

# Técnicas de otimização aplicadas ao estudo do problema de estratégia de oferta ótima de geradores termelétricos em esquemas competitivos de oferta para sistemas elétricos

Marcia Fampa <sup>\*</sup>and Denise Candal <sup>†</sup>and Luiz Augusto Barroso <sup>‡</sup>

July 29, 2003

## Abstract

A Programação em dois níveis, uma das áreas mais importantes da otimização global, é bem apropriada se o problema em questão envolve uma estrutura hierárquica onde um subconjunto de variáveis é restrito a ser uma solução de um problema de otimização parametrizado pelas variáveis restantes. O problema de dois níveis está associado a um modelo envolvendo dois agentes de decisão. Neste trabalho, veremos como este modelo se aplica à formulação do problema de determinação da estratégia ótima de ofertas de agentes privados no setor de geração de energia elétrica.

Neste escopo, apresentaremos uma formulação matemática em dois níveis para o este problema, bem como apresentaremos heurísticas para a resolução do problema.

## 1 Introdução

Empresas concessionárias de energia elétrica em diversos países estão passando por mudanças radicais em seus mecanismos de regulação e de mercado. A principal característica deste processo de reestruturação é a tentativa de aumentar a eficiência do setor através de mecanismos de mercado. Em muitos países a reestruturação contém incentivos para a participação de agentes privados no processo de produção de energia, que historicamente tem sido exercida

---

<sup>\*</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Departamento de Ciência da Computação/ COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Caixa Postal 68511, Rio de Janeiro, RJ 21945-970, Brasil (fampa@cos.ufrj.br)

<sup>†</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Caixa Postal 68511, Rio de Janeiro, RJ 21945-970, Brasil (denise@cos.ufrj.br)

<sup>‡</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Caixa Postal 68511, Rio de Janeiro, RJ 21945-970, Brasil (barroso@cos.ufrj.br)

pela administração pública indireta. O tradicional planejamento da expansão e operação, baseados em uma otimização centralizada, tem sido substituído por procedimentos descentralizados. Ao invés de seguir um plano de expansão produzido por uma agência de planejamento central, os agentes privados são livres para decidir a construção de unidades geradoras e competir pelos contratos de vendas de energia para empresas de distribuição e consumidores livres. Os geradores podem livremente fazer suas ofertas de preço e capacidade de geração para a produção de energia, tipicamente em bases horárias para o próximo dia ou próxima semana. As unidades são então carregadas por ordem crescente da oferta de preço unitário mínimo até que a demanda seja atendida. Os geradores despachados recebem o preço da unidade carregada mais cara, que corresponde ao custo marginal de curto prazo do sistema ou preço *spot*.

Alguns dos aspectos deste novo marco regulatório que afetam as oportunidades de negócios para os geradores de energia, podem ser descritos como:

1. Um operador do sistema controla a produção de todas as usinas elétricas do sistema, com o objetivo de minimizar os custos operativos. Além de otimizar a geração, o operador calculará o preço *spot* da energia a cada hora; este preço serve como referência para todas as compras e vendas de energia.

2. Todos os geradores e demandas participam de um Mercado Atacadista de Energia (MAE). Cada gerador recebe do MAE um pagamento *spot* horário dado pelo produto de sua geração pelo preço *spot* do sistema. Por sua vez, cada demanda paga ao MAE uma tarifa *spot* dada pelo produto de seu consumo pelo mesmo preço *spot* do sistema. Como a geração e demanda se igualam a cada hora, o resultado líquido dos pagamentos e tarifas *spot* é zero, isto é, há uma transferência de demanda para os geradores.

Os temas relacionados à reestruturação do setor elétrico deram origem a uma série de questões que têm sido amplamente estudadas e discutidas em trabalhos encontrados na literatura. Um dos aspectos conceitualmente atraentes nestes temas é a utilização do esquema de pagamento *spot*, uma vez que, havendo competição perfeita, ele produz sinais econômicos eficientes para expansão do sistema. Isto é, se o sistema está otimamente dimensionado, a remuneração *spot* se iguala aos custos de investimento mais as despesas operacionais. Por razões semelhantes, quando o preço *spot* é definido pelo conjunto de ofertas de preços unitários mínimos, a geração de energia é feita a mínimo custo, nas condições de “mercado perfeito”. Entretanto, na prática, raramente a competição pela venda de energia entre as empresas geradoras se dá de forma perfeita. Enquanto parece haver um consenso em relação às vantagens de decisões de investimento descentralizadas, a eficiência operacional do livre mercado em sistemas elétricos se baseia na hipótese de que a ação individual de nenhum agente pode afetar o preço do sistema, ou preço *spot*. No entanto, como a elasticidade da demanda nos mercados de eletricidade é baixa, as empresas geradoras podem ter um comportamento no mercado realizando suas ofertas de energia de forma estratégica objetivando aumentar o preço *spot* do sistema e conseqüentemente seus lucros.

Este trabalho aborda o problema de determinar a estratégia de oferta ótima de um agente térmico no setor de geração de energia e baseia-se no trabalho apresentado por R. Kelman e M. Pereira [2]. Neste escopo, objetiva-se inicial-

mente apresentar uma formulação matemática para este problema, ou seja, o problema de determinar a estratégia de oferta para um dado agente que lhe retorne o máximo lucro. Formulamos este problema como um problema de programação matemática em dois níveis.

O problema em dois níveis aplica-se naturalmente a situações em que vários agentes que divergem quanto aos objetivos, interferem nas decisões a serem tomadas. O problema de determinação da estratégia ótima de oferta para o sistema elétrico, enquadra-se claramente neste contexto, uma vez que cada agente deseja ofertar de forma a maximizar seu lucro próprio, enquanto o agente regulador deseja minimizar o custo total do despacho de energia.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção 2 o problema de despacho em sistemas térmicos é formulado, na seção 3 a remuneração líquida de um dado gerador é considerada, na seção 4 o problema de determinar a estratégia ótima de oferta é formulado como um problema em dois níveis. Na seção 5, um modelo de programação inteira mista é apresentado para o problema, na seção 6 são apresentadas heurísticas para resolvê-lo. Resultados numéricos são apresentados para alguns exemplos na seção 7. Na seção 8 apresentamos a formulação do problema quando a incerteza com relação à oferta dos concorrentes é considerada e adaptamos a este problema os procedimentos algoritmos já utilizados no caso determinístico. Na seção 9 introduzimos uma nova solução inicial para o problema e um procedimento de busca local para melhorar a solução obtida pelas heurísticas e finalmente na seção 10 apresentamos resultados numéricos para o problema com incerteza na oferta dos concorrentes.

## 2 O esquema de oferta em sistemas térmicos

Nesta seção consideraremos o funcionamento do Mercado Atacadista de Energia em sistemas térmicos. Como discutido na seção anterior, todos os dias no MAE, cada gerador  $j$  faz sua oferta de preço  $\lambda_j$  (\$/MWh) e fornece a sua capacidade de geração  $\bar{g}_j$  (MWh), para cada intervalo de tempo do dia. Considerando estes dados e uma previsão para a demanda  $d$  (MWh), o operador do sistema determina o despacho de mínimo custo através da solução do seguinte problema de programação linear, a cada intervalo de tempo:

$$\begin{array}{ll}
 z = & \text{Minimizar} \quad \sum_{j \in J} \lambda_j g_j \\
 \text{sujeito a} & \sum_{j \in J} g_j = d \quad \pi_d \quad (R1) \\
 & g_j \leq \bar{g}_j \quad \pi_{g_j} \quad j \in J \quad (R2) \\
 & g_j \geq 0 \quad j \in J \quad (R3)
 \end{array} \quad (1)$$

onde  $z$  representa o custo de operação do sistema (\$), a variável  $g_j$  representa a energia produzida pelo gerador  $j$  (MWh) e  $J$  é o conjunto de índices associados às usinas que compõem o sistema. As restrições do problema representam o atendimento à demanda (R1), o atendimento à capacidade de geração de cada gerador (R2) e a não negatividade das variáveis de geração (R3).

As variáveis  $\pi_d$  e  $\pi_{g_j}$  são as variáveis duais associadas respectivamente às restrições de demanda e capacidade de geração.

Define-se o problema dual associado ao problema de despacho (1) como o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{\pi_d, \pi_{g_j}} && d\pi_d + \sum_{j \in J} \bar{g}_j \pi_{g_j} \\ & \text{sujeito a} && \pi_d + \pi_{g_j} \leq \lambda_j && j \in J \\ & && \pi_{g_j} \leq 0 && j \in J \end{aligned} \quad (2)$$

Da teoria de dualidade, sabemos que na solução ótima do problema, o valor da variável dual  $\pi_d$ , associada à restrição de demanda, representa a derivada do custo de operação do sistema  $z$  em relação à variação na demanda  $d$ , isto é

$$\frac{\partial z}{\partial d} = \pi_d.$$

A variável dual  $\pi_d$  representa portanto o custo marginal de curto prazo (CMCP) ou preço *spot* do sistema. Podemos verificar facilmente que se uma dada usina  $j$  faz uma oferta de preço maior do que o preço *spot*, então esta usina não será despachada pelo operador do sistema e na solução ótima de (1), teremos  $g_j = 0$ . Por outro lado, se uma dada usina  $i$  faz uma oferta de preço menor do que o preço *spot* do sistema, esta usina será totalmente despachada e na solução ótima de (1), teremos  $g_i = \bar{g}_i^*$ .

