ANOTAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

ERNESTO PRADO LOPES e EDESIO PANTOJA SACRAMENTO

10 de novembro de 2004

1 O Problema Elementar do Cálculo das Variações

Seja o seguinte problema que referenciaremos por $(Prob1)$:

Achar a função $x(\cdot) = (x_1(\cdot), ..., x_n(\cdot)) \in C^1([t_0, t_1], I\!R^n)$, satisfazendo: $x_i(t_0) = x_{0_i}$ e $x_i(t_1) = x_{1_i}, \forall i \in \{1, ..., n\}$ (chamadas condições finais) tal que:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \mathring{x}(t))dt$$

seja mínimo.

A função $L \in C^2([t_0, t_1] \times I\!R^n \times I\!R^n)$ é chamada de integrando variacional.

Observação 1.1 *O conjunto das funções x admissíveis será ampliado.*

✠ **Resultados do cálculo das funções reais a uma variável real.**

Seja $f : [a, b] \to I\!R$, uma função real definida em $[a, b]$.

Definição 1.1 *O ponto $x^* \in [a, b]$ é dito ser um ponto de mínimo de f se, $\forall x \in [a, b]$, $f(x^*) \leq f(x)$.*

Definição 1.2 *: O ponto $x^* \in [a, b]$ é dito ser um ponto de mínimo local de f se, $\exists V(x^*)$, uma vizinhança de x^*, tal que $\forall x \neq x^*, x \in V(x^*) \cap [a, b]$, $f(x^*) < f(x)$.*

Se $f : [a,b] \to I\!R$, é uma função duas vezes diferenciável em (a,b) com derivada a direita em a e derivada a esquerda em b temos:

1 - Uma condição necessária para $x^* \in [a,b]$ ser um ponto de mínimo de f é:

1.1 - Se $x^* \in (a,b), f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) \geq 0$

1.2 - Se $x^* = a$ é $f'(x^*) \geq 0$.

1.3 - Se $x^* = b$ é $f'(x^*) \leq 0$

2 - Uma condição suficiente para $x^* \in [a,b]$ ser um ponto de mínimo local de f é:

2.1 - Se $x^* \in (a,b), f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$

2.2 - Se $x^* = a$ é $f'(x^*) > 0$.

2.3 - Se $x^* = b$ é $f'(x^*) < 0$

3 - Uma condição suficiente para existência de um mínimo de f em $[a,b]$ é f ser semi-contínua inferior em $[a,b]$.

4 - Se f é convexa em $[a,b]$ então f possui um mínimo x^* em $[a,b]$. Além disso, se a convexidade é estrita então x^* é único.

5 - Uma condição suficiente para que f seja estritamente convexa em $[a,b]$ é que $\forall x \in [a,b], f''(x) > 0$.

- Provaremos esta última afirmação:

De fato, seja $x, y \in [a,b]$ e $\lambda \in (0,1)$ então podemos escrever

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(x-y) + y = (1-\lambda)(y-x) + x, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &> \lambda f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f'(\lambda x + (1-\lambda)y)\lambda(1-\lambda)(x-y) \qquad e \\ (1-\lambda)f(y) &> (1-\lambda)f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f'(\lambda x + (1-\lambda)y)\lambda(1-\lambda)(x-y). \end{aligned}$$

somando as duas desigualdades temos:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) > f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

2 O Problema Abstrato de Otimização

O problema geral de otimização é formulado do seguinte modo:

Sejam $\mathcal{A}$ um conjunto e $J : \mathcal{A} \to lR$ uma função. Achar $u^* \in \mathcal{A}$, tal que $\forall u \in \mathcal{A}, J(u^*) \leq J(u)$. Ou seja, achar um ponto de mínimo de J em $\mathcal{A}$.

Vamos de agora em diante supor que $\mathcal{A}$ é um subconjunto de um espaço vetorial real e $\aleph$ é um subespaço deste espaço vetorial. Podemos definir:

Definição 2.1 (Ponto interno de $\mathcal{A}$ numa direção de $\aleph$) *Seja $u \in \mathcal{A}$ e $v \in \aleph$. O ponto u é um ponto interno de $\mathcal{A}$ na direção v se: $\exists\ \varepsilon(v) \in lR, \varepsilon(v) > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in lR, |\varepsilon| < \varepsilon(v), u + \varepsilon v \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.2 (Definição de ponto radial de $\mathcal{A}$ numa direção de $\aleph$.) *Seja $u \in \mathcal{A}$ e $v \in \aleph$. O ponto u é um ponto radial de $\mathcal{A}$ na direção v se: $\exists$ $\varepsilon(v) \in lR, \varepsilon(v) > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in lR, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon(v)$, $u + \varepsilon v \in \mathcal{A}$.*

Se u é um ponto interno de $\mathcal{A}$ na direção v ou se u é um ponto radial de $\mathcal{A}$ na direção v podemos definir um caminho em $\mathcal{A}$ dado por: $\zeta(t) = u + tv$, para $t \in (-\varepsilon(v), \varepsilon(v))$ ou $t \in [0, \varepsilon(v))$, respectivamente.

A função $J \circ \zeta$ de $(-\varepsilon(v), \varepsilon(v))$ ou $[0, \varepsilon(v))$ em lR pode ou não ser diferenciável. Se ela tiver as propriedades necessárias permitindo usar os resultados mencionados acima para funções reais definidas em um intervalo fechado, temos:

Se $u^* \in \mathcal{A}$ é um ponto de mínimo de J em $\mathcal{A}$ então 0 é um ponto de mínimo de $J \circ \zeta$ em $(-\varepsilon(v), \varepsilon(v))$ ou em $[0, \varepsilon(v))$ e portanto podemos escrever:

6 - Uma condição necessária para que $u^* \in \mathcal{A}$ seja um ponto de mínimo de J em $\mathcal{A}$ é que:

6.1 - Se u^* é um ponto interno de $\mathcal{A}$ na direção v, $\frac{d}{dt}(J \circ \zeta)(0) = 0$ e $\frac{d^2}{dt^2}(J \circ \zeta)(0) \geq 0$, onde $\zeta(t) = u^* + tv$.

Isto decorre de 1.1.

6.2 - Se u^* é um ponto radial de $\mathcal{A}$ na direção v, $\frac{d}{dt}(J \circ \zeta)(0) \geq 0$, onde $\zeta(t) = u^* + tv$.

