRINCÍPIOS E CAMINHOS

A investigação sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor de matemática, com especial atenção ao conhecimento de matemática para o ensino se apresenta ainda como uma área em desenvolvimento.

> Teorias da aprendizagem dos professores de matemática ainda estão emergindo, com muito a se conhecer sobre os saberes, as habilidades, qualidades pessoais, e sensibilidades que o ensino da matemática envolvem e sobre como esses recursos profissionais são adquiridos.[143] (EVEN, BALL, 2009, p.2, tradução nossa)

[143] No original: “Theories of mathematics teachers’ learning are still emerging with much yet to know about the knowledge, skills, personal qualities, and sensibilities that teaching mathematics entails and about how such professional resources are acquired.” (EVEN, BALL, 2009, p.2)

Para muitos pesquisadores (BALL, COHEN, 1999, BALL, THAMES, PHELPS, 2008, DAVIS, 2010, DOERR, LESH, 2003, KRAUSS et al, 2008, MOREIRA, 2013; MOREIRA e DAVID, 2007; FIORENTINI, 2006, 2012), a base do conhecimento profissional para o ensino precisa ser construída levando-se em conta a prática profissional do professor, de modo que possa ser ampliado e aperfeiçoado. Para Doerr e Lesh (2003), que investigam o desenvolvimento do conhecimento dos professores tendo a prática como referência, uma variedade de modelos e de metodologias de pesquisa se apresenta sem suficiente coerência para apoiar o desenvolvimento de uma base de conhecimento comum. Esses autores observam que há um grande número de trabalhos que têm como foco apenas um sujeito ou que envolvem o *auto estudo* de ensinar. Reconhecendo que esses estudos são importantes, os autores destacam que não são suficientes para dimensionar metodologias e resultados significativos para um maior número de professores.

> A base de conhecimento sobre o saber, o crescimento e o desenvolvimento do conhecimento do professor está ainda em sua infância, quando comparado com a base de conhecimento sobre o desenvolvimento conceitual das crianças.[144] (DOERR, LESH, 2003, p.262, tradução nossa)

Fiorentini e Lorenzato (2009) alertam que até meados da década com início em 1970, as pesquisas em educação matemática tinham como foco de investigação mais a aprendizagem dos estudantes do que o ensino ou a prática do professor. Apenas a partir da metade dos anos 80 do mesmo século, os pesquisadores passaram a voltar sua atenção para os conhecimentos e para as crenças dos professores; e a partir do final dos anos 80, surgem os estudos que investigam os conhecimentos profissionais dos professores. A partir dos anos de 1990, os pesquisadores começam a entrar em sala de aula para avaliar de perto a ação e o desempenho docentes. Surgem, também nessa época, os estudos que investigam a identidade e o desenvolvimento profissional do professor de matemática por meio de entrevistas, história de vida e história oral.

Ponte (2000) apresenta uma perspectiva sobre a investigação relativa à vida profissional do professor de Matemática a partir de uma revisão nos principais campos de pesquisa. Tem como referência importante nesse estudo o grupo de trabalho *WGA 7 – In-service and preservice education of mathematics teacher,* dedicado aos professores, no ICME 9 (*International Congress of Mathematics Education*, realizado no Japão em julho de 2000). Em sua pesquisa,

[144] No original: “We wish to argue that the current knowledge base on the growth and development of teachers’ knowledge is still in its infancy when compared to the knowledge base on the conceptual development of children.” (DOERR, LESH, 2003, p.262)

Ponte destaca que nas investigações relatadas no *WGA 7*, que se centram no estudo de programas de formação, notam-se quatro ênfases principais: Alguns estudos dão especial atenção às iniciativas de formação e respectivos objetivos, outros focam-se sobretudo na estrutura dos programas de formação e nos papéis desempenhados pelos diversos participantes, outros, ainda, debruçam-se sobre a definição de *standards* profissionais ou de formação e ao currículo da formação e, finalmente, há estudos que incidem especialmente sobre recursos e políticas.

A partir de sua investigação, Ponte (2000) conclui que a formação do professor que ensina Matemática continua a ser um tema fundamental em muitos estudos e destaca a importância de se

> investigar o modo como se pode levar o professor a adquirir os conhecimentos, competências, atitudes e valores necessários ao seu exercício profissional. Contudo, para que esse estudo seja frutuoso é necessário investigar também em que consistem os saberes profissionais docentes e quais os processos pelos quais o professor aprende e se desenvolve profissionalmente. Daí o relevo que, a par dos trabalhos mais centrados na formação, têm tido os estudos de carácter mais descritivo, centrados nos saberes profissionais do professor ou nos seus processos de desenvolvimento profissional. (PONTE, 2000, p.15)

Ponte destaca ainda que a noção de formação remete à ideia de um processo de ensino, que se centra em um tema que é desenvolvido por um ou mais formadores, por meio de um currículo, concretizado de modo mais imaginativo ou mais "tradicional". Sem desmerecer a necessidade desse modelo para a formação profissional do professor, Ponte alerta que esta noção tem sido complementada pela noção de *desenvolvimento profissional,* que se centra no crescimento do próprio professor como protagonista dos seus projetos, individuais e coletivos. Para esse autor,

> O estudo dos novos problemas postos pela transformação dos sistemas educativos — e em particular, dos problemas que se colocam ao professor — requer, cada vez mais, a realização de projectos verdadeiramente de colaboração, em que investigadores do ensino superior e professores colaboram em pé de igualdade na formulação das questões, na análise dos dados, na divulgação dos resultados. Poderemos estar, assim, no limiar de uma nova fase dos estudos directamente relacionados com o professor de Matemática, em que o centro do interesse se desloca do professor individual, dos seus conhecimentos e processos de formação, para o âmbito colectivo, em que o professor interagindo com outros actores educativos — em particular com investigadores — se assume como actor principal do processo de transformação da escola. (PONTE, 2000, p.16)

Adler e seus colaboradores (2005), em um estudo de revisão da investigação sobre a formação de professores de matemática de 1999 a 2003, que incluiu pesquisas publicadas em revistas, manuais internacionais de educação matemática e anais de congressos de educação matemática internacionais, se orientam pelo questionamento de como a pesquisa no campo da educação matemática está contribuindo para a melhoria da formação de professores de matemática. Assim, os autores buscam, mais especificamente, identificar o que se destaca sobre a pesquisa que se concentra na formação de professores de matemática durante o período examinado e o que a pesquisa está produzindo que pode contribuir para o apoio à formação e ao desenvolvimento profissional dos professores. Visam assim, contribuir para a compreensão de como, a partir de que oportunidades e em que condições os professores aprendem e para a melhoria das oportunidades de os professores aprenderem. Em seu estudo, Adler e seus colaboradores apontam 4 constatações: (i) predominam as pesquisas qualitativas em pequena escala, ou seja, envolvendo grupos com menos do que 20 professores participantes; (ii) a maioria das pesquisas de formação de professores é conduzida por formadores de professores que estudam os professores com os quais eles estão trabalhando; (iii) pesquisas em países nos quais o Inglês é a língua nacional dominam a literatura e (iv) algumas questões têm sido estudadas, não exaustivamente, mas extensivamente, enquanto outras questões importantes permanecem não examinadas.

Em suas considerações finais, Jill Adler, individualmente, defende que

> Embora tenhamos aprendido muito sobre algumas das especificidades do conhecimento dos professores, precisamos entender melhor o que significa ensinar *matemática* e ensinar a *ensinar* em um mesmo programa. Nós não entendemos suficientemente bem como a matemática e o ensino, como objetos inter-relacionados, podem vir a produzir e a constituir um ao outro na prática da formação de professores. Falta-nos um conhecimento adequado sobre o que e como isso acontece em programas de formação do professor, e também em programas, contextos e condições variados ou contrastantes. O campo precisa compreender melhor como a matemática e o ensino se combinam no desenvolvimento e na identidade dos professores.[145] (Adler et al, 2005, p.378, itálico como no original, tradução nossa)

---

[145] No original: "An enduring problem in mathematics teacher education is its task to build both mathematics and teaching identities. While we have learned a great deal about some of the specialty of teachers' knowledge, we need to understand better what it means to teach both *mathematics* and *teaching* in the same program. We do not understand well enough how mathematics and teaching, as inter-related objects, come to produce and constitute each other in teacher education practice. We lack adequate knowledge about what and how this happens inside a teacher education program, and then across ranging or contrasting programs, contexts and conditions. The field needs to understand better how mathematics and teaching combine in teachers' development and identities." (Adler et al, 2005, p.378, itálico como no original)

Rowland (2008, 2009), que propõe uma abordagem para investigar o conhecimento de matemática para o ensino a partir da observação da prática mediante a gravação de aulas, alerta para o fato de que a produção científica com foco no ensino concentra-se fortemente em aspectos organizacionais de uma aula, com pouca atenção ao conhecimento do professor sobre o assunto a ser ensinado.

Consonante com Rowland (2008, 2009) e Doerr e Lesh (2003), o estudo desenvolvido por Fávero e Neves (2012), que investiga o desempenho escolar nas tarefas sobre divisão e número racional a partir da análise de 65 estudos sobre o assunto, publicados entre 1999 e 2010, (39 artigos científicos publicados em periódicos internacionais e nacionais, 5 pesquisas publicadas em livros nacionais, 7 pesquisas apresentadas em congressos científicos, 10 dissertações de mestrado e 4 teses de doutorado defendidas no Brasil), observa que 83,9% eram focadas nos alunos, apenas 8,9% dos estudos foram desenvolvidos com professores e 7,2%, em ambos.

Passos e seus colaboradores (PASSOS, NARDI, ARRUDA, 2010), em um estudo sobre a formação de professores de matemática, analisando a produção bibliográfica em 15 anos da revista Zetetiké – de 1993 a 2007 – pesquisaram 28 números da revista (140 artigos), identificando 49 artigos classificados como relativos à formação de professores. A investigação desses artigos aponta "a necessidade de repensar a formação como um processo do qual participam professores formadores envolvidos com pesquisas em Educação Matemática e/ou sobre a formação de professores" (PASSOS, NARDI, ARRUDA, 2010, p.98).

Krauss e seus colaboradores (KRAUSS et al, 2008) argumentam que um conhecimento profundo de Matemática pode permitir que os professores alcancem um amplo repertório de estratégias para explicar e representar conceitos matemáticos a seus alunos. Esses autores destacam ainda a dificuldade para se estabelecer métodos para uma investigação empírica que relacione o saber pedagógico de conteúdo e o conhecimento de conteúdo:

> Apesar de sua grande relevância para o desenvolvimento do conhecimento dos professores e as possíveis implicações para os currículos de formação desses professores, esta questão (a relação entre o saber pedagógico de conteúdo e o conhecimento de conteúdo) permanece não resolvida empiricamente, principalmente porque muito poucos instrumentos estão disponíveis para explorar diretamente o conhecimento docente.[146] (KRAUSS et al, 2008, p.716, tradução nossa)

[146] No original: "Despite its great relevance to the development of teachers' knowledge and possible implications for teacher training curricula, this issue remains empirically unresolved, primarily because very few instruments are yet available to tap teachers' knowledge directly." (KRAUSS et al, 2008, p.716)

Para Krauss e seus colaboradores (KRAUSS et al, 2008, p.716) é cada vez mais clara a complexidade do sistema que determina o universo de ação docente. Alunos, professores, sala de aula, currículo, uso de recursos tecnológicos, ferramentas de aprendizagem já são aspectos complexos quando observados isoladamente e podem e devem ainda ser contemplados de forma combinada e integrada. Certamente o conteúdo se constitui em um elo que relaciona e permeia todos os aspectos envolvidos nesse universo complexo. Não é fácil nem simples separar o conhecimento de conteúdo do professor da complexidade do sistema em que é exigido, nem deve ser esse o objetivo das investigações. Para esses autores, qualquer investigação estabelecida de forma a não considerar essa complexidade é susceptível a ter pouca (ou nenhuma) relevância para a prática.

A literatura de pesquisa aponta que muito tem sido investigado sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor e sobre os saberes necessários para o ensino – algumas questões extensiva, mas não exaustivamente e outras com menor incidência do que a necessidade indica. Há trabalhos que investigam apenas um sujeito, outros envolvem o estudo da própria prática ou envolvem pequenos grupos de professores, reunidos em comunidades. A prática tem sido reconhecida como uma componente importante da investigação sobre os saberes docentes e o desenvolvimento profissional do professor precisa contemplar o crescimento do próprio professor como protagonista dos projetos, individuais ou coletivos. De fato, a formação e o desenvolvimento profissional do professor, incluindo a atenção à sua prática compõem um universo complexo com muito ainda a ser investigado e a aprender.

O presente trabalho se propõe a contribuir para a investigação sobre os saberes docentes, com especial atenção ao conhecimento de matemática para o ensino, a partir da observação do desenvolvimento de uma disciplina de pós-graduação sob a metodologia de um estudo colaborativo envolvendo professores de ensino básico. Não são, portanto, foco deste trabalho a formação inicial do professor, a observação da prática nem a aprendizagem dos alunos.

Este trabalho refere-se, fundamentalmente, à formação continuada visando ao desenvolvimento profissional do professor. Tomamos como objeto de estudo a formação matemática em um curso de especialização. A investigação tem como objetivo estabelecer o foco sobre o conhecimento de matemática do professor para o ensino observado a partir da constituição de um metassaber do professor. Não se pretende observar o conhecimento de matemática do professor em sua dimensão pedagógica evidenciado em uma aula ou experiência didática. Também não se constitui em um propósito deste trabalho identificar o que os professores revelam sobre o conhecimento de um determinado assunto a partir da observação de erros, acertos nem estratégias de resolução de uma ou de algumas questões específicas. Entendendo a relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica a partir de um processo de *elementarização* (KLEIN, 2009; SCHUBRING, 2003, 2014), pretende-se que a investigação reflita a observação do conhecimento de matemática como sugerido por Klein (2010), sob uma visão panorâmica que permita a observação de conexões e articulações entre assuntos e campos diversos da matemática. Por outro lado, o conhecimento de matemática para o ensino se caracteriza como um conhecimento *sobre* conteúdo *para* o ensino, isto é, como um conjunto de conhecimentos sobre o conteúdo, que capacita o professor para o ensino.

A composição do referencial teórico para o estudo, apresentada nas sessões anteriores, determinou o delineamento dos pressupostos que sustentam a pesquisa. Como hipótese fundante da discussão, apresenta-se a existência de um *saber pedagógico de conteúdo* (SHULMAN, 1986) que funda, segundo o modelo de Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008), um *conhecimento de matemática para o ensino*. Esse saber se constitui a partir do vínculo entre conteúdo disciplinar e pedagogia, não prescindindo de conhecimentos que o professor deve aprender em sua formação e está fortemente arraigado ao exercício profissional do professor. Trata-se de um conhecimento próprio do professor que não pode ser abarcado em uma lista de procedimentos e conteúdos. Sobre a perspectiva do conteúdo, determina a diferença entre *saber algo para si mesmo* e *saber algo para ensinar*. A construção desse saber exige do professor uma ação consciente e protagonista, impondo um conhecimento sobre o conteúdo que alcança a dimensão da natureza dos conceitos, não podendo se ater aos temas e teorias ensinados na escola, permitindo uma visão abrangente e articulada da matemática. Sob essa perspectiva, na nossa interpretação, o saber pedagógico de conteúdo encerra um *metassaber* do professor.

A investigação sobre a o tema deve ser estabelecida com referência à pratica e demanda reflexão sobre a identificação do conteúdo disciplinar que é relevante para a formação e para a ação docente; sobre o entendimento de formas de se estabelecer esse conhecimento e sobre a determinação do que é necessário para aprender a utilizá-lo na prática docente. Neste trabalho, a prática do professor é entendida de forma ampla, contemplando tanto o cotidiano e as questões típicas de sala de aula como qualquer outra atividade inerente à ação profissional do professor. Trata-se de uma atividade complexa que configura um espaço de produção de saberes diversificados. Nesse sentido, os saberes advindos da prática são incorporados aos saberes constituídos na formação acadêmica formal e também não devem ser desconsiderados por essa formação:

> Os saberes da experiência adquirem também uma certa objetividade em sua relação crítica com os saberes curriculares, das disciplinas, e da formação

> profissional. [...] Os professores não rejeitam em sua totalidade os outros saberes; pelo contrário, eles os incorporam à sua prática, porém retraduzindo-os em categorias do próprio discurso. Nesse sentido a prática aparece como um processo de aprendizagem através do qual os professores retraduzem sua formação e a adaptam à profissão, eliminando o que lhes parece inutilmente abstrato os sem relação com a realidade vivida. (TARDIF et al, 1991, p.231, Apud MOREIRA, DAVID, 2007, p.39)

O estudo sobre o conhecimento do conteúdo disciplinar do professor de matemática com vistas ao ensino compõe uma agenda atual de pesquisa em educação matemática:

> Formação de professores de Matemática é um campo em desenvolvimento, com contribuições importantes a fazer para a prática, a política, a teoria e a pesquisa e o design em outros campos. Teorias da aprendizagem dos professores de matemática ainda estão surgindo, com muito ainda para saber sobre os conhecimentos, habilidades, qualidades pessoais e sensibilidades que o ensino da matemática implica, e sobre a forma como esses recursos profissionais são adquiridos. Os resultados a formação de professores são a prática dos professores de matemática, bem como a eficácia dessa prática nos contextos em que os professores trabalham. No entanto, nós temos muito a aprender sobre como acompanhar os conhecimentos dos professores em sua prática, onde o conhecimento é usado para ajudar os alunos a aprender. Nós temos ainda mais a entender sobre como a formação dos professores pode ser uma intervenção eficaz no complexo processo de aprender a ensinar matemática, que é muitas vezes mais influenciado por experiências anteriores dos professores como alunos, ou pelos contextos de seu trabalho profissional[147] (EVEN, BALL, 2009, p.2-3, tradução nossa).

Não obstante do conhecimento de matemática ser inequívoco na formação de professores de matemática, raramente este recebe a atenção adequada durante o processo de formação acadêmica (BALL, 1988, MOREIRA, DAVID, 2003, 2005, 2007, MOREIRA, FERREIRA, 2013). Existe uma dupla descontinuidade na formação do professor da escola básica (KLEIN, 2010). Por um lado, durante a formação acadêmica do professor, há pouca relação entre a matemática estudada na universidade e aquela aprendida na formação básica e, por outro lado, em sua ação profissional, o professor da escola básica dificilmente consegue estabelecer

[147] No original: "Mathematics teacher education is a developing field, with important contributions to make to practice, policy, theory, and research and design in other fields. Theories of mathematics teachers' learning are still emerging, with much yet to know about the knowledge, skills, personal qualities and sensibilities that teaching mathematics entails, and about how such professional resources are acquired. The outcomes of teacher education are mathematics teachers' practice, and the effectiveness of that practice in the contexts in which teachers work. Yet we have much to learn about how to track teachers' knowledge into their practice, where knowledge is used to help students learn. And we have more to understand about how teacher education can be an effective intervention in the complex process of learning to teach mathematics, which is all too often most influenced by teachers' prior experiences as learners, or by the contexts of their professional work." (EVEN, BALL, 2009, p.2-3)

relação entre a matemática que ensina e aquela que estudou em sua formação acadêmica. Essa dupla descontinuidade reflete a existência de uma ruptura entre a matemática escolar e a matemática acadêmica. Mais ainda, determina e contribui para um distanciamento entre essas dimensões que se pauta em uma percepção hierárquica.

Essa visão estaque entre a matemática escolar e a matemática acadêmica compromete o ensino e a aprendizagem da disciplina. É um obstáculo a ser vencido (KLEIN, 2010). Compreendendo a Matemática sob a ideia de um corpo orgânico, a relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica fica estabelecida sob o entendimento de um processo de *translação histórica* (SCHUBRING, 2012). Assim, o termo *matemática elementar* adquire um significado que vai muito além da ideia de uma matemática mais fácil ou simples. Sob esse entendimento, *matemática elementar* corresponde a partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática (KLEIN, 2010, SCHUBRING, 2003, 2014). Nesse sentido, não se estabelece diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior, que passam a ser entendidos como partes que se fundem e se arranjam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência.

<table>
<tr><td colspan="3">Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo</td></tr>
<tr><td>Saber pedagógico de conteúdo

Conhecimento de matemática para o Ensino

Lacuna entre a formação acadêmica do professor e a sua prática

A prática é uma componente essencial para a formação e para o desenvolvimento profissional do professor</td><td>Dupla descontinuidade

Matemática elementar

Translação histórica

Metassaber</td><td>Concept study

Estudo coletivo e colaborativo

Estudo conceitual

Substruct

Valorização da prática</td></tr>
<tr><td>Lee Shulman
Deborah Ball
Brent Davis</td><td>Felix Klein
Gert Schubring</td><td>Brent Davis
Moshe Renert</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aporte Teórico</td><td>Metodologia</td></tr>
</table>

Figura 4.1: Esquema da organização dos aportes teóricos fundamentais para o estudo

4.2 AS QUESTÕES DE PESQUISA

O foco desta investigação está na potencialidade de estudos colaborativos envolvendo grupos de professores de matemática para a construção do conhecimento matemático para o ensino. Mais especificamente a questão de pesquisa central que orienta este trabalho é como e até que ponto um estudo coletivo, estruturado de acordo com a metodologia de *Concept Study* proposta por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), pode contribuir para:

(i) o reconhecimento de aspectos elementares da matemática escolar;
(ii) a identificação, por parte dos professores, de metassaberes sobre os conteúdos da matemática escolar;
(iii) a (re)construção do conhecimento de matemática para ensino a partir desses aspectos elementares e metassaberes.

Para investigar estas questões, o *Concept Study* realizado neste trabalho teve como tema central *números racionais*. Esse tema foi escolhido por incorporar diversos aspectos (tais como representações e operações) comumente reconhecidos por professores por envolverem obstáculos de aprendizagem e dificuldades com metodologias de ensino. Sendo assim, para este estudo, o modelo de *Concept Study* constitui tanto um referencial teórico, na medida em que sustenta as questões de pesquisa, como metodológico, pois determina os métodos para investigá-las. O desenvolvimento do *concept study* que sustenta este estudo foi registrado em gravações de áudio e de vídeo. Além disso, foram feitas, pela pesquisadora, com base na observação das discussões, anotações regulares sobre o desenvolvimento das sessões.

4.3 METODOLOGIA, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE.

Observando os fundamentos e as características da metodologia *concept study* (DAVIS, SIMMT, 2003, 2006; DAVIS, 2008a, 2008b; DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014; DAVIS, 2010, 2011, 2012) e o foco principal da investigação, o conhecimento de matemática para o ensino (SHUMAN, 1986, 1987, BALL, BASS, 2003, 2009; BALL, THAMES, PHELPS, 2008, DAVIS, RENERT, 2014), para o planejamento da investigação empírica e para a organização e a análise dos dados, tomamos como orientação uma abordagem qualitativa. Entendemos que o conhecimento de matemática para o ensino se constitui de forma dinâmica em constante evolução. Nosso objetivo com esta investigação é o reconhecimento de aspectos elementares e de metassaberes pode ter implicações na construção desse saber. Assim acreditamos que uma abordagem qualitativa ofereceria uma análise detalhada da contribuição do reconhecimento de aspectos elementares e de metassaberes na construção do *saber pedagógico de conteúdo*.

De acordo com Borba e Araújo (2006), "pesquisas que utilizam uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações". Para D'Ambrósio (2006), a pesquisa qualitativa "lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas" (p.19). Assim, uma abordagem qualitativa diz respeito ao processo mais do que a resultados, e compreender o processo é o nosso objetivo.

A proposta de desenvolvimento de um *concept study* apresentou-se como adequada à investigação pretendida. Fundado sobre a concepção de uma investigação conceitual (c*oncept analysis*), com atenção à dimensão pedagógica do saber de conteúdo do professor e estabelecida a partir de um estudo coletivo (*lesson study*), um *concept study* determina um modelo para a investigação sobre o conhecimento de matemática do professor com vistas ao ensino (DAVIS, SIMMT, 2006, DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014, DAVIS, 2008, 2010). Nessa proposta, professores compartilham sua experiência e seu conhecimento acumulado com o objetivo de questionar e *(re)elaborar* seus próprios conhecimentos de matemática a partir de um processo de reflexão colaborativa. Segundo Davis e seus colaboradores, o desenvolvimento de um *concept study* permite alcançar aspectos explícitos e implícitos do conhecimento de matemática do professor, evidenciando que esse certamente é diferente do conhecimento matemático de conhecimento matemático de outros profissionais. Os pressupostos que sustentam o entendimento de um *concept study* admitem que o conhecimento de matemática dos professores interfere na criação de uma *matemática cultural* – isto é, de uma visão da matemática escolar, suas problemáticas conceituais e pedagógicas, e dos diversos saberes relacionados, que seja própria dos professores e compartilhada por eles como uma comunidade – o que sugere alinhamento as ideias de *elementarização* e *translação histórica* que sustento as concepções de Klein.

Para Davis, como descrito por Usiskin (2003),

> *Concept analysis* envolve traçar as origens e aplicações de um conceito, observando as diferentes maneiras em que aparece tanto dentro como fora da matemática, e examinar as várias representações e definições usadas

para descrevê-lo e as suas consequências[148]. (Usiskin et Al, 2003, p.1, apud Davis, RENERT, 2009b, tradução nossa).

Os processos de sistematização e de análise dos dados do estudo seguiram a orientação de Fiorentini e Lorenzato (2006), entendidos, portanto, a partir de um processo de concomitância.

> Alguns autores consideram que a análise e a interpretação acontecem em momentos separados. Nós, entretanto, temos uma concepção próxima à de Gomes[149] (1999) e à de Bogdn e Birklen[150] (1994), pois compreendemos a análise num sentido mais amplo, abrangendo a interpretação. Para Gomes (1999, p.68), "a análise e a interpretação estão contidas num mesmo movimento: o de olhar para os dados da pesquisa." (FIORENTINI E LORENZATO, 2006, p.134)

4.3.1 CONTEXTO

O estudo se deu, nos moldes de *concept study*, no segundo semestre de 2012, com um grupo de professores que cursava a disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Essa disciplina, que é eletiva, tem ementa que acolhe o desenvolvimento do estudo realizado e carga horária de 4 horas semanais. Em 2012, o calendário acadêmico previa 18 semanas, que determinaram 14 encontros.

Entendemos que era imperativo que o tema escolhido para orientar o desenvolvimento do *concept study* deveria ser reconhecido pelos professores envolvidos como *elementar*. Além de permear a escola básica como algo fundamental seria importante que sustentasse questões relevantes em relação ao ensino. Na mesma medida, entendemos que não poderia ser um assunto que intimidasse os professores participantes, comprometendo o seu envolvimento e a sua atividade no estudo coletivo. Reconhecendo o inquestionável valor *elementar* do tema números e a atenção recebida em investigações em ensino de Matemática (CONFREY et al, 2009), números racionais foi escolhido como tema do estudo coletivo.

---

[148] No original: "Concept analysis involves tracing the origins and applications of a concept, looking at the different ways in which it appears both within and outside mathematics, and examining the various representations and definitions used to describe it and their consequences." (Usiskin et Al, 2003, p.1, apud Davis, RENERT, 2009b)

[149] GOMES, R. (1999). A análise de dados em pesquisas qualitativas. In: MINAYO, M. C.S. (Org). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, p.67-80.

[150] BOGDAN, R.; BIKLEN, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto. Porto Editora.

Um ano antes da realização do estudo principal, aqui apresentado, foi realizado um estudo piloto, cujos resultados podem ser encontrados em Rangel, Giraldo, Maculan (2014).

4.3.2 O ESTUDO PILOTO

A decisão pelo desenvolvimento de um estudo piloto se justifica, antes de mais nada, pela falta de experiência anterior com o desenvolvimento de um *concept study*. Assim, pretendíamos que o estudo piloto oferecesse subsídios para balizar as decisões de caráter metodológico do estudo principal.

O estudo piloto também se deu com um grupo de professores que cursou a disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Ele ocorreu ao longo de 19 semanas do segundo semestre de 2011. A turma em que se desenvolveu o estudo piloto era composta por 15 professores com experiência profissional que variava de 1 (um) a 20 anos de atuação em sala de aula. Esses professores também apresentavam diversidade em relação à formação inicial, 9 cursaram a licenciatura em uma instituição pública, enquanto 6 obtiveram seu diploma em instituições particulares. Em relação à atuação profissional, na ocasião do desenvolvimento do estudo piloto, todos atuavam em escolas públicas da rede estadual do Rio de Janeiro e/ou da rede municipal da cidade do Rio de Janeiro. Dentre eles, 6 atuavam também em escolas particulares (Figura 4.2).

<table>
<tr><td rowspan="2">Formação</td><td rowspan="2">Licenciatura em Matemática (15)</td><td>Instituição pública</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Instituição particular</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Experiência profissional</td><td colspan="2">Menos do que 5 anos</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">De 5 a 9 anos</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">De 10 a 20 anos</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Atuação profissional</td><td colspan="2">Apenas em escolas públicas</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Em escolas públicas e em escolas particulares</td><td>6</td></tr>
</table>

Figura 4.2: Quadro informativo sobre os professores que compuseram a amostra do estudo piloto

Para o estudo piloto, planejamos o registro em vídeo e em áudio de todos os encontros. No entanto, não foi possível efetivar a gravação em vídeo, por não se ter o equipamento disponível na ocasião e os encontros foram registrados apenas em gravação de áudio. Foram previstas ainda anotações sobre o desenvolvimento das sessões com base na observação da pesquisadora e atividades documentadas em material impresso realizadas pelos professores que compuseram o grupo.

Com o objetivo de contribuir para a reflexão sobre a formação do professor de Matemática e sobre o desenvolvimento do saber pedagógico de conteúdo, as questões e pesquisa que conduziram o estudo piloto foram:

(i) como um processo coletivo de discussão centrado no conteúdo do ensino básico pode contribuir para o reconhecimento, por parte do professor, de aspectos elementares desses conteúdos (no sentido de Klein);

(ii) em que medida o reconhecimento desses aspectos elementares pode ter implicações para a construção do *saber pedagógico de conteúdo* (no sentido de Shulman).

O tópico escolhido para o estudo também foi números racionais, por permear o ensino básico como algo fundamental, sustentar questões relevantes em relação ao seu ensino, além de não intimidar os professores participantes (o que poderia comprometer seu envolvimento no processo coletivo de discussão). Obedecendo a metodologia *concept study*, no estudo piloto, foram identificadas três ênfases: *Percepções*, *Estruturas* e *Panoramas*. Na análise, essas ênfases foram identificadas a partir da complexidade das articulações estabelecidas entre o tema central que amparou a discussão (números racionais) e outros tópicos e campos da Matemática. Assim, as ênfases foram distinguidas, como *órbitas* estabelecidas a partir do tema central (números racionais). O menor nível de articulação foi associado à primeira ênfase de análise, *percepções*. Já a órbita mais distante foi identificada à maior abrangência em relação ao tema central, a partir de articulações ampliadas em aprofundamento, diversidade e alcance.

A análise do estudo piloto revelou que, embora as ênfases relativas às órbitas mais interiores tivessem, de fato, se iniciado mais cedo, entendemos que não poderiam ser identificadas a uma ordenação temporal precisa, em que cada ênfase se sucederia ao término da anterior. Ao contrário, verificamos interseções entre elas ao longo de todo o estudo. Assim, no estudo piloto, a variação de uma ênfase a outra foi caracterizada mais pela qualidade da discussão do que por uma sucessão temporal linear.

Os resultados do estudo piloto confirmaram a evidência de aspectos implícitos e explícitos do saber pedagógico de conteúdo e do saber de conteúdo dos professores (SHULMAN, 1986, 1987) e deixaram clara a mudança de atitude dos participantes, que assumiram, ao longo do estudo, uma postura mais investigativa, manifestando, inclusive, a intenção de estender a vivência de uma prática investigativa para suas salas de aula. Observamos também que o estudo ofereceu a possibilidade de investigar e explorar, em um processo coletivo, o conhecimento de matemática dos participantes de forma articulada com a sua prática, promovendo uma reconstrução conceitual a partir de um conhecimento anterior (*substruct*).

Com respeito à forma como os questionamentos foram disparados, observou-se que a maior parte das questões emergiu a partir da observação de problemas que os professores resolviam com seus alunos em sala de aula, ou seja, problemas típicos da escola básica. Por um lado, a orientação a partir de problemas próprios do ensino básico revelou que os professores tinham inseguranças latentes em relação à abordagem formal dos conteúdos matemáticos e que o hábito de refletir sistematicamente a partir de um ponto de vista conceitual era pouco consolidado. Entretanto, por outro lado, essa orientação estabeleceu para o estudo forte vínculo com a prática, o que consideramos ter sido fundamental para o andamento do estudo.

Com atenção às questões de pesquisa, a investigação se estabeleceu a partir de uma análise das impressões reveladas sobre o saber pedagógico de conteúdo dos professores participantes e nas relações e articulações reveladas na discussão sobre o conteúdo. Mais especificamente, em relação ao saber pedagógico de conteúdo, a análise se pautou na identificação: de dúvidas e de certezas; do nível da escolaridade (ensino básico ou formação superior) a que foi atribuída, pelos participantes, a origem do seu saber sobre o conteúdo; e do grau de complexidade das relações, articulações e conexões estabelecidas.

A discussão com o objetivo de reconhecer o que é elementar, não no sentido tradicionalmente estabelecido, como simples ou fácil, mas no sentido de Klein, como partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar o conhecimento matemático, revelou para os participantes uma nova perspectiva para a observação do conhecimento pedagógico do conteúdo, apontando para um metassaber do professor. Assim, por exemplo, ensinar a equivalência entre frações e associar a operação de divisão à interpretação como medida assumiram novas perspectivas para esses professores. A investigação realizada no estudo piloto sugeriu que, de fato, a busca por aspectos *elementares* (no sentido de Klein) no conteúdo de matemática do ensino básico determinou um processo de *(re)construção* do *saber pedagógico de conteúdo* dos participantes.

> "Realmente, professora, gosto muito dos nossos encontros! O tempo passa tão depressa! **Acrescento vários conhecimentos aos meus e refaço outros**! Saio pensando em tantos assuntos, que demoro um tempão para

> querer ligar o rádio do carro, prefiro ficar refletindo sobre tudo que foi conversado em sala de aula! Abraços, Bianca[151].” (grifo nosso)

4.3.3 CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO PILOTO PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

O desenvolvimento do estudo piloto foi bastante enriquecedor para o delineamento do estudo principal. Além de questões e metodológicas evidenciadas, o estudo piloto sugeriu direcionamentos e reflexões importantes para a orientação teórica e para as questões de pesquisa do estudo principal que caracteriza a investigação.

Volume de dados

O estudo piloto revelou a grande quantidade de dados gerados por um *concept study*, tanto pela duração do estudo coletivo como pela interação entre os participantes. Assim, a gravação em vídeo foi considerada indispensável como instrumento de registro do estudo principal. A gravação em áudio também foi mantida, como recurso de segurança. Para o estudo principal, foram ainda planejadas entrevistas semiestruturadas com o objetivo principal de conhecer melhor o *background* acadêmico e profissional dos professores participantes e suas percepções sobre a sua relação com a prática e com seus próprios saberes docentes.

Papel da pesquisadora

O estudo piloto foi fundamental também para balizar a postura e o envolvimento da pesquisadora diante do estudo coletivo. Decidir sobre o momento de intervir e sobre a forma de intervenção, sem que seja assumido um papel tradicional de professor é bastante delicado. Nesse sentido, a experiência com o estudo piloto foi fundamental, diminuindo a ansiedade e conferindo maior segurança à pesquisadora para as intervenções no estudo principal. Acreditamos que também as gravações em vídeo seriam importantes para o acompanhamento nesse sentido. Segundo Davis, Simmt (2006), em um *concept study* o pesquisador deve gerenciar e acompanhar o estudo, organizando e selecionando a ação do grupo de forma a permitir que haja interação entre os participantes e suas ideias. O gerenciamento da rotina do estudo coletivo foi assumido pela pesquisadora e pautado na organização da discussão e na manutenção da agenda de tarefas que eram decididas ao longo do estudo. A experiência do estudo piloto

---

[151] A professora identificada aqui como Bianca era uma das participantes com maior tempo de experiência profissional. Essa mensagem foi enviada por ela à pesquisadora ao final de um dos encontros. O nome Bianca é fictício.

mostrou a importância de algumas intervenções da pesquisadora para, quando necessário, reconduzir a discussão. Por exemplo, em muitos momentos, os professores participantes condiziam a discussão para questões sobre condições de trabalho, como remuneração e disciplina em sala de aula. Discussões desse tipo foram entendidas como permitidas e como importantes para a unidade do grupo, mas era fundamental manter o objetivo do estudo: uma discussão conceitual. Para evitar que o estudo perdesse o foco, nessas ocasiões, a pesquisadora convidava os participantes a retomar a discussão sobre o tema, a partir de uma pergunta ou simplesmente lembrando que essas questões eram importantes, mas que não eram o foco principal do estudo. Além disso, o estudo piloto evidenciou que era importante que a pesquisadora participasse das discussões, evitando que a estrutura se assemelhasse a uma aula tradicional. Essa participação ficou caracterizada mais no sentido de provocar a discussão e reflexão do que no sentido de oferecer respostas.

Tema condutor

A experiência piloto confirmou a decisão sobre o assunto que orientaria o estudo coletivo: *números racionais*. A análise do estudo piloto mostrou que, de fato, esse assunto se mostrou rico tanto para oferecer questões e desafios próprios oriundos da prática de sala de aula como para o processo de descompactação do conhecimento de matemática para o ensino dos professores participantes. Além disso, algumas das discussões travadas no estudo piloto serviram de referência para atividades e questões propostas, pela pesquisadora, aos professores participantes na etapa inicial do estudo principal, que teve como objetivo envolver os professores participantes em um processo coletivo de reflexão e discussão, ou seja, prepará-los para o desenvolvimento do estudo conceitual em um modelo coletivo e pautado na discussão colaborativa. O desenvolvimento desta etapa foi outra decisão mantida de um estudo para o outro.

Análise dos dados

A análise do estudo piloto indicou que o critério para a identificação das ênfases, a partir do nível de observação e de articulação das reflexões e das discussões sobre números racionais realizadas pelo grupo de professores participantes era adequado para os objetivos da investigação. A análise do estudo piloto evidenciou também que essas ênfases não tinham, de fato, um encadeamento baseado exclusivamente na variação cronológica, ainda que o desenvolvimento do estudo conduzisse a um ganho qualitativo na discussão. Assim, também no estudo principal a variação de uma ênfase da análise a outra seria caracterizada mais pela qualidade da discussão do que pela variação cronológica.

Com relação à análise dos dados, o estudo apontou a necessidade de elencar elementos de análise e questões norteadoras que permitissem organizar em uma abordagem qualitativa as informações coletadas.

Questões de pesquisa

Finalmente, o estudo piloto, em consonância com a ampliação do referencial teórico, determinou uma revisão nas questões de pesquisa, oferecendo maior ênfase na investigação do potencial da metodologia *concept study* para a promoção de uma (re)construção conceitual do professor visando ao desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino.

4.3.4 Os Participantes do Estudo Principal

O grupo de professores participantes do estudo principal era composta por 6 professores com experiência profissional que variava de 1 (um) a pouco mais do que 6 (seis) anos de atuação em sala de aula. Em relação à formação inicial, 3 desses professores cursaram a licenciatura em uma instituição pública, enquanto outros 3 obtiveram seu diploma de licenciatura em instituições particulares. Em relação à atuação profissional na ocasião do desenvolvimento do estudo, 4 atuavam em escolas públicas da rede estadual do Rio de Janeiro e/ou da rede municipal da cidade do Rio de Janeiro e 2 apenas em escolas particulares. No entanto, todos acompanhavam turmas do 2º segmento do ensino fundamental. As informações indicadas no quadro apresentado na Figura 4.3 foram coletadas a partir de um formulário simples (Anexo x), que os professores preencheram no 1º encontro do estudo coletivo.

Segundo Davis, Simmt (2006), em um *concept study,* o contexto das discussões que revela de formas explícita e implícita o conhecimento de matemática dos professores. Nesse cenário, os professores participantes do estudo coletivo devem estar interessados em ampliar seu conhecimento de matemática para o ensino e o pesquisador deve objetivar dar significado a esse conhecimento dos professores. Em comum, pesquisador e professores participantes do estudo coletivo têm o foco em novas percepções sobre o *saber de matemática para o ensino*. Ao apresentar um estudo coletivo realizado em um curso de especialização para professores que ensinam matemática, Davis, Simmt destacam

> Por sua parte, os professores [participantes do estudo coletivo] consideram as reuniões do estudo como "sessões de trabalho"; suas principais ra-

> zões para tomar parte do estudo coletivo giram em torno de seus desejos profissionais para serem professores mais eficientes. Em contraste, para nós, esses eventos são "sessões de pesquisa" – ou seja, espaços para obter informação para nossa teorização. Somos explícitos em relação ao fato de que estamos lá para tentar dar sentido ao seu conhecimento de matemática e em como esse conhecimento se apresenta no ensino da matemática. O terreno comum [...] surge na produção conjunta de novos conhecimentos em matemática e ensino.[152] (DAVIS, SIMMT, 2006, p.299, tradução nossa)

		P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total
Formação	Licenciatura	●	●	●	●	●	●	**6**
	Instituição Pública	●				●	●	**3**
	Instituição Particular		●	●	●			**3**
Experiência profissional	1 ano	●	●					**2**
	1 ano e 6 meses					●		**1**
	6 anos			●	●			**2**
	Mais do que 6 anos						●	**1**
Atuação profissional	Apenas em escolas públicas				●	●	●	**3**
	Apenas em escolas particulares	●		●				**2**
	Em escola pública e em escola particular		●					**1**
Nível escolar de atuação	Ensino Fundamental (6º ao 9º anos)	●	●	●	●	●	●	**6**
	Ensino Médio		●	●	●	●	●	**5**

Figura 4.3: Quadro informativo sobre os professores participantes do estudo principal.