Finalmente observamos que a solução do problema (1) pode ser obtida por inspeção, ou seja, carregando-se os geradores por oferta de preço crescente até que a demanda seja atendida.

### 3 Remuneração líquida da empresa geradora de energia

Uma vez que o despacho é realizado pelo operador do sistema, cada gerador despachado é remunerado pelo produto do preço *spot* pela quantidade de energia por ele produzida. A remuneração líquida do gerador  $j$  em um dado intervalo de tempo é então dada pela seguinte expressão:

$$R_j = (\pi_d - c_j)g_j, \quad \text{para } j \in J,$$

onde  $c_j$  é o custo de operação da usina geradora  $j$ .

A remuneração líquida  $R$ , de uma empresa  $E$  que possui um conjunto de usinas geradoras, será dada pela soma das remunerações líquidas de cada uma das suas usinas, ou seja,

$$R = \sum_{j \in E} R_j,$$

onde utilizamos  $E$  também para denotar o conjunto de índices associados às usinas pertencentes à empresa ( $E \in J$ ).

## 4 Estratégia Ótima de Oferta

O Objetivo da empresa  $E$  que possui um conjunto de usinas é determinar a cada intervalo de tempo, o conjunto de preços  $\lambda_E = \{\lambda_j, j \in E\}$  e de capacidades de geração  $\bar{g}_E = \{\bar{g}_j, j \in E\}$  de forma a maximizar a sua remuneração líquida. Este objetivo pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } R &= \sum_{j \in E} [\pi_d(\lambda_E, \bar{g}_E) - c_j] g_j(\lambda_E, \bar{g}_E), \\ g_j &\leq \bar{g}_j \end{aligned}$$

onde  $\pi_d(\lambda_E, \bar{g}_E)$  e  $g_j(\lambda_E, \bar{g}_E)$  representam respectivamente o preço *spot* do sistema e a geração da usina  $j$  num dado intervalo de tempo. Observe que os valores destas variáveis são obtidos através da solução do problema de despacho (1) para o conjunto de ofertas de preço e capacidade de geração,  $\lambda_E$  e  $\bar{g}_E$ , respectivamente.

O problema de determinar a estratégia ótima de oferta de preço e capacidades de geração para cada usina  $j \in E$  de uma dada empresa, ou seja, a estratégia que leva ao máximo lucro pode então ser formulado como o seguinte problema de programação matemática em dois níveis:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\lambda_E, \bar{g}_E} \quad & R = \sum_{j \in E} [\pi_d - c_j] g_j \\ \text{suj. a} \quad & \\ & g_j - \bar{g}_j \leq 0 \quad j \in E \\ \text{Min}_{g_j} \quad & \sum_{j \in E} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* g_j \\ \text{suj. a} \quad & \sum_{j \in J} g_j = d \\ & g_j \leq \bar{g}_j^* \quad j \notin E \\ & \bar{g}_j \geq 0 \quad j \in E \\ & g_j \geq 0 \quad j \in J \end{aligned} \quad (3)$$

Observe que o primeiro nível deste problema representa os interesses da empresa  $E$ , enquanto o segundo nível representa os interesses do operador do sistema elétrico. Em programação em dois níveis a empresa é classificada como líder deste problema e controla as variáveis  $\lambda_j$  e  $\bar{g}_j$ , para  $j \in E$ , enquanto o operador do sistema é classificado como seguidor do problema e controla as variáveis  $g_j$  para  $j \in J$ .

No modelo (3) os preços  $\lambda_j$  e as capacidades de geração  $\bar{g}_j$  para o conjunto de usinas da empresa  $E$  são variáveis de decisão. Por outro lado, os preços  $\lambda_j^*$  e as capacidades de geração  $\bar{g}_j^*$  para o restante das usinas são considerados conhecidos *a priori*, ou seja são dados de entrada para o problema.

### 4.1 Modelos de Cournot e Bertrand

O problema de dois níveis (3) é um problema de difícil solução. Para iniciar o seu estudo, consideramos duas alternativas de simplificação:

- Modelo de Cournot - considera as ofertas de preço  $\lambda_j$ , iguais a zero e otimiza somente as capacidades  $\bar{g}_j$ ,  $j \in E$ .
- Modelo de Bertrand - considera as ofertas de capacidade de geração  $\bar{g}_j$ , fixas e otimiza somente os preços  $\lambda_j$ ,  $j \in E$ .

No restante deste trabalho, consideraremos a simplificação do problema de determinar a oferta ótima, dada pelo modelo de Bertrand. Neste caso, o problema em dois níveis (3) pode ser reescrito sem restrições no primeiro nível, como apresentado a seguir:

$$\begin{array}{ll}
\text{Max}_{\lambda_E} & R = \sum_{j \in E} [\pi d - c_j] g_j \\
\text{su. a} & \\
\text{Min}_{g_j} & \sum_{j \in E} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* g_j \\
\text{su. a} & \sum_{j \in J} g_j = d \\
& g_j \leq \bar{g}_j^* \quad j \in J \\
& g_j \geq 0 \quad j \in J
\end{array} \tag{4}$$

Apesar do modelo de Bertrand representar uma simplificação do problema de determinar a oferta ótima em sistemas térmicos, ele ainda constitui um problema de difícil solução, definido como um problema de programação bi-linear em dois níveis (PBLDN), no qual a função objetivo do líder é bi-linear e, no problema seguidor, a função objetivo também bi-linear é na verdade uma função linear parametrizada pelas variáveis de decisão do líder,  $\lambda_E$ . As restrições de ambos os problemas (líder e seguidor) são lineares.

A programação bi-linear em dois níveis e sua aplicação ao problema de tarifação foi considerada por Labbé, Marcotte e Savard [3]. Neste trabalho, os autores mostram que o problema, na sua forma geral, é NP-difícil. O problema de determinar a oferta ótima em sistemas térmicos, no entanto, tem restrições que lhe permitem interessantes abordagens algorítmicas. Estas abordagens serão discutidas e os algoritmos propostos em [3] serão adaptados ao problema.

Assumiremos que a demanda do sistema pode ser atendida sem a participação das usinas pertencentes à  $E$ , ou seja, a soma das capacidades máximas de geração das usinas concorrentes não é menor do que a demanda. Esta hipótese, somada à observação que o conjunto de soluções viáveis do problema seguidor é limitado, constitui uma condição necessária e suficiente para que o problema em dois níveis tenha solução ótima limitada.

Com o intuito de aumentar o entendimento sobre o problema, analisaremos a seguir a solução de um pequeno exemplo numérico.

**Exemplo 1** Considere o sistema de geração elétrica onde o conjunto de usinas concorrentes  $J - E$ , é composto por 7 usinas ( $j = 1, \dots, 7$ ) e a empresa  $E$  é composta por uma única usina ( $j = 8$ ). A demanda do sistema é igual a 100MWh, o custo de operação da usina 8 é zero e os outros dados de entrada para o problema estão apresentados na seguinte tabela:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{g}_j^*$ (MWh)	20	20	20	10	10	5	20	50
$\lambda_j^*$ (\$/MWh)	10	20	30	40	60	80	95	

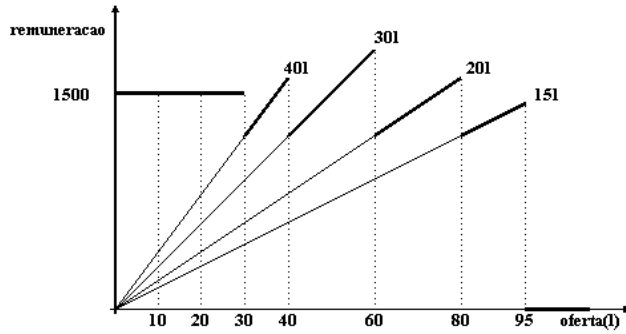


Figure 1: Função Remuneração  $\times$  Oferta

Verificamos que para um dado valor da oferta  $\lambda_8^1$ , a solução ótima do problema seguidor, ou do problema de despacho (1), é obtida num vértice do poliedro definido pelo seu conjunto de restrições lineares. Da análise de sensibilidade em programação linear temos que este vértice permanece ótimo até que  $\lambda_8$  alcance um determinado valor  $\lambda_8^2$ . Neste ponto, um novo vértice é obtido como solução ótima do problema, e novamente permanece ótimo até que  $\lambda_8$  alcance um novo valor  $\lambda_8^3$ . A análise de sensibilidade para o exemplo, em função da alteração na oferta  $\lambda_8$  é apresentada na tabela a seguir:

$\lambda_8$	$g_8$	$\pi_d$	$\pi_d g_8$
$[0, 10]$	50	30	1500
$(10, 20]$	50	30	1500
$(20, 30]$	50	30	1500
$(30, 40]$	40	$\lambda_8$	$40\lambda_8$
$(40, 60]$	30	$\lambda_8$	$30\lambda_8$
$(60, 80]$	20	$\lambda_8$	$20\lambda_8$
$(80, 95]$	15	$\lambda_8$	$15\lambda_8$
$(95, +\infty)$	0	95	0

Da tabela acima, podemos observar que do ponto de vista do líder, a função objetivo que representa o seu lucro, dada por  $\pi_d g_8$ , é descontínua, não côncava e linear por partes, como ilustramos na figura 1.