Isto decorre de 1.2.

Definição 2.3 (Definição de primeira e segunda variações de J) *Chama-se, respectivamente, primeira variação e segunda variação de J em u na direção v os números:* $\delta J(u;v) = \frac{d}{dt}(J \circ \zeta)(0)$ *e* $\delta^2 J(u;v) = \frac{d^2}{dt^2}(J \circ \zeta)(0)$.

Definição 2.4 (Definição de diferenciabilidade no sentido de Gateau) *A função $J : \mathcal{A} \to lR$ é Gateau diferenciável em $u \in \mathcal{A}$ se $\forall v \in \aleph$, u é um ponto interno de $\mathcal{A}$ na direção v e $\delta J(u;v)$ existe.*

Observação 2.1 *Se $\mathcal{A} \subset \aleph$ então $\forall (u, u^{'}) \in \mathcal{A}^2, u - u^{'} \in \aleph$.*

Teorema 2.1 *Se $J : \mathcal{A} \to lR$ tem um ponto de mínimo em um ponto interno u^* de $\mathcal{A}$ na direção v e $\delta J(u^*;v)$ e $\delta^2 J(u^*;v)$ existem então $\delta J(u^*;v) = 0$ e $\delta^2 J(u^*;v) \geq 0$.*

Prova: É o que foi estabelecido em 6.1. ■

Teorema 2.2 *Se $J : \mathcal{A} \to lR$ tem um ponto de mínimo em um ponto radial u^* de $\mathcal{A}$ na direção v e $\delta J(u^*;v)$ existe então $\delta J(u^*;v) \geq 0$.*

Prova: É o que foi estabelecido em 6.2. ■

Teorema 2.3 *Suponhamos que $\mathcal{A}$ é convexo e $J : \mathcal{A} \to lR$ é convexa e $u^* \in \mathcal{A}$. Se $\forall (u, u') \in \mathcal{A}^2$, $u - u' \in \aleph$ e $\forall v \in \aleph$, tal que $u^* + v \in \mathcal{A}$ temos $\delta J(u^*;v) \geq 0$ então u^* é um mínimo de J em $\mathcal{A}$.*

Prova: Se $u \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon \in (0,1)$, então, como $J : \mathcal{A} \to lR$ é convexa, temos

$$J((1-\varepsilon)u^* + \varepsilon u) \leq (1-\varepsilon)J(u^*) + \varepsilon J(u),$$

ou ainda,

$$\varepsilon^{-1}\{J(u^* + \varepsilon(u - u^*)) - J(u^*)\} \leq J(u) - J(u^*).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos:

$$\delta J(u^*; u - u^*) \leq J(u) - J(u^*)$$

Como $(u - u^*) \in \aleph$ temos $J(u) \geq J(u^*)$. ■

Teorema 2.4 *Suponhamos que $\mathcal{A}$ é convexo e $J : \mathcal{A} \to I\!R$ é estritamente convexa. Então existe no máximo um ponto de mínimo u^* de J em $\mathcal{A}$.*

Prova: Suponhamos que exista dois pontos distintos de mímino de J, u_1 e u_2, ou seja, $J(u_1) = J(u_2) \leq J(u)\, \forall u \in \mathcal{A}$. Seja $u^* = \frac{u_1+u_2}{2}$ então $u^* \in \mathcal{A}$ e $J(u^*) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2)$ o que é um absurdo. ■

Definição 2.5 (Definição de função contínua por partes) *Uma fun-ção $f : [a,b] \to I\!R^n$ é dita contínua por partes em $[a,b]$ se existe uma seqüencia finita $a < t_1 < ... < t_m < b$ tal que f é contínua em $[a,b]\backslash\{t_1,...,t_m\}$ e $\forall i \in \{1,...,m\}$ existe $f(t_i-) = \lim_{t\uparrow t_i} f(t)$ e $f(t_i+) = \lim_{t\downarrow t_i} f(t)$.*

Definição 2.6 (Definição de função C^1 por partes) *Uma função $f : [a,b] \to I\!R^n$ é dita C^1 por partes em $[a,b]$ se f é contínua em $[a,b]$ e f' é contínua por partes em $[a,b]$. Notar que nos pontos a e b existem $f'(a+)$ e $f'(b-)$.*

Vamos de agora até o final desta nota considerar $\aleph$ como sendo o sub-espaço vetorial das funções C^1 por partes em $[t_0,t_1]$ que se anulam em t_0 e t_1 e $\mathcal{A}$ o subconjunto das funções x de classe C^1 por partes em $[t_0,t_1]$ que satisfazem a $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. Então o problema $(Prob1)$ pode ser escrito como:

$$\min_{x \in \mathcal{A}} \text{J(x)}$$

Todo ponto x de $\mathcal{A}$ é um ponto interno de $\mathcal{A}$ numa direção qualquer $y \in \aleph$. Portanto para obter uma condição necessária de otimalidade para $(Prob1)$ é suficiente, pelo teorema 2.1, calcular a primeira variação de J e igualá-la a zero $(\delta J(u;v) = 0)$ ou calcular a segunda variação de J e fazê-la maior ou igual a zero $(\delta^2 J(u;v) \geq 0)$.

3 Cálculo da Primeira Variação de J

Lema 3.1 *Seja $F(t,x)$ e sua derivada parcial $F_x(t,x)$ funções contínuas em $[a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, onde $\varepsilon_0 > 0$. Então para $x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$,*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b F(t,x)dt = \int_a^b F_x(t,x)dt$$

Prova: Para todo $x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ as funções $[a,b] \ni t \longmapsto F(t,x)$ e $[a,b] \ni t \longmapsto F_x(t,x)$ são contínuas logo integráveis em $[a,b]$, logo existem $\int_a^b F(t,x)dt$ e $\int_a^b F_x(t,x)dt$.

A função $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \ni x \mapsto \varphi(x) = \int_a^b F(t,x)dt$ é diferenciável em $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ e $\dfrac{d}{dx}\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b F_x(t,x)dt$.