[152] No original: “For their own part, the teachers regard our meetings as "in-service sessions"; their principal reasons for taking part revolve around their professional desires to be more effective mathematics teachers. In contrast, for us, these events are "research sessions" – that is, sites to inform our theorizing. We are explicit in the fact that we are there to try to make sense of their knowledge of mathematics and how that knowledge might play out in their teaching. The common ground, as we develop below, arises in the joint production of new insights into mathematics and teaching. Topics have ranged from general issues (e.g., problem-solving) to specific curriculum topics (as in the case of multiplication, developed here).” (DAVIS, SIMMT, 2006, p.299)

No estudo desenvolvido, essa característica ficou evidenciada. Dentre os itens que compuseram o formulário preenchido pelos professores participantes havia a seguinte pergunta: *Porque buscou o curso de especialização em ensino de Matemática*? A análise das respostas a essa questão evidenciou que todos os professores tinham expectativas em relação a melhorar a sua prática e a aprofundar seus conhecimentos de matemática com o objetivo do ensino. Como ilustração, são destacadas as respostas de três dos professores participantes:

> Professor P_1: Para complementar minha formação, tendo acesso a informações que me auxiliem na prática do ensino de matemática.
>
> Professor P_2: Para aperfeiçoamento da minha prática como docente.
>
> Professor P_5: Para aprofundar meus estudos de matemática e melhorar a minha prática.

4.3.5 INSTRUMENTOS E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Os instrumentos de análise do estudo principal foram entrevistas semiestruturadas, realizadas individualmente com os professores participantes antes do início do estudo conceitual coletivo; e o acompanhamento das seções desse estudo a partir de gravações em áudio e em vídeo e de anotações de campo realizadas pela pesquisadora. Todos os encontros que determinaram o estudo, com exceção do primeiro, foram gravados em áudio e em vídeo. A câmera foi posicionada de forma lateral à disposição dos professores de modo a oferecer uma melhor visão de todos os professores participantes. O objetivo desse posicionamento foi poder observar expressões individuais dos participantes e evitar que fossem constrangidos com a presença do instrumento.

O primeiro encontro

As gravações em áudio e em vídeo não foram realizadas no primeiro encontro por não haver ainda o consentimento dos professores com o estudo nem com as gravações. Este encontro foi reservado para a apresentação da proposta, a consulta da concordância dos professores cursistas, que passariam a ser professores participantes do estudo, as apresentações individuais, para o preenchimento de um formulário para a coleta de informações pessoais dos participantes e para o agendamento das entrevistas individuais. Todos os professores concordaram com a participação no estudo.

As entrevistas

As entrevistas semiestruturadas tiveram como objetivo principal conhecer melhor o *background* acadêmico e profissional dos professores participantes e suas percepções sobre a sua relação com a prática e com seus próprios saberes docentes. Essas entrevistas não têm um caráter principal na coleta de dados e foram analisadas qualitativamente. A análise das entrevistas, realizada a partir de uma abordagem qualitativa, encontra-se no Capítulo 5, seção 5.3, deste documento. No entanto, a realização dessas entrevistas não indica a intenção de investigar os participantes individualmente, ainda que aspectos individuais dos participantes possam contribuir e serem observados na análise do desenvolvimento do *concept study*. Essas entrevistas foram realizadas paralelamente ao desenvolvimento de uma etapa anterior ao início do *concept study* em si, identificada como etapa inicial.

Etapa inicial

O objetivo fundamental da etapa inicial foi envolver os professores participantes em um processo coletivo de reflexão e discussão, ou seja, prepará-los para o desenvolvimento do estudo conceitual em um modelo coletivo e pautado na discussão colaborativa. Não foi planejada uma análise específica para esta etapa da investigação como um todo, apenas para indicar o momento inicial do *concept study*. A análise foi realizada encontro a encontro a partir das gravações em vídeos e das anotações de campo da pesquisadora, com o objetivo de verificar se todos os professores participantes estavam, de alguma forma, envolvidos no estudo coletivo. Com a conclusão da etapa inicial, deu-se início ao *concept study*.

Assim, nesta pesquisa, antes do início do *concept study*, estrutura principal da investigação, foram observadas três etapas que não compõem esse modelo de estudo coletivo, mas que visaram dar suporte ao seu desenvolvimento e à análise dos dados coletados. O *concept study* determina de forma preponderante e substantiva a investigação em tela.

Componente	Objetivos	Análise
1º encontro	• Apresentação da proposta • Consulta da concordância dos professores cursistas, que passariam a ser professores participantes do estudo • Apresentações individuais, • Preenchimento de um formulário para a coleta de informações pessoais dos participantes • Agendamento das entrevistas individuais	• Apenas a partir de anotações de campo da pesquisadora • Tabulação dos dados pessoais obtidos no formulário
Entrevista semiestruturadas	• Obter informações sobre o background acadêmico e profissional dos professores participantes • Identificar percepções sobre a relação dos professores participantes com a prática e com seus próprios saberes docente	• Análise qualitativa • A realização dessas entrevistas não indica a intenção de investigar os participantes individualmente
Etapa Inicial	• Envolver os professores participantes em um processo coletivo de reflexão e discussão	• A partir das gravações em vídeo

Figura 4.4: Quadro resumo das etapas anteriores ao desenvolvimento do *concept study*.

Concept study

Proulx (2007), que investiga uma intervenção de desenvolvimento profissional que visa ampliar o conhecimento de matemática para o ensino de seis professores de matemática, observa que a maioria dos estudos sobre o desenvolvimento profissional do professor se concentra em "como" as sessões de formação são realizadas e não conseguem oferecer uma visão sobre o "quê" permeia essas sessões. Para esse autor, nos estudos organizados a partir de modelos de formação profissional do professor, "pouca atenção é dada ao que pragmática e concretamente foram as oportunidades de aprendizagem específicas das sessões de desenvolvimento profissional"[153]

Inspirados por Proulx (2007), pretendemos construir a análise do *concept study* de forma a refletir o teor e a característica das discussões conceituais que permearam as sessões do estudo coletivo, destacando oportunidades oferecidas ao longo do desenvolvimento do estudo para que os professores participantes discutam seus conhecimentos e promovam uma (re)elaboração conceitual.

Durante o desenvolvimento do *concept study*, a sistematização de organização e de análise dos dados foi realizada da seguinte forma: Após cada encontro, as anotações de campo da pesquisadora eram confrontadas com a análise cuidadosa dos vídeos. Para cada sessão do estudo, era organizado um registro detalhado composto de três blocos principais:

(i) Um panorama geral, com a descrição dos acontecimentos da sessão, indicando os assuntos discutidos, os professores presentes, a duração e outras informações quaisquer consideradas relevantes para descrever e caracterizar a sessão;

(ii) A tabulação das principais discussões e reflexões desenvolvidas pelos professores participantes, com a indicação do assunto, dos momentos inicial e final (na gravação em vídeo), de uma breve análise qualitativa indicando aspectos característicos da discussão ou desdobramentos decorrentes dela, da relação com os elementos centrais de análise e com as questões norteadoras.

(iii) A transcrição da íntegra (ou de trechos) das discussões considerados ilustrativas das ênfases do *concept study*, identificadas a partir do nível de complexidade.

À medida que o estudo se desenvolvia, indicando novas ideias ou impressões, esses registros eram revisitados e, quando necessário, alterados ou ampliados. A organização, a análise e a interpretação dos dados obedeceram a dois eixos estruturantes: *Vertical* e *transversal.*

O eixo vertical se caracteriza pela observação das narrativas individuais dos professores participantes e da discussão e da reflexão coletivas desses professores, buscando identificar os seguintes elementos centrais em cada discussão ou episódio identificado:

---

[153] No original: "Little attention is paid to what pragmatically and concretely the specific learning opportunities of professional development sessions were." (PROULX, 2007, p.104)

(i) **referências:** aspectos que motivam, sustentam ou balizam cada discussão, identificados, por exemplo, a partir da própria prática de sala de aula, do próprio conhecimento, de textos didáticos ou acadêmicos ou emergentes da própria discussão;

(ii) **aspectos elementares do conteúdo:** em linhas gerais, tópicos, questões ou assuntos reconhecidos pelos professores como elementares, isto é, tratados por eles como estruturantes para os próprios conhecimentos de matemática, especialmente aqueles que sustentam a prática de sala de aula. Além disso, foram considerados o entendimento atribuído ao termo elementar pelos participantes, bem como a relevância dada por eles dos aspectos elementares para a prática de sala de aula.

(iii) **saberes e metassaberes dos participantes:** evidências sobre o conhecimento dos professores participantes a partir da afirmação sobre resultados e da indicação de dúvidas nas narrativas desses professores (sem que os resultados em si fossem avaliados quanto à pertinência ou à correção matemática), bem como evidências de reconhecimento pelos participantes da natureza do próprio conhecimento ou de sua relevância para a prática de sala de aula;

(iv) **(re)construção conceitual (*substruct*):** evidências de mudanças na compreensão de conceitos e de resultados matemáticos na narrativa dos professores (também neste caso, sem que os resultados em si fossem avaliados quanto à pertinência ou à correção).

Tendo como referência as questões centrais da investigação (neste capítulo, Seção 4.2), esses elementos foram identificados a partir dos próprios processos de análise e de interpretação dos dados coletados. Uma vez que os elementos de análise são entendidos como não disjuntos, ou seja, cabendo à observação de uma relação entre eles, entendemos que essa análise transversal oferece a possibilidade da observação de aspectos que podem não ser evidentes se os dados da análise vertical não forem observados como um todo. O eixo transversal fica evidenciado em primeiro plano, a partir das ênfases características da metodologia *concept study*. As ênfases identificadas, *percepções*, *panorama*, *vínculos e inferências*, por si só, já explicitam uma dimensão da análise do estudo, que se revela a partir do processo interpretativo da condução do *concept study*, ou seja, é inerente a essa metodologia. A análise de cada uma das ênfases distinguidas foi organizada a partir das seguintes questões norteadoras, que se sustentam o eixo vertical da investigação:

(i) Que *referências* os participantes usam para trazer e para discutir as questões que emergem do estudo?

(ii) O que foi identificado como *aspectos elementares* e que papel esses aspectos tiveram na estruturação da discussão e na identificação de cada ênfase?

(iii) Que *saberes* e *metassaberes* foram identificados? Como esses saberes e metassaberes se relacionavam e foram (re)construídos nesta ênfase do *concept study*?

(iv) Que reflexões sobre a prática e que referências a possíveis repercussões para a prática emergiram?

No processo de análise do estudo principal, apresentado no capítulo 5, todo o material coletado em vídeo e a partir das anotações de campo feitas pela pesquisadora foi organizado e analisado segundo uma construção interativa que evidenciou em primeiro plano as ênfases identificadas no desenvolvimento do *concept study*. Na discussão de cada uma das ênfases distinguidas são destacados diálogos e narrativas representativas e ilustrativas. Os elementos centrais de análise, observados a partir das narrativas dos professores, individuais ou em discussão e reflexões coletivas, sustentaram essa análise.

Segundo a metodologia de análise de um *concept study*, neste estudo foram distinguidas quatro ênfases: *Percepções*, *Panorama*, *Vínculos* e *Inferências*. A questão disparadora do estudo, associada à primeira ênfase, *percepções*, foi: ***O que é fundamental no que ensinamos sobre números racionais na escola básica?*** As ênfases subsequentes foram determinadas a partir da qualidade e da complexidade das relações estabelecidas pelos participantes entre diferentes aspectos do tema central (números racionais) e entre este e outros assuntos e ramos da Matemática. Em particular, como essas ênfases são caracterizadas *pela qualidade do processo coletivo de discussão*, os mesmos não correspondem a intervalos de tempo bem definidos e ordenados.

Embora se verifique uma linearidade cronológica entre o início de cada ênfase, a partir daí elas podem se sobrepor e se articular de forma não linear nem escalonada. Como destacado por Davis e Renert (2014), “antes de descrever as ênfases com maior detalhe, entretanto, é importante notar que não são apresentados como “passos” ou “níveis” em um processo linear”[154] (DAVIS, RENERT, 2014, p.56, tradução nossa, aspas como no original).

[154] No original: “Before describing the emphases in greater detail, however, it is important to note that we do not offer them as “steps” or “levels” in a linear process.” (DAVIS, RENERT, 2014, p.56, aspas como no original).

Assim, a dinâmica da relação entre as ênfases identificadas no estudo pode ser melhor percebida a partir da metáfora visual apresentada na Figura 4.1 (DAVIS, RENERT, 2014).

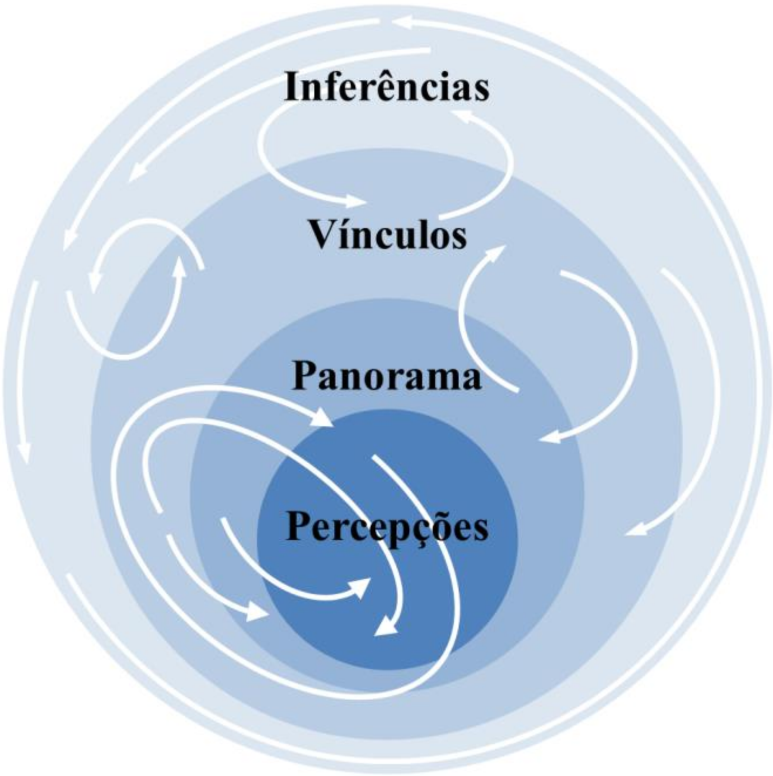


Figura 4.5: Metáfora visual para a dinâmica da relação entre as ênfases do *concept study*

De acordo com Davis e Renert (2014), uma ressalva importante antes da descrição e análise das ênfases identificadas no estudo diz respeito à organização desse processo:

> Outra ressalva importante antes de nos aprofundarmos nas ênfases do estudo é que é impossível apresentar um relatório sobre o trabalho desenvolvido no *concept study* sem apresentar um pouco da "descoberta" do grupo em detalhes. Ao apresentar esses detalhes, nós, de modo algum temos a intenção de sugerir que o que estes professores (professores participantes) identificaram seja o que *todos* os professores devem saber.[155] (DAVIS, RENERT, 2014, p.57, tradução nossa, aspas e itálico como no original).

[155] No original: “Another important caveat before we delve into the emphasis is that it is impossible to report on concept study work without presenting some of the “finding” of the group in details. In presenting these details, we in no way intend to suggest that these teachers identified what all teachers should know.” (DAVIS, RENERT, 2014, p.57, aspas e itálico como no original).

Capítulo 5

DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

Se os professores são as formas primárias da matemática na sociedade, então as estruturas e a importância que definem a especialização disciplinar dos professores devem ser desafiadas e remoldadas.[156] (DAVIS e RENERT, 2014, p.126, tradução nossa)

Neste capítulo, serão apresentados o desenvolvimento e a análise do estudo principal respeitando o contexto e a metodologia *concept study*.

5.1 PREPARANDO O ESTUDO COLETIVO

A investigação sustentada pela metodologia *concept study* previa a identificação de ênfases para a análise, como indicado no Capítulo 3, seção 3.3, deste documento. No entanto, diante do objetivo da investigação, foram realizadas ações anteriores com o objetivo de amparar o desenvolvimento e a análise do estudo coletivo: Encontro inicial, entrevistas semiestruturadas e etapa inicial (Figura 4.4).

Dessas ações destacamos a etapa inicial. O propósito fundamental desta etapa foi envolver os professores participantes em um processo coletivo de reflexão e discussão, ou seja, prepará-los para o desenvolvimento do estudo conceitual em um modelo coletivo e pautado na discussão colaborativa. Esse objetivo se justifica pele entendimento da importância, para a pesquisa e para a metodologia adotada, de que os professores participantes estivessem envolvidos na discussão conceitual realizada a partir de questões emergentes de seus próprios saberes. Assim, o curso transcorreria de uma forma diferente do modelo tradicionalmente estabe-

[156] No original: "If teachers are the primary shapes of mathematics in society, then the structures and emphases that have defined teacher's disciplinary expertise must be challenged and reframed." (DAVIS e RENERT, 2014, p.126)

lecido, com papeis específicos para professores-alunos e professor responsável pela disciplina. A principal distinção em relação a um modelo tradicional estava na essência do curso, que se configurava a partir de uma concepção investigativa. Os professores precisavam estar cientes e concordar com a proposta de investigação. Além disso, obedecendo à metodologia *concept study*, não caberia exclusivamente ao professor responsável pela disciplina a determinação dos tópicos de discussão nem a condução dessa discussão. O desenvolvimento do curso, observando à pesquisa, estava preponderantemente nas mãos dos professores cursistas, que no caso, seriam também participantes de uma investigação. Entendemos que, para que os professores participantes do estudo se identificassem como protagonistas de um processo de reflexão, era imperativo que compreendessem e legitimassem a proposta.

Configuram-se assim os objetivos específicos da etapa inicial:

(i) Apresentação da proposta de trabalho;

(ii) Suscitar a discussão visando a um processo colaborativo;

(iii) Realização de entrevistas;

(iv) Dar suporte à análise dos dados coletados a partir do *Concept Study*.

Na etapa inicial, que correspondeu a cerca de 3 encontros, os professores foram convidados a iniciar a reflexão a partir de questões propostas pela pesquisadora, que tinham como propósito suscitar e orientar a discussão. Essas questões foram extraídas de pesquisas que tinham como foco o *saber pedagógico de conteúdo* dos professores da escola básica (BALL, BASS, 2003; MOREIRA, 2004) e também formuladas pela pesquisadora a partir da análise do Estudo Piloto.

Além disso, no decorrer dessa etapa, foram levantados dados sobre os professores participantes, a partir das entrevistas semiestruturadas. As entrevistas não indicam a intenção de investigar os participantes individualmente, ainda que aspectos individuais sejam observados para a análise do desenvolvimento do estudo coletivo. O objetivo dessas entrevistas foi conhecer melhor o *background* dos professores participantes e suas percepções sobre a sua relação com a prática e com os seus saberes docente.

A etapa inicial foi considerada encerrada ao final do 3º encontro, a partir do entendimento de que os professores participantes haviam alcançado a prontidão para o processo de reflexão coletiva e colaborativa. Essa decisão se baseou na análise dos vídeos e das anotações de observação de campo da pesquisadora. O elemento de análise foi a participação atuante de dos professores participantes.

5.1.1 O PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro do grupo, realizado em 17/08/2012, se estabeleceu a partir de objetivos que não caracterizam diretamente um *concept study*, mas que se fazem fundamentais diante da pesquisa pretendida. Este encontro teve como objetivos principais:

(i) Apresentação da proposta e reconhecimento do grupo (para o grupo e para o pesquisador): nesse sentido, pesquisador e professores participantes se apresentaram e compartilharam oralmente seus objetivos e suas expectativas em relação ao curso;

(ii) Apresentação da proposta de investigação e da intenção (e necessidade) de registrar os encontros em áudio e em vídeo. A pesquisadora apresentou sua intenção de acompanhar de forma investigativa o desenvolvimento do curso, explicando que o objetivo era compor o estudo de sua pesquisa de doutorado, cujo foco era a formação do professor do ensino básico com especial atenção para os saberes docentes. Todos os participantes registraram sua aquiescência (e entusiasmo) em participar do estudo como proposto;

(iii) Coleta de informações pessoais dos professores participantes a partir de um formulário;

(iv) Neste encontro, também foram agendadas entrevistas individuais com os professores participantes.

O registro desse encontro foi feito exclusivamente a partir de anotações de campo da pesquisadora, em que se destaca a observação de que os participantes estavam em seus anos iniciais de atuação profissional, revelando pouca experiência, e de que mostraram estarem interessados e motivados para o estudo proposto.

5.1.2 AS ENTREVISTAS

Nesta seção, é apresentada a análise de cada uma das entrevistas semiestruturadas realizadas com quatro dos professores participantes do estudo coletivo. Dois dos professores que iniciaram o curso não realizaram a entrevista. Esses professores precisaram abandonar o curso por motivo de saúde. O professor P6 participou apenas do primeiro encontro, não tendo participando efetivamente do estudo. No entanto, o professor, P5, chegou a acompanhar o grupo por cerca de 2 meses, e sua participação está contemplada no registro e na análise dos dados.

Essas entrevistas não têm um caráter principal na coleta de dados, foram planejadas para conhecer melhor o *background* dos professores participantes e suas percepções sobre a sua relação com a prática e com os seus saberes docentes. As entrevistas tinham como objetivo oferecer informações complementares para amparar a análise dos dados coletados durante as sessões do *concept study*. A condução das entrevistas semiestruturadas teve como base quatro eixos estruturantes (i) informações sobre a formação e a experiência profissional dos professores; (ii) dificuldades destacadas pelos professores em relação ao cotidiano da prática e qual o papel do conteúdo e da formação nesse entendimento; (iii) elementos que amparam e dão segurança a esses professores em sua ação na prática e (iv) aspetos relativos à identificação e ao reconhecimento de um metassaber pessoal.

A composição dos eixos que orientaram as entrevistas teve como referência a identificação de aspectos que permitissem identificar, ou não, a dupla descontinuidade na formação desses professores e sua relação com o desenvolvimento dos saberes pessoais necessários para a atuação profissional na prática.

Essas entrevistas foram gravadas e transcritas. A análise e a interpretação das entrevistas, de caráter qualitativo, foram pautadas nas transcrições e na audição das gravações e foram feitas logo após a realização das quatro entrevistas realizadas, ainda durante o início do estudo coletivo. A seguir, tendo como referência a análise das entrevistas, são destacados alguns elementos das impressões observadas de cada participante a partir dos quatro eixos estruturantes. São apresentados extratos do diálogo e das falas para ilustrar as observações.

Professora P1

> "Eu queria ir para a escola normal, eu sempre quis ser professora. Sempre gostei muito de Matemática, meu desejo era saber ensinar às crianças a gostar de Matemática"

A professora P_1 se mostrou muito segura e satisfeita com a sua escolha profissional. Acredita que seu interesse pela profissão teve forte motivação do entusiasmo que identificou nos professores que lhe deram aula de matemática enquanto foi aluna do ensino básico.

> "Os professores de matemática que eu tive sempre foram bons, eu sempre gostei. Quando você passa pro seu aluno que você gosta daquilo que você faz, você também acaba contagiando ele."

Concluiu seu curso de licenciatura em 2010 na UFRJ e ingressou, na sequência, no curso de Especialização em Ensino de Matemática. Além disso, nos dois anos finais de graduação, participou como estagiária do Projeto Fundão/Matemática, projeto de pesquisa e extensão voltado para a formação de continuada de professores de Matemática, desenvolvido na UFRJ. Reconhece que está no início da carreira e que ainda tem muito a aprender.

Em relação às dificuldades, essa professora entende que, de maneira geral, a formação acadêmica não prepara os professores adequadamente para enfrentar a maioria das dificuldades e dos desafios que o encontrarão na prática cotidiana de sala de aula. Nesse sentido, destaca a falta de preparo para lidar com o ensino de assuntos bem elementares:

> "Por exemplo, às vezes o aluno tem dificuldade em dividir, fazer a divisão e a gente tem dificuldade de explicar porque a gente não sabe como a professora lá do quarto ano ensinou. Como é que se ensina a dividir? A nossa formação não prepara a gente para ensinar a dividir. Quem ensina a dividir é a professora lá do 4º ano. A gente vai para a sala com o aluno já sabendo somar, subtrair, multiplicar e dividir. Eu não tenho que ensinar isso para ele. Acho que falta isso na nossa formação. Coisas da base da matemática que às vezes o aluno não sabe e a gente não sabe ensinar isso para eles."

O entendimento da falta de preparo para lidar com as demandas do ensino na escola básica, de certa forma, também fica evidenciado quando a professora P_1 destaca o que lhe dá segurança para ensinar. Nesse sentido, essa professora destaca a experiência como estagiária do Projeto Fundão durante a sua formação acadêmica e que, atualmente, como professora multiplicadora:

> "Eu não consigo separar a minha formação do Projeto Fundão. [...] Minha formação seria completamente diferente se eu não tivesse participado do Projeto."

Ao ser questionada sobre o que acha que o Projeto Fundão agregou à sua formação, que não teria se não tivesse participado do Projeto, o professor responde:

> "O projeto agregou justamente a sala de aula. [...] Nas disciplinas você pode até ver alguns conteúdos que você vai ensinar na sala de aula, mas, mesmo assim, é muito distante da sala de aula, da abordagem da sala de aula. Acho que falta assim... ligações, entendeu? Por exemplo, você aprende álgebra linear, que a gente estuda lá as matrizes e tudo mais. Isso tudo é assunto do ensino médio, mas falta é aquilo.... Como você vai expor isso no ensino médio? Isso não tem. São muito poucas as matérias que falam sobre a sala de aula. É muito diferente você ser aluno de você ser professor. Por mais que a gente tenha experiência como aluno, isso não é suficiente para você ser professor"

Na sequência, a professora P_1 destacou especialmente a contribuição da metodologia do Projeto Fundão, que envolve a troca e a discussão com professores que estão em sala de aula. São esses professores que trazem as questões e as angústias da vivência da sala de aula.

Em nossa análise, a professora P_1 parece reconhecer a existência e a importância do **saber pedagógico de conteúdo**, ainda que não identifique nominalmente esse tipo de saber.

> "Para ensinar é preciso saber o conteúdo claro, mas é também você saber quais são os elementos que você precisa para ensinar aquele assunto. [...] Eu acho que não é só saber o que ensinar, mas é saber como ensinar. Eu não sei em que momento da vida a gente tem essa percepção de como ensinar, se é na faculdade. Não sei. Mas eu sei que não sei isso para a análise combinatória, por exemplo."

Outro relato importante dessa professora aponta para a ruptura entre a universidade e a escola básica, que marca a dupla descontinuidade. Em sua formação universitária, a Professora P_1 fez dois cursos de análise combinatória, um na graduação e outro na especialização. Reconhece e enfatiza que teve bons professores e afirma que seu desempenho nesses cursos foi muito bom, que foi boa aluna. No entanto, por outro lado, afirma que é a disciplina que tem maior dificuldade para ensinar, por não ter tido um bom professor no ensino básico. Segundo ela, "foi como se não tivesse tido aulas desse conteúdo" nesse segmento de estudo.

> "Eu sei análise combinatória, mas eu sei que eu não sei ensinar aquilo. [...] Esse conteúdo eu não aprendi na escola. [...] O que sei desse conteúdo, eu aprendi aqui na universidade. [...] Eu não sei se faltou essa formação inicial. Eu não sei se tenho esse bloqueio devido a isso. Por que eu sei que não aprendi nada disso no ensino médio. Eu não tive essa experiência. É muito diferente de a agente ser ensinado na escola de ser ensinado na universidade. Eu não sei se o que me falta é esse saber da escola. E é isso que me dá insegurança."

A professora P_1 destaca ainda que dois cursos específicos, ambos realizados durante a especialização, foram importantes para lhe dar segurança em sala de aula: Números e geometria. Em comum, esses cursos se voltaram mais para questões relativas ao ensino do conteúdo na escola básica. Isso lhe deu mais segurança para ensinar esses conteúdos.

> "Eu acho que não adianta a gente simplesmente saber uma coisa, né? Há professores que a gente sente que ele sabe muito daquilo que vai ensinar, mas que ele não sabe ensinar aquilo. Ela não sabe colocar aquilo na cabeça da outra pessoa. [...] A minha segurança é justamente nesse sentido [...] eu me sinto segura de passar esses conteúdos de uma maneira que o aluno entenda. E quando surge uma dúvida, a gente sabe em qual ponto está a dúvida do aluno"

Professor P2

O Professor P_2 inicia a conversa se mostrando bastante apreensivo com a entrevista, como se fosse ser testado. Aos poucos vai se envolvendo e deixa claro que a sua escolha profissional é motivo de orgulho e se funda na facilidade em relação à Matemática e no prazer de ser professor. Apesar de não ter muito tempo de formado, cerca de 1 ano e meio, registra que já atuava como professor desde a sua graduação, como professor particular e, de forma bastante ativa, durante o estágio, realizado em uma escola pública do estado do Rio de Janeiro.

Sobre as dificuldades que encontra em sua prática enfatiza aspectos pedagógicos, não identificando questões relativas ao conteúdo. Parece bastante seguro em relação ao seu conhecimento de conteúdo. Quando perguntado especificamente sobre as dificuldades enfrentadas em sua prática que sejam relativas ao conteúdo e ao ensino do conteúdo, o Professor P_2 indica assuntos que tem dificuldade de ensinar e assuntos que, ele entende, oferecem dificuldade para a aprendizagem. A dificuldade para ensinar é associada, pelo professor, ao fato de ele não conhecer bem o assunto:

> "Eu tenho certeza de que tenho mais dificuldade (para ensinar) é em relação àquela parte da probabilidade, números combinatórios... Eu sei que para eu ensinar é muito complicado. E eu também sinto alguma dificuldade em relação a alguns exercícios. Eu faço até, mas tenho alguma deficiência. Eu sei até o porquê. No terceiro ano quando eu estudei isso, eu tive uma professora que teve dificuldade para ensinar isso"

Em relação à formação universitária esclarece que sua graduação foi marcada por um programa que abordava mais conteúdos do ensino básico do que conteúdos mais avançados de matemática. Por exemplo, em relação à geometria, os cursos realizados durante a sua graduação foram marcados por conteúdos e abordagens típicos de ensino básico. Não sendo contemplada uma abordagem mais rigorosa e aprofundada que envolvesse demonstrações ou maior abstração. Esse tipo de abordagem em geometria só foi vivenciada pelo Professor P_2 como aluno do curso de especialização.

> "conversando com os colegas da especialização percebi que havia muito conteúdo que eu não estudei na graduação, com partes da Matemática que, sinceramente, eu nunca vi. [...] Lá [no seu curso de graduação], por exemplo, tinha uma cadeira só para ensinar números complexos. Nós víamos a aplicação disso e tal. Mas o enfoque maior da aula eram coisas para aplicar na sala de aula (da escola básica). O professor dizia como tínhamos que ensinar aquele assunto."

> “Às vezes eu sinto falta de uma parte de um conhecimento mais aprofundado... vou dar um exemplo, a geometria que eu vi na universidade (no curso de graduação) era uma coisa mais própria por aluno (do ensino básico). Enquanto que na especialização eu vi altas demonstrações. Na sala de aula, hoje em dia, eu vejo que isso (o conhecimento mais aprofundado) me ajuda.”

Esse depoimento do professor sugere que a sua formação de graduação, ainda que aparentemente voltada para a escola básica, deixou lacunas importantes sobre conhecimentos matemáticos próprios de uma formação superior em Matemática e especialmente sobre a relações entre esses conhecimentos e entre eles e o ensino da disciplina. Certamente, esse tipo de organização curricular em um curso de formação de professor contribui para a ruptura e para a dupla descontinuidade denunciadas por Klein (2010)

Professora P3

A Professora P_3 fala pouco sobre a sua formação acadêmica, mas traz uma informação significativa: classifica a sua formação como “fraca”, no sentido de deficiente. Como exemplo, para explicar o que quer dizer por “fraca”, destaca que não estudou equações diferenciais no ensino de graduação. Além disso, registra que, em cursos de aperfeiçoamento realizado com outros professores, confrontando a ementa das tradicionais 4 disciplinas de cálculo diferencial e integral, identificou vários assuntos que não estudou em sua graduação. Assim, entende que precisa melhorar sua formação matemática e tem buscado cursos de pós-graduação para isso, tendo realizado cursos de aperfeiçoamento oferecidos pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o curso de especialização em Ensino de Matemática da UFRJ.

Em relação às dificuldades, a professora P_3 inicia elencando aspectos relativos ao comportamento dos alunos. Ao ser questionada sobre dificuldades enfrentadas em sua prática que sejam concernentes ao conteúdo e ao ensino do conteúdo, essa professora logo afirma:

> “Eu tenho dificuldade de ensinar geometria. Eu não me sinto segura quando eu trabalho com geometria. [...] Eu tenho medo de algum aluno perguntar alguma coisa e eu não saber responder.”

Sendo indagada sobre a que atribui essa dificuldade, a Professora P_3 afirma que é devido à sua formação e acrescenta (grifo nosso):

> “Acho que é devido a eu não ter visto isso, não ter tido isso na minha formação... eu só fui ver isso na faculdade. Quando eu cheguei na faculdade eu tive um período de geometria plana e um de geometria espacial. Mas... Como eu vou dizer? Eles partem do princípio que você sabe aquilo tudo, foi mais demonstrações.”

A surpresa diante dessa afirmação foi inevitável. A professora P_3 atribui a sua dificuldade para ensinar geometria à falta de contato com essa disciplina enquanto aluna da escola básica e não em sua graduação. Esse depoimento foi relacionado à ruptura entre a formação do professor e a sua prática profissional, denunciada por Klein (2010). Durante o diálogo, a Professora P_3 pontua muitas vezes que a sua formação como aluna do ensino básico tem um papel importante na sua prática. Ainda sobre a dificuldade relativa à Geometria, a professora P_3 afirma que cursou a disciplina geometria na especialização e que o curso foi muito bom, especialmente por ter como metodologia o trabalho em grupos, promovendo o diálogo e a troca entre os professores participantes. Ao ser questionada sobre a dificuldade ser apenas em geometria ou se alcançava outros assuntos, a professora P_3 afirma:

> "Geometria é a parte pior. Em álgebra eu dou conta. Estatística eu gosto muito. Mas geometria, eu tenho um receio. Se eu puder evitar, eu evito."

Em relação ao que lhe dá maior segurança para ensinar esses conteúdos, a professora P_3 entende que é porque *sabe* o conteúdo:

> "Eu estou preparada para responder qualquer pergunta do aluno."

No entanto, reconhece que saber o conteúdo não é suficiente para ensinar:

> "O conhecimento do conteúdo é importante [...] mas não é suficiente. O problema da didática, de como transmitir esse conteúdo para o aluno é importante."

O diálogo com a Professora P_3 revela que, para ela, o conhecimento do conteúdo está mais relacionado a saber resolver questões relativas a esse conteúdo. Além disso, para a Professora P_3, tendo conhecimento de conteúdo, um professor, para ensinar, precisa ainda de conhecimentos pedagógicos. Não fica evidente que o Professor P_3 identifique um saber pedagógico do conteúdo ou um metassaber do professor. No entanto, reconhece que hoje é uma professora melhor do que quando iniciou sua atuação profissional e que a aprendizagem com prática teve contribuição nessa evolução.

Sendo indagada sobre como percebe a contribuição da sua formação universitária para a sua prática, a primeira resposta da Professora P_3 é:

> "Ah, eu não sei. Eu não sei responder."

Em seguida, diante da insistência para que tentasse se lembrar de algo ou de algum episódio que seja importante, a Professora P_3 destaca um fato que envolve a prática.

> "Acho que foram os períodos que eu fui monitora de Estatística. Eu fui monitora por durante três semestres, de Probabilidade e Estatística. Acho que

foi ali que eu cresci muito, que eu aprendi muito. Por que eu nunca tinha dado aula. Eu não fiz curso normal. Eu nunca tinha dado aula. Foi ali que eu aprendi muito."

Professor P4

O professor P_4 tem uma história de formação bem particular, mas não tão rara atualmente na realidade brasileira. Sua formação acadêmica inicial é de engenheiro. Para atuar como professor de matemática no ensino básico, fez a complementação pedagógica prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que prevê programas de formação pedagógica para portadores de diplomas de educação superior que queiram se dedicar à educação básica (art.63, II). Sua formação complementar é recente, portanto atua como professor nesse segmento de ensino há pouco tempo. O professor P_4 deixa claro o entendimento de que essa característica o diferencia da maioria de seus colegas. Sobre como se vê na escola, afirma:

> "Eu sou um ET nesse universo."

Esse professor não é jovem e, durante a entrevista, deixa latente a sua percepção da diferença entre o ensino atual de matemática daquele de quando foi aluno.

> "Eu não aprendi tudo o que eu ensino hoje. [...] A matemática não era ensinada assim. Noventa por cento do que eu ensino, eu não aprendi com ninguém."
>
> "Quando eu comecei a consultar o livro didático de Matemática que a gente usa hoje, eu fiquei maravilhado. Porque no meu tempo não tinha isso. Não se ensinava... Nem se falava em conjunto numérico. Essa ideia de começar pelos números naturais, inteiro, racionais... isso, isso não existia. [...] O que eu levo para a sala de aula é o que eu consigo aprender nos livros didáticos que eu estudo antes. E, agora muita coisa devido ao curso de especialização e a um curso que eu fiz no Projeto Fundão."

Nesse sentido, entende que lhe falta referência para a sua prática e, além de buscar cursos que oferecem oportunidade de formação continuada, procura se amparar no livro didático.

> "Eu não sei como começar (a planejar uma aula). Então normalmente eu procuro um livro didático, sigo um livro didático."

Fica evidente que esse professor não teve formação matemática específica para ensinar. O seu conhecimento de matemática é aquele que teve no curso de engenharia e em cursos de formação continuada que buscou voluntariamente.

No entanto, o Professor P_4 não deixa de reconhecer a importância do conhecimento do conteúdo, avaliando que é um aspecto que lhe dá segurança para ensinar:

> "Sempre que vou dar aula, eu antes estudo. [...] Sei as aulas que vou dar durante a semana e todo fim de semana eu estudo o que vou ensinar. Então, eu vou com segurança do conhecimento (de conteúdo)."

> "O difícil é conhecer o fundamento do conteúdo. Tendo esse conhecimento, você encontra mais facilmente o caminho para ensinar o conteúdo. Por isso, eu tenho que estudar muito antes de uma aula. Eu não dou uma aula sem estudar."

O Professor P_4 também revela acreditar na vocação:

> "Há professores que nascem professores. Não que saiba a matéria. Tem pessoas que têm perfil para ensinar. Você melhora esse perfil quando alguém ensina a técnica para você. Como eu abordo, como eu devo abordar (o conteúdo)."

Em nenhum momento da conversa o Professor P_4 evidencia o reconhecimento de um saber pedagógico de conteúdo ou de um metassaber do professor. Por outro lado, sua história de formação é claramente um caso de completa ruptura entre a matemática escolar e a matemática acadêmica.

	Aspectos de segurança	**Evidencia aspectos característicos de Dupla Descontinuidade**	**Reconhece um saber especial do professor que pode ser identificado ao saber pedagógico de conteúdo**
P_1	Experiência em Projeto de Extensão voltado para a formação de professores com ênfase na prática.	Sim	Sim
P_2	Sua boa experiência com a matemática.	Sim	Não
P_3	Sua habilidade em relação à matemática, socialmente reconhecida pela sua formação.	Sim	Sim
P_4	Conhecimento de conteúdo – adquirido em um curso de engenharia.	Sim	Sim, reconhece, por sua própria história de formação que não basta saber o conteúdo e ter formação das disciplinas que tradicionalmente são identificadas como pedagógicas.

Figura 5.1: Quadro resumo da análise das entrevistas semiestruturadas.

A análise das entrevistas ressaltou a lacuna entre a formação do professor de matemática e a sua prática. O relato dos professores corrobora para o entendimento de que a dupla descontinuidade, denunciada por Klein há mais de um século e apontada ainda hoje por pesquisadores em Educação Matemática (BALL, 1998), é, de fato, uma realidade. Assim, professores estabelecem pouca relação entre os conhecimentos adquiridos em sua formação e a sua prática profissional. Um sintoma associado a essa ruptura é a reprodução, por parte dos professores, de modelos vivenciados quando estudantes. Em cada depoimento dos professores entrevistados, ficou latente, de alguma forma, o entendimento pessoal de que a formação acadêmica de graduação deixa lacunas importantes e que essas lacunas têm reflexos na prática do professor. Por exemplo, no caso da professora P3, que não cursou disciplinas de geometria em sua formação acadêmica, revelar se sentir insegura para ensinar o assunto por não ter estudado geometria quando aluna do ensino básico. Já o papel fundamental atribuído por esses professores ao livro didático, como referência para a sua prática, aponta para uma percepção estanque entre o conteúdo matemático próprio do ensino básico e aquele que é pertinente à Matemática superior. De maneira geral, esses professores revelaram de alguma forma que a sua formação acadêmica não foi suficiente para lhes fazer se sentir suficientemente preparados e instrumentalizados para usar seus conhecimentos pra ensinar matemática.