A função linear é mais especificamente, uma função constante enquanto a usina 8 não se torna o gerador marginal. Neste intervalo a remuneração da usina 8 é constante e igual ao produto da oferta da usina mais cara despachada pela sua geração máxima. A usina 8 passa a ser marginal quando a sua oferta ultrapassa o valor 30. A partir deste ponto a inclinação de cada parte da função remuneração é dada pela geração ótima da usina 8,  $g_8^i$ , para cada intervalo de oferta  $(\lambda_8^i, \lambda_8^{i+1}]$ . A geração ótima  $g_8^i$  é dada pela reação do seguidor à oferta cujo valor se encontra neste intervalo. Se  $\lambda_8$  excede o valor 95, a reação do

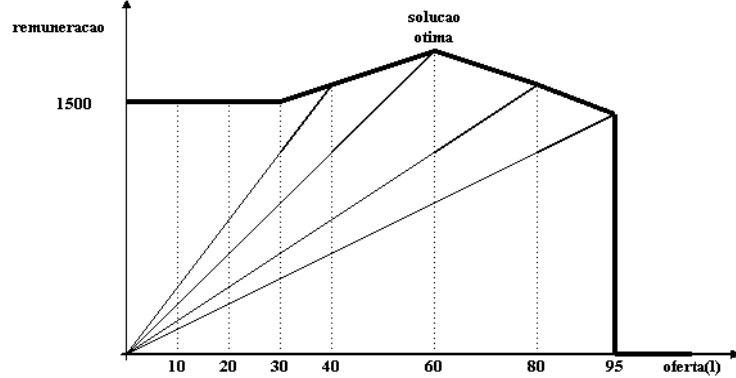


Figure 2: Envelope Superior da Função Remuneração × Oferta

seguidor é determinar  $g_8 = 0$  e neste caso, a remuneração da usina 8 cai para zero.

Observamos que apesar da função remuneração do líder não ser contínua e nem convexa, ela é uma função semicontínua superior. Este fato nos garante a existência de pelo menos uma solução ótima para o modelo de Bertrand (4). O envelope superior para o exemplo considerado ilustra este resultado na figura 2. Podemos observar na figura, que a solução ótima é obtida quando  $\lambda_8 = 60$ , neste caso  $g_8 = 30$  e a remuneração da usina 8 é igual a \$1800.

No exemplo 1 consideramos o caso em que a empresa que procura maximizar sua receita líquida tem uma única usina, ou seja  $|E| = 1$ . No próximo teorema mostraremos que caso a empresa possua mais de uma usina poderemos sempre considerar na formulação do modelo de Bertrand (4), sem nenhuma perda de generalidade, que a empresa possui uma única “grande usina” cuja capacidade de geração é dada pela soma das capacidades de geração de cada uma das suas usinas.

**Teorema 1** *Considere o problema (4) onde  $E = \{1, 2\}$  e uma solução ótima é dada por  $\tilde{\pi}_d, \tilde{\pi}_{g_j}, \tilde{g}_j$  para  $j \in J$  e  $\lambda_j$ , para  $j \in E$ . Considere  $z^*$  o valor da função objetivo de (4) na solução ótima do problema, ou seja,*

$$z^* = \sum_{j \in E} [\tilde{\pi}_d - c_j] \tilde{g}_j.$$

*Suponha que  $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2$ . Neste caso, existe uma outra solução ótima para o problema, na qual  $\lambda_1 = \lambda_2$ .*

**Prova:** Considerando-se que para cada valor de  $\lambda_j$  com  $j \in E$ , fixo pelo líder, o problema seguidor é um problema de programação linear, e considerando-se



que qualquer solução viável para o problema (4), deve respeitar as condições de otimalidade do problema seguidor, temos que as seguintes restrições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} \tilde{g}_j &= d \\
\tilde{g}_j &\leq \bar{g}_j^* & j \in J \\
\tilde{g}_j &\geq 0 & j \in J \\
\tilde{\pi}_d + \tilde{\pi}_{g_j} - \tilde{\lambda}_j &\leq 0 & j \in E \\
\tilde{\pi}_d + \tilde{\pi}_{g_j} &\leq \lambda_j^* & j \notin E \\
\tilde{\pi}_{g_j} &\leq 0 & j \in J \\
\sum_{j \in E} \tilde{\lambda}_j \tilde{g}_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* \tilde{g}_j - d \tilde{\pi}_d - \sum_{j \in J} \bar{g}_j^* \tilde{\pi}_{g_j} &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

A seguir, dividiremos a demonstração deste teorema em duas etapas. Na primeira provaremos que se existe uma solução ótima para (4), então existe uma solução ótima na qual  $\lambda_1 \leq \pi_d$ . Baseados então neste resultado, provaremos na segunda etapa que existe também uma solução ótima na qual  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

- (I) Suponha que  $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\pi}_d$ . Então a solução obtida ao substituir-se  $\tilde{\lambda}_1$  por  $\tilde{\tilde{\lambda}}_1 := \tilde{\pi}_d$  na solução ótima que foi dada para (4), é também uma solução ótima para o problema.

Uma vez que o valor da função objetivo  $z^*$  não se altera ao substituirmos o valor de  $\tilde{\lambda}_1$ , para provar a afirmação (I) basta verificar que realizando esta substituição em (5), as restrições continuam satisfeitas. A restrição  $\tilde{\pi}_d + \tilde{\pi}_{g_1} - \tilde{\tilde{\lambda}}_1 \leq 0$  é facilmente comprovada uma vez que  $\tilde{\pi}_{g_1} \leq 0$ . Para verificar a condição de complementaridade dada pela última restrição em (5), devemos lembrar que se  $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\pi}_d$  então  $\tilde{g}_1 = 0$ , já que a oferta de preço do gerador 1 é maior que o preço *spot* do sistema.

Baseados na afirmação (I), consideraremos sem perda de generalidade, que  $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\pi}_d$  na solução ótima de (4), e passaremos para a segunda fase da demonstração.

- (II) Considere que  $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\pi}_d$ . Então a solução obtida ao substituir-se  $\tilde{\lambda}_2$  por  $\tilde{\tilde{\lambda}}_2 := \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\pi}_{g_2}$  por  $\tilde{\tilde{\pi}}_{g_2} := \tilde{\pi}_{g_2} + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$  na solução ótima que foi dada para (4), é também uma solução ótima para o problema.

Novamente, o valor da função objetivo  $z^*$  não se altera ao substituirmos os valores de  $\tilde{\lambda}_2$  e  $\tilde{\pi}_{g_2}$ . Verificamos a seguir que as restrições de (5) que são modificadas por estas substituições continuam satisfeitas.

- Temos, de (5), que  $\tilde{\pi}_d + \tilde{\pi}_{g_2} - \tilde{\lambda}_2 \leq 0$ , logo

$$\tilde{\pi}_d + [\tilde{\pi}_{g_2} + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2] - \tilde{\lambda}_1 \leq 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_d + \tilde{\tilde{\pi}}_{g_2} - \tilde{\lambda}_1 \leq 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_d + \tilde{\tilde{\pi}}_{g_2} - \tilde{\tilde{\lambda}}_2 \leq 0.$$

- Temos, de (5), que  $\tilde{\pi}_d + \tilde{\pi}_{g_2} - \tilde{\lambda}_2 \leq 0$  e, por hipótese,  $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\pi}_d$ , logo

$$\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\pi}_{g_2} - \tilde{\lambda}_2 \leq 0 \Rightarrow \tilde{\tilde{\pi}}_{g_2} \leq 0.$$

- Considerando que  $\tilde{\pi}_d \geq \tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2$ , temos que  $\tilde{g}_2 = \bar{g}_2^*$ , logo

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_2 \tilde{g}_2 - \bar{g}_2^* \tilde{\pi}_{g_2} &= \tilde{\lambda}_1 \tilde{g}_2 - \bar{g}_2^* \tilde{\pi}_{g_2} - \tilde{\lambda}_1 \bar{g}_2^* + \tilde{\lambda}_2 \bar{g}_2^* = \\ \tilde{\lambda}_1 \tilde{g}_2 - \bar{g}_2^* (\tilde{\pi}_{g_2} + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2) &= \tilde{\lambda}_2 \tilde{g}_2 - \bar{g}_2^* \tilde{\pi}_{g_2}.\end{aligned}$$

Com a igualdade acima, facilmente comprovamos que a condição de complementaridade em (5) continua satisfeita com as substituições nos valores das variáveis  $\lambda_2$  e  $\pi_{g_2}$ .