De fato, como $F(t,x)$ e $F_x(t,x)$ são contínuas em $[a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, então $F(t,x)$ e $F_x(t,x)$ são uniformemente contínuas em qualquer subconjunto compacto Δ de $[a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, ou seja, para $\epsilon > 0$, existe $\delta(x) > 0$ tal que $\forall (t,x) \in [a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ e $\left|x' - x\right| < \delta(x)$ implica $\left|F_x(t,x) - F_x(t,x')\right| < \epsilon$. Logo, usando o teorema do valor médio, temos que: para $\epsilon > 0$, existe $\delta(x) > 0$ tal que, se $|\Delta x| < \delta(x)$ e $\theta \in (0,1)$

$$\left|\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} - \int_a^b F_x(t,x)dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{F(t,x+\Delta x)-F(t,x)}{\Delta x} - F_x(t,x)\right| dt =$$
$$= \int_a^b \left|F_x(t,x+\theta\Delta x) - F_x(t,x)\right| dt \leq \epsilon(b-a)$$ ■

Lema 3.2 *Seja* $P(t) = \int_{t_0}^t L_x(\tau, x, \overset{\circ}{x})d\tau$. *Então, para cada* $y \in \aleph, \delta J(u;y)$ *existe e*

$$\delta J(u;y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [-P + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))]\overset{\circ}{y}dt$$

Prova: De fato, como $(J \circ \zeta)(\varepsilon) = J(\zeta(\varepsilon)) = J(x + \varepsilon y)$,
temos: $\delta J(u;y) = \frac{d}{d\varepsilon}(J \circ \zeta)(0) =$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t) + \varepsilon y(t), \overset{\circ}{x}(t) + \varepsilon\overset{\circ}{y}(t))dt \,\Big|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon}L(t, x(t) + \varepsilon y(t), \overset{\circ}{x}(t) + \varepsilon\overset{\circ}{y}(t))dt \,\Big|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [L_x(t, x(t) + \varepsilon y(t), \overset{\circ}{x}(t) + \varepsilon\overset{\circ}{y}(t))y(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x(t) + \varepsilon y(t), \overset{\circ}{x}(t) + \varepsilon\overset{\circ}{y}(t))\overset{\circ}{y}(t)]dt \,\Big|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} L_x(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))y(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\overset{\circ}{x}}(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))\overset{\circ}{y}(t)dt =$$
$$= [P(t)y(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} P(t)\overset{\circ}{y}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} L_{\overset{\circ}{x}}(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))\overset{\circ}{y}(t)dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [-P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))]\overset{\circ}{y}dt$$

■

Lema 3.3 *Seja ϕ uma função contínua por partes em $[t_0, t_1]$ e $\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)z(t)dt = 0$ para toda função z contínua por partes em $[t_0, t_1]$ tal que $\int_{t_0}^{t_1} z(t)dt = 0$. Então ϕ é uma função constante em $[t_0, t_1]$.*

Prova: Seja $\bar{\phi} = \frac{1}{t_1 - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)dt$ então $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \phi(t) - \bar{\phi}dt = 0$. Logo

$$\int_{t_0}^{t_1} (\phi(t) - \bar{\phi})^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)(\phi(t) - \bar{\phi})dt - \bar{\phi} \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) - \bar{\phi}dt = 0.$$

Logo,$\forall t \in [t_0, t_1]$, $\phi(t) = \bar{\phi}$. ∎

Teorema 3.1 *Seja $x^* \in \mathcal{A}$. Então $\delta J(x^*, y) = 0, \forall y \in \aleph$ se e somente se*

$$-\int_{t_0}^{t} L_x(\tau, x^*, \overset{\circ}{x}^*)d\tau + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \overset{\circ}{x}^*) = C, \text{ uma constante em } [t_0, t_1]. \quad (0.3.1)$$

Prova:($\Rightarrow$) $\forall y \in \aleph$ temos

$$0 = \delta J(x^*, y) = \int_{t_0}^{t_1} [-P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t))]\overset{\circ}{y}dt.$$

Fazendo $\phi(t) = -P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t))$ vemos que ϕ é contínua por partes, pois $L_{\overset{\circ}{x}}$ é de classe C^1. Como $y(t) = \int_{t_0}^{t} \overset{\circ}{y}(t)dt$ e $\int_{t_0}^{t_1} \overset{\circ}{y}(t)dt = 0$, o lema 3.3 implica que ϕ é constante em $[t_0, t_1]$, ou seja, $-\int_{t_0}^{t} L_x(\tau, x^*, \overset{\circ}{x}^*)d\tau + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \overset{\circ}{x}^*)$ é constante em $[t_0, t_1]$.
($\Leftarrow$) Temos

$$\forall y \in \aleph, \delta J(x^*, y) = \int_{t_0}^{t_1} [-P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t))]\overset{\circ}{y}dt = C \int_{t_0}^{t_1} \overset{\circ}{y}dt = 0$$

∎

Definição 3.1 (Definição de ponto extremo) *O ponto $x^* \in \mathcal{A}$ é dito ser um extremo se $-\int_{t_0}^{t} L_x(\tau, x^*, \overset{\circ}{x}^*)d\tau + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \overset{\circ}{x}^*) =$ uma constante em $[t_0, t_1]$.*

Corolário 3.1 *Todo extremo x^* satisfaz a equação diferencial, dita de Euler, associada ao (prob1):*

$$L_x = \frac{d}{dt} L_{\overset{\circ}{x}}. \quad (0.3.2)$$

Prova: Derivando a expressão do teorema 0.3.1 temos:

$$L_x(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) = \frac{d}{dt} L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t))$$

■

Corolário 3.2 *Se x^* é um ponto de mínimo de J em $\mathcal{A}$ então x^* é um ponto extremo.*

Prova: Basta notar que $\forall y \in \aleph, x^*$ é um ponto interno na direção y. ■

Corolário 3.3 *Seja t' um ponto de descontinuidade de $\overset{\circ}{x}^*$. Então, se x^* é um extremo temos*

$$L_{\overset{\circ}{x}}(t', x^*(t'), \overset{\circ}{x}^*(t'-)) = L_{\overset{\circ}{x}}(t', x^*(t'), \overset{\circ}{x}^*(t'+)) \tag{0.3.3}$$

Prova: Basta notar que $[t_0, t_1] \ni t \to -\int_{t_0}^{t} L_x(\tau, x^*, \overset{\circ}{x}^*)d\tau$ é contínua, logo, pelo teorema (3.1), $[t_0, t_1] \ni t \to L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \overset{\circ}{x}^*)$ também é continua. ■