Um segundo aspecto que merece destaque e que ficou evidenciado de forma subliminar na narrativa dos professores diz respeito a outra referência que os entrevistados trazem para a sua prática. Os professores participantes mostraram que a sua atuação como professor tem forte influência da sua própria maneira de compreender a matemática, ou seja, da forma como entendem que os assuntos foram compreendidos por eles enquanto aluno do ensino básico.

5.1.3 A Etapa Inicial

O entendimento de que a etapa inicial havia alcançado o seu objetivo em relação à prontidão do grupo para o processo de reflexão de um *concept study*, ou seja, de que os professores participantes estavam percebendo que o estudo coletivo exigiria uma ação protagonista dos participantes e a atenção ao conhecimento de matemática sem perder de vista a dimensão pedagógica, se deu ao final do 3º encontro.

Um episódio característico desse entendimento se destaca pela condução da reflexão realizada pelos professores participantes sobre a operação de divisão. A discussão sobre a operação de divisão emergiu a partir de um problema proposto pela pesquisadora para o grupo, com o objetivo de motivar a reflexão dos participantes – Figura 5.2. Os professore foram convidados a fazer a questão e a discutir as soluções apresentadas por eles.

Uma biblioteca tinha todos os seus livros acomodados em 6 estantes completamente cheias. Essas estantes foram substituídas por novas. A capacidade de cada estante nova é igual a ¾ da capacidade de uma das estantes antigas. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar os livros dessa biblioteca?

Figura 5.2: Questão proposta pela pesquisadora aos participantes do estudo principal

Essa questão tem origem no estudo piloto (RANGEL, GIRALDO, MACULAN, 2014). Naquele estudo, foi compartilhada com o grupo por um dos professores participantes com o objetivo de promover a discussão sobre a divisão em uma situação em que o divisor é uma fração. A decisão pela proposição dessa questão aos professores participantes do estudo principal foi devido a sua relevância para a análise do estudo piloto e ao fato de ela oferecer uma oportunidade de a pesquisadora observar o conhecimento dos professores participantes do estudo principal sobre o assunto.

A solução desta questão pode ser dada simplesmente por $6 \div \frac{3}{4}$, o que exige a compreensão da divisão como medida. No entanto, a solução correta pode ser alcançada por estratégias variadas, que certamente envolvem a divisão $6 \div \frac{3}{4}$, mas que, no entanto, não explicitam essa divisão. Por exemplo, supondo uma quantidade de livros para cada estante como proposto pelo professor P5:

> P5: Supondo que cada estante antiga comporte 20 livros, ou seja, temos um total de 120 livros. Como cada estante nova comporta ¾ da antiga, ou seja, cada estante nova comporta $\frac{3}{4}$ x 20 = 15 livros. Então, teremos que dividir os 120 livros em estantes de 15 livros cada. 120 ÷15 = 8. Então precisaremos de 8 estantes.

A discussão sobre essa questão levou os professores participantes a discutirem a operação de divisão. Essa discussão contou com a participação ativa de todos os participantes. Além disso, como desdobramento, ficou decidido, pelo grupo, que comporiam juntos uma lista com problemas sobre a operação de divisão que selecionados a partir da sua prática. Cada um dos professores traria, para o terceiro encontro, 5 problemas de divisão típicos do ensino básico. Nossa análise dessa decisão do grupo foi interpretada como a indicação de que os professores participantes estavam se dispondo a investigar e a trabalhar de forma colaborativa.

Com a lista de problemas pronta e a partir do amadurecimento da discussão sobre a operação de divisão, o grupo planejou a tarefa de estabelecer uma análise crítica sobre a coleção composta. Em particular, o seguinte problema chamou a atenção do grupo:

Fernando foi à feira comprar laranjas. Ele comprou 50 laranjas e possuía caixas onde era possível guardar 10 laranjas. Quantas caixas Fernando utilizará?

Figura 5.3: Problema analisado pelos professores durante a Etapa Inicial do estudo

O grupo avaliou que a formulação do problema sugeria a divisão de 50 por 10, mas que não garantia esse cálculo como solução, uma vez que a pergunta não deixava claro se as caixas deveriam ser totalmente preenchidas nem se todas as laranjas seriam guardadas. Foram sugeridas alterações para o enunciado, como, por exemplo, substituir a pergunta por “Quantas caixas no mínimo Fernando precisará para guardar todas as laranjas que comprou?”. Ainda que o problema seja bem simples e direto, a discussão não perdeu em valor. Os professores participantes avaliaram que seria possível tirar partido da “falha” detectada no enunciado do problema. Surgiu, por exemplo, a seguinte proposta: deixar o problema como estava e incluir na sequência outro bastante semelhante que pudesse oferecer a oportunidade de o aluno questionar se, de fato, a única resposta possível para o problema como proposto era 5. Por exemplo, “Fernando foi à feira comprar laranjas. Ele comprou 60 laranjas e possuía caixas nas quais era possível guardar até 10 laranjas em cada uma. Quantas dessas caixas, no mínimo, Fernando vai precisar para guardar todas as laranjas que comprou?”.

Na análise, entendemos que essa discussão refletiu uma postura reflexiva dos professores participantes, que conjuga participação, reflexão, conteúdo e ensino. É importante lembrar que o problema em questão havia sido escolhido e apresentado por um dos professores participantes para compor uma lista coletiva de problemas sobre a operação de divisão. A questão relevante sobre a clareza do enunciado, destacada e discutida pelos professores participantes foi detectada posteriormente, durante a discussão coletiva sobre os problemas selecionados. Não só o problema foi reavaliado pelos professores participantes, como a questão detectada foi tratada de forma construtiva, indo além da garantia de resolução do problema, mas buscando estratégia de ensino para construção de um aprendizado de matemática. Na sequência, os professores participantes se dispuseram a propor esse em suas turmas Assim, essa discussão foi retomada pelo grupo posteriormente, no 6º encontro, durante o desenvolvimento do *concept study*.

5.2 O *CONCEPT* STUDY

Para a investigação, o início do *concept study* se deu no 4º encontro, com a proposição da questão disparadora, que marca a primeira ênfase desse modelo de estudo.

5.2.1 PERCEPÇÕES

O início do estudo, associado à ênfase percepções, caracteriza o primeiro estágio de análise de um *concept study* e se estabelece a partir da elaboração de uma lista das diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora, foi identificado no 4º encontro. Nesse encontro, foi proposta ao grupo a questão disparadora.

A exemplo dos estudos realizados por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2008a; DAVIS, RENERT, 2009b), que envolviam a operação de multiplicação, essa pergunta poderia ser simplesmente "O que é um número racional?". No entanto, para o estudo pretendido, tendo como referências as premissas estabelecidas, era importante contemplar as ideias de Klein (KLEIN, 2009; SCHUBRING, 2014), com especial atenção à noção de matemática elementar, e ter como foco o ensino e a aprendizagem desse assunto na escola básica. Assim, a questão disparadora para a composição da lista intitulada *percepções* foi: *"O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?"*. Essa proposição claramente é menos objetiva do que a possibilidade mais direta, apresentada acima. Além disso, o termo elementar certamente precisa ter seu significado compreendido antes do início da reflexão que determina a composição da lista que se apresentará como resposta. Assim, diante da pergunta, o primeiro movimento do grupo foi no sentido de ter clareza sobre a compreensão da indagação. A primeira pergunta nesse sentido partiu de P2 e foi acolhida pelos demais.

> Professor P2: "(Elementar) para construir o conceito de números racionais ou para ir daí em diante, para tudo?"

Para a investigação era importante que o termo *elementar* não ganhasse a conotação de "fácil" ou de "simplificado", ou seja, que não devia ser esse o entendimento atribuído ao termo elementar na questão proposta. Foi esclarecido ao grupo, pela pesquisadora, que o termo elementar não tinha o significado de fácil nem de simplificado, mas que deveria ser entendido de acordo com as ideias de Klein (KLEIN, 2009; SCHUBRING, 2014), no sentido de constituinte, de partes essenciais que se articulam para compor o corpo de conhecimento sobre o assunto. No entanto, em acordo com a metodologia de *concept study* (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2009a, 2014) e para a condução da pesquisa, foi respeitada a discussão dos professores participantes visando a um entendimento comum do grupo para o termo. Assim, de forma geral, os participantes concluíram que como elementar seriam entendidos tópicos fundamentais e essenciais para a compreensão de números racionais, que, como professores, não poderiam deixar de ensinar no ensino básico, mas que também precisavam saber.

> Professora P1: Elementar no sentido de ser essencial. [...] Elementar é algo que é básico para aprender um assunto.
>
> Professor P2: Tópicos fundamentais para entender números racionais.
>
> Professora P3: O que não posso deixar de ensinar.
>
> Professora P1: Tem que ter o que eu preciso ensinar, mas não é só isso. Tem que ter também o que eu preciso saber (como professora).

Um dos professores argumentou que seria importante também levar em conta, na listagem dos tópicos elementares, a dificuldade observada no ensino e na aprendizagem de números racionais na escola básica, ou seja, a composição da lista *percepções* a partir da identificação de termos elementares sobre números racionais não poderia se furtar às questões próprias do ensino do tema na escola básica e que não se tratava de assuntos “mais fáceis”. Revelava-se assim mais uma vez a preocupação com prática, com a realidade da sala de aula. Os demais participantes concordaram com a avaliação desse professor.

> Professor P4: Elementar também pensando no ensino, não só o que é fundamental, mas aquilo que é a base e que a gente sabe que precisa ensinar e que é difícil ensinar na sala de aula. Pode não ser simples nem fácil, mas tem que ensinar e aprender.

Para a investigação pretendida, o entendimento atribuído pelo grupo ao termo *elementar* foi percebido como não divergente das ideias de Klein e satisfatório para o planejado. Ficou entendido que, para os professores participantes, o termo elementar na pergunta disparadora do *concept study* estava vinculado a *fundamental*, a *essencial*, a *necessário para a construção conceitual do tema*. Ainda que o grupo não tivesse estudado especificamente as ideias de Klein, para constituir o significado de elementar, o entendimento atribuído foi considerado adequado ao objetivo da investigação, estando alinhado às ideias do matemático. Além disso, um aspecto importante para a investigação foi considerado pelos professores participantes como parâmetro para compor a reflexão sobre o elementar em números racionais: *a prática da sala de aula*. Esse cenário foi considerado como importante e próprio para a investigação pretendida.

O início da discussão visando à composição da lista *percepções* pelo grupo se deu ainda no 4º encontro. O primeiro tópico identificado pelos professores participantes, quase que imediatamente após a proposição da questão, pode ser traduzido pela seguinte questão: *"O que é número racional?"*. Que levou à: *"O que é fração?"* e *"Qual a relação entre esses conceitos?"*. Essas questões indicaram o primeiro tópico a compor a lista *percepções*.

A discussão travada sobre esse tópico deixava claro o entendimento de que se tratavam de questões fundamentais para a compreensão de números racionais. No entanto, também refletia uma dúvida particular dos professores participantes, que era uma questão que emergisse da prática de sala de aula.

> Professor P2: Eu sei que fração como parte e todo é a base para o entendimento de número racional. Mas eu não sei exatamente o que é uma fração.
>
> Professora P3: Eu sei que o conjunto dos números racionais é formado pelas frações *p* sobre *q*, em que *p* e *q* são números inteiros e *q* é diferente de zero. [...] Mas, *o que que é* uma fração?
>
> Professor P5: E $\frac{\pi}{3}$, é fração?
>
> Professora P1: Eu tenho certeza que número racional e razão são coisas diferentes. [...] Eu não sei ainda o que é uma razão. Agora fração... eu posso dizer que um número racional é uma fração, como eu posso dizer que uma razão é uma fração. Mas não sei dizer qual a característica das frações que é comum a essas duas coisas (número racional e razão), que eu sei que são diferentes.

Os professores tomaram como decisão buscar referências para chegar a um bom entendimento dos conceitos de fração, de número racional, de razão e da relação entre esses conceitos. Ao final do 4º encontro ficou como tarefa que todos pensassem em tópicos que respondessem à questão proposta visando à composição coletiva de uma lista única no encontro seguinte. No entanto, a composição da lista de *percepções* não foi finalizada no encontro seguinte, como pretendido, exigiu um prazo maior. Essa lista foi estabelecida a partir de uma longa discussão do grupo, que marcou a reflexão nos dois encontros seguintes.

A observação da discussão realizada coletivamente pelos professores participantes sugere que o grupo demorou a se sentir à vontade e seguro para compor uma lista própria, mas que esse cenário seria alterado pelo próprio processo de reflexão. Inicialmente os professores participantes se mostraram reticentes para fazer sugestões, como se houvesse uma lista a priori “correta”, que eles tivessem que alcançar. O estudo coletivo já não estava mais em seus encontros iniciais, já tinha sua dinâmica, nos moldes da metodologia *concept study*, compreendida pelo grupo. Além disso, os professores participantes já revelavam bom entrosamento e todos vinham participando ativamente das discussões com autonomia e sem sinais de constrangimento. Na análise, o receio e a insegurança revelados por esses professores para responder à pergunta proposta, compondo a lista que se objetivava, foram associados a dois aspectos:

(i) A pouca experiência profissional dos professores participantes – de certa forma estavam ainda muito ligados à rotina de sala de aula como alunos e com pouca vivência das questões sobre o ensino de números racionais no ensino básico;

(ii) O fato de que a reflexão lhes fazia entrar em contato com suas próprias dúvidas – à medida que buscavam identificar um tópico elementar para números racionais, colocavam em evidência dúvidas sobre tópicos basais para o conhecimento do assunto.

Em particular, para o propósito do *concept study* e da investigação pretendida, inicialmente, esses aspectos foram entendidos como característicos do grupo, não sendo atribuído qualquer valor positivo nem negativo a eles. Além disso, segundo Davis e Renert (2014), nessa lista não cabe identificar acertos, erros, adequação ou insuficiência. Posteriormente, na análise do estudo, o fato de os professores perceberem que muitas de suas dúvidas também eram dúvidas dos colegas participantes foi associado aos elementos condutores da análise, sendo considerado importante para a unidade do grupo e como balizador da discussão conceitual que determinou o estudo.

O retorno à composição da lista p*ercepções* não se deu logo no início do 5º encontro. Respeitando a dinâmica que vinha sendo estabelecida pelo grupo, que iniciava a discussão de cada encontro a partir da pauta de tarefas planejadas em encontros anteriores, a parte inicial dessa reunião foi marcada por discussões principiadas na etapa inicial, e que ainda precisavam ser amadurecidas. Além disso, foram discutidas questões que emergiram como desdobramento dessas discussões. Esses desdobramentos revelavam maior atenção a aspectos eminentemente pedagógicos do que a questões relativas à abordagem de um tópico do conteúdo matemático em particular. Por exemplo, o papel da recuperação no processo do desenvolvimento escolar e a importância dos problemas para a formação dos alunos. Essas discussões eram acolhidas pelos participantes respeitando a autoridade do grupo para a condução da discussão, aspecto característico da metodologia adotada, mas também respeitando o papel da pesquisadora em relação à mediação e à condução da discussão. Nesses casos, a intervenção da pesquisadora era eminentemente no sentido de não deixar que o grupo perdesse o foco na discussão conceitual sobre números racionais.

Após a discussão inicial, o grupo voltou a sua atenção para a lista *Percepções*, como planejado no 4º encontro. Assim, os professores participantes indicaram tópicos iniciais como resposta à questão disparadora da lista, "***O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?***" e chegaram à primeira versão da lista.

"O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?".	
(0)	Conceitos anteriores: números naturais e números inteiros, para compreender a definição → p/q
(1)	Representação: decimal → aplicações práticas, dinheiro
(3)	Construção da reta numérica ← Construção dos números
(4)	Compreender a operação de divisão → a compreensão da operação de divisão é fundamental para compreender, por exemplo, a representação decimal.
(1)	Fração x Razão x Número Racional
(5)	Ideias associadas às frações → Parte/todo
(6)	Porcentagem
(7)	Operações

Figura 5.4: 1ª versão da lista *Percepções*.

A representação dos números racionais foi um dos primeiros tópicos a ser lembrado pelos professores participantes, ainda que não exatamente como um tópico que encerrasse uma informação organizada e consensual. O professor P4, por exemplo, lembrou a importância da identificação de números naturais e de números inteiros para a compreensão da definição de números racionais. No entanto, sua argumentação revelou como foco a compreensão literal da expressão "*p/q*, tal que *p* e *q* são números inteiros e $q \neq 0$", destacando que, para o aluno entender essa afirmação, ele precisa saber os significados de número natural e de número inteiro. Isso é necessário, de fato, no entanto não é suficiente para a compreensão de números racionais. Na argumentação desse professor, não foi identificada uma preocupação com a compreensão conceitual de números racionais.

> Professor P4: Para entender que um número racional tem a forma p sobre q (p/q), com p e q inteiros, o cara (aluno) tem que saber primeiro o que é número inteiro e número natural.

Já a professora P1 lembrou a representação dos números racionais em expansão decimal, tendo seu argumento ligado a uma perspectiva prática, contemplando o “uso” dos números racionais em situações “ligadas à realidade”.

> Professor P1: Eles têm que aprender números racionais na forma decimal. A coisa que tem mais ligação com a realidade [...] e que eles conhecem é dinheiro e eles usam isso.

O professor P2, por sua vez, lembrou a importância da representação dos números racionais na reta numérica. Mais uma vez, os argumentos revelavam viés pragmático, sem atenção a aspectos conceituais relativos ao assunto. Nesse caso, o destaque era a evidência de valorização do assunto nos testes do sistema oficial de avaliação, realizados pela Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro:

> Professor P2: Uma coisa que acho importante é a representação dos números racionais na reta numérica, isso está sendo muito cobrado. Por exemplo, cai em todos os Saerjs e Saerjinhos[157].

Os tópicos eram registrados no quadro de anotações da sala de aula (quadro de giz ou quadro branco), pela pesquisadora, a partir da decisão consensual dos professores participantes e respeitando a forma como eram “ditados”. Não houve, nesse momento, maior preocupação do grupo com um ajuste de termos ou de expressão, o que foi respeitado pela pesquisadora.

Na sequência, outro tópico trazido pelos participantes alcançava a operação de divisão, mais uma vez a partir de perspectivas diferentes. Para o professor P4 era importante que o aluno identificasse a fração *p/q* ao resultado da divisão de *p* por *q*. Assim, por exemplo, o resultado da divisão de 3 por 4 é igual a ¾. Já para a professora P1, a divisão se apresentava em função da representação do número racional na forma de expansão decimal, é a partir da

[157] Os termos Saerj e Saerjinho se referem a exames que compõem o Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro, que tem como objetivo de promover uma análise do desempenho dos alunos da rede pública do Rio de Janeiro nas áreas de Língua Portuguesa e Matemática. Essas avaliações envolvem turmas do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental, da 3ª série do Ensino Médio, das fases equivalentes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), do 4º ano do Ensino Normal e os concluintes do Programa Autonomia. (http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=843535 – acesso em agosto de 2013)

divisão que se passa da representação fracionária para a representação em expansão decimal. Nesse caso, a argumentação da professora sugeria a referência ao procedimento técnico para realizar a divisão, mais do que como à divisão como operação.

> Professor P4: Acredito que o conceito de divisão também se encaixe nos conceitos necessários, visto que a divisão, até o momento (etapa escolar), só seria vista com números inteiros, quando a divisão nem sempre é possível, deixa resto.
>
> Professor P1: "Eu listei também a divisão aqui. Mas a compreensão da divisão no sentido da própria representação decimal. Para você achar a representação decimal de uma fração você precisa saber dividir. Inclusive saber a divisão num passo mais além, que é dividir quando o dividendo é menor do que o divisor.

A professora P3 se mostrou bastante hesitante para expressar sua reflexão. Foi então incentivada pelos demais professores participantes e apresentou sua contribuição para a discussão. Ela inicia apresentando uma dúvida, mas também uma certeza, ainda que não soubesse explicá-la exatamente:

> Professor P3: Eu *tava* pensando... eu acho que tem que entrar fração nessa lista. Só que ainda não cheguei à conclusão se fração é um número racional ou não. Então eu não sei. Eu não sei se são a mesma coisa. [...] Mas eu acho que é fundamental. Eu só não sei como.

A professora P1 complementa a discussão sobre a inclusão do tópico fração defendendo que:

> Professora P1: Eu não coloquei fração, mas eu coloquei a ideia de parte/todo, que é a ideia que fração passa. A fração é importante para os racionais por causa dessa ideia.

Certos de que fração tinha que aparecer na lista, o próximo item lembrado, foi porcentagem, com o reconhecimento de que era um tópico difícil de ser ensinado. Esse item foi consensual. No entanto, a professora P3 destacou que, se porcentagem entrou na lista, então muitas outras coisas também deveriam ser listadas:

> Professora P3: "Eu sinto falta, por exemplo, de razão. Talvez um ponto da lista devesse ser razão, fração e número decimal. Eu acho até que esse tinha que ser o primeiro ponto da lista."

Neste ponto, o grupo decidiu, além de compor a lista, estabelecer uma identificação de ordem entre os itens listados. Após uma breve discussão, que determinou como critério para essa classificação a "ordem de necessidade para a composição do conceito", concluíram que o primeiro ponto da lista deveria ser sobre os conceitos anteriores, necessários à abordagem e à compreensão de números racionais. Para os professores participantes, esse tópico reflete assuntos necessários para dar suporte à construção do conceito de número racional, ainda que certamente necessários não eram, de fato, próprios do assunto. Então, decidiram atribuir a esse tópico o número 0. Na sequência, vieram os tópicos substantivos para a construção do conceito. A classificação estabelecida fica refletida nos números que aparecem na lista.

Dois dos tópicos listados aparecem identificados com o número 1, “Representação” e “Fração x Razão x Número Racional”. Essa decisão reflete que o grupo ainda não havia chegado a um consenso sobre a ordem entre esses tópicos, mas que eram os primeiros a serem abordados na construção conceitual de números racionais. Sob a perspectiva do desenvolvimento do *concept study*, a análise sobre essa decisão é de que os professores lidaram satisfatoriamente com a dúvida: registraram a dúvida com uma duplicidade na classificação e seguiram a discussão como estratégia para a busca pela decisão.

Neste momento, a discussão sobre a hierarquia entre os tópicos da lista não mobilizou de forma mais enfática a discussão realizada pelos professores participantes, que se mostravam mais atentos a elencar os tópicos e a compreender o porquê de sua inclusão na lista. A decisão pela classificação hierárquica foi, objetivamente, considerada e posta em prática como mais um parâmetro norteador da discussão. No entanto, essa discussão revelou um amadurecimento do grupo para o significado atribuído ao termo *elementar*. Entendemos que o grupo, sem perder de vista o que já havia sido construído até então sobre *elementar*, passou a refletir sobre o termo agregando a possibilidade de duas perspectivas:

(i) Elementar no sentido de *estruturante*: assunto anterior necessário para a abordagem e a compreensão do conceito em tela;
(ii) Elementar no sentido de *substancial*: aquilo que é constituinte do conceito em questão, ou seja, que compõe o corpo conceitual do assunto.

Essas perspectivas determinariam igualmente a inclusão de tópicos na lista por parte dos professores participantes do estudo coletivo. De fato, sob qualquer dessas perspectivas, os tópicos elencados podem ser entendidos como essenciais para a compreensão do conceito. Assim, para o propósito da investigação, foi admitido por nós, na condução da pesquisa, que essas perspectivas atribuídas pelo grupo ao termo *elementar* eram complementares e consonantes com as ideias de Klein (KLEIN, 2009; SCHUBRING, 2014).

A reflexão que se seguiu voltou à questão da representação dos números racionais e, em seguida, foram discutidos aspectos importantes sobre as operações envolvendo números racionais. Além disso, houve uma discussão importante, envolvendo todo o grupo, sobre a abordagem de frações em contextos relativos à interpretação parte/todo que, neste momento, não ficou registrada de forma explícita na lista *percepções*. Essa discussão diz respeito a um saber sobre o conteúdo que é fundamental para o professor e determina a ação pedagógica para o ensino do assunto, ou seja, um saber de matemática para o ensino. A partir da reflexão sobre a representação das frações no contexto parte/todo, o grupo chegou à conclusão de que na prática da sala de aula é fundamental variar os modelos de representação das frações, indo além das tradicionais pizzas e barras de chocolate. De fato, a representação de frações a partir de barras de chocolate e pizzas enfatiza a imagem de partes fracionárias geometricamente congruentes. Os professores participantes se surpreenderam com a conclusão de que essas partes precisam corresponder a medidas iguais, mas que não precisam ter a mesma forma. A discussão levou o grupo a avaliar que a predominância de modelos retangulares e circulares pode limitar a aprendizagem do assunto. Cabe ao professor a responsabilidade de ação para evitar que isso ocorra. Essa ação não pode se restringir a uma explicação, ela exige que o professor seja capaz de propor situações que ampliem os modelos, exige um saber próprio do professor sobre o seu próprio saber, isto é, um messaber.

> Professor P2: O que tem que ser igual é a quantidade e não é a forma! A gente só faz desenho (em) que (as partes fracionárias) têm a mesma forma.

Outro ponto trazido para a composição da lista, sem uma discussão maior, foram as operações com números racionais.

> Professora P1: Não podemos esquecer que é importante operar com os números racionais... operações têm que entrar nessa lista.

No final desse encontro, o grupo refletiu como se tivessem se esquecido de que havia uma lista a ser montada, sem demonstrar uma preocupação direta com a composição da lista *percepções*. Nesse momento, apenas trocavam ideias sobre números racionais e sobre o ensino de números racionais. Assim não formalizaram a inclusão de novos tópicos na lista percepções.

A noção de aproximação no contexto de números racionais pode ser abordada a partir de diversas perspectivas. No entanto, o grupo ateve sua atenção à questão da aproximação determinada pelo processo empírico da medida.

> Professora P2: Quando a gente divide a pizza em três pedaços e come dois, na verdade a gente não tem como saber certinho que comeu 2/3 da pizza.

A professora P3 sorri e exclama:

> Professor P3: É verdade!

O conceito de medida certamente está na base do conceito de números racionais e, na escola básica, a ideia de medida está fortemente atrelada a um processo empírico, ou seja, a experiências concretas, à medição. Assim, a abstração do conceito de número é um objetivo a ser alcançado. Na escola, antes de se falar do *número racional* ½ é necessário medir, por exemplo, ½ litro de leite ou ½ metro. No entanto, nesses casos, certamente, a quantidade medida não é exatamente ½ litro de leite ou ½ metro, mas uma aproximação determinada pelo erro próprio do processo de medição. Essa foi a reflexão que mobilizou o grupo. É certo que essas não são, de fato, questões para os matemáticos, que transitam por abstrações. No entanto, em nosso entendimento, são necessárias para a prática do professor e se fundam como elementares para a construção do conceito de número racional.

A discussão sobre infinito teve como foco a diferenciação entre duas perspectivas, que ficam latentes a partir da abordagem dos números racionais.

(i) A não limitação, superior e inferior – Essa ideia de infinito já é conhecida do aluno da escola básica desde a abordagem dos números naturais, sendo constituinte do próprio conceito de número natural. Assim, é sempre possível identificar um número natural maior do que qualquer outro número natural. Essa ideia se expande inicialmente para os números inteiros, contexto em que se admite a não limitação inferior, ou seja, em que é sempre possível identificar um número inteiro menor do que qualquer outro número inteiro. Essa ideia de infinito não se perde na ampliação dos conjuntos numéricos, alcançando os números racionais.

(ii) A densidade dos números racionais – Essa perspectiva é essencial para a percepção conceitual dos números racionais. Assim, entre quaisquer dois números racionais, existem outros números racionais. Essa noção de infinito não é válida para os números inteiro, configurando-se em um *ganho* trazido pelos números racionais.

Na discussão, os professores não distinguiram o valo substantivo dessas ideias de infinito para os conceitos de números naturais, número inteiro e número racional, mantendo sua atenção de forma mais explícita na preocupação com a abordagem dessas ideias na escola básica.

> Professor P2: A gente tem que ensinar essas noções de infinito na escola. Os alunos já chegam (ao segundo segmento do ensino fundamental) sabendo que têm o infinito não limitado, que é tão grande quanto se queira, é fácil pensar isso. Um número maior do que 195 478 356 123 ou maior ainda que

> esse. Mas, esse negócio de sempre ter um número entre outros dois é novidade para ele.

Os professores participantes entenderam que a ideia de infinito a partir da não limitação superior (ou inferior) não era um desafio no ensino básico, podendo ser considerada como *intuitiva* para os alunos. No entanto, a ideia de infinito intrínseca à densidade dos números racionais não era tão simples e exigia uma abordagem adequada a essa etapa da escolaridade.

No final dessa discussão, os professores participantes concordaram que para ensinar números racionais na escola básica é necessário ir além da definição tradicional e das regras de operação.

> Professora P3: E nos livros a gente acha dois capítulos de números racionais: números racionais, que tem a definição, e depois operações.... mas tem muita coisa que a gente pula.

E, completando:

> Professora P1: E que é importante. É o que vai fazer o aluno aprender a matemática mesmo.

Buscando retratar a discussão travada nesta etapa da construção da lista percepções, destacamos os principais assuntos discutidos a partir de uma representação em diagrama, apresentado na Figura 6.17. Neste diagrama, que ilustra um mapa conceitual, as linhas pontilhadas indicam assuntos identificados e discutidos pelos professores participantes como constituintes do conceito de número racional, mas ainda não listado entre as percepções.

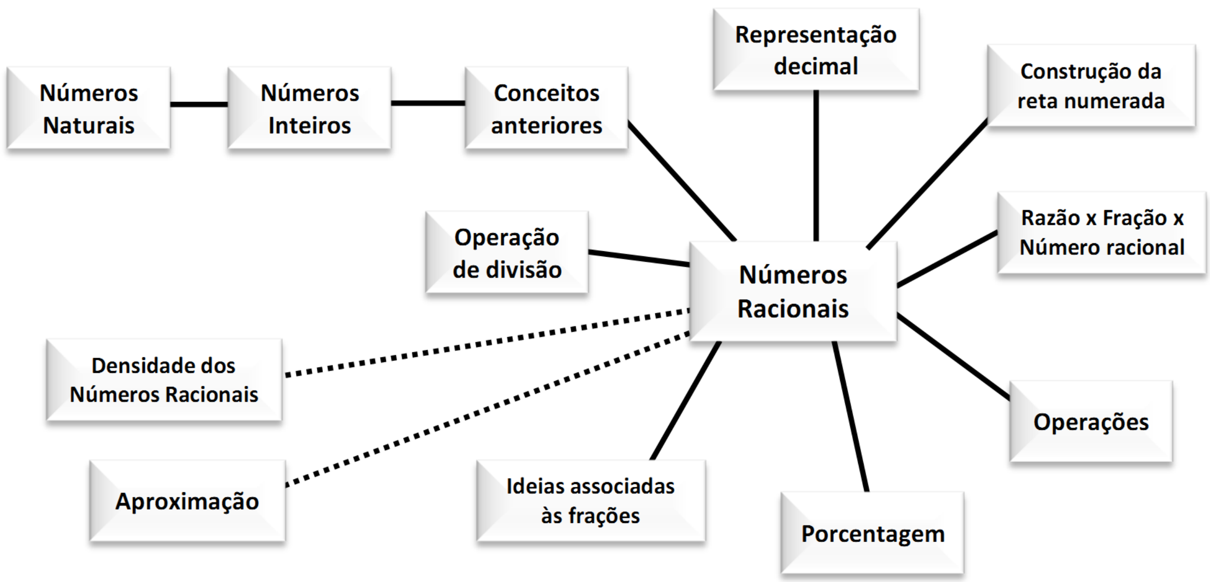


Figura 5.5: Diagrama ilustrativo da discussão da 1ª versão da lista *Percepções*.

A continuação da elaboração da lista *percepções* se deu no encontro seguinte, 6º encontro. O início da discussão com o objetivo de avançar na composição da lista percepções foi no sentido de resgatar a discussão realizada a partir da 1ª versão da lista (Figura 5.4). Os tópicos lembrados foram escritos no quadro de anotações da sala de aula ocupada pelo grupo. Como o professor P5 não havia estado no encontro anterior, logo manifestou interesse em entender a composição da lista, o que exigiu dos demais o exercício de resgatar e explicar a reflexão realizada até então.

Logo no início da reflexão sobre a lista, o professor P5, a partir da discussão sobre a inclusão do tópico comparação, trouxe uma questão para pauta:

> Professor P5: O que vem antes de comparar é a ideia do que vem antes e do que vem depois. A ideia de sucessor e antecessor.

Quando questionado sobre como usar as ideias de sucessor e de antecessor com números racionais, ele respondeu:

> Professor P5: A gente pode adaptar, pensando nas *classes*.

Na sequência a professora P1, contra argumenta:

> Professora P1: Nos racionais eu sei o que vem antes de 1/2, por exemplo, mas não sei o antecessor de 1/2. O antecessor é o que vem imediatamente antes e o imediatamente antes nos racionais não tem.
>
> Professor P5: Mas a gente pode somar e subtrair 1.
>
> Pesquisadora: Então o sucessor de ½ seria 3/2?
>
> Professor P5: Aí não. No caso, teria que pensar nas *classes*. Teria que ir para os números decimais. Quando você tá nos naturais, você pensa 1 unidade depois. Se você tem 20, é 1 unidade depois, no caso, 21. [...] Pensar nos números racionais, você tem que pensar numa generalização pelas classes.

Ao ser solicitado que desse um exemplo para explicar seu raciocínio, o professor P5, responde:

> Professor P5: Por exemplo, 0,5, Você vai somar mais 1 décimo.

Logo a professora P1 emenda:

> Professor P1: Mas você poderia somar 1 centésimo.

E o professor P5 segue como se estivesse "pensando em voz alta":

> Professor P5: Não! Aí o número seria 0,500000... infinitamente. Aí se você quiser pensar no sucessor somando um centésimo, somando um milésimo... [Para e fica pensativo com a mão na cabeça]
>
> Professor P1: Mas, então, não teria um (um sucessor).
>
> Professor P5: Mas eu *tô* pensando em expandir uma ideia, tem que adaptar...
>
> Pesquisadora: Será que, neste caso, isso é possível?
>
> Professor P5: Não sei.
>
> Professora P1: Não é, porque entre dois números racionais sempre existe outro racional. Isso é muito louco, não é?
>
> Professor P5: A frase que ela falou agora [pequena pausa] já me fez concordar que não é possível pensar em sucessor de número racional.

Na sequência, os professores decidiram que o tema teria que ser contemplado na lista percepções. Assim, revelaram, por exemplo, o entendimento de que, ainda que na escola básica a formalização da densidade dos números racionais não seja um objetivo, é necessário que esse conceito seja problematizado no ensino de números racionais. A professora P1 lembra:

> Professora P1: Essa lista não precisa conter só coisas que a gente precisa ensinar. Tem que ter coisas que a gente precisa saber (como professor).

O professor P5 revela como a discussão que incide sobre o seu saber de matemática para o ensino, revelando uma postura reflexiva sobre o seu próprio conhecimento.

> Professor P5: Até porque o aluno pode perguntar. E eu na hora iria responder que o sucessor de 0,5 é o 0,6. Se ele me pergunta, responderia sem pensar e ia sair isso. Aí quando você pensa com calma, você lembra dessa ideia de que sempre vai ter um número ali no meio.

A discussão determinou a inclusão do tópico "Não existência de antecessor e de sucessor → densidade dos racionais → infinito" na 2ª versão da lista *percepções* (Figura 5.8). A ideia de expandir os conceitos de sucessor e de antecessor para os números racionais pode até ser entendida como natural e, em certa medida, importante pelo questionamento que suscita, como aconteceu com os professores participantes do estudo. Não é difícil imaginar uma cena semelhante em uma sala de aula do ensino básico. Também é possível, por exemplo, observando-se uma régua graduada cujas graduações contemplem até décimos da unidade, considerar que, *segundo as marcações na régua*, o sucessor de 0,5 é o 0,6. Nesse caso, está indicado um conjunto numérico cujos elementos são números racionais, mas que não é o conjunto dos números racionais.

O episódio da discussão sobre a existência de sucessor de um número racional permite destacar, da análise da narrativa dos professores, o fato de a de reflexão realizada pelo grupo ter como referência os conhecimentos dos participantes. Assim, resultados matemáticos eram expostos sem haver qualquer constrangimento sobre a ideia compartilhada estar certa ou errada. Os professores participantes demonstraram expor suas crenças e opiniões para os demais colegas de estudo em um processo de reflexão colaborativa. Entendemos que esse processo oferece uma descompactação dos conceitos matemáticos (DAVIS, RENERT, 2014) a partir dos saberes individuais dos participantes de modo a constituir um conhecimento coletivo do grupo e, em uma segunda etapa, uma (re)elaboração desses conceitos por cada um dos participantes. Além disso, é importante destacar que a reflexão realizada pelos participantes, ainda que tendo como foco conceitos matemáticos, não se distanciou da sala de aula e da prática dos professores, remetendo sempre à abordagem do assunto no ensino básico.

O próximo assunto que chamou a atenção do grupo foi a representação dos números racionais, mais especificamente a variedade de representações. Na verdade, foi a segunda vez que os professores se ativeram a essa questão. Os professores participantes concordaram com que tinham uma certeza sobre a representação numérica dos racionais[158], resumida pela professora P1: "todo número racional admite duas formas diferentes de ser representado, como fração e como decimal, finito ou infinito". Os termos finito e infinito se referiam, respectivamente, à representação do número racional como expansão do sistema posicional decimal considerando subdivisões decimais da unidade com uma quantidade finita de termos (dízima periódica de período nulo) e como uma dízima periódica de período diferente de zero. Mais ainda, concordavam que a passagem de uma forma para a outra está relacionada ao "conceito de divisão", associado ao 4º tópico da lista (Figura 5.8). Dessa vez, a legitimidade do tópico na lista foi defendida por uma professora diferente daquela que propôs a inclusão do tópico na lista percepções:

> Professora P3: Para passar da representação fracionária para a forma decimal precisa pensar na fração como divisão. A representação, então tá relacionada com o tópico 4.

No entanto, os professores participantes revelaram não conseguir explicar a legitimidade da possibilidade e da relação entre essas duas representações. Mais ainda, ao serem inda-

[158] Neste documento, representação numérica dos racionais se refere à identificação de um número racional a partir da forma de fração, que envolve pares de números inteiros, ou como expansão do sistema posicional decimal a partir da identificação de subdivisões (decimais) da unidade.

gados pela pesquisadora, revelaram não saber explicar nem ter qualquer ideia sobre por que a divisão está no cerne dessa relação. Tratavam o resultado como uma certeza, revelada a partir de uma regra prática, não mostrando preocupação com a validação sob o rigor matemático desse resultado. Respeitando a autonomia do grupo para o desenvolvimento do estudo coletivo, o retorno a essa questão só foi observado em encontros futuros, quando se revelou uma inquietação dos professores participantes sobre o tema.

A discussão sobre a representação dos números racionais levou o grupo mais uma vez à reflexão sobre a representação *gráfica* das frações. Agora a discussão conduziu ao questionamento sobre situações em a representação *gráfica* pode gerar dúvida sobre a fração representada. Assim, a mesma representação gráfica pode corresponder a duas frações diferentes. É o caso da representação apresentada na Figura 5.6, que pode se referir a $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ ou a $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, dependendo de a unidade considerada ser apenas um dos círculos ou os dois.

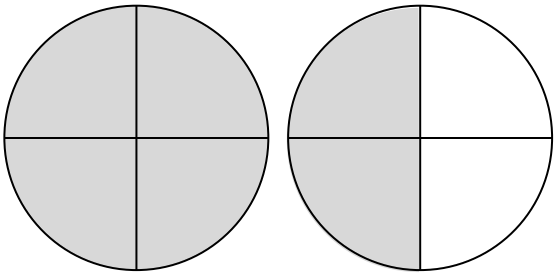


Figura 5.6: Representação gráfica adequada às frações $\frac{6}{4}$ e $\frac{6}{8}$, dependo da unidade identificada.

Esta discussão determinou a lembrança da representação das frações na forma conhecida pelos professores participantes como "número misto", caso em que o número racional é registrado a partir da indicação do maior natural que é menor do que o número (parte inteira) seguido de uma fração menor do que 1 (parte fracionária). É o caso, por exemplo, de $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ e de $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$. Para o professor P5, a representação apresentada na Figura 7.18 é mais naturalmente associada à fração $1\frac{1}{2}$.

> Professor P5: Eu penso logo no número misto 1 e um meio. Acho mais fácil pensar em um inteiro e mais metade.