## 5 Formulação em um único nível

O problema de programação em dois níveis (4) pode ser formulado como um problema equivalente com um único nível, substituindo o problema seguidor pelas suas condições de otimalidade. Assim, para cada valor de  $\lambda_j$  com  $j \in E$ , fixo pelo líder, podemos escrever o problema (4) como:

$$\begin{aligned}\text{Max} \quad & \sum_{j \in E} [\pi_d - c_j] g_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j \in J} g_j = d \\ & g_j \leq \bar{g}_j^* \quad j \in J \\ & g_j \geq 0 \quad j \in J \\ & \pi_d + \pi_{g_j} - \lambda_j \leq 0 \quad j \in E \\ & \pi_d + \pi_{g_j} \leq \lambda_j^* \quad j \notin E \\ & \pi_{g_j} \leq 0 \quad j \in J \\ & \sum_{j \in E} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* g_j - d \pi_d - \sum_{j \in J} \bar{g}_j^* \pi_{g_j} = 0\end{aligned} \quad (6)$$

Penaliza-se então as restrições de complementaridade, obtendo-se o modelo abaixo com função objetivo bi-linear e restrições lineares.

$$\begin{aligned}\text{Max} \quad & \sum_{j \in E} [\pi_d - c_j] g_j - M \left( \sum_{j \in E} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* g_j - d \pi_d - \sum_{j \in J} \bar{g}_j^* \pi_{g_j} \right) \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j \in J} g_j = d \\ & g_j \leq \bar{g}_j^* \quad j \in J \\ & g_j \geq 0 \quad j \in J \\ & \pi_d + \pi_{g_j} - \lambda_j \leq 0 \quad j \in E \\ & \pi_d + \pi_{g_j} \leq \lambda_j^* \quad j \notin E \\ & \pi_{g_j} \leq 0 \quad j \in J\end{aligned} \quad (7)$$

onde  $M > 0$  é o parâmetro de penalização.

Observamos que para toda solução viável de (7), o termo penalizado é não negativo, uma vez que ele corresponde ao *gap* primal dual relativo aos problemas (1) e (2), e a viabilidade destes dois problemas continua garantida pelas restrições de (7).

No teorema a seguir, verificamos que o esquema de penalização considerado é um esquema de penalização exato, uma vez que pode-se provar que existe um

parâmetro  $M^*$  tal que se  $M > M^*$ , então uma solução ótima de (7) é também solução ótima de (6) e vice-versa, ou seja, se o parâmetro de penalização é suficientemente grande em (7), então a restrição de complementaridade será satisfeita na solução ótima do problema.

**Teorema 2** *Existe um parâmetro de penalização  $M^* > 0$ , tal que os problemas (7) e (6) são equivalentes para todo  $M \geq M^*$ .*

A demonstração deste teorema baseia-se na existência de solução ótima finita para o problema seguidor (o problema de despacho). Esta demonstração pode ser encontrada em [3].

## 6 Heurísticas Primais-Duais

Nesta seção descreveremos alguns procedimentos para resolver aproximadamente o problema bi-linear em dois níveis (4). Estes procedimentos são baseados em heurísticas primais-duais propostas em [1] para o problema linear em dois níveis e posteriormente estendidas para o caso bi-linear em [4].

As heurísticas propostas resolvem aproximadamente o problema penalizado (7), iterativamente. A cada iteração do procedimento o parâmetro de penalização é incrementado.

Numa dada iteração, para um valor de  $M$  fixo, um procedimento aproximado é utilizado para resolver o problema não linear e não convexo (7). Neste procedimento fixa-se alternadamente os valores das variáveis  $g_j$ , para  $j \in J$  e os valores das variáveis  $\lambda_E$ ,  $\pi_d$  e  $\pi_{g_j}$ , para  $j \in J$ . Uma vez fixados os valores de um dos grupos de variáveis, resolve-se então um problema de programação linear que define na sua solução, os valores do outro grupo de variáveis. A escolha do problema de programação linear resolvido quando os valores das variáveis  $\lambda_E$ ,  $\pi_d$  e  $\pi_{g_j}$  estão fixos, define duas diferentes heurísticas descritas a seguir:

• **Heurística 1:**

1. Dados  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$  e  $M > 0$
2. Resolver o problema penalizado (7), considerando  $g_j = \tilde{g}_j$ , para  $j \in J$  e obter a solução  $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\pi}_d, \tilde{\pi}_{g_j}$ , para  $j \in J$
3. Resolver o problema de despacho (1), considerando  $\lambda_E = \tilde{\lambda}_E$  e obter a solução  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$ .
4. Se  $\sum_{j \in E} \tilde{\lambda}_j \tilde{g}_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* \tilde{g}_j - d\tilde{\pi}_d - \sum_{j \in J} \tilde{g}_j^* \tilde{\pi}_{g_j} = 0$  então FIM.
5. Incrementar  $M$  e voltar para o item 2.

• **Heurística 2:**

1. Dados  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$  e  $M > 0$
2. Resolver o problema penalizado (7), considerando  $g_j = \tilde{g}_j$ , para  $j \in J$  e obter a solução  $\tilde{\lambda}_E, \tilde{\pi}_d, \tilde{\pi}_{g_j}$ , para  $j \in J$
3. Resolver o problema penalizado (7), considerando  $\lambda_E = \tilde{\lambda}_E, \pi_d = \tilde{\pi}_d, \pi_{g_j} = \tilde{\pi}_{g_j}$  e obter a solução  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$ .
4. Se  $\sum_{j \in E} \tilde{\lambda}_j \tilde{g}_j + \sum_{j \notin E} \lambda_j^* \tilde{g}_j - d\tilde{\pi}_d - \sum_{j \in J} \tilde{g}_j^* \tilde{\pi}_{g_j} = 0$  então FIM.
5. Incrementar  $M$  e voltar para o item 2.

Nas duas heurísticas propostas os seguintes procedimentos são adotados:

1. Aproximar o problema bilinear (6) por uma seqüência de problemas penalizados com valores cada vez maiores para o parâmetro de penalização.
2. Resolver aproximadamente cada problema penalizado iterativamente através da solução de uma seqüência de problemas de programação linear.

A idéia do procedimento 1 é de iniciar as heurísticas com a melhor solução para o líder, e a partir dela caminhar em direção à região viável do problema, ou seja, em direção ao espaço de soluções que satisfazem as condições de complementaridade do problema seguidor. A convergência da seqüência gerada por este procedimento, para a região viável do problema, é garantida pelo teorema 2. A solução inicial  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$  utilizada nas heurísticas corresponde a determinar  $\lambda_j = 0$ , para  $j \in E$ , no problema seguidor, como será visto na próxima subseção.

A idéia do procedimento 2 é de substituir um problema não linear e não convexo por uma série de problemas fáceis de programação linear, onde as variáveis primais  $g_j$  são separadas das variáveis duais  $\pi_d$  e  $\pi_{g_j}$  e das variáveis  $\lambda_j$  para  $j \in E$ , e cada programa linear trata de um dos subconjuntos das variáveis. Desta forma as heurísticas iteragem entre as ofertas do líder  $\lambda_E$  e as gerações  $g_j$  para  $j \in J$ , determinadas pelo seguidor. As heurísticas geram portanto uma seqüência de soluções básicas viáveis para o problema seguidor que podem corresponder à solução ótima do problema em dois níveis (4), ou não. Em caso

negativo é possível que as heurísticas converjam para um ótimo local do problema. Para obter melhores soluções, estratégias como diversificação que são utilizadas em metaheurísticas, podem ser aplicadas. Nestas estratégias, perturbações da solução ótima obtida em uma execução da heurística podem ser utilizadas como soluções iniciais numa nova execução. A estratégia utilizada na implementação realizada neste trabalho, consiste de um procedimento mais simples do que a diversificação. Considerando a estrutura do problema de determinar a estratégia ótima de oferta, executamos as heurísticas propostas partindo de duas soluções iniciais distintas e armazenamos a melhor solução encontrada. Este procedimento é apresentado na próxima subseção.