Definição 3.2 (Definição de integrando variacional regular) *O integrando variacional L é dito regular se $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} > 0, \forall (t, x, \overset{\circ}{x}) \in [t_0, t_1] \times I\!R^{2n}$.*

Corolário 3.4 *Seja L um integrando variacional regular de classe C^r, $r \geq 2$. Então qualquer extremo x^* é de classe C^r em $[t_0, t_1]$.*

Prova: Como L é regular temos que para (t, x) fixado, $L(t, x, \cdot)$ é uma função estritamente convexa na terceira variável, o que implica $L_{\overset{\circ}{x}}(t, x, \cdot)$ ser estritamente crescente. Suponha que $\overset{\circ}{x}^*$ seja descontínua em t', ou seja, $\overset{\circ}{x}^*(t'_-) \neq \overset{\circ}{x}^*(t'_+)$. Como $L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \cdot)$ é estritamente crescente temos que $L_{\overset{\circ}{x}}(t', x^*, \overset{\circ}{x}^*(t'_-)) \neq L_{\overset{\circ}{x}}(t', x^*, \overset{\circ}{x}^*(t'_+))$ o que contradiz o corolário (3.3). Logo $\overset{\circ}{x}^*$ é contínua. Continuando a demonstração por indução, vamos supor que $x^* \in C^j[t_0, t_1], \quad 1 \leq j \leq r - 1$. Como $L \in C^r$, temos que

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} L_x(\tau, x^*(\tau), \overset{\circ}{x}^*(\tau))\, d\tau \in C^j.$$

Por (0.3.1) temos $-P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) = c$ em $[t_0, t_1]$, para alguma constante c. Seja

$$\phi(t, \overset{\circ}{x}) = -P(t) + L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}).$$

Como P e $x^* \in C^j$, $L_{\overset{\circ}{x}} \in C^{r-1}$ e $j \leq r-1$ temos que $\phi \in C^j$. Pela regularidade da L temos $\phi_{\overset{\circ}{x}} > 0$ e como $\phi(t, \overset{\circ}{x}^*(t)) = c$, o teorema da função implícita implica que $\overset{\circ}{x}^* \in C^j$, logo $x^* \in C^{j+1}$ para $j \leq r-1$. ■

Definição 3.3 *O integrando variacional L é dito regular em um aberto $D \subset [t_0, t_1] \times R^n$ se $\forall (t, x) \in D$ e $\forall \overset{\circ}{x} \in I\!R^n$ temos $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} > 0$.*

Observação 3.1 *Se $L \in C^r$ e é regular em D, então $x^* \in C^r \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ tal que $(t, x^*(t)) \in D$.*

Observação 3.2 *Seja L regular, diferenciando o segundo membro da igualdade (3.3) temos*

$$\frac{d}{dt} L_{\overset{\circ}{x}}(t, x^*, \overset{\circ}{x}^*) = L_{\overset{\circ}{x}t} + L_{\overset{\circ}{x}x}\overset{\circ}{x}^* + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}\overset{\circ\circ}{x}^*$$

o que nos dá uma outra forma para a equação de Euler:

$$\overset{\circ\circ}{x}^* = \frac{L_x - L_{\overset{\circ}{x}t} - L_{\overset{\circ}{x}x}\overset{\circ}{x}^*}{L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}}$$

4 Exemplos

Exemplo 4.1 *Seja $L = ax^2 + b\overset{\circ}{x}^2$, onde $b > 0$, no (prob1). Como $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} = 2b$ temos que L é regular. A equação de Euler nos fornece uma E.D.O linear de ordem 2:*

$$-L_x + \frac{d}{dt} L_{\overset{\circ}{x}} = -2ax + 2b\overset{\circ\circ}{x} = 0$$

Se $a > 0$ o extremo é

$$x^*(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}, \text{ onde } k = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

com

$$x^*(t_0) = x_0 \quad e \quad x^*(t_1) = x_1$$

ou seja, A e B satisfazendo

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& Ae^{kt_0} + Be^{-kt_0} \\ x_1 &=& Ae^{kt_1} + Be^{-kt_1} \end{array}$$

Como L estritamente convexa[1] *temos que J é estritamente convexa*[2]*. Logo pelo teorema (2.3) o extremo* x^* *é ponto de mínimo. Como J é estritamente convexa o teorema (2.4) confirma que o ponto de mínimo é único.*

Se $a < 0$ *sua solução é*

$$x^*(t) = A sen\, kt + B\cos kt, \;\; onde\; k = \sqrt{\frac{|a|}{b}},$$

e não temos a garantia que o extremo x^* *passa pelos pontos dados e seja único. Por exemplo, seja* $(t_0, x_0) = (0, 0)$*. Os extremos passando por* $(0, 0)$ *são*

$$x^*(t) = A sen\, kt, \quad k = \sqrt{\frac{|a|}{b}}.$$

Se $t_1 = \frac{\pi}{k}m, \quad m = 1, 2, \ldots$ *então* $x^*(t_1) = 0$*, assim nenhum extremo passa por* $(0, 0)$ *e* (t_1, x_1) *se* $x_1 \neq 0$*.*

Se $a = 0$*, o extremo é a reta*

$$x^*(t) = x_0\frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + x_1\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

e continuam valendo as observações feitas para o caso $a > 0$*.*

Exemplo 4.2 *Suponha L linear em* $\overset{\circ}{x}$*, ou seja,* $L = M(t, x) + N(t, x)\overset{\circ}{x}$*. Logo* $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} = 0$*, e portanto L não é regular. Associando L ao campo* $L(t, x) = (M(t, x), N(t, x))$ *de classe* C^2 *em* $(t_0, t_1) \times \Re$ *e parametrizando* γ_1 *por* $t \mapsto (t, x(t))$ *para* $t \in (t_0, t_1)$*, obtemos:*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \overset{\circ}{x}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} M(t, x) + N(t, x)\overset{\circ}{x}\, dt = \int_{\gamma_1} (Mdt + Ndx).$$

Sendo $L \in C^2$*, pelo teorema de Green temos*

$$\int_{\gamma_1 \bigcup -\gamma_2} (Mdt + Ndx) = \int\int_C (N_t - M_x)\, dtdx$$

[1] pois a Hessiana de L é positiva

[2] veja exercício 6

onde γ_1 e γ_2 são caminhos $(t, x_1(t))$ e $(t, x_2(t))$ ligando (t_0, x_0) a (t_1, x_1). A equação de Euler $L_x = \frac{d}{dt} L_{\mathring{x}}$, tendo em conta que

$$L_x = M_x + N_x \mathring{x} \quad e \quad \frac{d}{dt} L_{\mathring{x}} = N_t + N_x \mathring{x},$$

se escreve

$$M_x(t, x) = N_t(t, x) \tag{0.4.1}$$

Logo J é constante no conjunto dos extremos.