Em nossa análise, observamos que, por considerar "mais fácil" identificar a representação em destaque a um "número misto", esse professor muito provavelmente apresentaria essa abordagem a seus alunos. Esse entendimento sugere algumas reflexões: Será que essa percepção não revela a própria construção cognitiva do professor sobre o assunto quando era aluno do ensino básico? Assim, determinando uma escolha pedagógica particular mais do que uma escolha pautada em um conhecimento adquirido em sua formação?

Na sequência, avaliando o que diferenciava a identificação da representação gráfica apresentada na Figura 5.6 às frações $\frac{6}{4}$ e $\frac{6}{8}$, emergiu a discussão sobre a importância da identificação da unidade.

> Professora P3: Decidir se é $\frac{6}{4}$ ou $\frac{6}{8}$ depende de *quem* é o inteiro.
>
> Professora P1: O inteiro é a unidade e, no caso de $\frac{6}{8}$, a unidade é 2. Difícil, né?
>
> Professor P5: O menino (aluno do ensino básico) tem que saber qual é a unidade em cada situação e que essa unidade pode não ser uma coisa só. Isso é difícil e não dá para explicar direito *pro* menino.

Essa discussão levou o grupo à confirmação da inclusão de dois novos itens à lista percepções: "representação desses números: decimal (finito e dízima periódica), fracionária, "gráfica", número misto e relacionar as diversas representações" e "Unidade: Qual é a unidade? E O que é unidade?"

Em outra discussão que se destacou na composição da lista, os professores participantes reconheceram que a compreensão da representação dos números racionais está intrinsecamente relacionada à aprendizagem de outros tópicos elencados na lista *percepções*. Por exemplo, representação, comparação e equivalência. Essa discussão teve como motivação o relato da professora P1 sobre uma situação observada em sua prática. Ela narrou uma atividade realizada com seus alunos em que solicitava que identificassem o maior dentre os números 5,8 ; 0,58 ; 0,580 e 0,058. Segundo ela, na correção, observou, intrigada, que a maioria dos alunos que errou identificou o número 0,058 como o maior dentre os listados. A professora P1 compartilhou com os demais professores do grupo a sua reflexão sobre o que teria levado a maioria dos seus alunos a escolherem essa resposta. Ela apostaria que, no caso de raciocínio errado, a maior incidência dos erros seria associada à escolha do número 0,580 e não a do 0,058. A professora P3 argumentou que dificilmente o critério que levou ao erro teria sido a quantidade de algarismos, uma vez que 0,580 tem a mesma quantidade de algarismos que 0,058. Ao ser questionada pelo professor P5 sobre a possibilidade de cola, a professora P1 disse que achava que era difícil, uma vez que a turma tinha poucos alunos. Todos concordaram que, se houvesse oportunidade, a professora P1 deveria fazer uma entrevista com os alunos que erraram a questão para avaliar o que poderia ter levado a esse erro e estabelecer formas de intervenção. O grupo aproveitou a sequência de números destacada pela professora P1 para ressaltar que não é difícil que 0,58 seja considerado pelos estudantes do ensino básico como um número diferente de 0,580. O grupo avaliou que muitos aspectos podem levar os alunos do ensino básico a esse erro, a começar pela quantidade de algarismos. A própria leitura tradicionalmente mais comum também pode levar a enganos: "zero vírgula *quinhentos e oitenta*" pode soar como um número maior do que "zero vírgula *cinquenta e oito*", uma vez que 580 e maior do que 58. A compreensão da expressão "zero vírgula", precedente à leitura de 580 e 58, será fundamental para a comparação correta. Mesmo na leitura enfatizando a menor subunidade registrada em cada caso, quinhentos e oitenta milésimos e cinquenta e oito centésimos, pode gerar o mesmo problema. O grupo constatava o quão complexo podem ser o ensino e a aprendizagem da comparação de números decimais. Na sequência a professora P1 observou que um mesmo número decimal admite diversas leituras diferentes. Por exemplo, o número 0,58 pode ser lido como "zero vírgula cinquenta e oito", "cinquenta e oito centésimos", "cinco décimos e oito centésimos" ou mesmo "quinhentos e oitenta milésimos". É importante que os alunos percebam essas diferentes possibilidades. Esse deve ser um dos objetivos do ensino desse assunto. A discussão além de confirmar a decisão do grupo pela inclusão dos tópicos representação e comparação na lista de *Percepções*, levou o grupo à observação de que todos os tópicos listados até então estavam, de certa forma, inter-relacionados.

> Professor P5: Tudo isso é importante e não dá para tratar de um (assunto) sem esbarrar no outro.

Na sequência, os assuntos que mobilizaram o grupo foram "dízimas periódicas" e uma discussão sobre os termos "decimal exato", "decimal finito" e "decimal infinito". O grupo ponderou que esses termos podem gerar dúvida para os alunos. Por exemplo, a dízima periódica simples $0,\overline{3}$, tem infinitas casas decimais e, portanto, não pode ser considerado um "decimal exato". No entanto, o grupo se perguntou o que há de "inexato" na fração 1/3?

> Professora P1: Realmente quando a gente fala decimal exato não sabe como a criança vai entender a palavra “exato”. Isso pode até fazer ele achar o assunto mais difícil.
>
> Professora P3: Isso piora ainda mais a chance de entender o “zero vírgula nove, nove, nove, ...” como 1.

Observamos que, nesta ênfase do estudo coletivo, a discussão do grupo, mesmo que possivelmente de forma não consciente, alcançava o conceito de comensurabilidade e a sua relação com a restrição imposta pelo sistema de representação posicional de base 10. A fração 1/3, se representada na forma de expansão decimal, determina uma dízima periódica porque 3 e 10 são primos entre si. No entanto, neste momento, a discussão sobre o assunto se ateve às dificuldades observadas a partir da prática em sala de aula e não evoluiu para uma discussão conceitual mais aprofundada, que foi observada em uma etapa posterior do estudo coletivo.

Na sequência, o grupo revelou o entendimento de que especialmente os itens “Fração x Razão x Número Racional” e “não existência de sucessor”, incluídos na lista *Percepções*, estavam mais fortemente ligados a dificuldades próprias dos professores participantes do que a questões relativas às suas práticas. Ou seja, eram entendidos como assuntos elementares em a relação ao tema números racionais, mas também revelavam questões sobre o conteúdo que os professores participantes não sabiam responder naquele momento a partir dos conhecimentos que traziam de sua formação na graduação.

> Professor P1: Pois é, se a gente vai ensinar os números racionais, a gente precisa entender o que está envolvido neles. Se a gente não sabe bem qual é a relação entre aquelas três coisas (razão, fração e número racional), como é que a gente vai ensinar o que é um número racional? Esses assuntos vêm todos juntos na escola.

Mais uma vez, os professores participantes mostravam que estavam dispostos a identificar e a lidar com suas dúvidas de forma consciente e reflexiva, com os objetivos de questionar, de rever e de reformular seu conhecimento, e que o estavam fazendo sem interromper a sua prática, ou seja, o que Davis e seus colaboradores (DAVIS 2006, 2010, 2011, DAVIS, RENERT, 2009a, 2014) identificam como *substruct*.

Entendemos que, assim, o professor participante assumia também um papel atuante no desenvolvimento do estudo, ou seja, mas do que esperar que os assuntos fossem determinados e tratados de acordo apenas com um planejamento previamente estabelecido pelo professor do curso (que, no caso, era a pesquisadora), esses professores passavam a ter responsabilidade direta pela condução do estudo.

> Professora P3: A partir disso que a “professora P1” disse, eu acho que tenho um outro item ali para incluir (na lista *Percepções*). Vocês não acham que é importante também nós professores conhecermos a história dos números racionais para poder ensinar?
>
> Professora P1: Eu acho. Os alunos ficam achando que um dia alguém decidiu: vou criar um número racional. Se a agente souber a origem do conceito talvez isso possa até ajudar a gente a entender as dúvidas dos alunos.
>
> Professor P5: Essa parte de história não precisa ser só para saber passar o conteúdo. Ela pode ajudar a pensar em um problema para iniciar um assunto. O professor pode usar um problema que era da época ou parecido. Por exemplo, os números naturais não eram suficientes para medir, eles só davam conta da contagem. O professor pode usar isso.
>
> Professora P1: Não é que a história vá ser um tópico da aula. Não é o professor chegar assim, hoje eu vou falar sobre a história dos números racionais. Não. O foco do nosso trabalho não é contar a história, mas usar a história para nos auxiliar a ensinar.

Essa discussão levou os professores participantes à decisão pela inclusão de dois novos tópicos na lista *Percepções*: “história do desenvolvimento do conceito” e “número racional como expressão de uma medida”. O grupo ainda discutiu um pouco sobre as operações envolvendo frações e sobre a dízima periódica $0,\overline{9}$, destacando as dificuldades dos alunos diante desses assuntos. A discussão continuou no encontro seguinte.

Neste encontro os relatos de dois professores, durante a sessão mereceram destaque, especialmente por indicarem o alcance do estudo coletivo para além das sessões. A professora P1 traz um depoimento que revela o quanto o estudo coletivo tem mobilizado seu interesse. Em algum momento deste encontro, em meio à discussão, a professora P1 revelou:

> Professora P1: Quando eu chego em casa, fico contando tudo isso o que a gente discute aqui para o meu marido. Ele fica achando que eu sou maluca!

Já o professor P5 revelou em depoimento como o estudo coletivo tem refletido em sua prática. Durante o encontro, esse professor contou um episódio que ocorreu com ele ao preparar um teste para seus alunos. Ao elaborar um dos problemas, que envolvia o conteúdo de frações, ele “lembrou” da discussão que havia sido feita no estudo, o que, segundo ele, fez com que fosse muito mais cuidadoso na redação do enunciado. O problema envolvia duas divisões sucessivas por dois: *Ana bebeu metade do refrigerante que havia em uma garrafa de refrigerante inicialmente cheia. Mais tarde, Ana dividiu o refrigerante restante igualmente com uma amiga. Que fração representa a quantidade de refrigerante consumido por cada menina em relação à quantidade inicial, ou seja, a garrafa cheia de refrigerante?* O professor P5 disse que teve cuidado para deixar claro qual a unidade considerada na situação. Essa atenção, segundo ele, foi consciente e motivada pela discussão travada no estudo coletivo.

Buscando retratar a discussão travada nesta etapa da construção da lista percepções, destacamos os principais assuntos elencados e, de alguma forma, discutidos a partir de uma representação em diagrama, apresentado na Figura 5.7. Ao final do sexto encontro, a lista percepções determinada pelo estudo coletivo alcançava uma segunda versão, indicada na Figura 5.8.

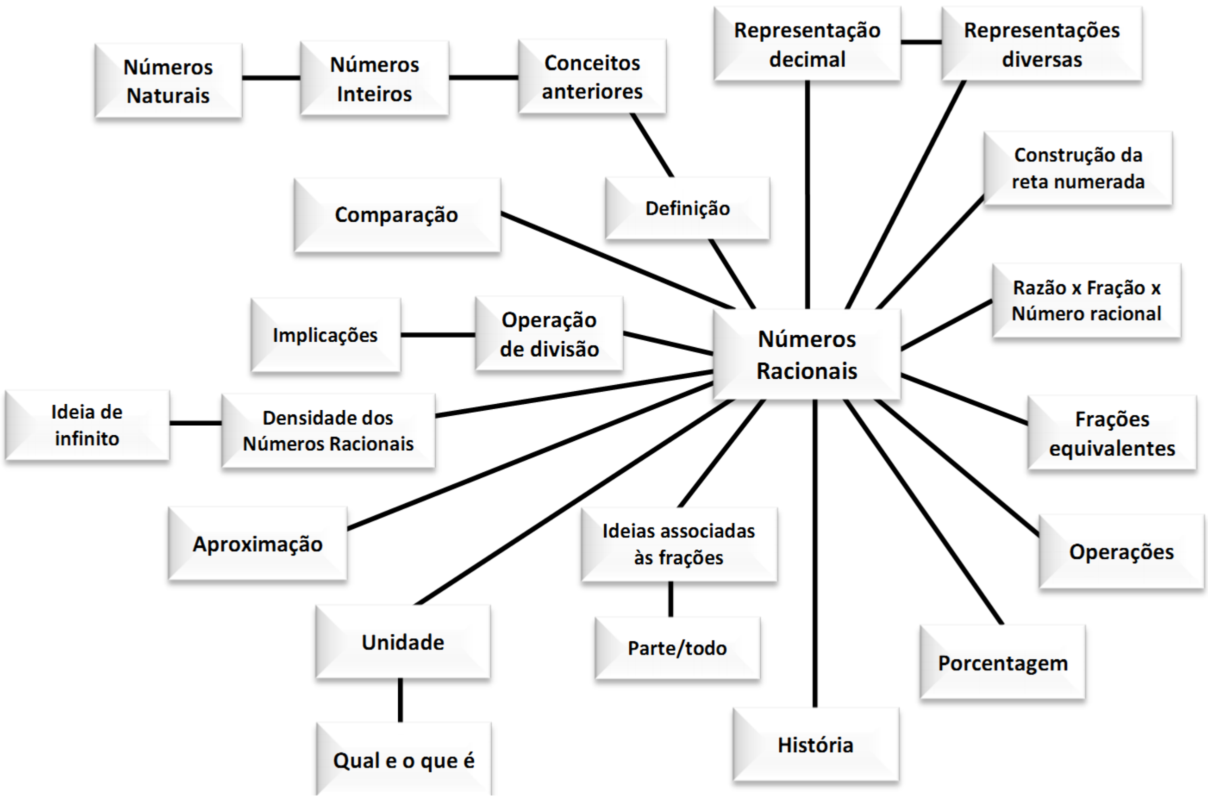


Figura 5.7: Diagrama ilustrativo da discussão da 2ª versão da lista *Percepções*.

No encontro seguinte, 7º encontro, a discussão teve início com a atenção específica à lista *percepções*. Os professores participantes haviam tido como tarefa daquela semana refletir sobre a composição da lista para que o grupo pudesse ampliar a discussão visando à conclusão da lista.

“O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?”	
(0)	Conceitos anteriores: números naturais e números inteiros, para compreender a definição → p/q
(2)	Representação: decimal → aplicações práticas, dinheiro
(3)	Reta numérica ← Construção dos números
(4)	Compreender a operação de divisão → a compreensão da operação de divisão é fundamental para compreender, por exemplo, a representação decimal.
(1)	Fração x Razão x Número Racional
(5)	Ideias associadas às frações → Parte/todo
(6)	Porcentagem → atrelada ao conceito de fração
(7)	Operações
(8)	Comparação
(9)	Frações equivalentes
(10)	Não existência de antecessor e de sucessor → densidade dos racionais → infinito
(11)	Representação desses números: decimal (finito e dízima periódica), fracionária, “gráfica”, número misto e relacionar as diversas representações.
(12)	Unidade: Qual é a unidade? E O que é unidade?
(13)	História do desenvolvimento do conceito

Figura 5.8: 2ª versão da lista *Percepções*

A primeira modificação na 2ª versão da lista (Figura 5.8) foi determinada pela inclusão do item “conceito de medida”. A professora P1 trouxe a questão para o grupo, lembrando que os números racionais aparecem quando se mede alguma coisa, por exemplo, a sua própria altura. Alguns trechos dessa discussão:

> Professora P1: Existe uma relação entre medida e número racional. Quando a gente vai medir qualquer coisa, comprimento, área, volume, ... , o que a gente quer saber é quantas vezes o padrão que eu escolho cabe naquilo que eu quero medir e isso pode não ser uma quantidade inteira de vezes. Pode precisar partir, pegar uma fração do padrão.
>
> Professor P2: Isso tem tudo a ver com a ideia de divisão e com fração. Tá tudo ligado.

> Professora P3: Quando você fala em medida você vai precisar de números racionais, mesmo que eles não sejam todas as medidas... por exemplo, $\sqrt{2}$ não é racional e é uma medida... da diagonal do quadrado (de lado 1).
>
> Professor P5: Mas o quê implica em que? O que veio primeiro? Os números racionais surgiram para fazer medidas ou as medidas que fizeram os números racionais surgirem? Não sei se medida é fundamental para números racionais ou se é o contrário.
>
> Professor P4: Mas não é essa questão, não é saber quem vem primeiro, mas que tá tudo relacionado. Se você vai medir precisa de números racionais e se não tivesse que medir, só contar, não precisava de números racionais.
>
> Professora P3: Isso tudo *volta lá* naquele 12 (se referindo ao 12º item da 2ª versão da lista: conceito de unidade. Figura 5.8), que é sobre a unidade. Por que tudo vai depender do que é a unidade. Não necessariamente o número, mas o que você utiliza para medir. A unidade também é fundamental.
>
> Professora P3: Esse negócio de discreto e contínuo é importante. É claro que a gente não vai ensinar para a criança: esse é um conjunto discreto, esse é um conjunto contínuo Mas tem que fazer exercício com isso. Por exemplo, tem que ter problema de fração com coisas contínuas e discretas. Calcular 2/3 de uma pizza é diferente de calcular 2/3 de um grupo de 15 pessoas.

Essa discussão levou o grupo a diferenciar contagem de medida e universos discretos de universos contínuos. Os professores participantes concordaram com o entendimento de que a contagem fica atendida pelos números naturais. No entanto, para a medida, que envolve grandezas contínuas, o conjunto dos números naturais não é suficiente. Assim, decidiram incluir o tópico "conceito de medida", entendido como elementar para o ensino e a aprendizagem de números racionais por estar intrinsicamente relacionado ao conceito de número racional.

O próximo tópico de discussão, que determinou nova inclusão na lista, foi trazido também pela professora P1.

> Professora P1: Outra coisa que eu vi, quando peguei um livro (de ensino superior) para ler, foi a noção de inverso. Lá *tava* falando que o inverso só passa a existir quando a gente entra no conjunto dos números racionais. Depois que a gente aprende os racionais a gente sabe que 2 tem o inverso, que é "um meio". Mas sem os números racionais não existe o inverso.
>
> Professor P2: Boa lembrança, P1.
>
> Professora P3: Mas é inverso multiplicativo, não é?

Ao ser questionada pela pesquisadora sobre que livro havia consultado, a professora P1 esclareceu que foi um livro de álgebra abstrata. Para ela, havia muita coisa lá que ela não achava importante.

> Professora P1: Nesse livro de álgebra tinha umas coisas muito loucas. Negócio de corpo, anel, domínio de integridade, ... Aí tem um capítulo que fala de números racionais, no final também fala de classes de equivalência. Aí eu pensei, quando a gente fala de frações equivalentes, tem a ver.
>
> Professora P3: É isso que *faz que* “zero vírgula cinco”, “um meio”, “dois quartos”, ... sejam o mesmo número.
>
> Professor P2: É esse negócio de equivalência que define número racional.

A partir dessa discussão, o grupo resgatou e esclareceu o conceito de classe de equivalência e a relevância desse conceito para a definição (e o entendimento) de números racionais. Essa discussão confirmou e fundamentou a inclusão do tópico que contempla “frações equivalentes” na lista *percepções*. Também determinou a inclusão de “simplificação de frações” e “frações irredutíveis” na lista, ambos tópicos vinculados à equivalência de frações.

> Professora P1: Eu também acho que tem que colocar (na lista p*ercepçõe*s) a simplificação de fração, que está ligado a isso (frações equivalentes). Por que a gente pode simplificar uma fração? Não tinha nada disso na lista.
>
> Professora P3: A gente pode simplificar uma fração porque aquela mais simples é equivalente à outra fração.
>
> Professor P5: A gente ensina mais a simplificação do que a equivalência, quando a simplificação é um caso particular da equivalência. [...] A gente ensina o que é fração equivalente e o resto da vida (escolar no ensino básico) só fala em simplificar.
>
> Professor P2: Se o aluno entende como se acha uma fração equivalente ele também vai saber simplificar uma fração quando ele precisar.

O professor P5 destaca o seu entendimento de que, no ensino básico, há ênfase na simplificação de frações, como se fosse algo essencial, mais do que na necessária compreensão da equivalência de frações. Para o professor P5, a simplificação é ensinada como um processo descolado da equivalência entre frações.

> Professor P4: Acho que tem que colocar fração irredutível, porque na simplificação o que a gente quer e a fração irredutível. Isso aí é importante.
>
> Professor P5: Isso tem que estar no tópico. Junto com fração equivalente tem que colocar fração irredutível.
>
> Professor P4: O processo de simplificar ao máximo é que dá a fração irredutível, mas às vezes a gente tem que fazer o contrário. Para somar frações, por exemplo, que precisa ter o mesmo denominador.
>
> Professor P5: A simplificação é mais um processo e não um conceito... que tá dentro da coisa de frações equivalentes.

Na sequência, o próximo assunto que ocupou a discussão teve início a partir de uma dúvida que envolvia a relação de ordem no conjunto dos números racionais e a possibilidade de relacionar os números racionais por comparação pela ordem.

> Professora P3: Outra coisa que eu li, mas não lembro onde... é que falava da ordem... ordenar. A gente colocou comparação e colocar na reta numérica. Eu fiquei na dúvida se a ordenação está embutida nesses tópicos ou não.
>
> Professora P1: Mas a comparação não é por causa da ordem? A gente compara por causa da ordem.
>
> Professor P5: Essa coisas *tão* ligadas, tem que colocar os dois juntos.
>
> Professora P1: A ideia de ordem é importante ser destacada. Não pode ser só comparação.

O grupo voltou a discutir a importância da representação na reta numerada e sobre a sua importância para a abordagem dos conjuntos numéricos, confirmando a inclusão do tópico na lista *percepções*.

> Professor P5: Sobre a reta. Eu já venho pensando sobre isso, não só sobre racionais, mas (sobre) números em geral. Sabe quando a gente chega no 1º ano e tem que fazer toda aquela revisão sobre números? Você faz *lá* a reta e vai colocando os números. Coloca os números naturais. Você tem 1, 2 ,3 ... e não tem nada entre o 1 e 2. Depois você coloca números inteiros, indo para o outro lado *lá* do zero. Depois chega *nos* racionais e vai colocando no meio, entre os que já estão lá. Mas a reta só vira reta mesmo quando você fala dos reais. Isso tem que aparecer (na lista *percepções*). A gente usa a reta para falar dos números.
>
> Professor P4: Os alunos acham que com os racionais a gente já preencheu toda a reta e não é isso.

A discussão sobre a reta numerada determinou a organização do tópico "*Construção da reta numérica* ← *Construção dos números até os reais*". O sentido da seta explicita o entendimento, dos participantes do estudo coletivo, de que a construção dos conjuntos numéricos no ensino básico se apoia fortemente na representação dos números na reta numerada. E que, por outro lado, a reta numerada é fundamental para a compreensão dos racionais.

Em seguida, o grupo discutiu mais uma vez as operações envolvendo números racionais. A discussão teve início a partir do depoimento da professora P3 que ressaltou que, dependendo da representação, as operações com números racionais envolvem procedimentos e técnicas diferentes.

> Professor P2: Eu dou aula para o 6º ano, e fiquei pensando nas operações com decimais. Eu fiquei pensando se em operações a gente tá se preocupan-

> do com as operações na forma de fração e na forma decimal, que são diferentes.
>
> Professora P1: Eu concordo com você que ensinar a fazer as contas com frações e diferente de ensinar a fazer as contas com decimais. Isso tem que estar na lista.

A professora P3 completou, revelando uma dúvida sua sobre a operação de divisão envolvendo números racionais em sua representação decimal:

> Professora P3: Eu fiquei pensando e descobri que eu não sei dividir com vírgula (se referindo aos números racionais em representação decimal). Do jeito que o livro *tava* explicando eu não sei. Eu sei fazer um *macete* para dividir com vírgula.

Para explicar o que estava revelando, a professora P3 disse não sabia efetuar a divisão como o livro texto que usava com seus alunos apresentava e compartilhou um exemplo com o grupo: $2{,}49 \div 3$.

> Professora P3: Quando eu faço, eu faço assim: eu coloco dois zeros depois do 3, para igualar as casas, e depois *corto* as vírgulas. E, então divido 249 por 300. Mas o livro não *tava* ensinando assim.

Segundo a professora P3, o livro apresentava o seguinte procedimento:

> Professora P3: *Tava* assim no livro... até escrevi para trazer. Como de 2 não dá para tirar 3, então temos 0 unidades. Aí o 2 com o 4 vira 24 décimos. Aí, explicando mais um pouco, 24 décimos dividido por 3, *dá* 8 e sobra nada. Agora dividimos os 9 centésimos por 3, que *dá* 3 centésimos. Então o resultado é 0,83.

Todos os professores participantes se mostraram surpresos com o processo apresentado pela professora P1 e revelaram que também ensinavam sempre a partir da técnica de "igualar as casas decimais". Desafiados pela pesquisadora, revelaram não conseguir, a partir de procedimentos mentais, efetuar a divisão, mesmo quando os números envolvidos não oferecem maior dificuldade, como em 54,3 dividido por 3. Essa discussão, claramente, além de alcançar o questionamento fundamental sobre as operações envolvendo números racionais, faz emergir questões da prática desses professores. De maneira geral, os professores participantes revelaram ensinar as operações exatamente como aprenderam enquanto alunos do ensino básico e que, em sua prática, se concentravam mais no ensino de procedimentos do que nos processos correspondentes às operações. Assim, ficou revelado que a divisão era ensinada por esses professores como um algoritmo, pautado em regras e etapas, e não como uma operação matemática elementar, que traduz as ações de "repartir em partes iguais" (equipartição) ou de "verificar quantas partes cabem" (medida). A discussão levou o grupo a praticar a divisão, efetuando várias divisões com o objetivo de experimentar a realização do cálculo a partir da compreensão da operação, mais do que na execução do algoritmo que conheciam. Essas divisões foram realizadas pelos próprios professores no quadro branco que havia na sala em processo de reflexão colaborativo.

Por exemplo, motivados pelo relato da professora P2, sobre uma experiência pessoal vivida em sala de aula para ensinar divisão envolvendo números decimais, os professores participantes realizaram e discutiram o cálculo $2{,}49 \div 0{,}3$. O registro de dois procedimentos discutidos tem como base a divisão por estimativa:

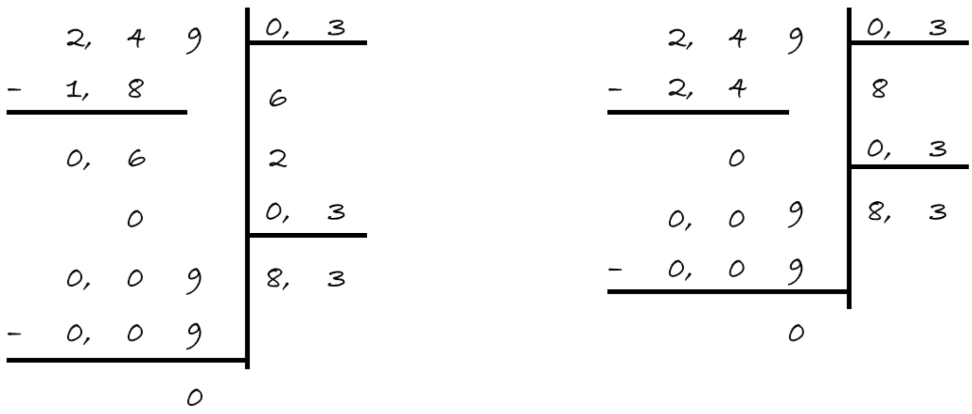


Figura 5.9: Procedimentos para o cálculo da divisão de 2,49 por 0,3 por estimativa.

Em ambos os casos, a discussão foi mais intensa em relação ao cálculo de 0,09 por 0,3. Reconhecer que 0,3 não "cabe" uma quantidade inteira de vezes em 0,09, foi um exercício aparentemente novo para os professores participantes. Para sustentar essa discussão, os professores recorreram à representação pictórica, o que permitiu levar o grupo a refletir sobre o potencial pedagógico da diversidade de representações. A Figura 5.10 ilustra um esquema da representação pictórica feita pelo grupo de professores participantes para a divisão de 0,09 por 0,3, evidenciando que 0,3 "não cabe" uma quantidade de vezes em 0,09. Para o grupo, essa representação evidencia que "um décimo de 0,3 *cabe 3 de vezes* em 0,09" e, portanto, que $0{,}09 \div 0{,}3 = 0{,}3$. Claro que é possível questionar que esse resultado poderia ser alcançado também pelo cálculo de 0,3 x 0,3, que é igual a 0,09. No entanto, o foco do grupo naquele momento foi na compreensão do processo de divisão a partir da própria ideia da divisão, no caso, como medida, não como operação inversa da multiplicação.

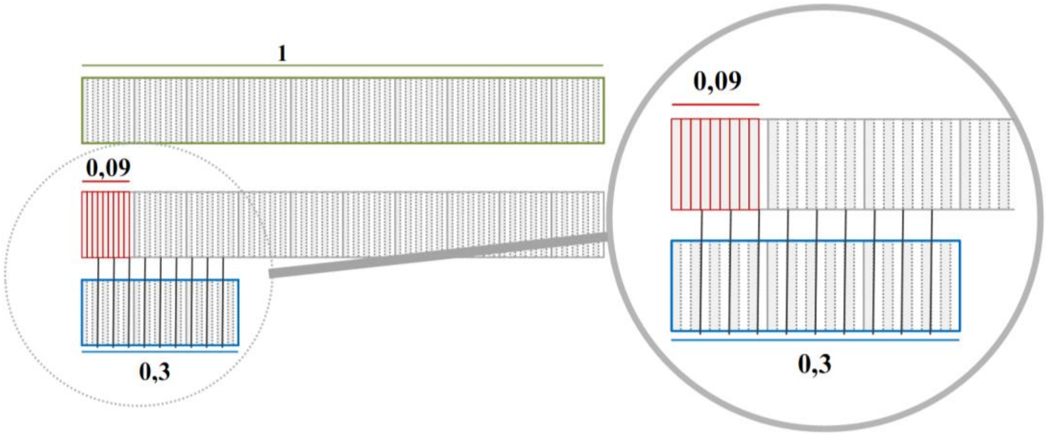


Figura 5.10: Modelo pictórico para a representação da divisão de 0,09 por 0,3

A recomendação procedural que os professores conheciam e ensinavam sem maior questionamento, "*igualar as casas decimais e cortar as vírgulas*", também foi discutida visando à compreensão do seu significado pelo grupo. Os professores reconheceram que ensinavam a partir dessa regra por terem aprendido assim, quando alunos do ensino básico. Tratava-se de um tema não estudado na formação universitária.

> Professor P4: Dizer para o menino multiplicar por 100 o 2,49 e o 0,3 não adianta nada. Ensinar essas regrinhas não adianta nada. Tem que entender. A gente tá pensando nisso agora.
>
> Professora P3: O pior que eu faço é dizer só "iguala as casas e tira a vírgula". Olha, tem duas casas aqui (apontando para o 2,49), então tem que ter duas lá (apontando para o 0,3). Aí fica 249 dividido por 30.
>
> Professora P1: Mas é assim que a gente aprende... ou aprendeu.

Para a pesquisa, esse episódio foi associado à dupla descontinuidade e ao processo de (re)construção conceitual identificado por *substruct*. Além disso, esse episódio que reflete uma discussão ainda visando à composição da lista percepções foi também associado à segunda etapa identificada no *concept study*, apresentada na próxima seção.

Foram feitos outros cálculos a partir da proposição dos professores participantes. Além disso, no contexto da discussão sobre a divisão, os professores participantes questionaram ainda outros aspectos do ensino das operações com números racionais. Assim, observaram que muitos dos cálculos ensinados e cobrados na escola básica dificilmente são feitos no dia a dia das pessoas. Por exemplo, o professor P5 questionou:

> Professor P5: Em que situação do dia a dia é necessário fazer a adição de 7/8 mais 9/5?

O grupo ponderou que, mesmo que seja necessário efetuar esse cálculo, ou um cálculo semelhante, em uma situação concreta, muito provavelmente a calculadora será o meio usado para obter a resposta, que não deve aparecer na forma de fração. Assim, *para que* e *por que* ensinar e treinar tantos cálculos com frações?

A partir de um questionamento mais qualitativo, os professores participantes avaliaram a contribuição da realização dessas operações para o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos estudantes. Nesse sentido, avaliaram, por exemplo, que se um indivíduo consegue resolver a divisão de 3/2 por ½ (ou de 1,5 por 0,5), alcançando o resultado 3 sem depender de algoritmos tradicionalmente estabelecidos ou da calculadora, mais provavelmente, esse indivíduo terá compreendido a operação de divisão e terá maior autonomia diante de situações em que esta operação seja necessária. Essa discussão certamente envolve aspectos conceituais de matemática e questões próprias ao ensino. Não está em questão apenas o cálculo ou o procedimento de cálculo de uma divisão, mas o valor para a compreensão e desenvolvimento da aprendizagem de matemática.

Outro aspecto discutido pelo grupo sobre as operações com números racionais foi a necessidade de ensinar a operar com as duas formas de representação, *fracionária* e *decimal*. Para o grupo de professores envolvidos no estudo coletivo, não é possível deixar de ensinar as operações com frações, ensinando apenas as operações com números racionais na forma decimal. Por exemplo, no cálculo de 1/3 + 7/9, ao invés de ser efetuado 3/9 + 7/9 =10/9, seria necessário obter a representação decimal dessas parcelas e efetuar a adição com esses números. Assim, se deveria calcular $0,\overline{3}$ e $0,\overline{7}$, o que certamente não envolve um raciocínio trivial. Sabemos que 3 + 7 = 10 e a soma indicada é igual a $1,\overline{1}$, que não tem algarismo 0 (zero) em sua expansão. O professor P4 questionou:

> Professor P4: Como explicar isso?

A questão foi lançada pelo grupo para um amadurecimento posterior.

Durante a discussão sobre as operações envolvendo números racionais, em certo momento, a professora P3 revelou como o processo de reflexão coletiva a fez avaliar o seu próprio saber como professora e o valor desse saber para a sua prática:

> Professora P3: *Tô* arrasada! *Tô* descobrindo que não sabia mesmo dividir, pelo menos não com vírgula. Como é que eu ensinava isso? ... Eu não ensinava.

A professora P1 também revelou que só começou a questionar e refletir sobre esses processos quando, já formada, precisou lidar com eles em sala de aula como professora e afirmou:

> Professora P1: Eu não estudei nada disso na faculdade.

Os professores participantes ainda decidiram outras alterações na lista percepções, sempre a partir do mesmo procedimento, a discussão e a reflexão coletiva sem perder de vista aspectos das suas práticas. Um exemplo é a decisão de listar outras ideias associadas às frações além da ideia de parte/todo. Todos os participantes entenderam a variedade de contextos em que os números racionais estão presentes como essencial para a abordagem de números racionais no ensino básico, e consequentemente para a aprendizagem de números racionais. Eles concordaram que esses contextos são constituintes da noção de número racional e, mais ainda, conhecer e distinguir essas situações é um conhecimento de matemática necessário ao professor. Alguns lembraram que essa recomendação está presente nos PCN (1998), que foi o componente mais fortemente determinante dessa decisão.

Ainda no contexto da discussão para a composição da lista *percepções*, os professores participantes ressaltaram a reconhecida dificuldade dos estudantes do ensino básico em lidar com frações. Muitas vezes, outros assuntos, mais avançados ou não, têm a aprendizagem comprometida pela falta de conhecimento dos estudantes sobre frações e números racionais. Por exemplo, o aluno pode compreender o que significado de área, mas não conseguir determinar corretamente a área de um retângulo de dimensões 2,5 e 0,1, ou mesmo acreditar que essa área tem medida maior do que 2,5 unidades de área. Em relação a assuntos mais avançados, o aluno pode ter dificuldade, por exemplo, para compreender que uma função exponencial de base entre 0 e 1 é decrescente.

Essa discussão permitiu o entendimento de que os professores participantes revelaram o reconhecimento da importância da valorização da compreensão dos conceitos, muito mais do que da eficiência na execução procedimental de algoritmos. Assim, pareceu que para os esses professores, ficava evidenciada a necessidade de o professor conhecer profundamente o assunto que ensina e saber relacioná-lo e articulá-lo com outros assuntos da matemática. Para um professor, não basta saber aplicar ou descrever estratégias algorítmicas, é necessário conhecer profundamente os processos e resultados que fundamentam e justificam os algoritmos que ensina.

> Professora P3: Antes dessa matéria eu achava que sabia ensinar, mas agora eu vejo que tem muita coisa ainda para eu aprender.

> Professor P2: Ser professor de matemática não é fácil não.

Além disso, os professores participantes também avaliaram que, diante da dificuldade dos alunos em relação ao conteúdo e da limitação dos professores para avaliar e intervir com autoridade sobre essas dificuldades, não é raro que os processos de ensino e de aprendizagem fracassem e promovam frustrações. Seguem algumas intervenções dos professores participantes durante essa discussão.

> Professora P1: Eu sei que, se eu colocar na prova alguma coisa de equações que não envolve frações, o meu aluno pode acertar, mas, se tiver frações, com certeza ele vai errar.
>
> Professor P5: Às vezes o aluno sabe multiplicar frações, porque sabe o que tem que fazer, mas não sabe somar frações. Se cair alguma coisa que tenha que somar frações, ele erra. E a gente só vê isso como uma coisa de saber fazer o algoritmo certo (da forma correta) ou não. Não dá mais tempo, ou a gente nem sabe mesmo... a gente tá vendo aqui... ver se ele conhece as operações ou só os algoritmos.
>
> Professor P4: Isso é uma bola de neve. O aluno tem muitas dificuldades, tem muita coisa que ele não aprendeu e você não tem mais como ensinar.
>
> Professora P3: Às vezes o aluno erra coisas que ele já aprendeu porque não sabe algum assunto de antes e a gente não consegue ensinar e ele desiste de continuar aprendendo... (os alunos) não acredita que tem uma coisa que ele sabe.

Certamente a discussão com o enfoque destacado vai além de questões específicas sobre os conceitos relativos a números racionais, o seu ensino ou a sua aprendizagem. No entanto, para a investigação pretendida, foram entendidos como indícios de que, em sua reflexão, os professores participantes não abandonaram a referência da sua prática e consideraram a discussão sobre números racionais sem perder de vista a relação do tema com outros assuntos da matemática.

Ao final do 7º encontro o grupo deu como concluída a lista de *percepções*, em resposta à questão disparadora, “O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?”, indicada na Figura 5.11. Na versão final, os professores participantes decidiram por não estabelecer uma hierarquia explícita entre os assuntos elencados. Essa decisão se fundou no entendimento de que os assuntos estão relacionados ente si e que todos devem ser contemplados de alguma forma. Esse entendimento da inter-relação entre os tópicos determinou também que alguns itens originais, que envolviam mais de um assunto, fossem desmembrados ou reorganizados. Este foi o caso, por exemplo, os itens que envolviam o tema representação. Além disso, a lista final tem alguns itens além daqueles que compõem a 2ª versão da lista, por exemplo, conceito de medida, inverso multiplicativo e abordar as frações em universos discretos e em universos contínuos. Como os demais, esses itens foram incluídos na lista a partir da discussão, da reflexão e do consenso entre os professores participantes, sempre considerando aspectos sobre o conteúdo e sobre o ensino.

Lista Percepções

"O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?"

- História (*)
- Conceito de medida
- Unidade → *Qual é a unidade?* e *O que unidade?*
- Conceitos anteriores → Números Naturais e Números inteiros ←p/q (na definição)
- Representação desses números:
    - Decimal → aplicação prática: dinheiro
    - Fracionária
    - Gráfica
    - Finito/exato ou infinito, dízima
    - Número misto
- Relacionar as várias representações
- Compreender décimos, centésimos e milésimos
- Construção da reta numerada ← Construção dos Números (até reais)
- Conceito do que é divisão → A compreensão da operação de divisão é fundamental para a compreensão, por exemplo, da representação decimal.
- Fração x Razão x Números racionais (*)
- Frações equivalentes, simplificação de frações e frações irredutíveis
- Comparação e ordenação
- Inexistência de sucessor/antecessor → Densidade dos racionais → infinito (*)
- Operações → Forma decimal e forma fracionária
- Inverso multiplicativo
- Ideias associadas às frações → parte/todo, quociente, razão e operador (PCN)
- Porcentagem → Atrelada ao conceito de fração
- Abordar as frações em universos discretos e em universos contínuos

(*) – Não são tópicos relativos diretamente à escola básica.

Figura 5.11: Versão final da lista *Percepções*

5.2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ÊNFASE PERCEPÇÕES

Talvez a melhor palavra para descrever a característica principal desta primeira ênfase do estudo seja *brainstorm* – "tempestade mental". O objetivo comum dos participantes do estudo, que conduziu à organização da discussão, foi a composição da lista *percepções*. Em nossa análise do estudo, a lista, ou a composição da lista percepções, tem um papel substantivo no envolvimento dos professores participantes em um processo colaborativo de discussão e também como vetor orientador do estudo conceitual. Assim, por um lado, o processo de discussão visando à composição da lista, entendida como de autoria do grupo, sem um modelo ou valor de correção definidos a priori, permitiu que os professores participantes identificassem, por exemplo, ideias convergentes, preocupações e dúvidas comuns e práticas compartilhadas, identificando-os e dando unidade ao grupo e atribuindo um caráter colaborativo à discussão. Por outro lado, a reflexão colaborativa que conduziu a composição da lista já apontava as questões conceituais que determinariam o estudo, ressaltando dúvidas e conteúdos que os professores participantes entendiam como importantes para a composição do seu conhecimento de matemática para o ensino, ou seja, mobilizando saberes e metassaberes desses professores. Essas evidências foram identificadas, na análise do estudo, por exemplo, nas narrativas e na discussão realizada pelos professores na condução da decisão pela inclusão do tópico "Fração x Razão x Número Racional" na lista percepções, destacada na seção anterior, neste capítulo.