Finalmente, apresentamos uma simplificação no modelo penalizado (7), com a qual a variável  $\lambda_j$ , para  $j \in E$  pode ser eliminada. Notemos que ao fixarmos os valores das variáveis  $\pi_d$  e  $g_j$  e  $\pi_{g_j}$ , para  $j \in J$ , em (7), o problema se reduz a

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -M \sum_{j \in E} g_j \lambda_j \\ \text{sujeito a} & \lambda_j \geq \pi_d + \pi_{g_j} \quad j \in E. \end{array}$$

Sendo  $g_j \geq 0$ , concluímos que na solução ótima do problema teremos

$$\lambda_j = \pi_d + \pi_{g_j}, \text{ para } j \in E,$$

podendo assim substituir a variável  $\lambda_j$  em (7) por  $\pi_d + \pi_{g_j}$ .

## 6.1 Solução Inicial

As heurísticas 1 e 2 partem de uma solução inicial  $\tilde{g}_j$  para  $j \in J$ . Esta solução foi obtida inicialmente resolvendo-se o problema de despacho (1), considerando-se  $\lambda_j = 0$  para  $j \in E$ , ou seja, pela solução do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{j \notin E} \lambda_j g_j \\ \text{sujeito a} & \sum_{j \in J} g_j = d \\ & g_j \leq \tilde{g}_j \quad j \in J \\ & g_j \geq 0 \quad j \in J \end{array} \quad (8)$$

Com o objetivo de buscar uma melhor solução, principalmente nos casos onde a solução ótima do problema não corresponde à geração da capacidade máxima das usinas de  $E$ , resolvemos cada heurística duas vezes. Na segunda, partimos da solução inicial obtida ao resolver o problema de despacho, tomando  $\lambda_j = +\infty$  para  $j \in E$ , ou seja, pela solução de:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{j \notin E} \lambda_j g_j \\ \text{sujeito a} & \sum_{j \notin E} g_j = d \\ & g_j \leq \tilde{g}_j \quad j \notin E \\ & g_j \geq 0 \quad j \notin E \end{array} \quad (9)$$

Neste caso  $\tilde{g}_j = 0$ , para  $j \in E$ . Como assumimos que as usinas concorrentes são capazes de atender à demanda, o problema acima certamente tem solução viável.

## 7 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos com a implementação das heurísticas propostas e a solução do modelo de programação inteira mista apresentado na seção 5. Os problemas de programação linear considerados nas heurísticas e o problema de programação inteira mista foram resolvidos pelo *solver* XPRESS 12. Os computadores utilizados foram um pentium 2350 e um k6 - 2450, ambos com 128 Mb. Os dados de entrada da maior parte dos testes realizados foram gerados aleatoriamente. Esta geração será descrita na seção 7.1. Os problemas 2,3,4,5, marcados com \*, não tiveram seus dados de entrada gerados aleatoriamente. Os dados destes problemas estão descritos na tabela 4. O oitavo problema com 137 usinas, também não foi gerado aleatoriamente. Os dados deste problema são dados reais do sistema elétrico brasileiro.

Nas tabelas 1 e 2 apresentamos as soluções dos exemplos obtidas pelo modelo inteiro misto e pelas heurísticas. No segundo caso, para cada problema-teste, a melhor solução encontrada pelas duas heurísticas propostas e com as duas soluções iniciais utilizadas, foi considerada. O campo não preenchido na coluna referente às heurísticas indica que o valor obtido pelas heurísticas é o mesmo valor obtido pelo modelo inteiro misto. Na tabela 1 são fornecidos os valores da função objetivo, da oferta ótima da usina e do preço *spot* e, na tabela 2 é fornecida a geração da usina. Na última coluna da tabela 1 apresentamos a razão entre a solução obtida pelas heurísticas e a solução ótima do problema dada pelo modelo inteiro misto, e na última coluna da tabela 2 apresentamos a geração máxima da usina. Na tabela 3 apresentamos o tempo de execução dos algoritmos.

### 7.1 Gerador Aleatório

- Objetivo: Construir um programa que crie exemplos viáveis para o problema de despacho em esquemas competitivos de oferta para o sistema elétrico.
- Saída: O programa gera um arquivo `parametros.dat` com o seguinte formato:

$$\begin{array}{l} n \\ d \\ c \\ g(1) \ g(2) \ \dots \ g(n) \ g(n+1) \\ \lambda(1) \ \lambda(2) \ \dots \ \lambda(n) \end{array}$$

onde :

- $n$  - número de geradoras concorrentes
- $d$  - demanda do sistema
- $c$  - custo de operação por unidade
- $g(i)$  - geração máxima do gerador  $i$

–  $\lambda(i)$  - preço do gerador  $i$

• Observações:

–  $n$  é um dado de entrada do programa

–  $d$  é gerado aleatoriamente pelo programa com uma única restrição:

\*  $d \geq 0.5n$

–  $c$  é gerado aleatoriamente pelo programa com as seguintes restrições:

\*  $c \neq 0$

\*  $c$  é menor do que  $\lambda_{max}$ , onde  $\lambda_{max}$  é a oferta do gerador mais caro despachado na solução ótima do problema de despacho onde só os concorrentes são considerados (problema (9)).

–  $g(i)$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$  são gerados aleatoriamente pelo programa com as seguintes restrições:

\*  $g(i) \neq 0$

\*  $\sum_{j=1}^n g(j) \geq d$

–  $\lambda(i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  são gerados aleatoriamente pelo programa com uma única restrição:

\*  $\lambda(i) \neq 0$

P	J	Inteiro			Heurística			$\frac{z_H^*}{z_I^*}$
		$z_I^*$	$\lambda$	$\pi_d$	$z_H^*$	$\lambda$	$\pi_d$	
1	3	200	0	15				1
*2	3	600	60	60				1
*3	5	1800	30	30	1600	20	20	0.9
*4	5	2000	50	50	1600	20	20	0.8
*5	5	2200	110	110				1
6	9	300	88	88	180	0	56	0.6
7	101	12800	300	300				1
*8	137	1008	6	6				1
9	500	31789	1213	1213				1
10	600	1137	867	867				1
11	950	24128	6101	6101				1
12	1000	44058	52	52		0		1
13	4000	603	0	1501		1501		1
14	4500	13013	0	1535		1535		1
15	5000	7746124	55568	55568				1
16	10000	3393990	0	618652		618652		1
17	30000	5106	2999	2999				1
18	50000	3690	1032	1032				1
19	100000	15372	1635	1635				1

Tabela 1: Problemas-Teste (Oferta)

P	J	Inteiro	Heurística	$\bar{g}^*$
		$g$	$g$	
1	3	20		20
*2	3	10		40
*3	5	60	80	100
*4	5	40	80	100
*5	5	20		100
6	9	6	10	10
7	101	100		100
*8	137	1008		1008
9	500	383		383
10	600	3		3
11	950	104		104
12	1000	1049		1049
13	4000	1		1
14	4500	11		11
15	5000	1252		1252
16	10000	30		30
17	30000	3		3
18	50000	18		18
19	100000	36		36

Tabela 2: Problemas-Teste (Geração)

P	J	Inteiro	Heurística
1	3	0,264	0,686
*2	3	0,464	0,983
*3	5	0,186	0,227
*4	5	0,183	0,229
*5	5	0,21	0,232
6	9	0,301	0,776
7	101	0,761	0,66
*8	137	1,907	2,049
9	500	4,728	1,179
10	600	4,782	0,339
11	950	25,308	0,717
12	1000	15,21	10,298
13	4000	3,198	3,198
14	4500	5,805	3,187
15	5000	10m 47,443	6,813
16	10000	15m 19,826	2m 14,988
17	30000	33,167	14,76
18	50000	6m 43,943	1m 14,598
19	100000	27m 34,906	6m 55,008

Tabela 3: Problemas-Teste (Tempo de execução)



		P																		
		*2			*3			*4			*5									
$n$		3												5						
$d$		50												100						
$c$		0												0						
$g_j$		20	20	20	40										20	20	20	20	20	100
$\lambda_j$		10	15	60	10	20	30	40	50	10	20	30	50	60	10	20	30	50	110	

Tabela 4: Problemas não gerados aleatoriamente

## 8 Oferta com Incerteza

Na formulação do modelo (4), consideramos que as ofertas de preço das usinas concorrentes à empresa  $E$  são conhecidas *a priori*. Ou seja,  $\lambda_j^*$ , para  $j \notin E$ , aparecem como dados de entrada na resolução do modelo. Esta informação, no entanto, não é de fato de conhecimento da empresa no momento em que ela faz as suas ofertas, que são realizadas portanto, sob uma certa incerteza. Sendo assim, o que de fato é maximizado pela empresa não é o valor determinístico do seu lucro, mas sim o valor esperado do lucro ( $ER(\lambda_E)$ ), considerando-se possíveis cenários para as ofertas dos concorrentes e a probabilidade destes cenários acontecerem, ou seja,

$$ER(\lambda_E) = \text{Max} \sum_{s \in S} p_s R^s(\lambda_E)$$

onde:

- $ER(\lambda_E)$  é o valor esperado do lucro da empresa  $E$ ,
- $s$  é o índice referente ao cenário ( $S$  é o conjunto dos índices),
- $p_s$  é a probabilidade de ocorrer o cenário  $s$ ,
- $R^s(\lambda_E)$  é o lucro da empresa no cenário  $s$ .