A equação $M_x(t, x^*(t)) = N_t(t, x^*(t))$ é uma equação implícita para x^*, e não uma equação diferencial, portanto pode ter ou não solução unindo os pontos (t_0, x_0) e (t_1, x_1). Como mostra o exemplo:

Seja $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + t^2 \mathring{x})\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(1) = a$. Temos $M_x - N_t = 0$ o que acarreta $x^* - t = 0$, ou seja, $x^* = t$. A primeira condição é satisfeita, mas a segunda somente se $a = 1$.

Lema 4.1 *Seja $L = L(x, \mathring{x})$ regular. Então todo extremo x^* satisfaz*

$$L - \mathring{x}^* L_{\mathring{x}} = constante \tag{0.4.2}$$

Reciprocamente, qualquer solução de (0.4.2) de classe C^2 por partes com $\mathring{x}^* = 0$ apenas em pontos isolados é um extremo.

Prova: Como $L \in C^2$, pelo corolário (3.4), $x^* \in C^2$. Então por (0.3.2) temos

$$\begin{aligned}
L_x - \tfrac{d}{dt} L_{\mathring{x}} &= 0 \\
L_x - L_{\mathring{x}x} \mathring{x} - L_{\mathring{x}\mathring{x}} \mathring{\mathring{x}} &= 0 \quad \text{(multiplicando por } \mathring{x}) \\
L_x \mathring{x} - L_{\mathring{x}x} (\mathring{x})^2 - L_{\mathring{x}\mathring{x}} \mathring{x} \mathring{\mathring{x}} &= 0 \\
\tfrac{d}{dt} (L - \mathring{x} L_{\mathring{x}}) &= 0
\end{aligned}$$

Reciprocamente, para qualquer solução de (0.4.2) temos

$$\frac{L - c}{L_{\mathring{x}}} = \mathring{x}^* \in C^1$$

logo o cálculo acima pode ser invertido. ■

Exemplo 4.3 (Superfície mínima de revolução) *Considere o problema de encontrar a curva plana unindo dois pontos* (t_0, x_0), (t_1, x_1), *com* $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, *que quando girada em torno do eixo* t *gera uma superfície de área mínima. A superfície é obtida pela rotação da curva* $x = x(t)$, *com* $x(t) > 0$, *em torno do eixo* t *e sua área é*

$$A = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} x(s)ds = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2(t)}\, dt$$

onde s *é o comprimento de arco. Como minimizar* A *é o mesmo que minimizar* $\frac{A}{2\pi}$, *temos,*

$$L(x, \overset{\circ}{x}) = x\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2} \Rightarrow L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} = \frac{x}{(1 + \overset{\circ}{x}^2)^{3/2}} > 0,$$

ou seja, L *é regular. Por (0.4.2),temos*

$$x\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2} - \overset{\circ}{x}\frac{x\overset{\circ}{x}}{\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2}} = b \Rightarrow \frac{x(1 + \overset{\circ}{x}^2) - x\overset{\circ}{x}^2}{\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2}} = b,$$

ou

$$x = b\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}^2}, \quad b > 0^3$$

isto é

$$\overset{\circ}{x} = \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{b^2}}.$$

Separando as variáveis, obtemos

$$dt = \frac{b\, dx}{\sqrt{x^2 - b^2}},$$

isto é

$$t + c_1 = b \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - b^2}}{b}\right),$$

ou seja

$$x^*(t) = b \cosh\left(\frac{t - a}{b}\right),^4 \tag{0.4.3}$$

---

[3] pois $x(t) > 0$

[4] onde $a = -c_1$

Essas curvas são denominadas de catenárias e a superfície de revolução que ela gera é chamada catenóide de revolução. Sem perda de generalidade vamos analisar os extremos para o caso $(t_0, x_0) = (0, 1)$ *onde provaremos que existem pontos* (t_1, x_1) *que não são unidos por um extremo dado por (0.4.3). Temos que* $x^*(0) = b\cosh(\frac{-a}{b}) = 1$ *implicando que* $b = \cosh^{-1}(\frac{-a}{b})$ *.*

Introduzindo o parâmetro $\alpha = -ab^{-1}$ *a equação (0.4.3) torna-se*

$$x^*(t, \alpha) = \frac{\cosh(t\cosh\alpha + \alpha)}{\cosh\alpha},$$

que define uma família de extremos passando por $(0, 1)$*. Temos*

$$\overset{\circ}{x}^* = \frac{senh\,(t\cosh\alpha + \alpha)}{\cosh\alpha} \cdot \cosh\alpha = senh\,(t\cosh\alpha + \alpha)$$

logo $\overset{\circ}{x}^*(0, \alpha) = senh\,\alpha,$ *cuja imagem é* $I\!R$*.*

Dadas as condições iniciais $x^*(0) = 1$ *e* $\overset{\circ}{x}^*(0) \in I\!R$ *temos unicidade do extremo e portanto todo extremo passando por* $(0, 1)$ *pertence a família* $x^*(\cdot, \alpha)$*.*

Temos que

$$x^*(t_1, \alpha) = \frac{\cosh(t_1\cosh\alpha + \alpha)}{\cosh\alpha}.$$

Como $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \geq |u|, \forall u \in I\!R$ *temos*

$$\frac{\cosh(t_1\cosh\alpha + \alpha)}{\cosh\alpha} \geq \left|\frac{t_1\cosh\alpha + \alpha}{\cosh\alpha}\right| = \left|t_1 + \frac{\alpha}{\cosh\alpha}\right| \geq |t_1| - \frac{|\alpha|}{\cosh\alpha} \tag{0.4.4}$$