(I) Que *referências* os participantes usam para trazer e para discutir as questões emergentes do estudo?

Em nossa análise, nesta ênfase do *concept study*, a origem das ideias, das impressões e das reflexões dos professores participantes foi associada a duas referências principais: *ao seu conhecimento particular sobre o assunto* e *a questões que emergiram da prática desses professores*. Por exemplo, todos reconheciam que era difícil ensinar a divisão envolvendo frações. Na análise das narrativas e das discussões realizadas pelos professores participantes, o reconhecimento dessa dificuldade foi associado a dois entendimentos desses professores: a *não saber como explicar o porquê de o algoritmo ser eficiente* e *à dificuldade de ensinar a operação*. É claro que esses aspectos estão relacionados: Se um professor não sabe bem um determinado assunto, como fará para que outros o compreendam? Como vai ensiná-lo? Em outra perspectiva, sobre o mesmo destaque, cabe outro questionamento: Em que etapa da formação desses professores, a divisão de frações (ou apenas a operação de divisão) foi objeto de estudo? De acordo como a investigação, esses professores estudaram a divisão apenas enquanto alunos do ensino básico. Associamos essa forma de referência como suporte para a reflexão dos professores à indicação da dupla descontinuidade, denunciada por Klein.

Outra evidência relativa às referências dos professores para sustentar a discussão nesta ênfase do estudo se apresentou na busca por respostas aos questionamentos emergentes sobre o conteúdo. Nesta ênfase, a consulta dos professores era quase que exclusivamente a livros didáticos de ensino básico. Em apenas alguns momentos foram usadas referências de outro tipo: uma logo no início da discussão, como consequência de uma consulta à internet sobre o significado de razão; outra aos PCN (BRASIL, 1998), como suporte para a inclusão do item relativo às ideias associadas às frações; uma terceira, mais adiante, ainda no desenvolvimento desta ênfase, mas já em uma discussão que também pode ser associada à segunda ênfase identificada no *concept study*, por ocasião da discussão sobre a definição formal de números racionais, situação em que uma das professoras participantes consultou um livro de Álgebra.

(II) O que foi identificado como *aspectos elementares* e que papel esses aspectos tiveram na estruturação da discussão e na identificação da primeira ênfase do *concept study*?

Em relação à identificação de aspectos elementares, a análise desta ênfase do *concept study* indicou dois resultados. Inicialmente, a discussão se deu no sentido do significado que o grupo de professores participantes daria a expressão elementar. Essa expressão foi apresentada ao grupo na questão disparadora do estudo conceitual: "O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?". Para os professores participantes, por elementar, seriam entendidos tópicos fundamentais e essenciais para a compreensão de números racionais, que, como professores, não poderiam deixar de ensinar no ensino básico, mas que também precisavam saber. Com o decorrer do estudo, os professores amadureceram esse entendimento, atribuindo ao termo os sentidos de estruturante e substancial. Por outro lado, os professores mostraram refletir e discutir a composição da lista de percepções identificando tópicos entendidos como elementares a partir dessa perspectiva. Acreditamos que esse processo contribuiu para a mobilização de saberes e de metassaberes dos professores. Por exemplo, como no caso da discussão sobre a representação dos números racionais, destacada na seção anterior.

(III) Que *saberes* e *metassaberes* foram identificados? Como esses saberes e metassaberes se relacionavam e foram (re)construídos nesta ênfase do *concept study*?

Sobre saberes e metassaberes alcançados nesta ênfase do estudo coletivo destaca-se um processo precursor para o desenvolvimento do *concept study*. De fato, a pergunta motivadora do estudo coletivo, visando à lista, ou a composição da lista percepções, desencadeia um processo reflexivo que tem origem nas experiências pessoais dos professores participantes, a partir de seus saberes e suas práticas individuais e alcança um processo de discussão e reflexão coletiva, em que os professores expõem e refletem de forma colaborativa suas ideias, visando ao consenso, registrado como um item na lista percepções. Assim, os professores iniciam processos de mobilização e de descompactação dos seus saberes a parir da exposição de suas ideias, impressões e reflexões (BALL, BASS, 2003; HILL, BALL, SCHILLING, 2008; DAVIS, RENERT, 2014).

Como destacado por Davis e Renert (2014), esse processo de descompactação não é suficiente para oferecer conhecimento profundo sobre qualquer assunto. No entanto, ele é fundamental para que a (re)construção conceitual se efetive, o que será meta das próximas ênfases do *concept study*.

> *Concept studies* incluem, sem dúvida, alguma atividade de descompactar. [...] Quando se procura dar sentido a uma ideia matemática complexa, um ponto de partida útil é gerar listas de metáforas, analogias e imagens que podem estar associados com essa ideia. [...] No entanto, o que se segue em c*oncept studies* não podem ser adequadamente interpretados em termos de descompactar. [...] Compreensão profunda de um conceito requer mais do que separar suas partes constituintes; implica também em examinar como essas partes se estruturam juntas e se separam em diferentes contextos e circunstâncias.[159] (DAVIS, RENERT, 2014, p. 42-43, tradução nossa)

Nesta ênfase do estudo muitos saberes e metassaberes foram mobilizados pelos professores participantes e entendemos que podemos até apontar alguns indícios de (re)construção conceitual, como no caso da discussão sobre a densidade dos números racionais. No entanto, em nossa análise, essas discussões não são suficientemente aprofundadas. Acreditamos que os episódios identificados nesse sentido ressaltam a característica não linear de um *concept study*, apontando discussões que sustentarão a identificação das próximas ênfases do estudo coletivo.

[159] No original: Concept studies undoubtedly include some unpacking activities. [...] When seeking to make sense of a complex math idea, one useful starting point is to generate lists of metaphors, analogies, and images that might be associated with a idea. [...] However, what follows in concept studies cannot be apply construed in terms of unpacking. Deep understanding of a concept requires more than pulling apart its constituent parts; it also entails examinations of how these parts hold together and fall apart in different contexts and circumstances. (DAVIS, RENERT, 2014, p. 42-43)

(IV) Que reflexões sobre a prática e que referências a possíveis repercussões para a prática emergiram?

Nesta ênfase se destacam, a partir da narrativa dos professores, por exemplo, maior atenção à composição de enunciados de atividades e na compreensão das dificuldades dos alunos.

De maneira geral, destacamos que a análise da primeira ênfase identificada no estudo coletivo revela que os elementos elencados para a condução da análise (*referências, aspectos elementares*, *saberes e metassaberes* e (*re*)*construção conceitual*) estão inter-relacionados. Por exemplo, a reflexão realizada pelos professores participantes sobre os conceitos fração, razão e número racional destaca a identificação de aspectos elementares sobre o assunto em discussão. No entanto, revela e contribui também para a mobilização e a reflexão dos professores participantes sobre o seu conhecimento sobre esse conteúdo, colaborando, assim, para a identificação de saberes e metassaberes. Além disso, na discussão das ideias e impressões reveladas pelos professores praticantes e no questionamento emergente da reflexão coletiva sobre essas ideias, como, por exemplo, a definição de cada um desses conceitos, os professores buscaram referências de apoio. Nosso objetivo, com a análise do estudo, não é estabelecer fronteiras nem comparar os elementos de análise, mas oferecer uma discussão que destaque a contribuição desses aspectos para o desenvolvimento profissional do professor, especialmente em relação ao conhecimento de matemática para o ensino.

Observando a abordagem qualitativa, a análise da primeira ênfase identificada no estudo teve papel fundamental na condução da análise das demais ênfases identificadas. Nas próximas seções serão apresentadas as análises das outras ênfases.

Elemento de análise	***Destaque***	***Relação com o conhecimento de matemática para o ensino***
Referências	Sua experiência como aluno da escola básica	Entendemos que a experiência do professor enquanto aluno do ensino básico não é exatamente um saber profissional do professor, mas tem forte influência na composição do seu *conhecimento de matemática para o ensino* (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; DAVIS, RENERT, 2014)
	Construção cognitiva pessoal, ou seja, sua maneira própria de lidar de fazer matemática	Saber de conteúdo (SHULMAN, 1986) ou ao conhecimento comum de conteúdo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008)
	Sua prática, ressaltando questões típicas de sala de aula tanto em relação ao ensino como à aprendizagem dos alunos.	Saber pedagógico de conteúdo (Shulman, 1986) ou ao conhecimento especializado de conteúdo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008)
	Eminentemente a textos didáticos do ensino básico – usados como referência para esclarecer dúvidas, na busca por respostas aos questionamentos sobre o conteúdo.	Entendemos que a consulta a textos didáticos de ensino básico como referência para responder a questões de conteúdo, eminente nesta ênfase do estudo, está associada à dupla descontinuidade (KLEIN, 2010; SCHUBRING, 2014).
Aspectos elementares	Nesta ênfase os professores participantes construíram o seu entendimento comum do termo elementar: *seriam entendidos, como elementar, tópicos fundamentais e essenciais para a compreensão de números racionais, que, como professores, não poderiam deixar de ensinar no ensino básico, mas que também precisavam saber.*	Entendemos que a forma como o termo elementar foi compreendido pelos professores participantes é consonante com as ideias de Klein (KLEIN, 2010; SCHUBRING, 2014) e adequada à proposta do concept study (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014).
	O significado comum atribuído ao termo elementar pelos professores participantes foi critério balizador para a composição da lista de percepções, alcançando de forma concomitante e praticamente indissociável o conhecimento de conteúdo e a prática desses professores.	Em nossa análise, o processo de discussão colaborativa visando à identificação de tópicos elementares contribuiu para mobilizar saberes e metassaberes dos professores participantes.
Saberes e metassaberes	Nesta ênfase do estudo, a mobilização de saberes e de metassaberes por parte dos professores participantes se destacou no sentido de descompactar e de questionar os próprios conhecimentos.	
(re)construção conceitual (*substruct*)	Nesta ênfase não foram identificados aspectos evidentes de reconstrução conceitual dos professores participantes.	No entanto, a discussão característica da composição da lista percepções já aponta o potencial do concept study para o processo ocorra.

Figura 5.12: Análise da Ênfase Percepções – Quadro Resumo

5.2.3 PANORAMA

Observando a metodologia *concept study*, não há, no início das ênfases subsequentes à primeira, *percepções*, um elemento disparador ou identificador, como, por exemplo, uma pergunta dirigida ao grupo ou uma atividade específica. Também não há características determinadas a priori para a identificação dessas ênfases. Nas palavras de Davis e Renert, "apenas a primeira ênfase pode ser descrita como intencional, os demais são emergentes, imprevisíveis, não planejados, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais" (DAVIS, RENERT, 2009b, p.38, tradução nossa).

Especificamente sobre a segunda ênfase, Davis e Renert (2014) entendem que indica um nível superior de observação do conteúdo (no sentido de um ponto de vista mais alto) do aquele que marca a primeira, *percepções*: "Resumidamente, a visão *panorâmica* corresponde um mapa de macro-nível, enquanto que uma *percepção* corresponde a uma imagem instantânea, em micro-nível, de um conceito."[160] (DAVIS, RENERT, 2014, p.62, tradução nossa). Esse entendimento dos autores sugere um paralelo às ideias de Klein sobre o conhecimento de matemática dos professores. Klein defende que o conhecimento de matemática dos professores contemple a uma visão panorâmica da disciplina, que os permita identificar relações e conexões entre os assuntos e entre esses e a matemática que deve ensinar na escola básica (KILPATRICK, 2008a; SCHUBRING, 2014).

Em nossa investigação, a segunda ênfase ficou caracterizada pela *articulação de aspectos matemáticos elementares do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do próprio tema*. Nesse sentido, no estudo, destacaram-se, por exemplo, as discussões sobre o *conceito de medida*, *representação dos números racionais*, *equivalência e igualdade entre frações*, *operações envolvendo números racionais e densidade*. Esta ênfase do estudo é nomeada *panorama*.

As discussões que caracterizaram a ênfase *panorama* foram identificadas ao longo do desenvolvimento do estudo coletivo, com predominância a partir do 7º encontro. A identificação das reflexões que caracterizam esta ênfase não está vinculada à sequência cronológica do estudo coletivo, mas à identificação de aspectos característicos dessas discussões:

(i) Foco fundamental em questões de ordens conceitual ou pedagógica especificamente sobre frações ou números racionais;

[160] No original: "Briefly, a landscape is a macro-level map, whereas a realization is a micro-level snapshot, of a concept." (DAVIS, RENERT, 2014, p.62)

(ii) Indicação de que a reflexão coletiva alcançava um nível maior de observação, no sentido de Klein (2010) e Davis e Renert (2014), em relação às discussões que marcaram a composição da lista percepções. Nesse sentido, as discussões, nesta etapa, ganharam aprofundamento na análise das questões emergentes por parte dos professores participantes.

Ficou evidente, a partir da análise dos dados coletados, que todas as discussões características desta segunda ênfase do estudo coletivo estavam ligadas, de alguma forma, a um item (ou itens) da lista *percepções*. Além disso, segundo a nossa análise algumas dessas discussões tiveram seu desenvolvimento, inicial ou parcial, ainda durante o processo de composição dessa lista, ou seja, na primeira ênfase identificado no *concept study*. A discussão que indicava a inclusão de um tópico na lista *percepções*, em muitos casos, levou o grupo a discutir o assunto com maior aprofundamento ainda durante o processo de composição dessa lista, e continuada após a conclusão da lista. Por exemplo, a discussão sobre a divisão envolvendo números racionais, cujo início foi a partir do cálculo da divisão de 2,49 por 0,3, descrita na seção 6.7 deste documento.

Para explicar e ilustrar a identificação da ênfase *panorama* no *concept study* e para destacar a sua contribuição nesta investigação, são apresentadas, a seguir, algumas discussões associadas a esta ênfase do estudo coletivo.

No encontro seguinte à finalização da lista percepções, a professora P3, se referindo ao item "*conceito de medida*", compartilhou uma dúvida com o grupo:

> Professora P3: Eu fiquei pensando... esse conceito de medida é relacionado a sistema métrico?

O professor P2 revelou que a dúvida não era apenas dessa professora e que já haviam conversado sobre o assunto em um momento fora do encontro, confirmando que também era uma dúvida dele:

> Professor P2: Era isso que a gente *tava* conversando. Essa medida é a medida do comprimento de um terreno, por exemplo? Que nem sempre vai ser um número inteiro.

O professor P5 revelou que também tinha dúvida sobre o assunto:

> Professor P5: Eu entendo que medida é uma aplicação para a gente trabalhar números racionais (em sala de aula).

Os professores participantes passaram a refletir e a discutir com o objetivo de esclarecer as dúvidas. Neste processo, inicialmente desvincularam a ideia de medida do resultado do processo empírico de medir um comprimento, ou seja, de efetuar uma medida linear. Para isso, Primeiramente, os professores reconheceram que há diversas outras grandezas que são "medidas", no sentido empírico.

> Professor P2: Mas a gente não mede só comprimento, tem muita coisa que a gente mede que não é comprimento e que *dá* número racional. A gente pode ter que colocar um litro e meio de leite em uma receita ou medir a área do terreno.

Na sequência, ponderaram que havia uma diferença entre medir e contar.

> Professor P2: Tem uma coisa que a gente não *tá* falando. Eu acho que medir é diferente de contar. A gente não mede a quantidade de dedos, a gente conta.

O transcorrer da discussão travada pelo grupo revelou que os professores participantes reconheciam que havia uma relação entre *medida* e *número racional*, no entanto, não sabiam bem como qualificar essa relação.

> Professora P1: Existe uma relação entre medida e número racional. Quando a gente vai medir qualquer coisa, comprimento, área, volume, ... o resultado pode não ser uma quantidade inteira. O que a gente quer saber é quantas vezes o padrão que eu escolho cabe naquilo que eu quero medir e isso pode não ser uma quantidade inteira de vezes. Pode precisar partir, pegar uma fração do padrão.

Assim, o decorrer da discussão convergiu no sentido de responder às seguintes questões: *O que é medida? Qual a relação de medida com números racionais?*

Após alguma reflexão a professora P1 resumiu seu entendimento para o conceito de medida:

> Professora P1: Medir é você saber quantas vezes uma determinada unidade cabe naquilo que você quer medir.

Sendo complementada pelo professor P5:

> Professor P5: Mas isso é diferente de só contar. Na medida a unidade pode ser partida, já na contagem não.

Buscando identificar e qualificar a relação entre medida e número racional, os professores participantes continuaram a reflexão coletiva:

> Professor P5: Eu entendo assim, medir faz surgir números racionais, eu preciso de números racionais para registrar as medidas, para saber qual é a medida. Mas pode ser qualquer medida, não precisa ser uma medida de comprimento. É medida em geral... comparação com uma unidade, que pode ser de vários tipos.

> Professora P1: Os números racionais são o registro das medidas. Mas não têm só medidas racionais, têm medidas que não são racionais... por exemplo, tem o a diagonal de um quadrado, que mede $\sqrt{2}$.
>
> Professora P3: Isso não é fácil. Eu acho que a gente não consegue explicar assim, desse jeito, para os meninos (os alunos). Mas acho que eu nem sabia. (risos) Agora eu sei. Não dá para fazer só atividades de medir comprimento.

A continuidade da discussão levou o grupo a concluir que os números racionais estão relacionados ao conceito de medida como comparação entre grandezas de mesma espécie, sejam elas, por exemplo, comprimento, área, massa, volume, etc. Para sustentar essa reflexão, os professores participantes buscaram como referência livros didáticos e livros de álgebra de ensino superior. De No entanto, não conseguiram uma única referência que reunisse satisfatoriamente as respostas que buscavam. Os livros textos eram pouco esclarecedores sobre aspectos formais e os livros acadêmicos não tinham uma preocupação com situações concretas que determinam a abordagem dos conceitos na escola básica. A consulta às referências evidenciou para os professores participantes que, especialmente na escola, coexistem dois entendimentos para o termo medida: um de característica empírica, que corresponde à ação concreta de medir, e outro, eminentemente matemático, que alcança a abstração. No estudo, a discussão que sustentou essa reflexão apontou para aos elementos centrais referências e saberes e metassaberes, expondo uma articulação entre estes.

Em nossa análise, a discussão sobre a relação entre medida e número racional levou os professores a uma reconstrução conceitual estabelecida a partir da identificação de aspectos elementares do conteúdo estudado. Claramente, os professores questionaram e reelaboraram seu conhecimento sobre medida. Assim, ampliaram o significado da palavra para além do senso comum, alcançando um sentido matemático no contexto numérico. Essa reconstrução conceitual alcança o conhecimento de matemática para o ensino na medida em que os professores participantes têm como referência para a discussão a tarefa de ensinar. Isso é observado nas narrativas desses professores, mesmo quando a reflexão expõe uma preocupação que não está diretamente relacionada à questão conceitual, mas ao comportamento dos alunos. Por exemplo,

> Professora P3: Esse negócio de discreto e contínuo é importante. É claro que a gente não vai ensinar para a criança: esse é um conjunto discreto, esse é um conjunto contínuo, mas tem que fazer exercício com isso. Por exemplo, tem que ter problema de fração com coisas contínuas e discretas. Calcular 2/3 de uma pizza é diferente de calcular 2/3 de um grupo de 15 pessoas.

> Professor P4: Na hora de ensinar números racionais tem que fazer os alunos medirem coisas, mas isso é muito difícil. Tem que ter o material, os instrumentos e, hoje em dia, os alunos não têm educação, não respeitam o professor. Vira uma bagunça.

Esta discussão evidenciou ainda uma abordagem interessante que os professores participantes revelaram usar para sustentar sua referência à prática e à interpretação de elementar. Em nossa análise, essa abordagem foi interpretada a partir de três questões simples que permeiam a prática do professor: "*O que ensinar?*", "*Por que ensinar?*" e "*Como ensinar?*".

A análise evidenciou que a preocupação dos professores participantes com a tarefa de ensinar se balizava a partir da reflexão sobre *o quê*, *o porquê* e *como* ensinar a partir uma perspectiva de aspectos conceituais sobre o assunto, e menos no sentido de estratégias didáticas de ensino ou do acompanhamento de um programa ou de um texto didático. Por exemplo, os professores participantes não discutiram especificamente estratégias didáticas de abordagem do conceito de medida em sala de aula, traduzidas em atividades ou sequências didáticas. Este não foi o foco da discussão. A discussão teve atenção a aspectos de relevância conceitual sobre assunto, sem perder de vista o ensino. Os professores participantes concluíram, por exemplo, que a abordagem de medida (no sentido explicitado) é essencial para o ensino e aprendizagem sobre números racionais, portanto deveria ser ensinada na escola. No entanto, não discutiram como ensinar ou abordar a medida em sala de aula. No mesmo sentido, a reflexão coletiva levou-os a reconhecerem que a abordagem de frações em universos discretos e em universos contínuos, por exemplo, a partir de problemas que solicitem uma fração de um conjunto com *n* elementos ou de um comprimento de medida *n*, não contempla de forma consistente a relação intrínseca entre medida e números racionais.

A discussão sobre a relação entre medida e números racionais foi retomada no 10º e no 11º encontros, sessões do estudo coletivo em que a atenção do grupo voltou-se para a formalização dos números racionais por classes de equivalência e para a incomensurabilidade. Essa discussão ilustra o a dinâmica característica de análise de um *concept study*, que não são se caracteriza por fronteiras estanques entre as ênfases nem por uma ordenação cronológica. O retorno a essa questão se realiza quando as discussões já estão sendo associadas à terceira ênfase identificada no estudo coletivo.

Outra discussão associada à segunda ênfase identificada no *concept study*, também teve boa parte realizada durante a composição da lista percepções: A reflexão sobre a divisão envolvendo números racionais em sua forma decimal, descrita na Seção 5.2.1 deste documento.

A discussão também partiu da dúvida de uma das professoras participantes, que teve origem na leitura de um livro didático do ensino fundamental:

> Professora P3: Eu fiquei pensando e descobri que eu não sei dividir com vírgula (se referindo aos números racionais em representação decimal). Do jeito que o livro *tava* explicando eu não sei. Eu sei fazer um *macete* para dividir com vírgula.

Para os demais professores, o processo apresentado pela professora P1, descrito na seção 5.2.1 deste documento, também era uma novidade e revelaram que, como ela, ensinavam a operação a seus alunos apenas a partir da técnica de "igualar as casas decimais". A discussão apontou que os professores participantes ensinavam a divisão envolvendo números decimais como um algoritmo, pautado em regras e etapas, e não como uma operação matemática elementar, que traduz as ações de "repartir em partes iguais" (equipartição) ou de "verificar quantas partes cabem" (medida), dependendo do contexto.

Desafiados pela pesquisadora, a partir da proposição de um problema baseado em uma situação real, da divisão de uma quantia entre 3 pessoas, foram convidados a efetuar mentalmente o cálculo $54{,}3 \div 3$. Todos revelaram ter dificuldade para realizar o processo sem recorrer à dupla "lápis e papel". Ao explicarem como haviam pensado, ficou evidente que buscavam realizar o algoritmo que conheciam (e ensinavam). Nenhum dos professores realizou, por exemplo, estimativas a partir da decomposição do dividendo. Poderiam ter chegado ao resultado a partir da divisão, por 3, de 30 unidades, em seguida das 24 restantes e por fim, dos 3 décimos. Assim, o resultado seria obtido pela soma de 10 + 8 + 0,1 = 18,1 (Figura 5.13).

$$
\begin{array}{l}
54{,}3 \div 3 = \\
(30 + 24 + 0{,}3) \div 3 = \\
10 + 8 + 0{,}1 = \\
18{,}1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|l}
5 & 4, & 3 & 3 \\ \cline{4-4}
-\;3 & 0 & & 10 \\ \cline{1-2}
2 & 4, & 3 & 8 \\
-\;2 & 4 & & 0{,}1 \\ \cline{1-2} \cline{4-4}
 & 0, & 3 & 18{,}1 \\
 & -\;0, & 3 & \\ \cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Figura 5.13: Representações para o cálculo da divisão $54{,}3 \div 3$

A discussão levou o grupo a praticar a operação, efetuando várias divisões com o objetivo de experimentar a realização do cálculo a partir da compreensão do processo e não do treinamento da execução do algoritmo que conheciam. Uma das divisões realizadas pelo grupo foi o cálculo de $2{,}49 \div 0{,}3$, em que não cabe a reflexão a partir da interpretação da divisão como repartição em partes iguais, uma vez que o dividendo não é inteiro. Neste caso, o significado associado à operação precisa ser o de medida. A reflexão sobre essa questão foi fortemente amparada pela representação pictórica (Figura 5.10).

Na análise dos dados, esse episódio foi associado a uma (re)elaboração conceitual (*substruct*). No entanto, entendemos também que evidencia fortemente a dupla descontinuidade. Durante essa discussão, a pesquisadora procurou saber *como* e o *quê* os professores participantes haviam estudado sobre a operação de divisão envolvendo números racionais em sua formação acadêmica inicial e todos os participantes confirmaram que não haviam discutido o assunto até então, ensinavam como aprenderam (ou acreditavam ter aprendido).

Ainda sobre a divisão de números racionais, os professores exploram a divisão desses números em sua forma fracionária. Motivados pela discussão da divisão de números racionais em expansão decimal, o professoro P2 ressaltou:

> Professor P2: Mas esse negócio de saber a regra, mas não saber explicar porque que ela funciona acontece também com a divisão de frações. Quem sabe explicar direitinho porque que dá certo repetir a primeira (fração) e multiplicar pelo inverso da segunda?

Os demais concordaram com a professora P2: sabiam fazer, mas não sabiam explicar porque o algoritmo era eficaz. Questionados pela pesquisadora, novamente todos confirmaram que haviam aprendido o assunto em sua formação básica e que não voltaram a estudá-lo em sua formação acadêmica profissional.

A discussão que sustentou essa reflexão levou os professores novamente a refletir a partir de atividades e de abordagens próprias do ensino fundamental, mas sem perder a atenção ao conhecimento necessário para o ensino. Observamos que as atividades que os professores traziam como proposta para a reflexão tinham como característica principal cálculos simples, típicos dos programas de ensino fundamental e cuja resolução evidenciava, para efeito da discussão, aspectos essenciais da operação. Em nossa análise, essa observação aponta para a evidência de saberes e de metassaberes dos professores participantes. Assim, os professores usavam o seu saber de fora crítica para a seleção das questões e refletiam sobre essas atividades, ou seja, usam o seu conhecimento (incluindo as suas dúvidas) para refletir sobre esse próprio conhecimento. Entendemos que essa ação reflete, fundamentalmente, uma postura reflexiva dos professores participantes sobre o próprio saber, o que entendemos é fundamental diante da concepção dinâmica segunda a qual compreendemos o conhecimento de matemática para o ensino (DAVIS e RENERT, 2014)

Neste contexto, por exemplo, compararam as divisões: $\frac{1}{6} \div 9$ e $6 \div \frac{1}{9}$, sem perder de vista prática de sala de aula. Observaram que não é muito difícil associar a primeira divisão ao significado de equipartição: "repartir $\frac{1}{6}$ em 9 partes iguais". Mas que, no contexto do ensino básico, é mais difícil observar o mesmo cálculo a partir do significado de medida: Quantas vezes 9 cabe e $\frac{1}{6}$?. A resposta imediata, dos alunos, seria nenhuma. Mas a ideia de comparação, intrínseca, ao conceito de medida, pode amparar o ensino e a aprendizagem desse cálculo. Por outro lado, não faz sentido pensar no cálculo $6 \div \frac{1}{9}$ como equipartição, apenas em verificar quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabe em 6. Os professores sustentaram a argumentação sobre essas divisões e o seu ensino fortemente amparados por representações pictóricas. Assim, se em cada unidade, $\frac{1}{9}$ cabe 9 vezes, em 6 unidades, caberá 54 vezes. Logo, $6 \div \frac{1}{9} = 54$. (Figura 5.14)

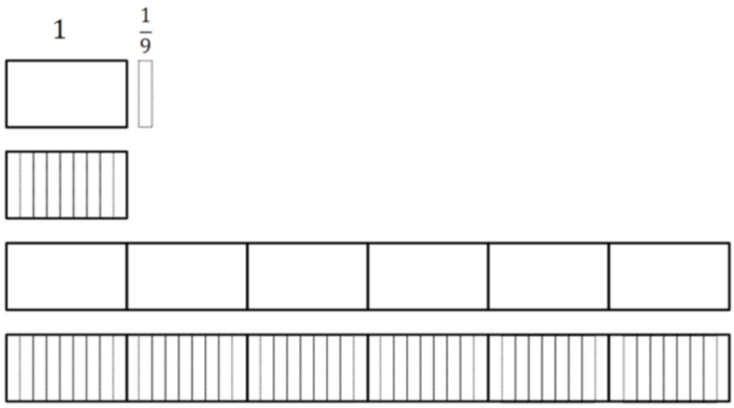


Figura 5.14: Representação pictórica para a ilustração do cálculo de $6 \div \frac{1}{9} = 54$

Em nossa análise dos episódios sobre a discussão da divisão, não recorreram a referências bibliográficas para a discussão. Os professores revelaram se pautar mais em seus próprios conhecimentos sobre o assunto e nas elaborações, relações e conclusões que desenvolviam durante a discussão. No entanto, entendemos (como os professores participantes) que o assunto, operação com frações, é elementar para números racionais e que a reflexão realizada pelos professores, de fato, não perdeu em aprofundamento e contribuiu para o desenvolvimento do metassaber, no sentido descrito acima.

No estudo coletivo, as discussões sobre as operações com frações não se restringiram às apresentadas aqui. No entanto, era necessário fazer uma seleção e estas foram discussões selecionadas para compor este texto. Entendemos que caracterizam bem o teor da discussão sobre as operações realizada pelos professores durante o estudo coletivo.

Ainda que alguns aspectos da discussão sobre as operações com números racionais possam parecer, serem considerados ou mesmo serem, de fato, fáceis e entendidos como já conhecidos pelos professores, o estudo revelou que os professores participantes tinham dúvidas sobre eles. Além disso, a investigação revelou que esses conteúdos ou a discussão sobre eles com vistas ao ensino não haviam sido objeto de estudo durante a formação acadêmica inicial dos professores participantes. No máximo, tinham explorado alguns materiais concretos para a abordagem de frações em sala de aula, por exemplo, o dominó das frações. No entanto, nessas ocasiões, o foco teria sido mais em estratégias didáticas do que em questões conceituais. Entendemos que essa constatação corrobora as investigações de Ball (1988) e de Moreira (2004), que denunciam que, na formação dos professores, o conteúdo de matemática da escolaridade básica é considerado simples e amplamente conhecido, portanto não precisa ser abordado como objeto de estudo. Assim, estuda-se pouco ou quase nenhum conteúdo da escola básica durante o curso universitário.

> Professor P5: Eu, sinceramente, não estudei nada disso na minha graduação. Já estou no meu terceiro ano dando aula para o 7º ano. Eu ensino como eu faço.

Entendemos que essa realidade revela um aspecto contemporâneo que contribui para contribuição para que se efetive a dupla descontinuidade denunciada por Klein (2010) há mais de um século.

Com o objetivo de destacar uma discussão que teve forte contribuição da prática e que foi associada a um aspecto característico da ideia da de reconstrução conceitual que encerra a noção de *substruct*, defendida por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2010, 2011, 2012; DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014) – uma (re)construção do conhecimento promovida enquanto o professor segue atuando, ou seja, “fazendo uso” do se conhecimento conceitual em sua prática – destacamos um episódio do estudo coletivo:

De acordo com a rotina estabelecida no estudo coletivo, no início de cada encontro, os professores participantes eram convidados a compartilhar as questões e reflexões que haviam tido individualmente durante a semana e que pudessem contribuir para o estudo coletivo. No 7º encontro, a professora P3 fez questão de compartilhar com o grupo a sua experiência com a realização de uma lista de exercícios com seus alunos. Ela chegou a enviar por e-mail, na véspera, para que todos pudessem ter acesso à lista antes do encontro daquela semana:

> Professora P3 (*por e-mail*): Olá Leticia, esta semana passei alguns exercícios de equação do 1º grau para os meus alunos do 8º ano com algumas frações, as dúvidas e resoluções foram diversas. Com isso, lembrei dos nossos encontros e decidi separar alguns exercícios para que possamos refletir sobre eles, isso é claro, se o grupo achar interessante. Bjs e até amanhã.

Um dos problemas que compunha a lista disparou a discussão do grupo sobre a importância da unidade (ou do todo) no contexto das frações (Figura 5.15):

Uma quantia foi dividida entre 3 pessoas da seguinte maneira: A primeira recebeu 1/3 do total, o segundo recebeu 2/3 do que restou após o 1º receber a sua parte, e o terceiro recebeu os 200 reais restantes. Qual a quantia total distribuída?

Figura 5.15: Problema proposto pela professora P3 a seus alunos

Inicialmente a professora P3 observou que alguns alunos, como estavam estudando equações, "resolveram" o problema, de forma errada, simplesmente somando os números que apareciam e incluindo "x=" na sentença que traduzia a solução dada por esses alunos: $x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 200$. Essa solução lembra o famoso problema da idade do capitão (BARUK, 1985). A discussão sobre esse tipo de solução pode ser discutida à luz, por exemplo, da bibliografia sobre resolução de problemas ou sobre aprendizagem. No entanto, não era este o foco da discussão. A atenção dos professores participantes se voltou para o conteúdo de números racionais envolvido na questão.

Inicialmente, a professora P1 observou que a resolução do problema envolvia determinar frações de "todos" diferentes: A primeira pessoa recebeu 1/3 da quantia total a ser distribuída, já a segunda, 2/3 da quantia restante. Mas, neste caso, a quantia restante não é igual à quantia total. A professora P1 comentou:

> Professora P1: Isso é culpa nossa. A gente ensina o menino a fazer um monte de contas com frações e quando ele vê frações só sabe fazer contas. Mas não sabe o *que que* é o inteiro naquela situação. Ele não relaciona que a fração é a fração de um inteiro. Tem uma ideia unidade ali por trás e a gente não trabalha isso com o menino e ele precisa ver isso.

Durante a reflexão, o Professor P5 se lembra de que ele mesmo não teve atenção à importância da identificação do todo ao propor problemas a seus alunos e dá um exemplo:

> Professor P5: Olha o problema que eu passei para os meus alunos: Para encher uma caixa, João primeiramente colocou 1/5 de água e, depois, Pedro colocou 2/3 de água. Calcule a fração total de água colocada na caixa.

Imediatamente, a professora P1 exclamou:

> Professora P1: Faltou dizer a unidade. Fração de quê? Pode ser fração do balde ou de um litro, por exemplo. Assim não dá para responder o problema. O *que que* é 1/5 de água?

A partir dessa discussão, a reflexão dos professores aprofundou-se sobre a ideia de "todo" e o conceito de "unidade" no contexto das frações e dos números racionais, sobre a relação entre fração e números racional, sobre as interpretações associadas às frações e sobre a construção dos números racionais por classe de equivalências. Nessas discussões as referências usadas pelos professores participantes foram livros didáticos e livros acadêmicos. Associamos esse episódio à articulação de vários tópicos elementares sobre números racionais e a construção de metassaberes sobre esses tópicos.

Outra questão que marcou a discussão nesta etapa e que tem papel importante na identificação das ênfases do *concept study* teve como foco a emblemática igualdade "0,999... =1". Durante uma discussão sobre a representação em expansão decimal dos números racionais, que dizia respeito à comparação, a professora P3 argumentou:

> Professora P3: Tá escrito lá (se referindo a uma questão que queria compartilhar com a turma) que 0,999... =1, mas eu não concordo não. Quando você faz as contas, com aquele negócio de x e de multiplicar por 10, de achar a fração geratriz, você mostra que é igual a1. Mas eu não acredito não.

A professora mostra, então, a questão a que se referia e que tinha trazido para compartilhar com a turma – Figura 5.14, afirmando que faria a opção pelo item (c). Os professores participantes passaram a discutir a partir da análise dos itens correspondentes a respostas erradas. Por exemplo, observaram que o item (d) está relacionado com a ideia de densidade.

(Unesp - 89) Seja R o número real representado pela dízima 0,999999.... Pode-se afirmar que:
a) R é igual a 1.
b) R é menor que 1.
c) R se aproxima cada vez mais de 1 sem nunca chegar.
d) R é o último número real menor que 1.
e) R é um pouco maior que 1.

Figura 5.16: Problema proposto pela professora P3

Esse questionamento levou os professores participantes a, inicialmente, discutir a densidade do conjunto dos números racionais e, posteriormente, a ampliar o alcance da reflexão. Assim, a reflexão sobre a igualdade em questão não correu no momento em que foi proposta pela professora P3, mas depois. Na análise, esse episódio foi associado ao desenvolvimento do metassaber e à (re)organização conceitual dos professores participantes. Por um lado, a discussão revelou conexões entre os conhecimentos que os professores tinham e que, talvez, não tivessem refletido sobre a relação entre eles.

Os professores participantes foram capazes de usar apenas dois argumentos para refletir sobre a igualdade "0,999... =1". O primeiro era um algoritmo típico do currículo de ensino básico, que permite recuperar da fração geratriz de dizimas a partir de manipulações algébricas, como no exemplo apresentado na Figura 5.16. O segundo a partir do raciocínio conduzido pela tentativa de "encontrar" um número racional entre "0,999..." e 1.

Seja $x = 1{,}5\overline{6}$, *então,*

$$\begin{cases} 100x = & 156{,}\overline{6} \\ 10x = & 15{,}\overline{6} \end{cases} \Rightarrow \quad 90x = 141 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{141}{90} = \frac{47}{30}$$

Figura 5.17: Exemplo de aplicação de algoritmo típico do ensino básico para a recuperação de fração geratriz de dizima periódica. No caso, $1{,}5\overline{6}$.

A partir da discussão e com a contribuição importante da professora P1, que a esta altura do estudo já consultava exclusivamente livros acadêmicos como referência para a sua investigação, os professores chegaram à conclusão de que os dois argumentos que tinham para avaliar a igualdade não eram sustentados por absoluta consistência matemática e/ou pouco eficientes para a correta abordagem no ensino básico.

> Professora P1: Essa coisa de tentar encontrar um número entre 0,999... e 1 é até intuitiva, mas não dá para ter certeza só com a intuição. Essa história de ter sempre um entre dois racionais é a densidade. E como que eu mostro que não tem nenhum racional entre eles?

Foi a partir dessa intervenção da professora P1, que o grupo voltou a sua atenção para a reflexão sobre a densidade dos números racionais. A Professora P1 se voluntariou para ir ao quadro e fazer a demonstração deste resultado, discutindo as etapas com os demais professores participantes. Para tal, usou como referência seu livro de análise da graduação. Três dos professores participantes, ao serem questionados pela pesquisadora, revelaram que nunca tinham visto a demonstração formal deste resultado, apenas conseguiam se referir à densidade dos racionais a partir de exemplos, sem qualquer atenção ao rigor da matemática: Assim, consideravam dois números racionais, por exemplo, 0,39 e 0,40 e observavam que 0,395 estava "entre" eles. Na sequência, consideravam 0,39 e 0,395 e observavam que 0,393 estava "entre" os novos números considerados e que este processo poderia ser repetido sem interrupção.

A Figura 5.18, ilustra os desdobramentos originados da discussão sobre a igualdade 0,999... = 1. Em nossa análise, esses desdobramentos refletem a mudança qualitativa que caracteriza a identificação das ênfases observadas no desenvolvimento do *concept study*.

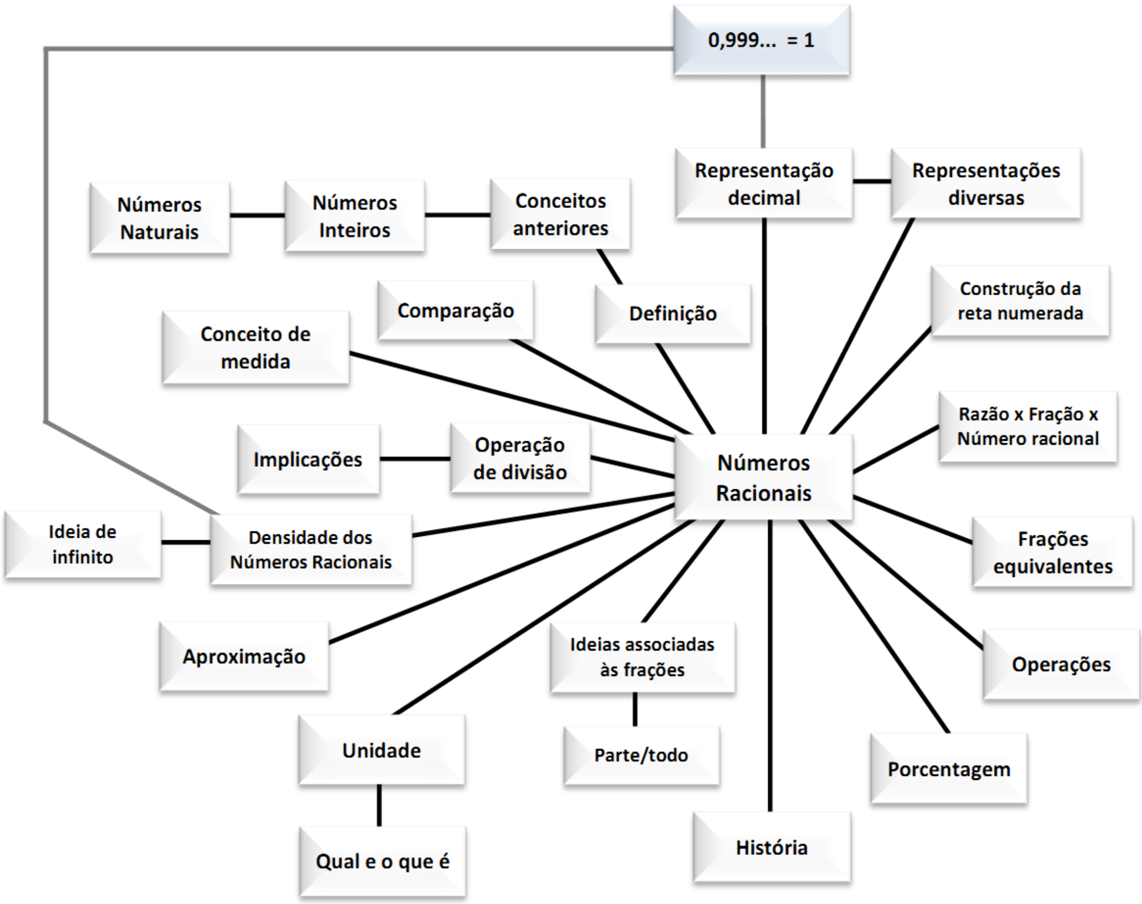


Figura 5.18: Diagrama ilustrativo da discussão sobre a igualdade 0,999... =1.