Neste caso, o modelo de Bertrand para o problema de determinar a estratégia ótima de oferta para a empresa  $E$  pode ser formulado como o seguinte problema em dois níveis:

$$\begin{array}{ll}
\text{Max}_{\lambda_E} & ER = \sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s \\
\text{sujeito a} & \\
\text{Min}_{g_j^s} & \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^{*s} g_j^s \\
\text{sujeito a} & \sum_{j \in J} g_j^s = d^s \quad s \in S \quad (10) \\
& g_j^s \leq \bar{g}_j^* \quad j \in E, \quad s \in S \\
& g_j^s \leq \bar{g}_j^{*s} \quad j \notin E, \quad s \in S \\
& g_j^s \geq 0 \quad j \in J, \quad s \in S
\end{array}$$

Novamente, para uma melhor compreensão do problema analisaremos a seguir um pequeno exemplo.

**Exemplo 2** Considere o sistema de geração elétrica onde o conjunto de usinas concorrentes  $J - E$ , é composto por 5 usinas ( $j = 1, \dots, 5$ ) e a empresa  $E$  é composta por duas usinas ( $j = 6, 7$ ). A demanda do sistema é igual a 100MWh e os custos de operação das usinas 6 e 7 são ambos iguais a zero. Dois cenários de oferta de preço são considerados para as usinas concorrentes, cada um com probabilidade 0,5 de ocorrer. As capacidades máximas de geração são as mesmas nos dois cenários. Os dados de entrada para o problema estão apresentados na seguinte tabela:

$j$	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{g}_j^*$ (MWh)	20	20	20	20	20	39	41
$\lambda_j^{*1}$ (\$/MWh)	10	20	30	40	50		
$\lambda_j^{*2}$ (\$/MWh)	10	20	25	50	60		

Se considerássemos apenas o cenário de ofertas 1, uma solução ótima para o problema seria dada por  $\lambda_6 = \lambda_7 = 30$ ,  $g_6 = 39$ ,  $g_7 = 21$ ,  $\pi_d = 30$  e  $z^* = 1800$ . Por outro lado, se considerássemos apenas o cenário 2, uma solução ótima seria dada por  $\lambda_6 = \lambda_7 = 50$ ,  $g_6 = 39$ ,  $g_7 = 1$ ,  $\pi_d = 50$  e  $z^* = 2000$ . Finalmente, consideremos os dois cenários com probabilidades de ocorrência iguais e tomemos  $\lambda_6 = 40$  e  $\lambda_7 = 50$ . Neste caso, a solução do problema seguidor nos fornece os seguintes valores para o cenário 1:

$$g_6^1 = 39, \quad g_7^1 = 0, \quad \pi_d^1 = 40, \quad \pi_d^1(g_6^1 + g_7^1) = 1560.$$

Já no cenário 2, temos:

$$g_6^2 = 39, \quad g_7^2 = 1, \quad \pi_d^2 = 50, \quad \pi_d^2(g_6^2 + g_7^2) = 2000.$$

O valor esperado da remuneração líquida é portanto igual a  $0,5 * 1560 + 0,5 * 2000 = 1780$ . Utilizando o modelo de programação inteira para o caso com incerteza, descrito na próxima seção, e o *solver* XPRESS comprovamos ser esta uma solução ótima para o problema. Observamos também que se fixarmos  $\lambda_6 = \lambda_7$ , o valor esperado da remuneração líquida de  $E$ , na solução ótima do problema é igual a 1600 (com  $\lambda_6 = \lambda_7 = 20$ ).

Com a análise do exemplo 2, concluímos que caso consideremos a oferta com incerteza, ao contrário do que foi provado na seção 4.1 para o caso determinístico, podemos não ter solução ótima para o problema, com ofertas iguais para toda usina pertencente a  $E$ . Neste caso portanto, devemos considerar a solução do modelo para  $|E| > 1$ .

## 8.1 Modelos Matemáticos e Procedimentos Algorítmicos

Utilizando o mesmo procedimento descrito na seção 5 reescreveremos o problema (10) como um problema em um único nível, utilizando para isto as condições de otimalidade do problema seguidor:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar} && \sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s \\
& \text{sujeito a} && \\
& \sum_{j \in J} g_j^s = d^s && s \in S \\
& g_j^s \leq \bar{g}_j^* && j \in E, \quad s \in S \\
& g_j^s \leq \bar{g}_j^{*s} && j \notin E, \quad s \in S \\
& g_j^s \geq 0 && j \in J, \quad s \in S \\
& \pi_d^s + \pi_{g_j}^s - \lambda_j \leq 0 && j \in E, \quad s \in S \\
& \pi_d^s + \pi_{g_j}^s \leq \lambda_j^{*s} && j \notin E, \quad s \in S \\
& \pi_{g_j}^s \leq 0 && j \in J, \quad s \in S
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\sum_{s \in S} (\sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^{*s} g_j^s - d^s \pi_d^s - \sum_{j \in E} \bar{g}_j^* \pi_{g_j}^s - \sum_{j \notin E} \bar{g}_j^{*s} \pi_{g_j}^s) = 0$$

As heurísticas propostas na seção 6 serão também adaptadas para solucionar aproximadamente o problema da oferta com incerteza.

Inicialmente penalizamos as restrições de complementaridade em (11), obtendo o modelo

$$\begin{aligned}
& \text{Max} && \sum_{s \in S} (p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s - M (\sum_{j \in E} (\lambda_j g_j^s - \bar{g}_j^* \pi_{g_j}^s) + \sum_{j \notin E} (\lambda_j^{*s} g_j^s - \bar{g}_j^{*s} \pi_{g_j}^s) - d^s \pi_d^s)) \\
& \text{suj.a} && \sum_{j \in J} g_j^s = d^s && s \in S \\
& && g_j^s \leq \bar{g}_j^* && j \in E, \quad s \in S \\
& && g_j^s \leq \bar{g}_j^{*s} && j \notin E, \quad s \in S \\
& && g_j^s \geq 0 && j \in J, \quad s \in S \\
& && \pi_d^s + \pi_{g_j}^s - \lambda_j \leq 0 && j \in E, \quad s \in S \\
& && \pi_d^s + \pi_{g_j}^s \leq \lambda_j^{*s} && j \notin E, \quad s \in S \\
& && \pi_{g_j}^s \leq 0 && j \in J, \quad s \in S
\end{aligned} \tag{12}$$

onde  $M > 0$  é o parâmetro de penalização.

Observamos que não será possível eliminarmos as variáveis  $\lambda_j$  do modelo (12) da mesma forma como foi feito na seção 6 para o caso determinístico. Quando vários cenários são considerados, ao fixarmos os valores das variáveis  $\pi_d^s$  e  $g_j^s$  e  $\pi_{g_j}^s$ , para  $j \in J$  e  $s \in S$ , em (12), o problema se reduz a

$$\begin{aligned}
& \text{Max} && -M \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} g_j^s \lambda_j \\
& \text{suj.a} && \lambda_j \geq \pi_d^s + \pi_{g_j}^s && j \in E, \quad s \in S.
\end{aligned}$$

Neste caso portanto, concluímos apenas que na solução ótima do problema teremos

$$\lambda_j = \max_{s \in S} \{\pi_d^s + \pi_{g_j}^s\}, \quad j \in E,$$

o que não nos permite eliminar as variáveis  $\lambda_j$ .

As heurísticas 1 e 2 aplicadas para solucionar aproximadamente o problema determinístico podem ser facilmente adaptadas para o caso da oferta com incerteza, substituindo-se com este fim, o modelo determinístico (7) pelo modelo (12) e o problema de despacho (1) pelo problema seguidor do modelo (10).

## 9 Melhoria da solução obtida pelas heurísticas

O problema de determinar a estratégia ótima de oferta para agentes elétricos é um problema não côncavo, e as heurísticas propostas neste trabalho para solucioná-lo podem convergir para um ótimo local do problema, como foi verificado nos problemas 3, 4 e 6 da tabela 1. Com o intuito de obter melhores soluções para o problema com a aplicação das heurísticas, introduziremos nesta seção procedimentos alternativos para a obtenção de uma solução inicial e também um procedimento de busca local a partir da solução obtida pelas heurísticas.

### 9.1 Solução inicial

Nesta seção apresentaremos um algoritmo polinomial que obtém a solução ótima do problema de determinar a estratégia de oferta para a empresa  $E$ , no caso determinístico. Com o objetivo de utilizá-lo para obter uma solução inicial para o problema da oferta com incerteza, vamos assumir que a empresa  $E$  possui uma única usina cuja capacidade de geração é dada pela soma das capacidades de geração de cada uma das suas usinas e cujo custo de operação é nulo. O algoritmo considera um cenário fixo  $s$ . Este cenário pode ser escolhido como o de maior probabilidade de ocorrência, pode ser escolhido aleatoriamente dentre o conjunto de cenários dados, ou ainda dentre um subconjunto deste conjunto.