Temos também que

$$\max_{\alpha}\left|\frac{\alpha}{\cosh\alpha}\right| = \frac{\alpha_0}{\cosh\alpha_0},$$

onde α_0 *é uma raíz positiva da equação* $\cosh\alpha - \alpha\,senh\,\alpha = 0$*. Assim sendo, temos que*

$$\frac{\alpha_0}{\cosh\alpha_0} \geq \frac{|\alpha|}{\cosh\alpha}$$

logo

$$senh\,\alpha_0 = \frac{\cosh\alpha_0}{\alpha_0} \leq \frac{\cosh\alpha}{|\alpha|},$$

portanto

$$\frac{1}{senh\,\alpha_0} \geq \frac{|\alpha|}{\cosh\alpha}$$

o que acarreta juntamente com (0.4.4)

$$x(t_1,\alpha) \geq |t_1| - \frac{|\alpha|}{\cosh\alpha} \geq |t_1| - \frac{1}{senh\,\alpha_0} \quad \forall\alpha.$$

Então, se escolhermos t_1 *tal que* $|t_1| - \frac{1}{senh\alpha_0} = B > 0$ *e* x_1 *tal que* $x_1 < B$, *a curva não passará por* (t_1, x_1).

Definição 4.1 *Chama-se envelope de uma família* $x(\cdot,\alpha)$ *de funções a função* $y(t) = x(t,\alpha(t))$ *tal que* $\alpha(t)$ *satisfaz a equação:*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}x(t,\alpha(t)) = 0.$$

A família de extremos $x^*(\cdot,\alpha)$ *possui um envelope* $e(t)$ *definido por:*

$\frac{\partial}{\partial\alpha}x^*(t,e(t)) =$

$$\frac{\sinh(t\cosh e(t)+e(t))(t\sinh e(t)+1)\cosh e(t) - \cosh(t\cosh e(t)+e(t))\sinh e(t)}{\cosh^2 e(t)} = 0.$$

Quando $t = 0$, $\forall\alpha$,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}x(0,\alpha) = \frac{\sinh\alpha cosh\alpha - \cosh\alpha\sinh\alpha}{\cosh^2\alpha} = 0$$

e $e(0)$ *não está bem definido.*

Veja a figura (1)

Suponha que (t_1, x_1) está acima do envelope. Então dois extremos passam por $(0,1)$ e (t_1, x_1). Um deles, que denotaremos por $\widetilde{x}^*$, que atinge o envelope no ponto (t', x') entre $(0,1)$ e (t_1, x_1). Na próxima seção veremos que $\widetilde{x}^*$ não minimiza $J(x)$.

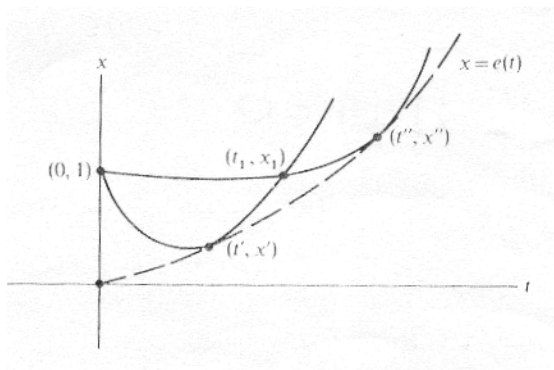

Figura 1:

5 A Condição Necessária de Jacobi

Nesta seção suporemos $L \in C^4$. Seja x^* um extremo de classe C^4, tal que $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) > 0$[5] para $t_0 \leq t \leq t_1$. Seja

$$2\Omega(t, y, \overset{\circ}{y}) = L_{xx}y^2 + 2L_{x\overset{\circ}{x}}y\overset{\circ}{y} + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{y}^2, \qquad (0.5.1)$$

onde L_{xx}, $L_{x\overset{\circ}{x}}$, $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}$ são calculadas em $(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t))$ e

$$Q(x^*; y) = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), \overset{\circ}{y}(t))\, dt. \qquad (0.5.2)$$

Lema 5.1 *Se J tem um mínimo em $x^* \in \mathcal{A}$ então $Q(x^*; y) \geq 0, \quad \forall y \in \aleph$.*

Prova: Se, como na prova do lema 3.2,

$$F(t, \varepsilon) = L(t, x^*(t) + \varepsilon y(t), \overset{\circ}{x}^*(t) + \varepsilon\overset{\circ}{y}(t)),$$

então usado lema 3.1 temos:

$$\frac{d^2}{d\epsilon^2}J(x^*+\varepsilon y)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\epsilon}F_\epsilon\, dt\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\epsilon}(L_x y + L_{\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{y})\, dt\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), \overset{\circ}{y}(t))\, dt.$$

Assim,

$$\delta^2 J(x^*; y) = Q(x^*; y) \qquad (0.5.3)$$

e o lema decorre do teorema 2.1 ■

[5] todo extremo tem essa propriedade se L é regular.

Definição 5.1 (Problema Secundário de Minimização) *É o problema de minimizar $Q(x^*; y)$ para $y \in \aleph$. O integrando variacional para esse problema é 2Ω.*

De (0.5.1) temos que

$$2\Omega_{\overset{\circ}{y}} = 2L_{x\overset{\circ}{x}}y + 2L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{y},$$

logo

$$\Omega_{\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}} = L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) > 0,$$

ou seja, 2Ω é regular.

Definição 5.2 *(Definição de extremo secundário) Chama-se um extremo secundário de um extremo x^* a função $y \in \aleph$, solução da chamada equação secundária de Euler definida, para x^*, por:*

$$\Omega_y = \frac{d}{dt}\Omega_{\overset{\circ}{y}} \tag{0.5.4}$$

Notaremos $x(\cdot, \alpha)$ a familia de extremos (soluções de 0.3.2) passando pelo ponto (t_0, x_0).

Teorema 5.1 *Seja L regular, e para $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, seja $x(\cdot, \alpha)$ um extremo passando pelo ponto (t_0, x_0) e com $\frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial \alpha}(t_0, \alpha) \neq 0$. Se $t' = t'(\alpha)$ é tal que $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t', \alpha) = 0$, então $y = \frac{\partial x}{\partial \alpha}$ é uma solução, não identicamente nula, com $y(t_0) = y(t') = 0$, da equação secundária de Euler (0.5.4) definida para $x(., \alpha)$.*

Reciprocamente, se existe y solução de (0.5.4) definida para $x(., \alpha)$ com $y(t_0) = y(t') = 0$ então $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t', \alpha) = 0$.