5.2.4 Considerações sobre a ênfase panorama

Associamos a primeira ênfase do *concept study* à expressão *brainstorm*, indicando uma ebulição de ideias, metáforas, resultados, imagens, etc., que refletiam o conhecimento de matemática dos professores participantes do estudo coletivo, como se essas ideias estivessem sendo "desempacotadas" (*unpacking*) e expostas. Esse processo foi disparado por uma pergunta e levou à composição da lista *percepções*. Teve início e fim claros.

Uma primeira dificuldade da análise da segunda ênfase do estudo foi identificar as discussões características. Não havia início nem fim estabelecidos a priori. Seguimos então dois critérios básicos: (i) discussões que tivessem sido conduzidas integral ou parcialmente após a conclusão da lista percepções e (ii) discussões que revelassem a busca pelo aprofundamento sobre assuntos reconhecidos pelo grupo como relativos a números racionais.

Um aspecto identificado sobre a forma de discussão e de reflexão que marcou a segunda ênfase do estudo diz respeito à relação dada, pelos professores participantes, entre o assunto e a prática de sala de aula. Segundo a nossa análise, a prática de sala de aula era relacionada à reflexão sobre o conteúdo a partir de questões que claramente revelaram a preocupação com o ensino: "*O que ensinar?*", "*Por que ensinar?*" e "*Como ensinar?*".

Finalmente, a partir da análise, entendemos que a discussão nesta etapa adquiriu um viés mais investigativo, que evidenciou o potencial da discussão coletiva para estabelecer uma mudança de relação dos professores com o seu próprio saber.

(I) Que *referências* os participantes usam para trazer e para discutir as questões que emergem do estudo?

Observamos, que, em relação às discussões que marcaram a primeira ênfase, as discussões identificadas à segunda ênfase, revelaram uma mudança em relação a suas origens. Claramente eram motivadas pelo próprio processo de reflexão dos professores participantes. Assim, tinham como origem:

(i) A influência da lista estabelecida na ênfase anterior ou de discussões desse estágio – pela observação de um item ou por terem sido iniciadas a partir da própria discussão que da lista;

(ii) Da prática do professor. Especialmente partir de problemas que os professores passaram a observar de forma crítica e a vincular às discussões travadas durante as sessões;

(iii) Do próprio processo de reflexão. Assim, no intuito de esclarecer as questões, novas questões emergiam.

Em nossa análise, nesta ênfase do *concept study*, o aprofundamento das discussões exigiu que os professores buscassem, como referência, para amparar a sua reflexão, textos acadêmicos. Essa necessidade emergiu dos próprios questionamentos. O teor das discussões, a partir de questões que exigiam maior aprofundamento, promoveu essa mudança. Os questionamentos apontavam apara a compreensão dos assuntos. Por exemplo, a discussão sobre a densidade dos números racionais. Na busca por referências de textos acadêmicos os professores privilegiaram textos de álgebra e de análise que usaram em sua graduação. Esse resultado do estudo é consonante com o que Davis e Renert observaram nos estudos que realizaram. Em relação à segunda ênfase identificada entende que: “Foi neste ponto que o valor de leituras compartilhadas do grupo tornou-se evidente”[161] (DAVIS, RENERT, 2014, p.63, tradução nossa).

Buscando estabelecer uma relação entre as referências à composição dos saberes docentes, acreditamos que, em uma análise imediata, os textos acadêmicos seriam associados à noção de saber de conteúdo, como promulgado por Shulman. No entanto, a análise do estudo nos leva a relacioná-lo com a construção de um metassaber do professor que tem implicação sobre a sua prática e, portanto, são associados ao saber pedagógico de conteúdo, segundo Shulman (1986) ou ao saber especializado, no modelo de Ball e seus colaboradores (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Em alguns momentos, os professores participantes dirigiam seus questionamentos à pesquisadora. A observação deste fato apontou para considerações em duas direções: para *a investigação em andamento* e para *a importância de estudos com foco na formação e no papel dos formadores*. Em relação à investigação em desenvolvimento, a decisão foi assumir uma postura. Optamos por três possibilidades de reação, a serem consideradas caso a caso: responder com outra pergunta; sugerir que pesquisassem e retomassem a discussão na sessão seguinte ou perguntar ao grupo se alguém poderia ficar responsável por pesquisar o assunto para compartilhar com o grupo e em algumas situações responder. Em relação à importância de estudos com foco na formação e no papel dos formadores, fica a perspectiva de novas pesquisas.

(II) O que foi identificado como *aspectos elementares* e que papel esses aspectos tiveram na estruturação da discussão e na identificação desta ênfase do *concept study*?

Em relação à identificação de aspectos elementares, a análise das discussões revela que, na segunda ênfase do estudo coletivo, a atenção dos professores participantes não estava explicitamente na *identificação* de tópicos elementares, mas no *valor* elementar desses tópicos para a compreensão do assunto. Por exemplo, como evidenciado na discussão sobre a relação entre a noção de medida e os números racionais. Segundo a nossa análise, essa percepção

[161] No original: “It was at this point that the value of the group’s shared readings became apparent” (DAVIS, RENERT, 2014, p. 63)

relaciona a prática de sala de aula à reflexão sobre o conteúdo a partir de questões que claramente revelaram a preocupação com o ensino: "*O quê ensinar?*", "*Por que ensinar?*" e "*Como ensinar?*".

Como aspectos elementares do conceito de números racionais, a discussão que caracterizou a segunda ênfase do estudo coletivo concentrou-se fortemente nos itens elencados na lista *percepções*. O único tópico que não apareceu explícito na lista construída na ênfase anterior foi a discussão sobre a igualdade 0,999... = 1, que emergiu do contexto da discussão sobre a representação como expansão decimal. No entanto, este tópico foi importante para relacionar assuntos entendidos como elementares: *representação* e *densidade*. (Figura 5.18). Esse processo, em nosso entendimento, é traduzido no que Davis e Renert (2014) descrevem com uma visão em macro nível e, para Klein (2010), uma visão superior.

(III) Que *saberes* e *metassaberes* foram identificados? Como esses saberes e metassaberes se relacionavam e foram (re)construídos nesta ênfase do *concept study*?

A análise do estudo mostrou que o processo reflexivo iniciado na ênfase percepções, com base na mobilização e no questionamento dos saberes dos próprios professores participantes, se manteve. Em todas as discussões que marcaram a segunda ênfase identificada no estudo coletivo, os professores participantes expuseram de alguma forma os seus saberes sobre o assunto em questão, visando contribuir para a reflexão e também para questioná-los e avaliá-los. Na análise, o mapeamento dos saberes revelados nesta ênfase do estudo apontou:

(i) a evidência de um aspecto importante da dupla descontinuidade. A análise das narrativas dos professores, algumas até confirmadas por perguntas diretas da pesquisadora, mostrou que muitos dos tópicos considerados, pelos professores participantes como elementares para números racionais e que, reconhecidamente, permeiam a matemática escolar, não foram objeto de estudo desses professores em sua formação inicial.

(ii) Os saberes dos professores estavam mais fortemente amparados pelo conhecimento de técnicas e procedimentos do que por compreensão desses mesmos processos. Assim, por exemplo, sabiam executar os algoritmos das operações envolvendo números racionais, mas não sabiam explicar porque eram eficazes.

Em nossa análise, a segunda ênfase do estudo coletivo ficou fortemente relacionada ao processo de (re)elaboração conceitual do conhecimento – *substruct*. Entendemos que é nesta ênfase do *concept study* que os professores participantes tomaram consciência desse processo e passaram a se sentir mais a vontade para se envolver. As narrativas indicam que passam a refletir criticamente sobre *o que sabem, como o sabem* e *sobre o que precisam saber para ensinar*. Como se se apropriassem do seu próprio conhecimento, conferindo-lhe dinamismo. Em nossa análise, essa é uma etapa chave para o desenvolvimento do estudo.

A análise dos diálogos indica que a dimensão coletiva do estudo foi importante para que os professores se identificassem em relação às dúvidas e compartilhassem as questões que emergiam individualmente com os demais. Todos os professores participantes trouxeram questões pessoais para serem discutidas com os demais participantes.

(IV) Que reflexões sobre a prática e que referências a possíveis repercussões para a prática emergiram?

Em relação ao potencial das discussões que marcaram a segunda ênfase do *concept study* para a prática dos professores participantes, a análise sugere que, de fato, a reflexão crítica que marcava a discussão no *concept study* estava indo além dos encontros, alcançando a prática do professor. Muitas das discussões correspondentes a esta etapa emergiram a partir de problemas com que os professores participantes tiveram contato fora dos encontros e que analisaram do ponto de vista dos assuntos envolvidos, com por exemplo, os problemas enviados pela professora P3 por e-mail e o que deu origem às discussões sobre a igualdade 0,999... =1.

Além disso, entendemos que o processo de (re)elaboração conceitual característico das discussões desta ênfase tem grande potencial para intervir no processo que Proulx (2007) chama de *ciclo de repetição*, e que, entendemos, corresponde a um dos desdobramentos da *dupla descontinuidade,* denunciada por Klein (2010).

> Este "fenômeno" [...] é o que eu chamo o ciclo de reprodução. Como alunos, a matemática foi ensinada a estes professores de uma forma técnica, portanto, quando se tornaram professores continuaram a ensinar a forma como eles foram ensinados a si mesmos.[162] (PROULX, 2007, p.11, tradução nossa, aspas como no original)

Entendemos que o processo de reflexão promovido pelo *concept study* é potencialmente importante para quebrar o ciclo descrito por Proulx. A discussão sobre as operações evolvendo números racionais é um exemplo claro desse fenômeno. Claramente os professores parti-

[162] No original: "This "phenomenon" hinted at is what I call the cycle of reproduction. As students, these teachers were taught mathematics in a technical way, hence when they became teachers they continued to teach the way they were themselves taught." (PROULX, 2007, p.11)

cipantes confundiam a operação com os algoritmos correspondentes e o processo de reflexão coletiva foi um exercício que promoveu uma (re)construção conceitual que pode repercutir na prática desses professores, no sentido de quebrar o ciclo de reprodução da matemática como um conjunto de regras.

Elemento de análise	***Destaque***	***Relação com o conhecimento de matemática para o ensino***
Referências	Construção cognitiva pessoal, ou seja, sua maneira própria de lidar de fazer matemática	Entendemos que a experiência do professor enquanto aluno do ensino básico não é exatamente um saber profissional do professor, mas tem forte influência na composição do seu *conhecimento de matemática para o ensino* (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; DAVIS, RENERT, 2014)
	Problemas de ensino básico que revelaram alguma questão relativa ao que estava sendo discutido no estudo (Por exemplo, a questão da igualdade 0,999... =1	Não associamos essa referência a dos um conhecimentos identificados no modelo de Ball ou de Shulman, No entanto, acreditamos que essas referências marcam o vínculo do estudo com a prática do professor.
	Textos acadêmicos – como demanda do aprofundamento da discussão	Acreditamos que, em uma análise imediata, os textos acadêmicos seriam associados à noção de s*aber de conteúdo*, como promulgado por Shulman. No entanto, nossa análise do estudo nos leva à relacioná-lo com a construção de um metassaber do professor .
Aspectos elementares	Em relação à identificação de aspectos elementares, a análise das discussões revela que que, na segunda ênfase do estudo coletivo, a atenção dos professores participantes não estava explicitamente na *identificação* de tópicos elementares, mas no *valor* elementar desses tópicos para a compreensão do assunto.	Esse processo, em nosso entendimento, é traduzido no que Davis e Renert (2014) descrevem com uma visão em macro-nível e, para Klein (2010), uma visão superior.
Saberes e metassaberes	Nesta ênfase do estudo, a mobilização de saberes e de metassaberes por parte dos professores participantes evidenciou a dupla descontinuidade e se destacou no sentido de dar início ao processo de (re)elaboração conceitual.	
(re)construção conceitual (*substruct*)	Entendemos que é nesta ênfase do *concept study* que os professores participantes tomam consciência desse processo e passaram a se sentir mais a vontade para se envolver.	As narrativas indicam que passam a refletir criticamente sobre o que sabem, como o sabem e sobre o que precisam saber para ensinar.

Figura 5.19: Análise da Ênfase Panorama – Quadro Resumo

5.2.5 VÍNCULOS

A terceira ênfase identificada no *concept study*, denominada neste estudo por *vínculos*, ficou caracterizada especialmente a partir das conexões matemáticas estabelecidas, ampliadas em alcance e em complexidade, não se limitaram ao contexto de números racionais.

Segundo Davis e Renert (2014), a terceira ênfase de um *concept study* é marcada pelo fundamentalmente pelo processo de (re)elaboração conceitual, identificado por eles como *substruct*:

> Acreditamos que o modo de engajamento usado na identificação de percepções é apropriadamente chamado de "desempacotar". Trata-se de olhar para as associações que já estão lá e são familiares – tão familiares que podem ser difíceis de serem notadas. Em contraste, os vínculos estabelecidos a partir de diferentes associações conceituais podem se revelar surpreendentemente desconhecido. [...] Este trabalho deliberado de *substructing* conduz na direção oposta da qual o lado automático do nosso cérebro quer ir.[163] (DAVIS, RENERT, p.67, tradução nossa, aspas como no original, itálico nosso)

Em nossa investigação, a terceira ênfase, denominada *vínculos*, ficou caracterizada especialmente a partir das *conexões matemáticas estabelecidas, ampliadas em alcance e em complexidade, não se limitaram ao contexto de números racionais*.

De fato, esta ênfase identificada no estudo coletivo foi marcada por discussões que alcançaram a reflexão sobre a relação dos números racionais com outros assuntos. Por exemplo, a reflexão sobre a relação dos números racionais com grandezas incomensuráveis e com a construção dos números reais.

As discussões que caracterizaram a ênfase *panorama* foram identificadas na etapa final do desenvolvimento do estudo coletivo, com predominância a partir do 10º encontro. Até aqui, entendemos que os critérios elencados para a distinção das ênfases conduziram naturalmente a esse resultado.

Como na ênfase panorama, a identificação das reflexões que caracterizam esta ênfase não está vinculada à sequência cronológica do estudo coletivo, mas à identificação de aspectos característicos dessas discussões. Nesta ênfase, o critério balizador da identificação foi o

---

[163] No original: "We believe that the mode of engagement used in identifying realizations is appropriately called "unpacking". It involves looking for associations that are already there and are familiar – so familiar that they can be difficult to notice. In contrast, the entailments of different conceptual associations can prove to be surprisingly unfamiliar. […] This deliberate substructing work pushes in the opposite direction from which the automatic side of our brains wants to go." (DAVIS, RENERT, p.67, aspas como no original)

foco fundamental em *questões de ordem conceitual que vão além do universo dos números racionais*.

Em particular, a análise dos dados revelou que esse nível da discussão foi marcado por uma mudança significativa da condução na característica da reflexão. As discussões tiveram atenção quase exclusivamente a resultados matemáticos que permeiam o universo acadêmico.

Uma atividade importante, realizada pelos professores participantes, que ilustra as discussões que distinguem esta ênfase, foi a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado. Alguns dos participantes fizeram essa demonstração pela primeira vez no curso. A questão da incomensurabilidade emergiu da discussão da formalização dos números racionais, trazida pelo professor P4, que tinha lido sobre o assunto no “livro do Caraça” (CARAÇA, 2010).

P4 explicou, em linhas gerais, o que tinha entendido sobre o problema da medida, como explicado no livro que consultara, e revelou que tinha dúvidas. Na discussão que se seguiu, os demais professores participantes também revelaram ter dúvidas sobre o conceito de incomensurabilidade. Na sequência, a pesquisadora perguntou explicitamente quem tinha estudado o assunto em sua formação. Todos concordaram que “achavam” que haviam estudado, mas que não lembravam “direito”. O professor P5 chegou a explicar do que lembrava:

> P5: Eu lembro e tive sérios problemas para entender isso. Eu vi isso em análise. Então a primeira coisa que eu entendi por aquilo era de algo que você não poder contar. É... se é incomensurável, na minha cabeça era alguma coisa que você não podia contar. Depois que eu vi que tem a ver com a medida, com você não poder medir.

Na sequência, a professora P4 disse que se lembrava de que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

> P4: Eu sei... quer dizer, eu acho que sei, que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis, mas não me lembro como explicar.

Diante da dúvida de todos os participantes, ficou combinada a tarefa de todos pesquisarem a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado para ser discutida no encontro seguinte, que seria o 11º.

Nesse encontro, a discussão sobre o assunto começou com cada um dos professores participantes compartilhando suas dúvidas em relação à demonstração estudada. A professora P1 logo deu sua opinião:

> P1: É muito difícil essa demonstração. Eu entendi a prova até um pedaço depois .... *brum*, teve uma ruptura do pensamento.

P3: Eu procurei a demonstração em um material que eu tinha do curso que eu fiz. Ai, ele começa... aí *pega* o quadrado... *pega* a diagonal, faz um outro quadrado... Eu entendi todo o processo que *faz*, mas não entendo o final. Não entendi *porque que* no final funciona.

P2: É justamente porque não termina.

P4: Isso. Foi isso assim que eu entendi.

O professor P2 fez questão de mostrar o que havia entendido e reproduziu a demonstração com o apoio do recurso que havia usado como referência para entender a demonstração, um recurso dinâmico, disponível no site do Instituto de Matemática da UFRGS (http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/numerosreais/index.html). (Figuras 5.20 e 5.21)

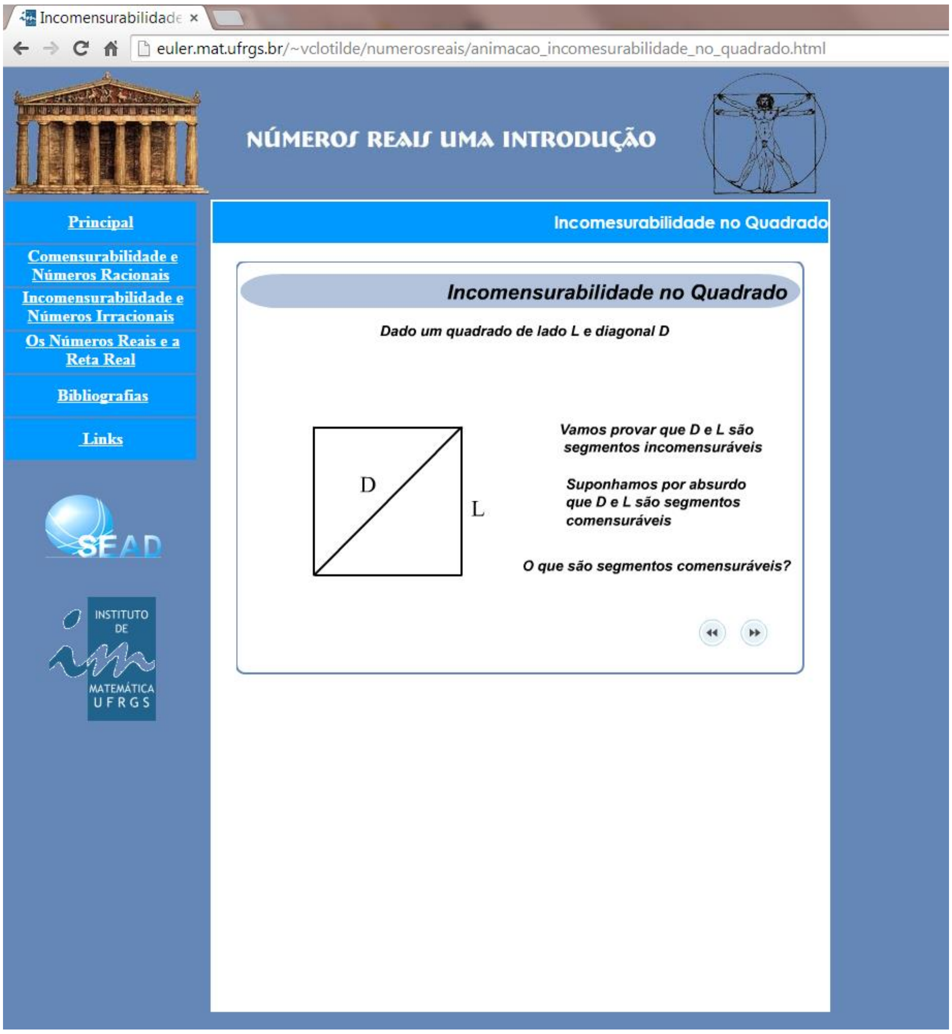


Figura 5.20: Referência para a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado

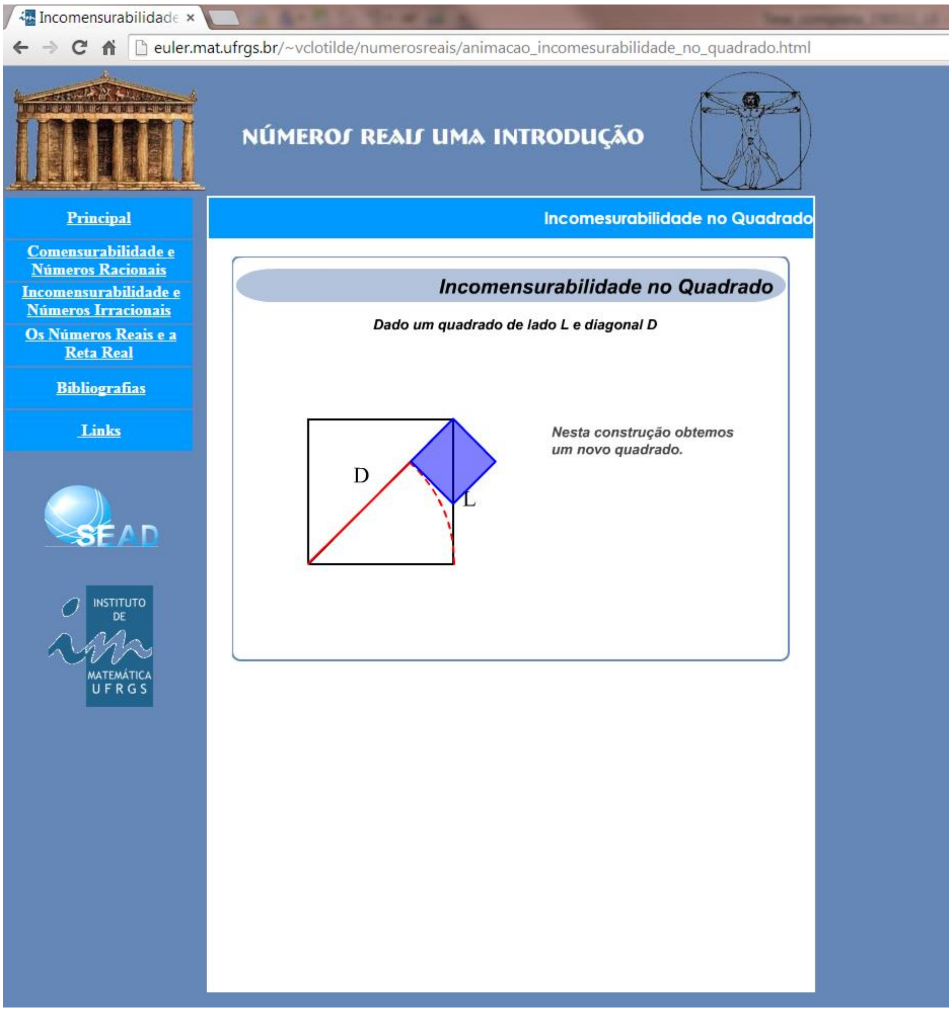


Figura 5.21: Referência para a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado

A discussão seguiu, envolvendo todos os professores participantes até que a demonstração estivesse compreendida. A discussão alcançou a implicação da incomensurabilidade para a insuficiência dos racionais e a existência dos irracionais.

Durante a discussão a professora P3, se dirigindo ao grupo, comenta:

> P1: Essas coisas a gente não vai ensinar, mas traz segurança *pra* gente.

A pesquisadora pergunta o que ela quer dizer por *segurança*, e P1 responde:

> P1: A gente sabe ***sobre*** o que está falando. (ênfase nossa)

Em relação ao episódio da discussão sobre a incomensurabilidade, a nossa análise levou ao entendimento de que as referências estão associadas ao universo acadêmico: a discussão emergiu e foi sustentada por um texto acadêmico. Na discussão, os assuntos tratados foram destacados e entendidos como tópicos elementares, para números racionais e para a percepção da insuficiência dos racionais. Os professores refletiram sobre seus saberes e estabeleceram uma (re)construção conceitual a partir da percepção sobre os seus próprios saberes. Cabe destacar que todos haviam estudado a incomensurabilidade na graduação, então, de alguma forma, era um conteúdo conhecido dos professores participantes. O episódio claramente promoveu uma (re)elaboração desse conteúdo.

Outra discussão importante atrelada a esta ênfase envolveu o conceito de infinito. Essa discussão também surgiu no escopo da investigação sobre a formalização dos números racionais, e já vinha ocupado a reflexão dos professores participantes desde a primeira ênfase identificada no estudo coletivo. O grupo já havia explorado a demonstração da densidade dos números racionais. A questão agora apontou para a comparação entre a “quantidade de números racionais” e “de números irracionais” e levou o grupo a discutir a noção de cardinalidade. Pensando na representação dos conjuntos numéricos sobre a reta numerada, o professor P4 compartilhou uma questão com os colegas:

> Professor P4: Se eu coloco um segmento de reta e pergunto: Quantos pontos têm aqui? A resposta é infinitos. Mas se eu pegar um outro segmento maior e fizer a mesma pergunta, a resposta também será infinitos. Então tem um infinito maior do que outro.

Logo a professora P1 argumentou:

> Professora P1: Mas você tá misturando coisas. Um segmento é mais comprido que o outro, só que os dois têm infinitos pontos.

E a professora P3 complementa, estabelecendo um diálogo com a professora P1:

> Professora P3: É que tem a noção de cardinalidade... E a noção de cardinalidade em conjuntos infinitos é diferente. Eu já li isso, mas não sei explicar.
>
> Professora P1: É verdade! ... Tem aquela história de que tem tantos números pares quanto números naturais.

A discussão dos professores se segue a partir da reflexão sobre a comparação entre conjuntos finitos e, em algum momento, o professor P2 conclui:

> Professor P2: Mas com conjuntos finitos é fácil. Basta a gente ver que quantidade tem em cada um o comparar os números. O problema é com conjuntos infinitos. Tem que fazer uma comparação que não é com números. Infinito não é número.

A discussão segue:

> Professor P3: É isso mesmo. Eu lembro da aula de análise. O professor chega e pergunta: O que tem mais, Naturais ou Racionais? E a gente pensa... ele está brincando. Claro que é racionais. Mas a gente aprende que têm a mesma cardinalidade.

O professor P4, responde:

> Professor P4: Eu não sei isso... tem que pesquisar. A gente não pode usar a intuição, não é? Isso não é intuitivo.

A discussão persiste ainda um pouco, mas os professores concluem que têm mais dúvidas do que certezas e que precisam investigar. A continuação da discussão fica adiada para o encontro seguinte, ficando a tarefa para que todos pesquisem o assunto. No encontro seguinte, o grupo traz o que havia investigado e a discussão avança, alcançando também o conceito de enumerabilidade. Toda a discussão é amparada pela consulta a textos acadêmicos.

Em vários dos momentos associados a esta ênfase, foi necessária a intervenção da pesquisadora para esclarecer questões conceituais.

5.2.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ÊNFASE VÍNCULOS

A identificação das discussões características da terceira ênfase identificada no *concept study* que é foco desta investigação – vínculos – foi mais fácil do que as discussões típicas da ênfase anterior. Seguimos como critérios básicos: (i) o nível de aprofundamento dado à discussão, (ii) apontar assuntos não listados na primeira ênfase do estudo – percepções e (iii) envolver assuntos que não se configuram como tema explícito do currículo de ensino básico, mas que certamente estão nos programas de formação acadêmica em matemática, por exemplo, incomensurabilidade.

Em nossa análise, esta ênfase do estudo coletivo marcou uma mudança significativa de paradigma para o grupo: o reconhecimento de que o conhecimento de matemática do professor para o ensino não pode ser reduzido ao conteúdo explicitado em livros didáticos. A partir desse momento, as referências que amparam o estudo coletivo exigiram a consulta exclusiva a textos acadêmicos. Esse ponto de inflexão foi associado a evidências na discussão do grupo de um reconhecimento, por parte dos professores participantes, de que os assuntos ensinados no ensino básico, ainda que exijam uma abordagem própria para esse nível de escolaridade, precisam ser compreendidos de uma perspectiva mais ampla.

Entendemos que o alcance das articulações desta ênfase do estudo coletivo foi ampliado para além dos números racionais e dos itens que compunham a lista percepções (Figura 5.22).

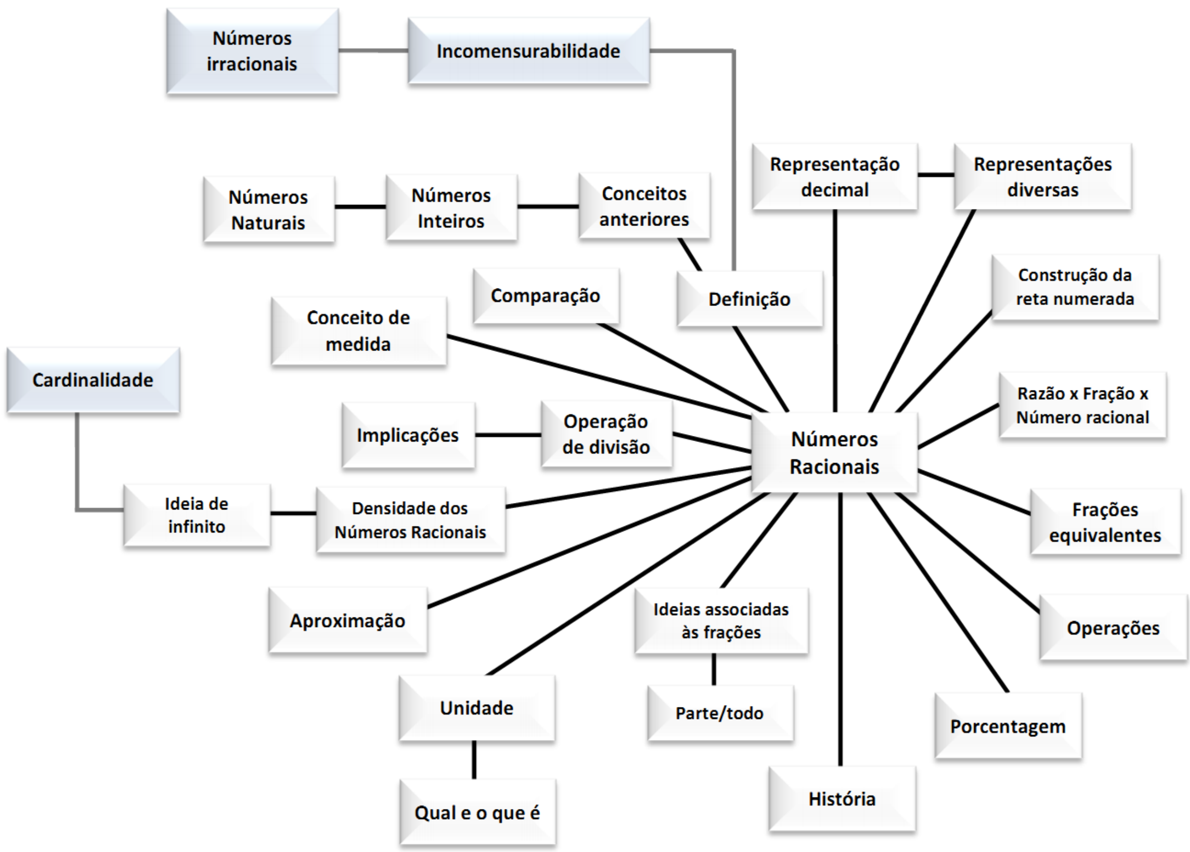


Figura 5.22: Esquema ilustrativo das articulações identificadas à ênfase vínculos

(I) Que *referências* os participantes usam para trazer e para discutir as questões que emergem do estudo?

E relação à terceira ênfase do estudo coletivo, a investigação revelou que, em sua maioria, as discussões foram motivadas pelo próprio processo de reflexão dos professores participantes e emergiram das referências usadas para esclarecer essas próprias discussões – ou seja, do material bibliográfico próprio dos cursos de formação acadêmica.

Entendemos que não houve uma influência explicita da lista estabelecida na primeira ênfase identificada no *concept study*. No entanto, acreditamos que aquela lista conduziu às discussões realizadas neste estágio, ou seja, os temas que permearam as discussões não podem ser entendidos como aleatórios. O estudo coletivo, ainda que com um grau de imprevisibilidade, não é livre de influência da pergunta original – *"O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?"*.

Também nesta ênfase, em algumas das discussões características, os professores participantes dirigiam seus questionamentos à pesquisadora. A conduta a dotada foi a mesma que a dada às discussões típicas da ênfase anterior: caso a caso, responder com outra pergunta;

sugerir que pesquisassem e retomassem a discussão na sessão seguinte ou perguntar ao grupo se alguém poderia ficar responsável por pesquisar o assunto para compartilhar com o grupo e em algumas situações responder.

(II) O que foi identificado como *aspectos elementares* e que papel esses aspectos tiveram na estruturação da discussão e na identificação desta ênfase do *concept study*?

Em relação à identificação de aspectos elementares, a análise das discussões desta ênfase do estudo revela que a noção de elementar manteve-se associada ao *valor* elementar dos assuntos discutidos. No entanto, entendemos que o conceito de elementar perde o foco em números racionais para alcançar um significado independente. Os assuntos são investigados por si, e não por uma necessária relação com números racionais, ainda que esta relação esteja imbricada nas discussões. São assuntos que encerram conceitos elementares para outros assuntos além de números racionais.

(III) Que *saberes* e *metassaberes* foram identificados? Como esses saberes e metassaberes se relacionavam e foram (re)construídos nesta ênfase do *concept study*?

Em nossa análise, os saberes que permearam esta ênfase do estudo podem ser entendidos como mais fortemente relacionados à matemática acadêmica. Os assuntos que permearam esta ênfase são não são fáceis, mas são elementares para a matemática e para a compreensão de muitos resultados e conceitos matemáticos. Por exemplo, para números reais, que é um assunto próprio do currículo de matemática do ensino básico e, do qual, muito outros dependem. Nesse sentido, deve compor o saber do professor. No entanto, amparados pela compreensão da matemática à luz das ideias de Klein, entendemos que matemática elementar não é sinônimo de uma matemática facilitada, tampouco se refere a uma matemática simples ou fácil, também não pode ser tomada como sinônimo de matemática escolar.

Entendemos que esta ênfase promoveu uma forma importante de aproximar o conhecimento dos professores participantes dos assuntos que estão mais latentes no ensino superior.

> O ponto simples (porém totalmente complexo) é que os conceitos matemáticos são compreensíveis, mas que a sua compreensão exige um trabalho de elaboração contínua - e isso é verdade tanto para o aluno como para o professor, e para ambos o mais elementar e o mais avançado dos conceitos matemáticos.[164] (DAVIS, RENERT, 2014, p75, tradução nossa)

[164] No original: “The simple (yet utterly complex) point is that mathematical concepts are comprehensive, but that their comprehensibility demands continuous elaborative work - and this is true for both the student and

Todos os professores participantes contribuíram para a discussão dos aspectos conceituais abordados nesta ênfase a partir de pesquisa e ampla discussão sobre os resultados destacados, inclusive conduzindo as demonstrações dos resultados, quando era o caso.

(IV) Que reflexões sobre a prática e que referências a possíveis repercussões para a prática emergiram?

O trabalho de análise conduz ao entendimento de que, nas reflexões identificadas a esta ênfase do estudo coletivo, a prática de sala de aula esteve subliminar. O que não significa que a prática não marcou as discussões. Por um lado, observando que, em um *concept study* as ênfases não são estanques, em alguns momentos o foco de atenção do grupo retomou uma discussão anterior, na maioria das vezes trazida por um dos professores participantes a partir de alguma experiência vivida em sala de aula entre os encontros.

Por outro lado, se compreendemos que a prática do professor vai além da prática de sala de aula, acreditamos que o exercício de refletir sobre o conteúdo e sobre o seu saber, visando a um metassaber faz parte da prática do professor.

> Nós reenfatizamos a nossa convicção de que o conhecimento disciplinar dos professores de matemática não pode ser reduzido a um corpo de conhecimento que pode ser catalogado, instruído, e testado. Embora possa incluir alguns desses componentes, o elemento mais crítico do conhecimento de matemática para o ensino é a disposição voltada para a evolução dos conceitos. Os professores devem ter mais do que acesso a um domínio estabelecido do conhecimento; eles devem ter meios para descompactar, interrogar, e elaborar – que é *substruct* – sua matemática.[165] (DAVIS, RENERT, 2014, p. 75-76, tradução nossa)

---

the teacher, and both the most elementary and the most advanced of mathematical concepts."(DAVIS, RENERT, 2014, p75).

[165] No original: On that count, we re-emphasize our conviction that teachers' disciplinary knowledge of mathematics cannot be reduced to a body of knowledge that might be catalogue, instructed, and tested. While it may include some such component, the more critical element of M4T is the open disposition toward the evolution of concepts. Teachers must have more than an access to an established domain of knowledge; they must have means to unpack, interrogate, and elaborate - that is substruct - their mathematics. .[165](DAVIS, RENERT, 2014, p. 75-76)

Elemento de análise	*Destaque*	*Relação com o conhecimento de matemática para o ensino*
Referências	Textos acadêmicos – como demanda do aprofundamento da discussão	Acreditamos que, em uma análise imediata, os textos acadêmicos seriam associados à noção de s*aber de conteúdo*, como promulgado por Shulman. No entanto, nossa análise do estudo nos leva à relacioná-lo com a construção de um metassaber do professor.
Aspectos elementares	O conceito de elementar perde o foco em números racionais para alcançar um significado independente	Contribui para o estreitamento entre a matemática escolar e a matemática acadêmica
Saberes e metassaberes	Nesta ênfase do estudo, a mobilização de saberes e de metassaberes por parte dos professores participantes promoveu uma forma importante de aproximar o conhecimento dos professores participantes dos assuntos que estão mais latentes no ensino superior	
(re)construção conceitual (*substruct*)	Reconstrução conceitual foi latente nesta ênfase do estudo.	Acreditamos que as discussões conduziram à construção de um metassaber.

Figura 5.23: Análise da ênfase Vínculos – Quadro Resumo

5.2.7 INFERÊNCIAS

Para Davis e Renert (2014), nos *concept studies* que conduziram em nível de pós-graduação,

> Essa ênfase alcançou o objetivo pretendido: destacar a importância (e a complexidade) de meta-percepções de conceitos matemáticos, para que os professores participantes possam incluí-las em suas próprias investigações sobre temas de sua própria escolha.[166] (DAVIS, RENERT, 2014, p.75)

[166] No original: [...] this emphasis achieved the goal was intended : to highlight the importance (and complexity) of meta-awarenesses of mathematical concepts, so that the participating teachers might include them in their own inquiries into topics of their own choosing. (DAVIS, RENERT, 2014, p.75)

Em nossa análise, a ênfase inferências não ficou distinguida a partir da observação e da análise de uma seleção de discussões conceituais entre os professores participantes. Esta ênfase tem uma natureza diferente das demais identificadas até aqui. Ela emerge do eixo transversal de análise, destacando resultados observados pela análise das discussões como um todo, desde o início do estudo coletivo. As três outras ênfases, *percepções*, *panorama* e *vínculos*, se destacam principalmente pela análise mais fina das interpretações, analogias e relações identificadas sobre o conteúdo nas narrativas dos professores, em discussões entendidas como características de cada uma dessas ênfases. Esta quarta ênfase, inferências, busca evidenciar mudanças de atitudes dos professores ao longo de todo o estudo coletivo. Entendemos que um aspecto que caracteriza fundamentalmente esta ênfase está associado à dimensão colaborativa (PONTE, SERRAZINA, 2003) do estudo coletivo. Observamos que os professores participantes trabalharam em conjunto, sem estabelecer uma organização hierárquica, em uma relação de ajuda mútua, procurando atingir objetivos comuns, envolvendo diálogo, negociação e respeito.