Considera-se, sem perda de generalidade, que os índices  $1, \dots, |J| - 1$ , associados às usinas concorrentes satisfazem a relação

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{|J|-1}.$$

O algoritmo é dividido em dois procedimentos apresentados a seguir. Ao final do procedimento 1, a variável  $\lambda_j$  representa a maior oferta que pode ser feita pela empresa  $E$  de forma que ela gere toda a sua capacidade e  $k$  representa a quantidade total de energia gerada pelas usinas concorrentes de  $E$  que ofertaram um preço menor do ela, ou seja, um preço menor do que  $\lambda_j$ . Neste caso, o lucro obtido por  $E$  é dado pelo produto de  $\lambda_j$  pela sua capacidade de geração.

No procedimento 2 o valor ofertado por  $E$  é incrementado e o lucro obtido pela empresa é calculado nos casos em que sua oferta é igual a cada uma das ofertas das concorrentes mais caras. Analisa-se assim a relação custo benefício para  $E$  em incrementar o preço *spot* do sistema, mas em compensação ter sua geração diminuída. Ao final do procedimento 2, a variável  $\lambda_j$  armazena a melhor oferta para  $E$  e a variável *lucro* armazena o maior lucro obtido pela empresa. Sabendo-se o valor da melhor oferta de  $E$ , pode-se então obter facilmente a

geração de cada uma das usinas resolvendo-se o problema de despacho (1), ou simplesmente por inspeção.

**Algoritmo:** (*Obtenção de uma solução inicial para o problema da oferta com incerteza*)

**Dados:**  $s, \bar{g}_j^*$ , para  $j \in E$ ,  $\bar{g}_j^{*s}$ , para  $j \notin E$ ,  $d^s$ ;  
 $g_{max} := \sum_{j \in E} \bar{g}_j^*$ ;  
 $\bar{d} := d^s - g_{max}$ ;

**Início do Procedimento 1**

*repete* := true;

$k := 0$ ;

$j := 1$ ;

**Enquanto** (*repete* e  $j \leq n$ ), **faça**

**Se** ( $k + \bar{g}_j^{*s} \leq \bar{d}$ ) **então**

$k := k + \bar{g}_j^{*s}$ ;

$j := j + 1$ ;

**Senão**

*repete* := false;

**Fim** (se)

**Fim** (enquanto)

**Fim do Procedimento 1**

**Início do Procedimento 2**

*repete* := true;

*lucro* :=  $\lambda_j^{*s} * \min\{(d^s - k), g_{max}\}$

*oferta<sub>opt</sub>* :=  $\lambda_j^{*s}$ ;

**Enquanto** (*repete* e  $j \leq n$ ), **faça**

**Se** ( $k + \bar{g}_j^{*s} < d^s$ ) **então**

*luc* :=  $\lambda_j^{*s} * \min\{(d^s - k), g_{max}\}$

$k := k + \bar{g}_j^{*s}$ ;

**Se** (*luc* > *lucro*) **então**

*lucro* := *luc*;

*oferta<sub>opt</sub>* :=  $\lambda_j^{*s}$ ;

**Fim** (se)

$j := j + 1$ ;

**Senão**

*repete* := false;

**Fim** (se)

**Fim** (enquanto)

**Fim do Procedimento 2**

## 9.2 Busca Local

Uma vez obtida uma solução aproximada para o problema de determinar a estratégia ótima de oferta para a empresa  $E$ , com a aplicação das heurísticas 1 e 2, o passo seguinte é realizar uma busca local a partir da solução obtida. Esta busca tem o intuito de procurar melhores soluções na sua vizinhança e desta forma, “escapar” de ótimos locais para os quais as heurísticas possivelmente convergiram.

Considera-se, sem perda de generalidade, que os índices  $|J| - |E| + 1, \dots, |J|$ , associados às usinas de  $E$  satisfazem a relação

$$\tilde{g}_{|J|-|E|+1}^* \geq \tilde{g}_{|J|-|E|}^* \geq \dots \geq \tilde{g}_{|J|}^*.$$

Sejam  $\tilde{\lambda}_{|J|-|E|+1}, \dots, \tilde{\lambda}_{|J|}$ , as ofertas determinadas pelas heurísticas para as usinas de  $E$ . O procedimento de busca local consiste em  $|E|$  etapas. A cada etapa, resolve-se o problema seguidor do modelo (10)  $n$  vezes, fixando-se todas as ofertas das usinas de  $E$  de acordo com a melhor solução encontrada até o momento, exceto uma das ofertas, que recebe um diferente valor em cada uma das  $n$  vezes. O número  $n$  é um parâmetro de entrada do algoritmo de busca local e deve ser no máximo igual ao número de diferentes ofertas realizadas pelas usinas concorrentes de  $E$  em todos os cenários considerados. O valor assumido para a oferta da usina que não está fixa numa dada etapa do procedimento será sempre igual a uma das ofertas das usinas concorrentes de  $E$  em algum cenário.

O algoritmo de busca local está esquematizado a seguir. O conjunto de todas as diferentes ofertas das usinas concorrentes está armazenado na estrutura de dados *lista.ofertas*.

Notemos que a ordem do armazenamento das ofertas em *lista.ofertas* determinará o caminho da busca por melhores soluções. Neste trabalho utilizamos a seguinte ordenação:

$$\text{Se } \textit{lista.ofertas}(i) = \lambda_{j_1}^{s_1} \text{ e } \textit{lista.ofertas}(i+1) = \lambda_{j_2}^{s_2}$$

$$\text{então } \lambda_{j_1}^{s_1} * p_{s_1} \geq \lambda_{j_2}^{s_2} * p_{s_2},$$

ou seja, as ofertas são ordenadas de acordo com o produto do seu valor pela probabilidade de ocorrência do cenário a que pertence. Caso a oferta pertença a mais de um cenário, as probabilidades dos cenários serão somadas.

Ao final do procedimento de busca local, o vetor  $\lambda$  conterá a melhor oferta encontrada para cada uma das usinas de  $E$ . A geração de cada usina e o preço *spot* do sistema para este conjunto de ofertas será obtido ao resolver-se por fim, o problema seguidor em (10).

**Algoritmo:** (*Busca local*)

**Dados:**  $n, \bar{g}_j^*, c_j$  e  $\tilde{\lambda}_j$ , para  $j \in E$ ,  $\bar{g}_j^{*s}$ , para  $j \notin E$  e  $s \in S$ ,  
 $d^s$  e  $p_s$ , para  $s \in S$ ,  $ER(\tilde{\lambda}_E)$ , *lista.ofertas*;

*lucro.esperado* :=  $ER(\tilde{\lambda}_E)$ ;

$\lambda := \tilde{\lambda}_E$ ;

**Faça para**  $i = |J| - |E| + 1, \dots, |J|$

*oferta* :=  $\tilde{\lambda}_i$ ;

**Faça para**  $k = 1, \dots, n$ ;

$\lambda_i := \text{lista.ofertas}(k)$ ;

Resolva o problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^{*s} g_j^s \\ & \text{var. dual} \\ \text{sujeito a} & \sum_{j \in J} g_j^s = d^s \quad \pi_d^s \quad s \in S \\ & g_j^s \leq \bar{g}_j^* \quad j \in E, \quad s \in S \\ & g_j^s \leq \bar{g}_j^{*s} \quad j \notin E, \quad s \in S \\ & g_j^s \geq 0 \quad j \in J, \quad s \in S \end{array}$$

**Se**  $(\sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s > \text{lucro.esperado})$  **então**

*lucro.esperado* :=  $\sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s$ ;

*oferta* :=  $\lambda_i$ ;

**Fim**(se)

**Fim**(faça)

$\lambda_i := \text{oferta}$ ;

**Fim**(faça)

## 10 Resultados Numéricos para o problema da oferta com incerteza

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos com a implementação das heurísticas propostas e a solução do modelo de programação inteira mista considerados nas seções 8 e 9.

Os resultados fornecidos para as heurísticas na tabela 5 consideram, para cada problema-teste, a melhor solução encontrada após a execução das duas heurísticas tomando como solução inicial as três alternativas propostas neste trabalho e finalmente implementando a partir da solução obtida pelas heurísticas, o procedimento de busca local.

Os problemas de programação linear considerados nas heurísticas e o problema de programação inteira mista foram resolvidos pelo *solver* XPRESS 12.

O computador utilizado para os testes foi um k6 350MHz.