Prova: ($\Rightarrow$) Derivando em relação à α a equação de Euler (0.3.2) e trocando a ordem de derivação de t e α obtemos:

$$L_{xx}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + L_{x\overset{\circ}{x}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[L_{\overset{\circ}{x}x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)\right],$$

que é a equação (0.5.4) para $y(t) = \partial x/\partial \alpha$. Como, para $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $x(t_0, \alpha) = x_0$ temos $y(t_0) = 0$. Por hipótese $y(t') = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t', \alpha) = 0$. Como $\overset{\circ}{y}(t_0) = \frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial \alpha}(t_0, \alpha) \neq 0$ temos $y(t) \not\equiv 0$.

($\Leftarrow$) Sendo $\Omega \in C^2$ e regular, o espaço solução da equação diferencial linear de segunda ordem (0.5.4), com condição inicial $y(t_0) = 0$, é unidimensional. Como $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ é solução dessa equação, temos $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda y$, para $\lambda \in I\!R$ logo $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t', \alpha) = \lambda y(t') = 0$. ■

Definição 5.3 *Seja x^* um extremo passando pelo ponto (t_0, x_0). Um ponto (t', x'), com $t' > t_0$, é chamado conjugado de (t_0, x_0) se existe um extremo secundário y^* de x^*, não-nulo, com $y^*(t_0) = y^*(t') = 0$.*

Lema 5.2 *Seja $y^* \in \aleph$ um extremo secundário de um extremo $x^* \in \mathcal{A}$. Então $Q(x^*; y^*) = 0$.*

Prova: Temos de (0.5.1) que:

$\Omega_y(t, y^*, \overset{\circ}{y}^*) = L_{xx} y^* + L_{x\overset{\circ}{x}} \overset{\circ}{y}^*$ logo $y^* \Omega_y = L_{xx}(y^*)^2 + L_{x\overset{\circ}{x}} y^* \overset{\circ}{y}^*$ e

$\Omega_{\overset{\circ}{y}}(t, y^*, \overset{\circ}{y}^*) = L_{x\overset{\circ}{x}} y^* + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} \overset{\circ}{y}^*$ logo $\overset{\circ}{y}^* \Omega_{\overset{\circ}{y}} = L_{x\overset{\circ}{x}} y^* \overset{\circ}{y}^* + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} (\overset{\circ}{y}^*)^2$.

Somando-se as duas igualdades obtidas temos

$$y^* \Omega_y + \overset{\circ}{y}^* \Omega_{\overset{\circ}{y}} = 2\Omega.$$

Usando (0.5.4) temos

$$2\Omega = y^* \frac{d}{dt} \Omega_{\overset{\circ}{y}} + \overset{\circ}{y}^* \Omega_{\overset{\circ}{y}} = \frac{d}{dt}(y^* \Omega_{\overset{\circ}{y}})$$

e por (0.5.2) obtemos

$$Q(x^*; y^*) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(y^* \Omega_{\overset{\circ}{y}})\, dt = 0$$

pois $y^*(t_0) = y^*(t_1) = 0$. ■

Teorema 5.2 (Condição necessária de Jacobi) *Se J tem um mínimo em $x^* \in \mathcal{A}$, então não existe ponto conjugado para (t_0, x_0) com $t_0 < t' < t_1$.*

Prova: É claro que $y(t) \equiv 0 \in \aleph$ e $Q(x^*; 0) = 0$. Portanto pelo lema 5.1 o mínimo de $Q(x^*; y)$ em $\aleph$ é 0. Suponhamos que exista um ponto (t', x'), com

$t_0 < t' < t_1$, conjugado a (t_0, x_0) e y^* um extremo secundário não nulo de x^*, como na definição 5.3. Se $\overset{\circ}{y}^*(t') = 0$, como $y^*(t') = 0$, pela unicidade da solução da equação 0.5.4, teríamos $y^* \equiv 0$. Logo $\overset{\circ}{y}^*(t') \neq 0$.

Seja

$$\begin{aligned} y(t) &= y^*(t), \quad \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t' \\ y(t) &= \quad 0, \quad \;\; \text{se} \quad t' \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

Temos que $y \in \aleph$ e $\overset{\circ}{y}$ é descontínua em t'. Aplicando o Lema (5.2) sobre o intervalo $[t_0, t']$ obtemos

$$Q(x^*; y) = \int_{t_0}^{t'} 2\Omega \, dt = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega \, dt = 0$$

Portanto y é um mínimo para o problema secundário. Como Ω é regular, aplicando o corolário(3.4) ao problema secundário temos que $y \in C^2$, o que é uma contradição pois $\overset{\circ}{y}$ é descontínua em t'. ∎

A recíproca do teorema (5.1) implica, no exemplo (4.3), que os pontos conjugados para $(0, 1)$ são pontos que pertencem ao envelope e. Pelo teorema (5.2), a catenária $\widetilde{x}^*$ que toca o envelope entre $(0, 1)$ e (t_1, x_1) não minimiza a área.

No exemplo (4.1), para o caso $a < 0$, a equação secundária de Euler e a equação de Euler são idênticas logo podemos concluir, dos cálculos feitos então, que os pontos $(\pi k^{-1} m, 0)$ são conjugados de $(0, 0)$, para $m = 1, 2, \ldots$.

Observação 5.1 *A condição de regularidade* $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} > 0$ *implica convexidade estrita de* $L(t, x, \cdot)$; *a regularidade não exclui pontos conjugados, como vimos no exemplo (4.3). Suponha agora que*

$$L_{xx} y^2 + 2L_{x\overset{\circ}{x}} y \overset{\circ}{y} + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} \overset{\circ}{y}^2 > 0 \tag{0.5.5}$$

vale para todo $(t, x, \overset{\circ}{x})$ *e para todo* $(y, \overset{\circ}{y}) \neq (0, 0)$. *Então* L *é estritamente convexa em* $(x, \overset{\circ}{x})$, *como podemos concluir do teorema 7.1 no Apêndice.*

A equação (0.5.5) implica na convexidade estrita de J em $\mathcal{A}$. No Apêndice provamos esta afirmação usando o lema 7.1 e o teorema 7.2.