Inicialmente, enquanto buscavam compor a lista percepções, os professores participantes revelaram algum receio em relação a expor as suas ideias e o seu conhecimento. Frequentemente, eram observadas, nas falas de todos os professores participantes, expressões como “não sei se está certo”; “não sei se é assim”; “acho que estou errado, mas...”. Esse receio, foi associado a três aspectos: (i) a busca por uma lista correta e não por uma lista que refletisse o entendimento do grupo de professores participantes (ii) a pouca experiência profissional dos professores participantes e (iii) o próprio processo de reflexão, que revelava dúvidas.

Nossa análise indica que a dimensão colaborativa do estudo coletivo permitiu que os professores participantes se identificassem a partir das questões que emergiam da discussão. A dúvida de um era também dos demais e, em colaboração, buscavam a reflexão com o objetivo comum de esclarecer e (re)elaborar seu próprio conhecimento. Nesse sentido, entendemos que a questão disparadora teve um papel importante de balizar e dar unidade, pelo menos inicialmente, à discussão. Assim, a compreensão dos professores participantes da dimensão colaborativa do estudo coletivo foi determinante para que mobilizassem compartilhassem seus saberes como objetivo de questioná-los e (re)elaborá-los.

Outro aspecto relevante de caracterização da reflexão dos professores participantes, que associamos a esta ênfase do estudo coletivo, está na *problematização de certezas*. Entendemos por problematizar certezas questionar a validade matemática e a relevância para o ensino e aprendizagem de procedimento e de resultados comumente usados com pouca ou nenhuma reflexão, o que envolve uma postura crítica do professor em relação ao seu saber. Os professores participantes foram além de expor e investigar suas dúvidas, e passaram a buscar confirmar a origem e a fundamentação das certezas que compunham o conhecimento de matemática que dá suporte a sua prática docente. Assim, por exemplo, questionaram certezas anteriores, arraigadas em seu conhecimento, tais como: *todo número racional admitir duas representações, na forma de fração e na forma de expansão decimal, 0,999... (dízima de período 9) ser igual a 1*; e *todo número irracional ser uma dízima não periódica*. Os professores do grupo reconheceram que algumas dessas certezas foram constituídas durante seus próprios estudos no ensino básico e não na formação universitária. Em nossa análise, essa constatação foi associada à indicação da dupla descontinuidade identificada por Klein (2009).

Entendemos que a mudança de atitude dos professores frente ao conhecimento está fortemente associada ao processo colaborativo de discussão, que facilitou o estabelecimento de uma relação de confiança entre os professores participantes e de condições favoráveis para o desenvolvimento de todo o processo de reflexão que marcou o estudo coletivo. Inicialmente, o objetivo do grupo era constituir coletivamente uma lista de percepções, o que exigiu que os professores participantes descompactassem seus conhecimentos – *unpacking* (BALL, BASS, 2003). A evolução do estudo, ancorada em um processo colaborativo de reflexão, levou o grupo à meta comum de investigar o conteúdo. Com o amadurecimento da reflexão colaborativa, a discussão passou a contemplar indagações que articulavam conteúdo e prática: *O que garante esse resultado? Como ele deve ser tratado na sala de aula?* Em nossa análise, ficava assim evidenciada uma nova forma de percepção dos professores participantes sobre o seu conhecimento de matemática para o ensino: não basta saber, é necessário compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e qual a sua origem, bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula. Em nossa análise, identificamos esta perspectiva como um processo de construção de metassaberes pelos professores participantes, fortemente amparado pelo processo de *substruct*.

Para Davis e Renert (2014), a contribuição da metodologia *concept study* para a investigação sobre o conhecimento de matemática para o ensino pode ser sintetizada na questão: *Que matemática a comunidade de ensino sabe (ou precisa saber)?*[167] (DAVIS, RENERT, 2013, p.263, tradução nossa). Em nossa análise, de fato, o estudo coletivo, segundo a metodologia proposta por Davis e Renert, evidencia a natureza do conhecimento de matemática necessário aos professores a partir de questões sobre o conteúdo que permeiam a prática dos

[167] No original: “What mathematics does the teaching community (need to) know?” (DAVIS, RENERT, 2013, p.263)

professores e a partir do ponto de vista dos próprios professores. As questões e reflexões que mobilizaram a discussão entre os professores participantes do estudo coletivo partiram da reflexão dos próprios professores participantes. A discussão não se pautou em uma suposição sobre o que deve ser contemplado, organizada a partir de um programa pré-estabelecido ou de uma adaptação de um curso de matemática tradicional. Ao contrário, essas questões emergiram da reflexão dos professores participantes. Assim, os participantes destacaram os conhecimentos de matemática necessários ao professor para estruturar situações de aprendizagem, para interpretar os raciocínios dos alunos e para ter flexibilidade e repertório para orientar a aprendizagem dos alunos. Questões como essas dizem respeito à matemática escolar e podem até ser consideradas de pouca relevância do ponto de vista da matemática superior. Por exemplo, " $\frac{\pi}{3}$, é uma fração?", "A noção de medida que funda os números racionais é medida linear?" ou "Como explicar que dois segmentos com comprimentos diferentes têm a mesma *quantidade* de pontos?". Em nossa análise, o conhecimento de matemática necessário para o ensino, explícito na discussão que emergiu do estudo coletivo, contribuiu para evidenciar para os professores participantes o seu próprio conhecimento, o que foi determinante para a construção de metassaberes. Entendemos ainda que, em particular, o aspecto endógeno da reflexão oferece uma nova perspectiva para a observação do conhecimento de matemática para o ensino, potencialmente importante para a investigação sobre o tema: Segundo a metodologia *concept study*, o conhecimento de matemática para o ensino não é observado a partir do que o professor sabe ou não sabe, mas do que ele revela precisar saber.

Ainda que não seja o objetivo desta investigação, outro aspecto que se apresenta como uma implicação emergente da análise transversal do *concept study* aponta o potencial do estudo para alcançar a prática intencional do professor. Embora não tenhamos tido acesso direto à sala de aula dos professores participantes, em várias discussões eles evidenciavam que a prática do processo de reflexão sobre o conteúdo, que marca o estudo coletivo, estava indo além dos encontros e alcançando sua prática docente. Por exemplo, destaca-se o depoimento da professora P3, associado a essa observação. No contexto do processo de discussões sobre as operações básicas, a professora P3 conta que decidiu modificar a abordagem que vinha dando à resolução de equações com sua turma de 7º ano de ensino fundamental, um assunto que não era foco direto no estudo coletivo. A professora P3 trocou uma abordagem mais centrada no ensino de processos por uma abordagem com ênfase na resolução de problemas e avalia a sua decisão:

Professora P3: Por que no início a gente fica deprimida, achando que não vai dar certo. Não acontece nada daquilo que a gente imaginou... que a gente elaborou. Depois refletindo.... e a gente tem refletido muito aqui. A gente percebe que valeu a pena. Foi produtivo... foi produtivo não *pra* incentivá-los, mas porque foi feito. Quando você coloca lá calcule o valor de x na equação, eles fazem, mas fazem com preguiça. Agora não. Eles querem fazer, mesmo sabendo que é difícil. Eles *tavam* interessados em fazer.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

A pesquisa em Educação Matemática ganha sua relevância para a prática ou para as futuras pesquisas por seu poder de nos fazer parar e pensar. Ela nos equipa não com resultados que nós podemos aplicar, mas, mais do que isso, nos equipa com ferramentas para pensar sobre o nosso trabalho. Ela fornece conceitos e técnicas, não receitas. (Kilpatrick, 1996, p.112)

6.1 O *CONCEPT STUDY*

Esta investigação teve como foco a potencialidade de estudos colaborativos envolvendo grupos de professores de matemática para a construção do conhecimento matemático para o ensino. Buscava-se investigar como e até que ponto um estudo coletivo, estruturado de acordo com a metodologia de *Concept Study* proposta por Davis e seus colaboradores (Davis, 2010; Davis e Renert, 2014), pode contribuir para:

(i) o reconhecimento de aspectos elementares da matemática escolar;

(ii) a identificação, por parte dos professores, de metassaberes sobre os conteúdos da matemática escolar;

(iii) a (re)construção do conhecimento de matemática para ensino a partir desses aspectos elementares e metassaberes.

Para investigar estas questões, o *Concept Study* realizado neste trabalho teve como tema central *números racionais*.

O estudo coletivo, nos moldes de *concept study*, envolveu um grupo de professores que cursava a disciplina Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro ao longo ao longo do 2º semestre de 2012.

Não foi objetivo desta investigação, determinar o que os professores *sabem* ou *não sabem*, isto é, mapear o que revelam sobre o conhecimento de um determinado tópico a partir da observação de erros, acertos ou estratégias de resolução de uma ou de um conjunto questões específicas. O foco do trabalho está na observação de conexões e articulações entre assuntos e campos diversos da matemática em um modelo de estudo colaborativo que visa ao desenvolvimento profissional do professor e à (re)construção de seu conhecimento de matemático para o ensino.

Em um *concept study*, os professores participantes têm um duplo papel: *como sujeitos da investigação e como condutores do processo*, sendo, em ambos os casos, protagonistas de um processo coletivo de reflexão sobre os saberes docente. Ainda que o estudo se estruture a partir do indivíduo e de seu conhecimento particular, como um processo coletivo, um *concept study* se constitui essencialmente a partir da discussão entre os professores participantes.

Como primeiro resultado do desenvolvimento da pesquisa, destaca-se o potencial da metodologia *concept study* para investigar o conhecimento de matemática dos professores de forma articulada com a sua prática, deixando em evidência aspectos implícitos e explícitos do conhecimento pedagógico de conteúdo e do conhecimento de conteúdo dos professores.

A análise do *concept study* realizado determinou a identificação de quatro ênfases *percepções, panorama, vínculos e inferências,* apresentadas na seção 5.2 deste documento e destacadas no quadro apresentado na Figura 6.1. A partir de uma abordagem qualitativa, a observação das narrativas individuais dos professores participantes e da discussão e da reflexão coletivas se pautou na identificação de elementos centrais: *referências, aspectos elementares do conteúdo, saberes e metassaberes dos professores participantes* e *(re)construção conceitual (substruct)* e foi ancorada por questões norteadoras que visaram dar unidade à análise do estudo coletivo como um todo.

Ênfase	Características
Etapa inicial	Esta etapa não é prevista em um *concept study*. No estudo realizado, teve o objetivo de esclarecer, para os professores participantes, a proposta do estudo coletivo.
Percepções	Marca, de forma intencional, o início do *concept study* tendo como objetivo a elaboração, a partir de uma pergunta disparadora, de uma lista de assuntos sobre o tema selecionado. Esta lista, em sua essência, reflete as percepções dos professores participantes sobre números racionais.
Panorama	Caracterizada pelas discussões que abordaram aspectos matemáticos do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do próprio tema.
Vínculos	Caracterizada a partir das discussões que envolveram conexões matemáticas ampliadas em alcance e em complexidade e que não se limitaram ao contexto dos números racionais.
Inferências	Tem natureza diferente das outras ênfases identificadas, destacando resultados observados pela análise das discussões como um todo. Busca evidenciar mudanças de atitudes dos professores participantes ao longo do estudo coletivo.

Figura 6.1: Quadro resumo da identificação das ênfases na análise do estudo coletivo

Que *referências* os participantes usaram para trazer e para discutir as questões que emergem do estudo?

Em nossa análise, as referências que mobilizaram o estudo coletivo foram observadas a partir de duas perspectivas: *como forma de promover a discussão* e *no sentido de esclarecer as questões emergentes da discussão*.

Na ênfase percepções, que marca intencionalmente o início do estudo a partir e uma questão disparadora – *O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais* – a origem das ideias, das impressões e das reflexões dos professores participantes foi associada a duas referências principais: *ao conhecimento particular dos professores sobre o assunto* e *a questões que emergiram da prática desses professores.* Em contrapartida, nesta ênfase a referência para esclarecer as dúvidas era quase que exclusivamente a livros didáticos de ensino fundamental. Em nossa análise, esta observação aponta para um aspecto importante da dupla descontinuidade denunciada por Klein, a identificação do conhecimento de matemática do professor ficar restrito ao universo escolar, observado de forma descolada da matemática acadêmica. Assim, professores não sabem o que eles vão ensinar além da maneira como os próprios alunos aprendem. Não têm, portanto, uma visão panorâmica da disciplina, que os coloque em um nível *mais alto* de observação.

A segunda ênfase identificada no estudo, panorama, distinguida por um nível superior de observação do conteúdo, apontou uma mudança em relação à origem das questões, mantendo a prática de sala de aula como referência, mas também incluindo discussões que emergiram do questionamento dos professores sobre os assuntos discutidos. Em nossa análise, essa mudança de atitude aponta para o processo de reflexão dos professores sobre o seu próprio saber. Ainda nesta ênfase, o aprofundamento das discussões exigiu que os professores buscassem, como referência, para amparar a sua reflexão, textos acadêmicos. Essa necessidade emergiu dos próprios questionamentos. Em nossa análise, esse processo, que teve forte contribuição da dimensão colaborativa do estudo coletivo, foi importante para promover e amparar uma (re)elaboração conceitual dos participantes e para a construção de um metassaber.

A terceira ênfase identificada na análise do estudo coletivo, vínculos, marcada por discussões ampliadas em aprofundamento, indica uma mudança importante em relação as referências que sustentaram a estudo coletivo: em sua maioria, as discussões foram motivadas pelo próprio processo de reflexão dos professores participantes e emergiram das referências usadas para esclarecer essas próprias discussões, que nesta ênfase eram quase que exclusivamente textos destinados à formação acadêmica e não ao ensino básico.

O que foi identificado como aspectos elementares e que papel esses aspectos tiveram na estruturação da discussão e na identificação de cada ênfase?

Em relação à identificação de aspectos elementares, a análise do estudo coletivo indicou dois resultados: um aponta para o entendimento que o grupo daria ao termo elementar e outro para a como esse entendimento se apresentaria no estudo cobre o conteúdo.

Em relação ao significado de elementar, inicialmente o grupo de professores participantes decidiu que, por elementar, seriam entendidos tópicos fundamentais e essenciais para a compreensão de números racionais, que, como professores, não poderiam deixar de ensinar no ensino básico, mas que também precisavam saber. Com o decorrer do estudo, a discussão levou a uma reelaboração desse entendimento, atribuindo ao termo os sentidos de estruturante e substancial para os conceitos e para os resultados da matemática como um todo. Em nossa análise, no estudo coletivo, esse foi o entendimento que os professores participantes tiveram como base para a discussão sobre os aspectos elementares do conteúdo. O significado atribuído à expressão elementar foi determinante para a composição da lista percepções e esta lista teve um papel fundamental para o desenvolvimento do *concept study*. Foi a partir das discussões que levaram à composição dessa lista que a reflexão do grupo se estruturou. Muitos dos questionamentos e das reflexões que mobilizaram os professores durante o processo de composição da lista percepções determinaram as discussões que caracterizariam as demais ênfases.

A análise das discussões que constituem a segunda ênfase identificada no estudo coletivo indica que o entendimento que o grupo de professores participantes dá à expressão elementar se altera a medida que a discussão sobre o conteúdo se aprofunda. A segunda ênfase do estudo é marcada por discussões que foram ampliadas na articulação de aspectos matemáticos elementares do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do próprio tema. Nessas discussões, a atenção dos professores participantes não estava explicitamente na *identificação* de tópicos elementares sobre números racionais, mas no *valor* elementar desses tópicos para a compreensão do assunto. Essa percepção se relaciona com a prática dos professores participantes a partir de questões que revelaram a observação do conteúdo sem perder de vista a preocupação com o ensino de números racionais: "*O que ensinar?*", "*Por que ensinar?*" e "*Como ensinar?*".

À medida que a discussão avança em aprofundamento, entendemos que a expressão elementar alcança, para os professores participantes, um significado independente do assunto números racionais. As questões que emergem do estudo coletivo são investigadas por si, e não por uma necessária relação com tema do estudo, números racionais, ainda que esta relação esteja imbricada nas discussões. O significado atribuído a elementar fica implícito nas discussões, que visam à compreensão conceitual dos assuntos.

Que saberes e metassaberes foram identificados? Como esses saberes e metassaberes se relacionavam e foram (re)construídos ao longo do *concept study*?

Ao longo do estudo coletivo, o processo colaborativo de reflexão, motivado pela pergunta inicial, conduz uma discussão sobre o conteúdo que aponta para os processos de descompactar (*unpacking*) e de (re)eleboarar o conhecimento (*substruct*). Inicialmente, o estudo coletivo é marcado pelo processo de descompactar o conteúdo, revelando o conhecimento de matemática dos participantes em um processo reflexivo que mistura conhecimento de conteúdo e aspectos da prática. Esse processo é disparado pela pergunta motivadora do estudo coletivo, visando à composição de uma lista coletiva de percepções. No entanto, como destacado por Davis e Renert (2014), esse processo de descompactação não é suficiente para oferecer conhecimento profundo sobre qualquer assunto, ainda que seja fundamental para o desenvolvimento do estudo. A dimensão colaborativa da discussão, que teve como ponto de partida a lista percepções, amparou o avanço da reflexão no sentido de promover um aprofundamento sobre o conhecimento de matemática dos participantes de forma articulada com a prática. Em nossa análise, esse processo promove, para os professores participantes, a oportunidade de uma (re)elaboração conceitual do conhecimento de matemática para o ensino – *substruct*. As narrativas indicam que os professores participantes passam a refletir criticamente sobre *o que sabem*, *como o sabem* e *sobre o que precisam saber para ensinar*.

Entendemos, ainda, que ancorado em um processo endógeno, o estudo coletivo contribuiu positivamente no sentido de evidenciar para os professores participantes a relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica a partir de uma perspectiva que não se baseia em hierarquia, mas na integração entre essas instâncias da matemática. O estudo proporcionou, assim, que os professores alcançassem a dimensão da natureza desses conceitos, indo além dos conceitos e teorias a serem ensinados, como recomenda Klein (KLEIN, 2010; SCHUBRING, 2012).

Portanto, entendemos que o estudo coletivo nos moldes de *concept study* é potencialmente importante para promover o desenvolvimento de um metassaber do professor a partir de um processo que tem como ponto e partida o próprio conhecimento de matemática do professor e alcança a identificação de relações e conexões entre a matemática superior e a matemática ensinada na escola básica.

Que reflexões sobre a prática e que referências a possíveis repercussões para a prática emergiram?

A análise do estudo coletivo sugere que a reflexão crítica que marcou a discussão no *concept study* não ficou restrita ao conteúdo nem aos encontros em si. Em nossa análise, a elação entre o processo de reflexão do estudo coletivo e a prática dos professores participantes se estabeleceu em dois sentidos. Por um lado, entendemos que a prática dos professores participantes permeou a discussão de forma incisiva, como componente intrínseca ao processo de reflexão. Em nossa análise, a maior parte das discussões que marcaram o estudo coletivo emergiram de questões conceituais que os professores participantes entendiam estar diretamente relacionadas à matemática escolar ou que revelavam ter que lidar em sala de aula.

Nesse sentido, entendemos que o estudo permitiu uma aproximação importante entre o conhecimento de conteúdo matemático e a prática do professor a partir de um modelo que se pauta na participação e não no treinamento (FIORENTINI, 2012; MATOS, POWEL, SZTAJN, 2009).

A investigação aponta ainda potenciais repercussões do estudo coletivo para a prática dos professores participantes. Essas possíveis repercussões ficaram evidentes nas narrativas dos participantes e foram desde uma maior atenção à composição de enunciados de atividades a mudanças diretas na prática de sala de aula, na forma de abordagem e em relação à compreensão das dificuldades dos alunos.

6.2 DESDOBRAMENTOS

Para Davis (2012)

> O foco principal em *concept study* está na criação de novas possibilidades para o ensino da matemática que estão enraizadas em entendimentos mais sutis e elaborações de matemática existentes; o objetivo não é criar uma nova matemática formal – uma tarefa que exige critérios de validação muito diferentes. As questões essenciais para nós não giram em torno do estatuto ontológico de conceitos matemáticos ou em torno da produção dos professores de uma nova matemática. Em vez disso, eu procuro estudar novas possibilidades emergentes para a compreensão da matemática. Este enquadramento é consistente e elabora uma agora-comum observação de que o ensino eficaz nunca é uma simples questão de transmissão. Ensinar sempre implica em transformação, mas essa transformação é normalmente entendida como acontecida com os alunos. Seguindo outros, eu incluo o corpo do conhecimento matemático no espaço de influência transformadora dos professores. Afinal de contas, os professores têm a influência mais direta e penetrante na definição do que é interpretável matematicamente para a maioria da população.[168] (DAVIS, 2012, p.19,20, tradução nossa)

[168] No original: "The principal focus in concept study is on the creation of new possibilities for mathematics teaching that are rooted in more nuanced understandings and elaborations of extant mathematics; the goal is not to create new formal mathematics – a task that would require very different validation criteria. The essential questions for us do not revolve around the ontological status of mathematical concepts or around teachers' production of new mathematics. Rather, I seek to study new emergent possibilities for understanding mathematics. This framing is consistent with and elaborates the now-common observation that effective teaching is never simple a matter of transmission. Teaching always entails transformation, but that transformation is typically understood to happen to the learners. Following others, I include the body of mathematical knowledge within the space of teachers' transformative influence. After all, teachers have the most direct and pervasive influence in defining what is mathematically interpretable for most of the population." (DAVIS, 2012, p.#19,20)

O processo de reflexão colaborativa que marcou o estudo coletivo teve como foco de atenção o conhecimento de matemática dos participantes em suas dimensões conceitual e pedagógica. A análise do estudo revela que a reflexão dos professores, observada a partir das narrativas, evidencia a exposição, o questionamento e a (re)elaboração do conhecimento de matemática do grupo participante.

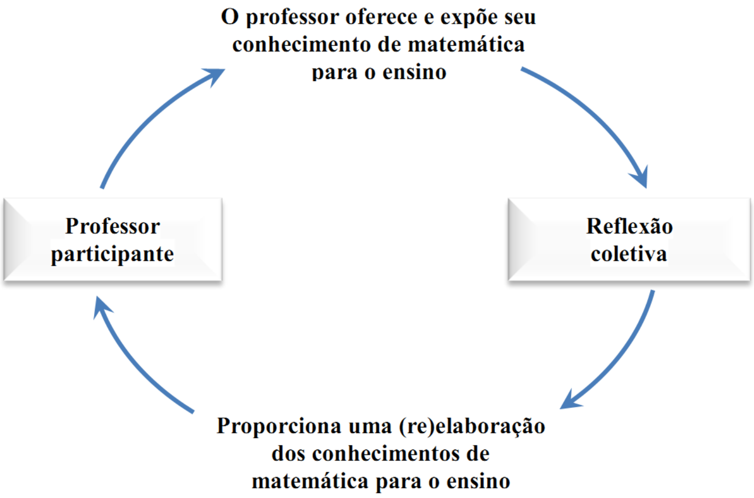


Figura 6.2: Dinâmica do processo de reflexão característico de um *concept study*

O estudo sugere que esse processo desencadeia o desenvolvimento de um metassaber por parte dos professores a partir de uma (re)construção conceitual. Os participantes se envolveram na discussão sobre o conteúdo matemático, com base em suas experiências, em seus conhecimentos e suas dúvidas em relação ao conteúdo matemático e em relação ao ensino. Assim, investigaram seus próprios conhecimentos e práticas a partir da reflexão sobre esses próprios conhecimentos e práticas. Portanto, em um *concept study*, o conhecimento de matemática para o ensino e as práticas dos professores têm papel fundamental, se configurando em *origem* e em *fim* do estudo coletivo.

Ainda que a metodologia *concept study* preveja um grau importante de liberdade para a condução da discussão, não havendo, portanto, um programa a priori, existe uma questão disparadora, que estabelece um vetor inicial para a reflexão. Acreditamos que, no estudo realizado, a questão disparadora – *O que é elementar no ensino e na aprendizagem de números racionais?* – foi importante para dar parâmetro e personalidade à discussão. Nesse sentido, acreditamos que tenha dado ênfase à abordagem conceitual e à busca por conexões entre os assuntos. Além disso, a análise do estudo revela que o processo de discussão levou ao aprofundamento de aspectos conceituais *elementares* sobre números racionais e a conexões com outros tópicos da matemática. No entanto, no estudo, não *associamos aspectos* elementares a uma visão da matemática que seja em algum sentido platônica, ou que pressuponha alguma estrutura estática dada a priori, da qual os professores devam se apropriar. Entendemos esses aspectos como inerentes ao conhecimento e às concepções de matemática de cada professor. Não buscamos, portanto, determinar um mapa absoluto de aspectos elementares que possa ser generalizado, mas identificamos aspectos reconhecidos pelos professores participantes como elementares e que, ao longo do estudo coletivo, tenham contribuído para o desenvolvimento processo de reflexão.

Em nossa análise, o estudo revelou que o processo colaborativo de investigação sobre o conteúdo segundo a metodologia *concept study* pode contribuir para o desenvolvimento profissional do professor com especial atenção ao conhecimento de matemática para o ensino. Nesse sentido, promove o desenvolvimento de um metassaber (SCHUBRING, 2014) do professor de matemática e promove uma (re)elaboração conceitual (DAVIS, RENERT, 2014).

Os professores participantes compartilharam e discutiram seus saberes sobre o conteúdo, constituídos a partir da formação e da sua prática. Inicialmente, os saberes dos participantes são expostos em um processo de descompactação (*Unpacking*) (BALL, BASS, 2003; BALL, SCHILING, 2008; DAVIS, RENERT, 2014). A partir de um processo colaborativo (PONTE, SERRAZINA, 2003) de discussão, esse conhecimento descompactado é questionado, investigado e (re)elaborado, sem que o professor interrompa a prática, ou seja, sem que pare de usá-lo – *substructing*.

Esse processo, determina uma (re)elaboração do conhecimento do professor e a constituição de uma matemática cultural, isto é, uma visão da matemática escolar, suas problemáticas conceituais e pedagógicas, e dos diversos saberes relacionados, que seja própria dos professores e compartilhada por eles como uma comunidade. A matemática da escola é a fonte principal de informação matemática para a maioria dos membros da nossa sociedade, assim, a forma como a matemática é promulgada na escola determina fortemente a maneira como ela é entendida e promulgada pela sociedade. Portanto, a matemática cultural constitui um componente essencial para a produção de conhecimento em matemática, pois forma o alicerce sobre o qual novo conhecimento pode ser produzido. A constituição de uma matemática cultural caracteriza o papel da escola, de forma não hierárquica à matemática acadêmica, contribuindo assim para conciliar rupturas entre esses universos, e, portanto, para os processos de translação histórica e de elementarização dos conceitos matemáticos (KLEIN, 2009, SHUBRING, 2003, 2014). Essa perspectiva pressupõe o entendimento de que produzir conhecimento em matemática não se reduz a "demonstrar novos teoremas", mas inclui, sobretudo, a constituição de um terreno sobre o qual novos conhecimentos possam se estabelecer e se consolidar por meio do processo histórico de elementarização – isto é, a formação de uma *cultura matemática*.

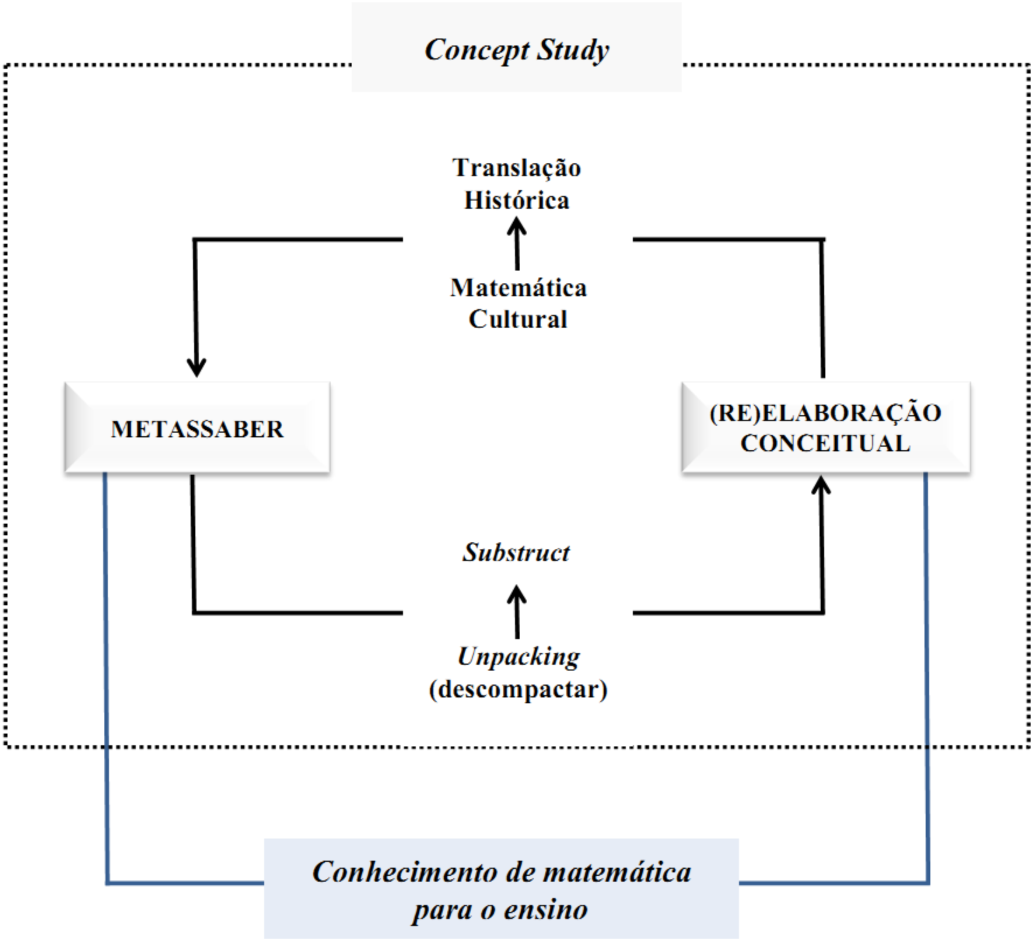


Figura 6.3: Dinâmica da relação entre metassaber e (re)elaboração conceitual.

O Reconhecimento de aspectos elementares

Nesta investigação, procuramos entender o papel de aspectos elementares na estruturação e na reconstrução do conhecimento de matemática para o ensino dos participantes, decorrente da reflexão coletiva e da troca de experiência entre os professores participantes.

Em primeira instância, o reconhecimento de aspectos elementares se traduziu como um fio condutor da reflexão coletiva. Entendemos que foi importante especialmente por dois aspectos:

(i) Contribuir para a constituição de um ambiente de reflexão coletiva
Em nossa análise, a discussão inicial travada no início do estudo coletivo, que levou os professores a discutirem o entendimento do sentido de elementar na questão disparadora teve um papel fundamental para preparar o grupo para a

investigação que se seguiria. Ao discutir o sentido de elementar, construíram um entendimento coletivo sobre o que seria investigado. Marcou a primeira construção conceitual do estudo. Neste caso, não havia um conhecimento anterior sobre o tema.

(ii) Sustentar a direção do estudo coletivo.

A análise do estudo coletivo revelou que a primeira etapa, única intencional, teve um papel fundamental na condução do estudo – A composição da lista percepções teve forte influência do entendimento do grupo de professores participantes sobre o que é elementar. Todas as discussões desenvolvidas durante o estudo coletivo tiveram sua origem em conceitos reconhecidos pelos professores participantes como elementares para números racionais ou para outros assuntos da matemática.

Ainda que não tenha sido o foco da pesquisa, o estudo permitiu observar, como um resultado emergente, que o processo de reflexão a partir da identificação de aspectos elementares ofereceu uma forma particular de observar três questões que permeiam a prática do professor: "*O que ensinar?"*, "*Por que ensinar?"* e "*Como ensinar?*" (Figura 6.4).

Temos consciência de que as formas, identificas no estudo, para abordar as questões destacadas não são as únicas possíveis. A resposta à "*por que ensinar?*" poderia ser, por exemplo, "*para que os estudantes usem a matemática no exercício da cidadania*". Já a resposta à questão "*como ensinar?*" poderia ser percebida a partir de um viés pedagógico, que sugere a escolha de estratégias. Não propomos um juízo de valor. Entendemos que essas questões têm mesmo muitas formas igualmente importantes de serem observadas. No entanto, acreditamos que foi uma observação interessante que emergiu do estudo de forma não intencional e que revela potencialidades da identificação de aspectos elementares de um conteúdo.

Questões	Contribuição da identificação de aspectos elementares
O quê ensinar?	A reflexão sobre *o que ensinar* se estabelece no sentido de identificar conceitos e resultados estruturantes do assunto. Por exemplo, no caso do estudo, a interpretação da divisão como medida no contexto dos números racionais.
Por que ensinar?	A reflexão sobre "*por que ensinar*" se estabelece a partir de um viés qualitativo, encerrando uma decisão conceitual, pautada no entendimento na relevância do assunto para aprendizagem matemática. Por exemplo, decidir sobre tratar aproximação em sala de aula.
Como ensinar?	A questão "*como ensinar?*" adquire uma conotação conceitual mais do que didática. Busca-se, assim, a justificativa e a explicação conceitual dos processos, mais do que a destreza em relação aos algoritmos. Por exemplo, na discussão sobre os processos de divisão envolvendo números racionais.

Figura 6.4: Contribuições da identificação de aspectos elementares para algumas questões

Identificação de metassaberes

De acordo com a nossa análise, a dinâmica de discussão colaborativa (PONTE, SERRAZINA, 2003) observada no estudo coletivo nos moldes *concept study* evidencia, a partir dos processos de descompactação (*unpacking*) e de reconstrução conceitual (*substructing*) o conhecimento de matemática dos professores participantes. A dimensão colaborativa do estudo coletivo é fundamental neste processo. É no confrontamento das ideias e na discussão de aspectos do conteúdo que o conhecimento dos professores participantes é examinado e (re)elaborado, promovendo um conhecimento sobre o conhecimento de matemática.

Esse processo aponta para uma percepção da matemática ampliada em aprofundamento e em articulações, o que, em nossa análise, consonantes com o entendimento de Klein (2009) e de Ball (200Al3), colabora para o conhecimento de matemática do professor para o ensino.

Além disso, em acordo com a percepção de Davis e Renert (2013), também entendemos que esse processo permite evidenciar as relações conceituais da matemática que fundamentam o conhecimento de matemática para o ensino a partir da própria reflexão dos professores. Esse conhecimento, muitas vezes tido como tácito, é fundamental para os modelos de formação inicial e continuada de professores e não é facilmente identificado nem medido.

Sobretudo, entendemos que esse processo evidencia, especialmente para os professores participantes, a percepção da importância dos próprios conhecimentos de matemática e da qualidade desses conhecimentos para a prática de sala de aula.

(Re)elaborando o conhecimento de matemática para ensino

O estudo realizado sugere também que o exercício colaborativo de questionar e investigar a matemática, a partir da reflexão sobre um tema central, reconhecidamente importante na educação básica, em busca de conexões entre conceitos e estruturas matemáticas elementares, proporcionou de fato uma reconstrução individual do saber de matemática para o ensino de cada professor participante.

Essa reflexão tem um caminho diferente daquele tradicionalmente praticado na formação docente: não parte da proposição direta de um professor formador, mas da reflexão e dos questionamentos dos próprios participantes em uma configuração colaborativa, sem perder de vista questões próprias da prática de sala de aula, ou seja, a experiência de compartilhar coletivamente o conhecimento, os questionamentos e as experiências individuais desencadeia a (re)construção do próprio conhecimento individual de forma conectada com a prática – *substruct* (DAVIS, 2010, DAVIS, RENERT, 2014). Por exemplo, pessoalmente, nenhum dos professores participantes do estudo identificava dificuldades para efetuar a divisão evolvendo números racionais, revelando, assim, um *saber comum sobre o conteúdo* (segundo o modelo de Ball e seus colaboradores). Era esse conhecimento que tinham como base para ensinar o assunto. Reconhecer a compreensão da divisão como medida como uma condição necessária para a efetiva aprendizagem dessa operação no contexto dos racionais foi um conhecimento que emergiu da discussão colaborativa entre os professores participantes. Mais ainda, a reflexão conduzida levou à exploração e ao reconhecimento, pelo grupo de professores participantes, de que modelos pictóricos podem constituir um recurso didático importante para a aprendizagem desse conteúdo. Em nossa interpretação, esse episódio significou, para os professores participantes, uma (re)construção conceitual que, mais do que ampliar seu conhecimento comum de conteúdo, alcançou o seu conhecimento especializado de conteúdo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

O estudo evidenciou ainda uma mudança na relação dos professores participantes com seu próprio conhecimento de matemática para o ensino. Por um lado, os participantes mostraram perceber que esse conhecimento deve ultrapassar o conhecimento dos tópicos do ensino básico, alcançando uma perspectiva mais panorâmica desses conteúdos em relação à própria matemática. Por outro lado, reconheceram que uma formação acadêmica desconectada da prática docente pode ser inócua para tarefa de ensinar. A análise dos dados coletados, indica que os professores participantes reconheceram que, ainda que realmente precisassem do conhecimento substantivo daquilo que ensinavam, isso não era suficiente para capacitá-los para ensinar. Essa evidência foi associada ao discurso dos professores, como relatado na ênfase *percepções*, e à busca por referências para responder às questões e às reflexões que emergiram da discussão. Inicialmente os professores recorriam a livros texto de ensino básico. No entanto, à medida que as questões eram ampliadas em aprofundamento conceitual e em relações com outros assuntos, os textos de ensino superior se fizeram necessários. As respostas não estavam mais nos livros didáticos. A observação dessa mudança de atitude teve sua culminância na ênfase *vínculos*.

A formação acadêmica desconectada da prática foi associada à dupla descontinuidade, denunciada por Klein (2010). A análise dos dados, especialmente da entrevista, demonstrou que todos os professores participantes reconheciam, em alguma medida, a dupla descontinuidade em sua formação. Entendemos que a conscientização desses aspectos sobre a sua formação e sobre o seu conhecimento de matemática para o ensino pode conduzir (e, acreditamos, assim o foi para os professores participantes do presente estudo) mudanças de atitude frente à sua atividade como profissão especialmente em relação a dois aspectos:

(i) Conferir autoridade ao professor na condução da sua própria formação, visando a um desenvolvimento profissional permanente;
(ii) Elevar a autoestima do professor por meio do reconhecimento de que existe um conhecimento de matemática para o ensino, que é próprio do professor, e que esse conhecimento não pode ser reduzido ao conhecimento de matemática de ensino básico e que também não pode ser concebido como uma versão diluída nem simplificada da matemática acadêmica.

Dupla descontinuidade – uma observação não planejada inicialmente

Uma consequência característica importante da dupla descontinuidade é o fato de o professor *ensinar como aprendeu quando aluno da escola básica*, não tendo os seus estudos universitários influência na sua forma de ensinar (KLEIN, 2009), sendo conduzido em sua prática pelas experiências anteriores como aluno do ensino básico (EVEN, BALL, 2009). No entanto, o que significa “ensinar como aprendeu”? A análise do estudo e das narrativas dos professores conduz ao entendimento de que a influência de sua experiência anterior pode ser observada a partir de duas dimensões, que distinguimos como *exterior* e *interior*. Essas dimensões estão relacionadas, mas são essencialmente diferentes.

Por um lado, em sua prática de sala de aula, o professor pode simplesmente reproduzir a prática do seu(s) professor(es) enquanto foi aluno de ensino básico ou a orientação de um livro ou de uma unidade escolar, ou seja, se pautando pela influência de um modelo *exterior*. Esse aspecto da prática do professor foi identificado nas narrativas de todos os participantes. Um dado importante nesta análise são as referências usadas pelos professores participantes. Nesse sentido, a dupla descontinuidade pode revelar implicações em decisões pedagógicas como, por exemplo, ensinar um "macete" para decorar uma regra e não explorar a matemática envolvida no assunto, como revelado pelos professores participantes em relação a operações com números racionais, ou acreditar que o a repetição garante a aprendizagem. Também pode determinar a reprodução de concepções erradas sobre o conteúdo, por exemplo, que apenas polígonos são formas geométricas ou que os únicos números reais são as raízes dos números naturais e π. Neste caso, a influência na prática do professor é preponderantemente de elementos que não revelam diretamente a forma como o professor compreende a matemática, mas como ele acredita ou aceita que ela deva ser ensinada.