A tabela 5 contém o valor da função objetivo do problema na solução ótima obtida pelo modelo inteiro ( $z_I^*$ ) e na solução aproximada obtida pelas heurísticas ( $z_H^*$ ). Na sua última coluna a razão entre a solução aproximada e a exata é apresentada. O campo preenchido com o símbolo “-” na coluna referente ao modelo inteiro indica que programa foi abortado após 1 dia de execução sem obter a solução ótima do problema. Finalmente, a coluna *ub* contém um limite superior para a função objetivo do problema. Este limite é dado por

$$\sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\hat{\pi}_d^s - c_j] \hat{g}_j^s,$$

onde  $\hat{\pi}_d^s$  e  $\hat{g}_j^s$  representam o valor das variáveis  $\pi_d^s$  e  $g_j^s$  na solução ótima do problema quando consideramos apenas o cenário  $s$ . Esta solução foi obtida pelo modelo inteiro apresentado para o caso determinístico.

Os dados dos problemas 1 a 17 foram gerados aleatoriamente e os dados dos problemas 18 a 21, marcados com o símbolo “\*”, foram gerados a partir dos dados reais do Sistema Elétrico Brasileiro. Em cada cenário gerado o valor de cada dado de entrada era escolhido entre 0,5 e 1,5 vezes o valor original.

Observamos que nos problemas 1 a 17 o valor do limite superior *ub* se aproxima bastante da solução obtida pelas heurísticas, comprovando a sua qualidade. O mesmo não acontece para os problemas 18 a 21. A qualidade do limite superior não é tão boa nestes problemas, devido a grande variedade de soluções que eles têm. Ainda na tabela 5 apresentamos o tempo de execução do procedimento exato e do heurístico. Neste último caso o tempo engloba a obtenção das três soluções iniciais, a execução das duas heurísticas e a busca local para cada uma delas. O tempo gasto na busca local é considerável e poderia ser reduzido se não repetíssemos o procedimento para as duas heurísticas no caso em que ambas obtivéssem o mesmo valor para as ofertas das usinas de  $E$ .

Na tabela 6 apresentamos a solução obtida pela heurística 1, a partir de cada uma das três soluções iniciais propostas e, utilizando ou não, o procedimento de busca local (BL). As soluções iniciais 1 e 2 referem-se respectivamente à solução do problema seguidor no modelo (10), fixando-se o valor das ofertas das usinas de  $E$  em valores muito altos (maiores que a oferta da concorrente mais cara) e em zero. A solução inicial 3 refere-se à solução obtida pelo procedimento descrito na seção 9.1. Na última linha da tabela 6 apresentamos o número de vezes em que cada procedimento obtém a melhor das soluções (#MS) geradas pelas heurísticas. A tabela 7 contém as mesmas informações apresentadas na tabela 6, para a heurística 2.

Finalmente, nas tabelas 8 e 9 comparamos o comportamento das duas heurísticas e das três soluções iniciais com e sem busca local. Apresentamos novamente o número de vezes em que cada procedimento obtém a melhor das soluções obtidas pelas heurísticas. Observamos que apesar da heurística 2 ter tido melhores resultados que a heurística 1 sem a busca local e apesar da solução inicial 2 ter obtido melhores resultados do que as outras duas, existem exemplos onde estes mesmos procedimentos não chegam à solução ótima, enquanto outros chegam.



Sendo assim, decidimos manter a execução de todos os procedimentos heurísticos descritos para escolher por fim, a melhor solução.

P	J	E	S	ub	Inteiro		Heurística		$\frac{z_H^*}{z_I^*}$
					$z_I^*$	t	$z_H^*$	t	
1	7	2	2	158	158	0,14	158	0,07	1
2	13	3	5	7909600	-	-	3625400	1,9	-
3	7	2	2	1780	1780	17m	1780	0,21	1
4	105	5	2	1400880	-	-	1302310	18,14	-
5	53	3	2	643466	643466	20,59	643466	4,96	1
6	8	3	2	146983	146983	4m	146983	0,17	1
7	7	2	2	198003	198003	9,59	198003	0,17	1
8	6	1	2	27890	27890	0,37	27890	0,12	1
9	7	2	2	1380	1380	12,5	1380	0,12	1
10	105	5	100	179149	-	-	178220	137m	-
11	202	2	500	41664,1	-	-	41562,1	707m	-
12	51	1	200	24650,7	-	-	24470,6	48m	-
13	52	2	500	40787,9	-	-	40698,9	150m	-
14	51	1	400	27423,4	-	-	27363,4	63m	-
15	220	20	100	301826	-	-	299790	1009m	-
16	110	10	300	141344	-	-	139776	1777m	-
17	210	10	200	162427	-	-	162100	2080m	-
*18	138	2	5	1114,4	-	-	213,2	1,54	-
*19	138	2	100	1095,12	-	-	411,17	13m	-
*20	138	5	100	7643,39	-	-	3479,3	17m	-
*21	138	5	250	15996,7	-	-	4978,36	100m	-

Tabela 5: Problemas-Teste (Oferta com incerteza)

P	Heurística1-1		Heurística1-2		Heurística1-3	
	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL
1	158	158	158	158	158	158
2	3529,2	3625400	-3341410	3617530	-3665100	3062300
3	600	1780	800	1600	1600	1780
4	143179	1158950	1298810	1302310	1210000	1298610
5	256433	578842	438923	625299	555816	643466
6	37363,2	146983	-1101,12	807,52	37363,2	146983
7	74255,7	150556	95930,3	147691	113821	147691
8	7984,8	27890	9365	27890	9365	27890
9	825	1240	1170	1240	1327,5	1327,5
10	93,3	178154	178220	178220	173262	178154
11	12,984	41552,2	41562,1	41562,1	23316,9	41552,2
12	101,985	24423,1	24470,6	24470,6	2125,02	24423,1
13	16,3413	40664,2	40698,9	40698,9	4373,33	40664,2
14	31,4309	27340,1	27363,4	27363,4	26518,7	27340,1
15	182,647	299790	299493	299493	120657	299790
16	119,943	139776	139760	139760	99710,8	139776
17	193,08	162043	162098	162098	161599	161829
*18	131,2	213,2	49,4	213,2	103,2	213,2
*19	85,34	411,17	395,12	411,17	403,58	411,17
*20	12,39	3470,74	773,04	3479,3	1216,28	3470,57
*21	45,94	4887,81	1307,58	4978,36	2506,53	4887,81
#MS	1	9	6	12	1	9

Tabela 6: Heurística 1

P	Heurística2-1		Heurística2-2		Heurística2-3	
	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL
1	158	158	158	158	158	158
2	60204,5	3625400	-1644500	2225160	3275890	3275890
3	600	1780	890	1600	1600	1780
4	1210000	1298610	1301990	1302310	1210000	1298610
5	537762	578842	643466	643466	555816	643466
6	37632	146983	296,64	1346,56	37632	146983
7	74609,3	150556	198003	198003	113821	147691
8	7984,8	27890	27890	27890	27890	27890
9	825	1240	1380	1380	1327,5	1327,5
10	93,3	178154	178220	178220	179262	178154
11	12,992	41552,2	41562,1	41562,1	23319,6	41552,2
12	101,985	24423,1	24470,6	24470,6	2152,02	24423,1
13	16,3413	40664,2	40698,9	40698,9	4373,33	40664,2
14	31,4309	27340,1	27363,4	27363,4	26718,4	27340,1
15	182,647	299790	299507	299507	120757	299507
16	120,073	139776	139765	139765	100047	139776
17	193,32	162043	162100	162100	161621	161621
*18	131,2	213,2	119,6	213,2	196,8	196,8
*19	85,34	411,17	397,26	411,17	404,02	411,17
*20	20,79	3470,74	853,72	3466,38	2160,99	3319,92
*21	57,448	4887,81	1371	4976,76	2582,38	4887,81
#MS	1	9	11	14	2	7

Tabela 7: Heurística 2

	Heurística 1		Heurística 2	
	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL
#MS	8	30	14	30

Tabela 8: Comparação entre as heurísticas

	Sol. Inicial 1		Sol. Inicial 2		Sol. Inicial 3	
	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL	s/ BL	c/ BL
#MS	2	18	17	26	3	16

Tabela 9: Comparação entre as soluções iniciais

## References

- [1] M. Gendreau, P. Marcotte and G. Savard, “A hybrid tabu ascent algorithm for the linear bilevel programming problem”, *Journal of Global Optimization* **8**, 217-233 (1996).
- [2] R. Kelman and M. Pereira, “Course I: Application of Economic Theory in Power System Analysis - Strategic Pricing in Hydrothermal Systems”, *VI Symposium of Specialists in Operations and Planning of Power Systems*, May 1998.
- [3] M. Labbé, P. Marcotte and G. Savard, “A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing”, *Management Science* **44**, 1608-1622 (1998).
- [4] M. Labbé, P. Marcotte and G. Savard, “On a class of bilevel programs”, In: *Nonlinear Optimization and Related Topics*, di Pillo and Giannessi (eds), Kluwer Academic Publishers, 183-206, 2000.