Por outro lado, o professor leva para a sua prática a sua "forma de saber" matemática, ou seja, o seu conhecimento sobre a disciplina. Essa dimensão é do indivíduo, mesmo que a sua construção tenha sido amparada por elementos exteriores. Assim, por exemplo, se o professor resolver um cálculo por um determinado procedimento, dificilmente proporá o mesmo cálculo de uma forma diferente ao resolver um problema ou uma conta. Por exemplo, o cálculo de 90% de um determinado valor. Alguns chegam ao resultado pela subtração de 1/10 do valor original, enquanto que outros simplesmente multiplicam o valor original por 0,9. Há ainda aqueles que recorrem à "regra de três". No nosso entendimento, essas formas de relação com a matemática constituem o conhecimento comum de conteúdo, no modelo proposto por Ball e seus colaboradores (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) ou o saber de conteúdo proposto por Shulman (1986, 1987).

Se o conhecimento de conteúdo do professor sobre um assunto se reduz a formas memorizadas sem significado, muito provavelmente ensinará a memorização e não a reflexão. Por exemplo, no estudo, a relação dos professores participantes com a operação de divisão foi considerada como uma evidência dessa dimensão da dupla descontinuidade. Todos os professores participantes revelaram, em sua narrativa, que a divisão e o ensino da divisão não foram temas da sua formação universitária. Assim, ensinavam a divisão "como aprenderam" na escola básica. Nesse caso, a sua prática era influenciada pela forma como "conheciam" a divisão e não pela memória de como lhes ensinaram a operação ou por modelos de materiais ou recomendações didáticas específicas.

E o que os participantes revelaram saber sobre o seu saber sobre a divisão? De alguma forma, todos os participantes revelaram em alguma etapa da análise das narrativas, que estavam descobrindo durante o estudo, a partir da reflexão estabelecida pelo grupo, que não sabiam, de fato, realizar a operação de divisão. Os participantes associavam a divisão a algoritmos tradicionais para a operação, como se saber executar o algoritmo corretamente fosse sinônimo de compreender a divisão como operação. Os professores participantes revelaram não ter consciência de que não estavam ensinando a dividir e sim que estavam ensinando a reprodução de um algoritmo, como uma receita. Seu conhecimento sobre a operação de divisão era suficiente para que efetuassem uma divisão, quando necessário. No entanto, não era suficiente para ensinar o assunto. Entendemos que a conscientização sobre essa situação e a (re)elaboração do conhecimento dos professores participantes sobre a divisão foram alcançadas pelo estudo coletivo. Assim, em nossa análise a metodologia *concept study* oferece uma forma eficiente de alcançar o conhecimento de conteúdo dos professores participantes de modo a (re)elaborá-lo com vistas a um conhecimento necessário ao ensino. Em nossa análise, segundo o modelo da Ball e seus colaboradores, esse processo leva um conhecimento comum de conteúdo a um conhecimento especializado do conteúdo.

Dupla Descontinuidade *Ensinar como aprendeu*	
Dimensão Exterior Reproduzir práticas dos seus professores de ensino básico	Implicação direta na prática do professor determinando decisões pedagógicas e a abordagem conceitual da disciplina. Refere-se mais diretamente ao saber pedagógico de conteúdo
Dimensão Interior Ter como referência sua "própria" forma de compreender o assunto	Também tem implicações em decisões pedagógicas e na abordagem conceitual da disciplina. Refere-se mais diretamente ao saber de conteúdo

Figura 6.5: Dimensões da dupla descontinuidade

6.3 QUE LIMITAÇÕES O PERCURSO REVELOU?

O grande volume de dados e a imprevisibilidade do estudo

O desenvolvimento de um *concept study* foi uma escolha metodológica amparada pelo entendimento de consonância com os principais referenciais teóricos assumidos – em particular, o entendimento dado ao conhecimento de matemática para o ensino e a percepção da relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica – e diante do objetivo da investigação. O objetivo da pesquisa era contribuir para da reflexão sobre o desenvolvimento profissional do professor com especial atenção para o desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino. Não se intencionava verificar o que o professor sabe, ou não sabe, sobre o conteúdo ou sobre algum assunto específico, mas refletir a partir do que o professor sabe, na direção da compreensão sobre o que ele precisa saber e como ele pode aprender. É neste sentido que a investigação foi planejada.

No entanto, o modelo de *concept study*, é relativamente novo, cerca de 10 anos, e, em nosso entender, apesar dos estudos publicados por Davis e seus colaboradores ainda há muito a ser discutido sobre a sistematização da metodologia de análise do desenvolvimento do estudo coletivo nos moldes de um *concept study*. A pesquisa bibliográfica indicou que não há muitos estudos segundo essa metodologia. Especialmente no Brasil, não encontramos literatura sobre o assunto.

Por um lado, acreditamos que ampliar a reflexão sobre *concept study* e, em particular, trazer essa metodologia para o Brasil, são formas positivas de contribuir para investigação sobre a pesquisa em formação de professores. No entanto, lidamos com um grau maior de imprevisibilidade diante dos parâmetros para ancorar e balizar o processo de análise.

> Não recue, não dê as costas para estes contos secretos e desarrumados que nenhum método pode lhe ser mais rápido e fazer tudo dar certo, como se eles não *falassem* conosco, como se nós não os *ouvíssemos*, como se as ações do mundo fossem sempre apenas as nossas próprias ações. [...] Vamos recuperar a palavra. Isto é pesquisa.[169] (JARDINNE, 1997, p. 165, apud PROULX, 2007, itálico no original)

[169] No original: "Don't go backwards, don't turn away from these messy secret tales that no method can outrun and make all right, as if they did not *speak* to us, as if we did not *hear* them, as if the agencies of the world were always just our own. […] Let's reclaim the word. This is research." (JARDINNE, 1997, p. 165, apud PROULX, 2007, itálico no original)

O desenvolvimento de uma abordagem qualitativa nos pareceu bastante adequado. No entanto, tivemos muita dificuldade para estabelecer os parâmetros de análise e de lidar com o grande volume de dados. O estudo gerou cerca de 50 horas de vídeo, além das entrevistas individuais. Cada discussão desenvolvida durante o estudo envolvia o conhecimento de conteúdo dos professores participantes, aspectos sobre a prática de cada um desses professores, a relação entre essas dimensões, além de questões conceituais sobre os assuntos em discussão Além disso, as orientações metodológicas de um *concept study*, trazem em sua essência um grau importante de imprevisibilidade. Devem ser identificadas ênfases que contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelos professores participantes do estudo coletivo e apenas a primeira ênfase pode ser descrita como intencional, as demais são emergentes, imprevisíveis, não planejadas, decorrentes do próprio processo de discussão. (DAVIS, RENERT, 2009b, 2014).

Diante do objetivo da investigação em tela, decidimos estabelecer elementos centrais de análise que vertiam sobre as questões de pesquisa: *referências*, *aspectos elementares do conteúdo*, *saberes e metassaberes dos professores participantes.* No entanto, entendemos que o volume de dados gerados em um *concept study* admite um espectro bastante amplo de possibilidades de análise e de objetivos de investigação.

Qual o impacto do estudo coletivo na prática do professor?

Consonante com os resultados de Davis (2010, 2012), nossa investigação sugere uma mudança de atitude dos professores também em sua prática. Os participantes do estudo realizado manifestaram a intenção de estender a experiência investigativa com uma atitude em sua prática de salas de aula. Por exemplo, os professores revelaram estar efetivamente mais atentos aos discursos, raciocínios e dificuldades de seus alunos, praticando de forma intencional o questionamento dos resultados. A professora P1 relatou que, depois que ela se tornou mais consciente de suas próprias dúvidas sobre a operação de divisão, ela estava mais confiante para identificar e para lidar com as dificuldades dos seus alunos. Para ela, a reflexão coletiva levou-a a reconhecer o valor elementar da interpretação da divisão como medida para a compreensão dos números racionais. Assim, a reconstrução dos saberes docente a partir de um *concept study* mostra potencial para alcançar as práticas de sala de aula.

Essa constatação fica evidenciada, também, no depoimento da professora P1, que estava entre aqueles com maior tempo de experiência em sala de aula, enviado à pesquisadora após a conclusão do estudo:

> "Um aluno do 7º ano me perguntou a diferença entre razão e fração? Lembrei de vc e de nossas aulas na hora.... Sinto muita saudade de **nossas conversas, discussões e reflexões, que com certeza fazem toda a diferença em minha prática hoje**." (Negrito nosso)

No entanto, de fato, essa metodologia, por si só, não permite rastrear o impacto dos resultados na prática de sala de aula dos professores participantes e em relação a seus alunos. Este é um tema interessante para futuras pesquisas.

Davis e Renert (2013) reconhecem também essa limitação do estudo e começam a investigar formas de avaliar o impacto de um *concept study* na prática de sala de aula do professor:

> No momento, estamos envolvidos em um estudo longitudinal do impacto da participação continuada dos professores em *concept studies* tem em sua prática docente e na aprendizagem de seus alunos. Este trabalho está se desenvolvendo a partir de entrevistas de grupos de foco, da observação e da colaboração em salas de aulas, do acompanhamento contínuo e diário da rotina dos professores, e dos relatos dos estudantes. Nós avaliamos a compreensão do aluno através do seu desempenho em testes padronizados, do seu envolvimento em tarefas em sala de aula, com a sua disposição para a disciplina e com avaliações baseados em entrevistas de capacidade dos alunos para aplicar e estender conceitos em situações específicas. Embora este estudo ainda esteja em seus estágios preliminares, os resultados até agora são consistentes com trabalhos anteriores sobre a relação entre o caráter emergente da aprendizagem humana e capacidade dos professores para apoiar os níveis mais elevados de entendimento conceitual em seus alunos (Cobb, Yackel, Wood, 1992[170]; Franke, Carpenter, Levi e Fennema, 2001[171]), e sobre o impacto da concepção da sala de aula como um espaço de aprendizagem coletiva e não como um conjunto de alunos (Burton, 1999[172]; Davis, Simmt, 2003).[173] (DAVIS, RENERT, 2013, p.264, tradução nossa)

---

[170] Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 99 –122.

[171] Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., Fennema, E. (2001). Capturing teachers ' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal,* 38, 653 –689

[172] Burton, L. (Ed.). (1999). *Learning mathematics: From hierarchies to networks*. London: Falmer.

[173] No original: "At present, we are engaged in a longitudinal study of the impact that teachers' sustained engagement in concept-study activities has on their teaching practice and on their students' understanding. This work is proceeding through focus-group interviews, in-class observations and collaborations, ongoing teacher journaling, and student reporting. We assess student understanding through performance on standardized tests, students' engagement with in-class tasks, students ' dispositions toward the discipline, and interview-based evaluations of students' capacity to apply and extend concepts in novel situations. While this study is still in its preliminary stages, the results to date are consistent with earlier work on the relationship between the emergent character of human learning and teachers' ability to support higher levels of conceptual understanding in their students (Cobb, Yackel; Wood, 1992; Franke, Carpenter, Levi; Fennema, 2001), and on the impact of conceiving of the classroom as a collective learner rather than as a collection of learners (Burton, 1999; Davis; Simmt, 2003)." (DAVIS, RENERT, 2013, p.264)

6.4 PERSPECTIVAS

Há influência da composição do grupo no estudo?

Em nosso entendimento, a escolha da amostra para ao desenvolvimento do estudo atendeu aos pressupostos de desenvolvimento de um *concept study*. No entanto, o decorrer do estudo nos levou à reflexão sobre a influência da composição do grupo para a reflexão. Ainda que não tenhamos desenvolvido uma análise comparativa entre o estudo piloto e o estudo principal, alguns aspectos ficaram latentes. Por exemplo, o estudo piloto envolveu uma quantidade maior de participantes, que refletia maior diversidade de experiência e de conhecimento. Ou o fato de as discussões nos dois estudos terem muitos aspectos de convergência mas também revelarem diferenças. As listas de percepções dos dois estudos realizados, por si só, já apontam esses aspectos (RANGEL, GIRALDO, MACULAN, 2014, p.9 e Figura 5.11, neste documento). Os trabalhos de Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2008a, 2008b, 2010, 2011, 2012; DAVIS, RENERT, 2009a, 2009b, 2014) também não se propõem a desenvolver análises comparativas específicas entre os diferentes *concept studies* realizados, mas a identificar o valor dessa metodologia de estudo colaborativo para o desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino dos professores participantes.

Apesar de reconhecermos e concordarmos com que o valor de um *concept study* não está na observação do conhecimento de matemática dos professores participantes de forma substantiva, ou seja, na identificação do que eles sabem ou deixam de saber, mas sim no potencial do processo para o desenvolvimento desse conhecimento, acreditamos que, para compreender melhor esse modelo de estudo, pode ser interessante investigar, a partir de metodologia adequada, o impacto de um *concept study* no conhecimento de matemática individual dos professores participantes e o impacto do conhecimento de matemática desses professores e da sua experiência profissional para o desenvolvimento do estudo colaborativo.

Nossa vivência nos dois estudos realizados nos conduz a alguns questionamentos sobre a relação entre a configuração do grupo de professores participantes e o desenvolvimento do estudo coletivo. Por exemplo, maior experiência dos professores participantes pode ser um fator enriquecedor das discussões? Ou será este um fator que imprima maior resistência para o processo de (re)construção conceitual? Qual a influência da quantidade de professores participantes para o desenvolvimento do *concept study*? Esses estudos devem envolver apenas professores já formados, que têm experiência, ou podem atender também à formação inicial em uma configuração mista?

Acreditamos que investigações no sentido de comparar diferentes *concept studies* a partir de uma metodologia adequada, podem contribuir significativamente para uma melhor compreensão desse modelo de estudo e do alcance de sua aplicação.

Qual deve ser a formação do professor responsável pela condução do estudo?

Não foi objetivo deste trabalho investigar a prática da professora pesquisadora na condução do estudo coletivo. Neste sentido, não foi adotada uma metodologia orientada para a pesquisa sobre a própria prática ou pesquisa-ação. Entretanto, ficou claro que a formação da pesquisadora e o fato dela ter experiência em sala de aula da educação básica desempenharam um papel determinante no encaminhamento das discussões no estudo coletivo. Em particular, essas discussões se caracterizaram mais como uma troca de ideias, impressões e experiências do que como uma exposição unilateral de conteúdo. Essa perspectiva foi fundamental para que tanto os saberes da matemática acadêmica como aqueles que emergem da prática de sala aula fossem considerados na discussão de forma não hierárquica e se articulassem, o que possibilitou uma reconstrução de saberes de conteúdo pelos participantes de forma direcionada para a própria prática de sala de aula.

Assim, o papel do professor que conduz um estudo coletivo, no modelo de um *concept study*, pode ser objeto para futuras pesquisas, com outro desenho metodológico. Não visamos propor, com base nos resultados desta investigação, que o fato do professor que conduz o estudo ter experiência em sala de aula seja uma condição indispensável para que o estudo coletivo atinja os objetivos desejados. Entretanto, sugerimos que uma condição indispensável seja a consciência e a sensibilidade do professor que conduz o estudo para o valor para a formação de professores dos saberes que emergem da prática e para a relação não hierárquica que deve se estabelecer entre estes e os saberes da matemática acadêmica para a formação de professores. Esta relação não hierárquica é especialmente importante no caso da formação continuada, quando o fato do professor em formação estar também em atuação profissional não pode deixar de ser considerado para a concepção das atividades de formação.

Portanto, entendemos que o desenvolvimento de um *concept study*, comporta ainda, a partir de uma metodologia apropriada, a investigação da ação e do papel do professor responsável pela condução do estudo coletivo, o que, acreditamos, pode contribuir para a pesquisa sobre a *formação do formador* (FIORENTINI et AL, 2002, FERREIRA, 2003, FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013).

Contribuição para Modelos de Formação Continuada

No Brasil, os modelos usuais para as atividades de formação continuada de professores de matemática consistem, em muitos casos, de cursos de revisão dos conteúdos de matemática universitária ou de matemática escolar, frequentemente amparados em modelos baseados na metáfora da *aquisição* (FIORENTINI, 2012; SBEM, 2003). Entendemos que *concept study*, além de ser uma metodologia que permite acesso aos saberes de conteúdo dos professores participantes e ao processo de (re)construção desses saberes, oferece um modelo relevante e uma alternativa para os modelos usuais de formação continuada, refletindo o entendimento da formação como um processo contínuo de desenvolvimento profissional que envolve a *participação* atuante do professor.

Um princípio norteador essencial para um *concept study* é a reconstrução dos saberes de matemática para o ensino enquanto esses saberes são empregados na prática de sala de aula (*substruct*). Mais do que isso, a troca de experiências da prática, no estudo colaborativo, é determinante para o processo de reconstrução desses saberes. Como a discussão coletiva tem foco no conteúdo, a partir da experiência e da prática de sala de aula dos professores participantes sobre dificuldades e estratégias de ensino, a reconstrução de saberes de conteúdo matemático não se dá de forma dissociada da aplicação desses saberes na prática nem é determinada por um programa estabelecido a priori, mas fica baseada em um processo endógeno. Nos modelos usuais de formação continuada, baseados em ações concebidas sob a metáfora da aquisição, em que se prevê fundamentalmente apenas uma "revisão" do conteúdo matemático, a construção de saberes de conteúdo é desvinculada da experiência de sala de aula. Acreditamos que, sendo assim, ainda que os professores participantes possam ampliar seu conhecimento de conteúdo matemática *per se*, há menos chance de que essas ações promovam uma (re)construção do conhecimento de matemático para o ensino, ou seja, um conhecimento sobre o conteúdo que tenha impacto significativo ou incorra em transformações efetivas na prática de sala de aula dos professores participantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADLER, JILL; BALL, DEBORAH; KRAINER, KONRAD; LIN, FOU-LAI. , NOVOTNÀ, JARMILA. (2005) Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381.

BALL, DEBORAH. (1988) The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. *National Center for Research on Teacher Education*, College of Education, Michigan State University, 1988.

BALL, DEBORAH. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journ*al, 90, 449-466.

BALL, DEBORAH, COHEN, DAVID. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes and L. Darlin-Hammond (Eds). *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice*, pp.3–32. San Francisco: Jossey.

BALL, DEBORAH; BASS, HYMAN. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspective on The Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 83-104). Wesport, CT: Ablex.

BALL, DEBORAH; BASS, HYMAN. (2003). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In B. Davis, E. Simmt (Ed.), Proceedings of the 2002 *Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

BALL, DEBORAH; THAMES, MARK HOOVER; PHELPS, GEOFFREY. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

BALL, DEBORAH; BASS, H HYMAN. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Paper prepared* *based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg*, Germany, March 1 – 4, 2009.

BALL, DEBORAH; CHARAMBOUS, CHARALAMBOS Y.; THAMES, MARK; LEWIS, JENNIFER. (2009). Teacher knowledge and teaching: Viewing a complex relationship from three perspectives. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou; H. Sakonidis (Eds), *Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 121–150). Thessaloniki, GR: PME

BALL, DEBORAH. et al. (2009). Mathematical Knowledge for teaching: Focusing on the work teaching and its demands. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou; H. Sakonidis (Eds), *Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 133–139). Thessaloniki, GR: PME.

BALDIN, YURIKO. (2009). O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. *Anais do Simpósio Brasil-Japão – XVIII Encontro Anual da SBPN, São Paulo, SP.* (Disponível em http://japao.org.br/simposio2010/wp-content/uploads /2010/PA027.pdf, acesso em março de 2012).

BALDIN, YURIKO; FELIX, THIAGO. (2011). A pesquisa de aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* – XIII CIAEM. Recife, Brasil.

BARUK, STELLA. (1985) L'âge du capitaine. Paris: Seuil.

BARTON, BILL. (2008). The Klein Project: A Living & Connected View of Mathematics for Teachers – An IMU/ICMI Collaboration: A Short Description. *MSOR Connections*, Vol. 8 (4), pp. 16-17.

BARTON, BILL. Creating a space for mathematicians and educators: The philo-sophical basis for the Klein Project. *Anais da XI I I Conferência Interamericada de Educação Matemática*. Recife, 2010.

BASS, HYMAN. (2005). Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education. *Bulletin of the American Mathematical Society*. v.42, no.4, p. 417-430. Article electronically published on June 23, 2005. Disponível em http://www.ams.org/journals/bull/2005-42-04/S0273-0979-05-01072-4/S0273-0979-05-01072-4.pdf. Acesso em dezembro de 2011.

BEHR, MERLYN J.; HAREL, GUERSLON; POST, THOMAS; LESH, RICHARD. (1992) Rational Number, Ratio, and Proportion. In: GROUWS, D. (Ed). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan.

BLÖMEKE, SIGRID; DELANEY, SÉAN. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries. ZD – *The International Journal on Mathematics Education*, 44(3), 223-247.

BORBA, MARCELO. (2004) A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. *Anais da 27ª Reunião Anual da Anped*, Caxambu, MG, 21-24.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Brasília. SEF, 1998.

CANDAU, VERA. (coord.). (1988) Novos Rumos da Licenciatura. In: *Estudos e Debates 1* – Brasília: INEP; Rio de Janeiro: PUC/RJ.

CARAÇA, BENTO DE JESUS. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

CONFREY, JERE; MALONET, ALAN; NGUYEN, KENNY; MOJICA, GEMMA; MYERS, MARRIELLE. (2009). Equipartitioning/splitting as a Foundation of Rational Number Reasoning Using Learning Trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou; H. Sakonidis (Eds), *Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp.II-345–II-351). Thessaloniki, GR: PME.

CURY, HELENA. (2012) O Conhecimento Pedagógico de Conteúdo dos erros. In: CURY, H; VIANNA, C.R. (org.) *Formação do Professor de Matemática: reflexões propostas*. Editora IPR, Santa Cruz do Sul – RS. pp. 19-48.

CURY, HELENA; RIBEIRO, ALESSANDRO; MÜLLER, THAÍSA. (2011) Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Diciembre, 2011- n. 28.

D'AMBRÓSIO, UBIRATAN. (2006) Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

DAVIS, BRENT. (2008a). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School* (NCTM), 14(2), 86-91.

DAVIS, BRENT. (2008b) "Concept Study: Open vs. Closed Understanding of Mathematical Ideas. *11th International Congress on Mathematical education* (ICME 11). Topic Study Group 27: Mathematical knowledge for teaching. Mexico. (Disponível em: http://tsg.icme11.org/tsg/show/30 – acesso em setembro 2012).

DAVIS, BRENT. (2010). Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge. *Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Minas Gerais, Brasil, 1, pp. 63-78.

DAVIS, BRENT. (2011) Mathematics Teachers' Subtle, Complex Disciplinary Knowledge. *Science*. Vol. 332 no. 6037 pp. 1506-1507 (Disponível em: http://www.sciencemag.org/content/332/6037/1506.short – acesso em setembro 2012).

DAVIS, BRENT. (2012) Subtlety and Complexity of Mathematics Teacher's Disciplinary Knowledge. *12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

DAVIS, BRENT; BROWN, LAURINDA; CEDILLO, TENOCH; CHIOCCA, CATHARINE-MARIE; DAWSON, SANDY; GIM,ENEZ, JOAQUIM; HODGEN, JEREMY; JAWORSKI, BARBARA; KIDD, MARGARET; SIEMON, DIANNE. (2009) Development of Teaching in and from Practice. In: EVEN, R; BALL, D. L. (Eds.). *The professional education and development of teachers of mathematics – the 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer, pp. 149-166.

DAVIS, BRENT; SIMMT, ELAINE. (2003) Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 34, No. 2 (Mar., 2003), pp. 137-167

DAVIS, BRENT; SIMMT, ELAINE. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 61, No. 3 (Mar., 2006), pp. 293-319. Springer.

DAVIS, BRENT; RENERT, MOSHE. (2009a). Concept Study as a response to algorithmetic. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou; H. Sakonidis (Eds), *Proceedings of 33rd Conference* *of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp.126–132). Thessaloniki, GR: PME.

DAVIS, BRENT; RENERT, MOSHE. (2009b). Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball).

DAVIS, BRENT; RENERT, MOSHE. (2012). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 29(3), 37-43.

DOERR, HELEN; LESH, RICHARD. (2003). Designing research on teachers' knowledge development. In L. BRAGG, C. CAMPBELL, G. HERBERT; J. MOUSLEY (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity*. Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Geelong, pp. 262-269. Sydney, MERGA.

ELIPANE, LEVI E. (2012). Integrating the essential elements of lesson study in pre-service mathematics teacher education. Doctoral Dissertation. Department of Science Education. University of Copenhagen. Denmark

ELSENHART, MARGARET; BORKO, HILDA; UNDERHILL, ROBERT; BOWN, CATHERINE; JONES, DOUG; ARGAR, PATRICIA. (1993) Conceptual Knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 8-40.

EVEN, RUHAMA; BALL, DEBORAH. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

FÁVERO, MARIA HELENA; NEVES, REGINA. (2012) A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké* – FE/Unicamp, São Paulo, v.20, n.17, pp. 35–72.

FENSTERMACHER, GARY. D. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education*, 20, 3-56

FERNANDEZ; YOSHIDA, (2004). *Lesson study: a Japonese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

FERREIRA, ANA CRISTINA. (2003) Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em Formação de Professores de Matemática. In FIORENTINI, D. et al. *Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas-SP. p. 19-50.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. Dicionário do Aurélio Online. Disponível em http://www.dicionariodoaurelio.com/ (Acesso em fevereiro de 2014).

FENNEMA, ELIZABETH; FRANKE, MEGAN LOEF. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, DOUGLAS. (Ed). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan.

FERREIRA, ANA CRISTINA. (2003) Metacognição e Desenvolvimento Profissional: Estudo de um grupo de trabalho colaborativo. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – FE/Unicamp. Campinas, SP.

FIORENTINI, DARIO. (2004) Pesquisar Práticas Colaborativas ou Pesquisar Colaborativamente? In: *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

FIORENTINI, DARIO. (2003) Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam matemática. In: *SEMINÁRIO SOBRE LICENCIATURAS*, 2003, Salvador. Disponível em http://www.sbem.com.br/licenciatura.html (Acesso em agosto de 2012).

FIORENTINI, DARIO. (2006) Grupo de Sábado – Uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a própria prática escolar em matemática. In: CRISTOVÃO, E. M; FIOENTINI, D. (org) *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas, SP. Editora Alínea.

FIORENTINI, DARIO. (2012) Investigar e Aprender em Comunidades Colaborativas. *XVI ENDIPE – Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino* – UNICAMP – Campinas – 2012. (disponível em: Acesso em maio de 2013. http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/0091s.pdf)

FIOENTINI, DARIO. (2013) Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. SISYPHUS. *Journal of education*. v.1, issue 3, 2013, pp. 152-181.

FIORENTINI, DARIO; NACARATO, ADAIR MENDES; FERREIRA, ANA CRISTINA; LOPES, CELI SPASANDIN; FREITAS, MARIA TERESA; MISKULIN, ROSANA. (2002) Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. Dossiê: *Educação Matemática. Educação em Revista*, Belo Horizonte, v. 17, n. 36, pp. 137-160.

FIORENTINI, DARIO; MISKULIN, ROSANA; MEGID, MARIA AUXILIADORA; BRUM, ELEONORA; GAMA, RENATA; MELO,MARISOL; REIS, MARIA ELÍDIA; GRANDO, REGINA; PASSOS, CARMEN. (2005) Learning through collaboration from professional with different. *ICMI 15th*. Prop. Disponível em: http://www.mathunion.org/icmi/digital-library/icmi-study-conferences/icmi-study-15-conference/. Acesso em maio de 2013.

FIORENTINI, DARIO; LORENZATO, SERGIO. (2009) *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3a ed.. Rev. Campinas, SP. Autores Associados. (Coleção Formação de Professores)

FIORENTINI, DARIO; OLIVEIRA, ANA. TERESA. (2013) O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez.

GAMBOA, SILVIO SÁNCHES. (2009) Saberes, Conhecimentos e as Pedagogias das Perguntas e das Respostas: atualidade de antigos conflitos. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v.4, n.1, pp. 9-19 , jan.-jun. 2009. Disponível em <http://www.periodicos.uepg.br>

GELLERT, UWE. (2008) Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 67, No. 2 (Feb., 2008), pp. 93-110. Springer.

GIRALDO, VICTOR; GONZÁLEZ-MARTÍN, ALEJANDRO; SANTOS, FABIO L.M (2009) An analysis of the introduction of the notion of continuity in undergraduate textbooks in Brazil. In: *Conference of the International Group for the Psychology of Mathe-*

matics Education, 2009, Thessaloniki. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. v. 3. pp. 81-88.

GRAEBER, ANNA; TIROSH, DINA. (2008). Pedagogical Content Knowledge – Useful concept or Elusive Notion. In: Sullivan, P; Wood, T. (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education – Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (vol.1; pp. 117–132). Sensei Publishers. Rotterdam, Taipei.

GROUWS, DOUGLAS. (Ed). (1992) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, NY: Macmillan.

HILL, HEATHER, BALL, DEBORAH; SCHILLING STEPHEN. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

HILL, HEATHER; BLUNK, MERRIE; CHARALAMBOUS, CHARALAMBOS; LEWIS, JENNIFER; PHELPS, GEOFREY; SLEEP, LAURIE; BALL, DEBORAH. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.

HURREL, DEREK. (2013). What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(11). (http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n11.3)

HOUSSAIS. Grande Dicionário Houssais de Lingua Portuguesa. Disponível em: http://houaiss.uol.com.br/. Acesso em: fevereiro de 2014.

KAISER, GABRIELE; BLÖMEKE, SIGRID; BUSSE, ANDREAS; DÖHRMANN, MARTINA; KÖNIG, JOHANNES. 2014. Professional Knowledge of (Prospective) Mathematics Teachers – Its Structure and Development .In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S.; Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 1, p. 255. Vancouver, Canada: PME.

KILPATRICK, JEREMY. (1996) Ficando estacas: uma tentativa de demarcar a EM como campo profissional e científico. *Zetetiké*, Campinas: CEMPEM – FE-UNICAMP, v. 4, n. 5, p0. 99- 120, jan-jun.

KILPATRICK, JEREMY. (2008a). A Higher Standpoint. *Proceedings ICME 11*, Disponível em: http://www.mathunion.org/icmi/publications/icme-proceedings//materials-from-icme-11/?no_cache=1&sword_list[]=lectures no prelo – Acesso em setembro de 2014.

KILPATRICK, JEREMY. (2008b). The development of Mathematics Education as an Academic Field. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi; F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission of Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 25-39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani.

KLEIN, FELIX. (2009). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

KLEIN, FELIX. (2011). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte II: Álgebra. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

KLEIN, FELIX. (2011). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte III: Análise. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

KLEIN, FELIX. (2010). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*: Aritmetics, Algebra , Analysis. USA: Breinigsville.

KLEIN PROJECT – Disponível em: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/klein/life.html. Consultado em 20 de outubro de 2011.

KRAINER, K. (2008). Teams, Communities and Networks: Participants and ways of Participation in Mathematics Teachers Education. In: Krainer, K & Wood, T. *The International Handbook of Mathematics Teacher Education – Participants in Mathematics Teacher Education* (vol.3; pp. 1-10). Sensei Publishers. Rotterdam, Taipei.

KRAUSS, STEFAN; BRUNNER, MARTIN; KUNTER, MAREIKE; BAUMERT, JÜRGEN; BLUM, WERNER; NEUBRANT, MICHAEL; JORDAN, ALEXANDER. (2008) Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, Vol 100(3), Aug 2008, 716-725.

JAWORSKI, BARBARA. (2005). New Beginnings and Recurring Themes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 1-3.

JAWORSKI, BARBARA. (2006) Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. . *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187-211

JAWORSKI, BARBARA. (2009). Learning in and from Parcitice. In EVEN, R; BALL, D. L. (Eds.). (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics* – the 15th ICMI Study. New York, NY: Springer.

JAWORSKI, BARBARA; WOOD, TERRY. (Eds), International handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

JAWORSKI, BARBARA. (2008) Development of the Mathematics Teacher Educator and its relation to teaching development. In JAWORSKI, B; WOOD, T. (Eds), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp.335-361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers

MA, LIPING. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MATOS, JOÃO FILIPE; POWELL, ARTHUR; SZTAJN, PAOLA. (2009). Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: the 15th ICMI study* (pp. 167–183). New York: Springer.

MICHAELIS. Moderno Dicionário Inglês & Português. Disponível em: < http://michaelis.uol.com.br/moderno/ingles/index.php>. Acesso em: fevereiro de 2014.

MOREIRA, PLÍNIO C. (2004) O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Minas Gerais. *Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social*, Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

MOREIRA, PLÍNIO. C.; DAVID, MARIA MANUELA M. SOARES. (2003) Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetike*, v.11, n.19, pp. 57-80.

MOREIRA, PLÍNIO C.; DAVID, MARIA MANUELA M. SOARES. (2005) O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*. Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, jan /fev /mar /abr.

MOREIRA, PLÍNIO C.; DAVID, MARIA MANUELA M. SOARES. (2007) *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente*. Belo Horizonte: Autêntica. Coleção Tendências em Educação Matemática. (1ª reimpressão)

MOREIRA, PLÍNIO C.; DAVID, MARIA MANUELA M. SOARES. (2008) Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education,* New York, n. 11, pp. 23-40.

MOREIRA, PLÍNIO C.; FERREIRA, ANA CRISTINA.(2013). O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, pp. 981-1005, dez.

MOREIRA, PLÍNIO C. (2013). 3+1 e suas (In)Variantes: Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, pp. 1137-1150, dez.

MIZUKAMI, MARIA DA GRAÇA NICOLETTI. (2005) Aprendizagem da docência: professores formadores. *Revista E-Curriculum*, São Paulo, v. 1, n. 1, dez. - jul. 2005-2006. Disponível em: http://www.pucsp.br/ecurriculum, acesso em: 20/06/2013.

MIZUKAMI, MARIA DA GRAÇA NICOLETTI. (2004) *Aprendizagem da docência: algumas contribuições de Lee Shulman*. Disponível em <http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm >, acesso em 15 de abril de 2009.

MISHRA, PUNYA; KOEHLER, MATTHEW. (2006) Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, v.108, n.4, pp. 326–341.

NODDINGS, NEL. (1992). Professionalization and Mathematics Teaching In: GROUWS, D. (Ed). (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 197-208). New York, NY: Macmillan.

NUNES, TEREZINHA. (2010) Reaction to Brent Davis' plenary: "What Concept Studies tell us about Mathematics Education". In: Pinto, M.M.F; Kawasaki, T.F. (Eds) *Proceeding of*

34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 103-106. Belo Horizonte, Brazil: PME.

PAIS, LUIS CARLOS. (2005) *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

PALIS, GILDA. (2010) O conhecimento tecnológico e do conteúdo do professor de matemática. In: *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v.12; n.3, pp. 432–451.

PASSOS, M. M.; NARDI, R.; ARRUDA, S. (2010). OS Sentidos sobre o Professor e sua formação em 15 anos de ZETETIKÉ: 1993-2007. *Zetetike*, Campinas: CEMPEM – FE-UNICAMP, v. 18, pp. 51-108.

PEREIRA, MARIA. INÊS; BELFORT, ELIZABETH; MANDARINO, MONICA. (2014). Materiais do Pró-letramento Matemática na Perspeciva de Desenvolvimento de Saberes Docentes. In Roque, T; Giraldo, V. (eds.), *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo*. Cap.11 – pp. 289–328. Rio de Janeiro: Ciência Moderna

PERRENOUD, PHILIPPE. (2000) *10 Novas Competências para Ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PONTE, JOÃO PEDRO. (1995) Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: PONTE, J. P.; MONTEIRO, C.; MAIA, M.; SERRAZINA, L.; LOUREIRO, C. (Ed.). *Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação?* Lisboa: SEM-SPCE. 1995, p.193-211. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em agosto de 2013.

PONTE, JOÃO PEDRO. (2000). A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas. Conferência realizada no *I SIPEM — Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, promovido pela SBEM — Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Serra Negra, São Paulo, Brasil, Novembro de 2000.

PONTE, JOÃO PEDRO; SERRAZINA, LURDES. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática: O Papel da Colaboração. *Zetetiké*, *11*(20), 51-84.

PONTE, JOÃO PEDRO; CHAPMAN, OLIVE. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

PONTE, JOÃO PEDRO; CHAPMAN, OLIVE. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

PONTE, JOÃO PEDRO; ZASLAVSKY, O., SILVER, Ed, BORBA, M. HEUVEL-PANHUIZEN, M., HAGAR GAL, FIORENTINI, D., MISKULIN, R., PASSOS, C., PALIS, G., HUANG, R., CHAPMAN, O. (2009) Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. In: EVEN, R; BALL, D. (Eds.). *The professional education and development of teachers of mathematics* – the 15th ICMI Study. New York, NY: Springer.

PROULX, JÉRÔME. (2007) (Enlarging) Secondary-level Mathematics teachers'mathematical knowledge: An investigation of Professional development. Doctoral dissertation. Department of Secondary Education. University of Alberta Edmonton, Alberta.

RANGEL, LETICIA; GIRALDO, VICTOR; MACULAN, NELSON (2014). Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações. *Professor de Matemática Online* – SBM. No. 1, v.2. ISSN 2319-023

RIBEIRO, CARLOS MIGUEL (2009) Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 34, pp. 1 a 26.

RIBEIRO, ALESSANDRO JAQUES. (2012). Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*. Rio Claro (SP), v. 26, pp. 535-558, 2012.

RODRIGUES, JOSÉ FRANCISCO. (2009). Prefácio. In: Klein, Felix. *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

ROQUE, TATIANA; GIRALDO, VICTOR. (Eds.), (2014) *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

ROWE, DAVID E. (1983). A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Program. *Historia Mathematica*, 10, pp. 448-457.

ROWE, DAVID E. (1985). Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede". A transcription with English translation and commentary. *Historia Mathematica*, 12, pp. 123-141.

ROWLAND, TIM. (2008). Researching Teachers' Mathematics Disciplinary Knowledge. In: SULLIVAN, P; WOOD, T. (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education – Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (vol.1; pp. 273–298). Sensei Publishers. Rotterdam, Taipei.

ROWLAND, TIM; TURNER, FAY. (2009). Karen and Chloe: the knowledge quartet. In M. TZEKAKI, M. KALDRIMIDOU; H. SAKONIDIS (Eds), *Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 133–139). Thessaloniki, GR: PME.

SANTOS, R. 2005. *Conteúdos matemáticos da Educação Básica e sua abordagem em curso de licenciatura em matemática*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, Brasil.

SCHUBRING, GERT. (1999). O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o Papel da Alemanha: um estudo de caso na Transmissão de Conceitos. *Zetetiké*. v.7. no 11. Pr .29-50. UNICAMP. Campinas, Brasil.

SCHUBRING, GERT. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática*. Notas de Aula. Campinas: Editora Autores Associados.

SCHUBRING, GERT. (2012). *Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?* Rio de janeiro: Editora LINC-UFRJ.

SCHUBRING, GERT. (2014). A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In ROQUE, T; GIRALDO, V. (Eds.), O *Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo*. Cap.2 – pp. 39–54. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

SEAGO, NANETTE. (2008) Mathematic Teaching Professional. In: WOOD, T (Series Editor) & KRAINER, K. (Volume Editor). *International Handbook of Mathematics Teacher education*: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities, and networks. (pp. 331-352). Sense Publishers.

SEGADAS, CLÁUDIA; NASSER, LÍLIAN; TINOCO, LÚCIA. (2014) A Extensão como Fonte de Pesquisa em Educação9 Matemática. In ROQUE, T; GIRALDO, V. (Eds.), *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo*. Cap.2 – pp. 263-287. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

SFARD, ANNA. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

SHULMAN, LEE. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Vol.15, pp. 4-14.

SHULMAN, LEE. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Havard Educational Review*, 1997, v. 57, pp. 1–22.

SILVERMAN, J; THOMPSON, P. (2008) Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Volume 11, Issue 6, November, 2008. Springer.

SMITH, B. OTHANEL, in colaboration with, COHEN, Saul B; PEARL, Arthur. (1969) Teachers for the real world. Washington DC: The American Association of Colleges for Teacher Education. Disponível em: http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?_nfpb=true&_&ERICExtSearch_SearchValue_0=ED027267&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=ED027267 – acesso em 27 de outubro de 2011.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SBEM. Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de licenciatura em Matemática: Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, 2003, 43f.

SULLIVAN, PETER. (2008) Knowledge for Teaching Mathematics. In: SULLIVAN, P; WOOD, T. (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* –

Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development (vol.1; pp. 273–298). Sensei Publishers. Rotterdam, Taipei.

SULLIVAN, PETER; WOOD, TERRY. (Eds.). (2008) The International Handbook of Mathematics Teacher Education – Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development. vol.1. Sensei Publishers. Rotterdam, Taipei.

SZTAJN, PAOLA. (2007) O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. In: *Educação Matemática em Revista*, ano 9, n.11A, Edição Especial, pp. 17–28.

TAKAHASHI, A; YOSHIDA, M. (2004). How Can We Start Lesson Study?: Ideas for establishing lesson study communities. *Teaching Children Mathematics*, Volume 10, Number 9, pp. 436-443.

TARDIF, MAURICE; LESSARD, C; e LAHAYE, L. (1991) Os professores face ao saber. Esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria e Educação* nº 4, Porto Alegre: Pannônica.

TARDIF, MAURICE. (2012) *Saberes Docentes e Formação Profissional*. 13ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

USISKIN, Z. PERESSINI, A. MARCHISOTTO, E.A.; STANLEY, D. (2003) *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

VIANNA, CARLOS ROBERTO; CURY, HELENA. (2010) Disciplinas de Fundamentos de Matemática: uma discussão à luz dos significados da palavra “fundamentos”. *Bolema*, Rio Claro (SP), v.23, no 36, pp. 715-731.