Nas condições do teorema (2.3) e pelo teorema (2.4) existe um único extremo x^* minimizando J em $\mathcal{A}$. Quando (0.5.5) é válida, $Q(x^*; y) > 0, \forall\, y(t) \not\equiv 0$ e pelo lema 5.2 não há extremos secundários não nulos e portanto tão pouco há pontos conjugados.

Definição 5.4 (Normas e vizinhanças em C^1 por partes) *Vamos considerar a seguintes normas no espaço das funções C^1 por partes em $[t_0, t_1]$.*

$$\|u\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)| \ \textit{e}$$

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|\overset{\circ}{x}\|.$$

O conjunto $\mathcal{N}_\delta = \{x / \|x - x^*\|_1 < \delta\}$ é chamado uma vizinhança fraca de x^* e $\mathcal{N}'_\delta = \{x / \|x - x^*\| < \delta\}$ é chamado vizinhança forte de x^*.

Definição 5.5 (Mínimo Local) *$x^* \in \mathcal{A}$ é denominado mínimo local fraco de J quando*

$$\exists \delta > o \ \textit{tal que} \ \forall x \in \mathcal{A} \ \textit{com} \ \|x - x^*\|_1 < \delta \ \textit{temos} \ J(x^*) \leq J(x).$$

$x^* \in \mathcal{A}$ é denominado mínimo local forte de J quando

$$\exists \delta > o \ \textit{tal que} \ \forall x \in \mathcal{A} \ \textit{com} \ \|x - x^*\| < \delta \ \textit{temos} \ J(x^*) \leq J(x).$$

Observação 5.2 *No corolário (3.2) e no teorema (5.2) obtivemos condições necessárias para um mínimo utilizando apenas os resultados do teorema (2.1). Os resultados deste teorema permanecem válidos quando x^* é um mínimo local, mesmo porque as avaliações feitas nas demonstrações são todas locais. Portanto as condições necessárias obtidas valem também para mínimos locais.*

Teorema 5.3 (Condição de Legendre) *Se J(x) tem um mínimo local x^* então, $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) \geq 0$, para $t_0 \leq t \leq t_1$.*

Prova:De fato, suponha que exista $r \in [t_0, t_1]$ tal que $N = L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(r, x^*(r), \overset{\circ}{x}^*(r)) < 0$. Seja $K = -N > 0$. Como $L \in C^4$, existe um intervalo $(r+\delta, r-\delta)$, $\delta > 0$ no qual $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) < -\frac{1}{2}K$.

Tomemos $\widetilde{y}(t)$ definida por:

$$\begin{cases} \widetilde{y}(t) &= \quad 0, & t_0 \leq t \leq r-\delta; \\ \widetilde{y}(t) &= 1 - \dfrac{\delta - t}{\epsilon}, & \delta - \epsilon < t < \delta; \\ \widetilde{y}(t) &= 1 - \dfrac{t - \delta}{\epsilon}, & \delta \leq t \leq \delta + \epsilon; \\ \widetilde{y}(t) &= \quad 0, & \delta + \epsilon \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

$\widetilde{y}(t)$ satisfaz as seguintes condições:

i) $|\widetilde{y}(t)| \leq 1$;

ii) $|\overset{\circ}{\widetilde{y}}(t)| \leq 1/\epsilon, \;\; t \in [\delta - \epsilon, \delta + \epsilon]$;

iii) $\widetilde{y}(t_0) = \widetilde{y}(t_1) = 0$;

iv) $\widetilde{y} \in \aleph$.

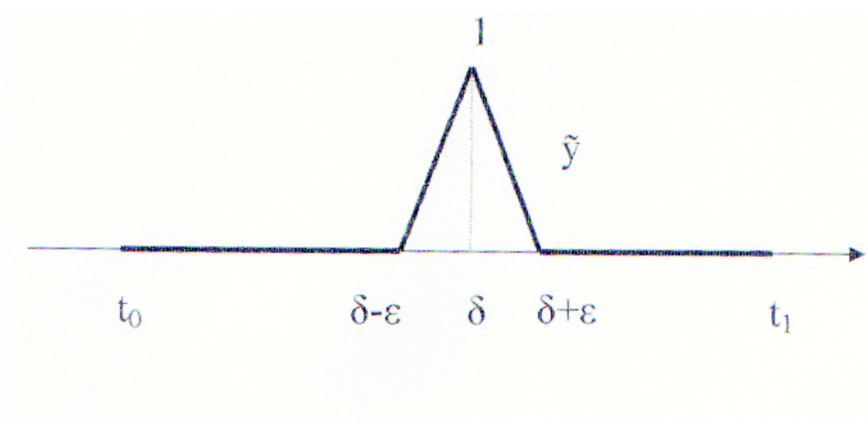

Figura 2:

Como L_{xx} e $L_{x\overset{\circ}{x}}$ são contínuas, são limitadas em $[\delta - \epsilon, \delta + \epsilon]$, e existem constantes K_1 e K_2 tais que:

$$|L_{xx}| < K_1 \text{ e } |L_{x\overset{\circ}{x}}| < K_2$$

Como

$$Q(x^*, y) = \delta^2 J(x^*; y) = \int_{t_0}^{t_1} L_{xx}y^2 + 2L_{x\overset{\circ}{x}}y\overset{\circ}{y} + L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{y}^2\, dt$$

temos

$$\begin{aligned} \delta^2 J(x^*; \widetilde{y})) &\leq \int_{\delta-\epsilon}^{\delta+\epsilon} |L_{xx}||\widetilde{y}|^2\, dt + 2\int_{\delta-\epsilon}^{\delta+\epsilon} |L_{x\overset{\circ}{x}}||\widetilde{y}||\overset{\circ}{\widetilde{y}}|\, dt + \int_{\delta-\epsilon}^{\delta+\epsilon} |L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}||\overset{\circ}{\widetilde{y}}|^2\, dt \\ &\leq 2K_1\epsilon + 4K_2 - \tfrac{1}{2}K \textstyle\int_{\delta-\epsilon}^{\delta+\epsilon} |\overset{\circ}{\widetilde{y}}|^2\, dt \\ &\leq 2\epsilon K_1 + 4\epsilon K_2 - \frac{K}{\epsilon} \end{aligned}$$

Portanto, tomando-se ϵ suficientemente pequeno, temos $\delta^2 J(x^*; \widetilde{y}) < 0$, o que é uma contradição. Logo $L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(t, x^*(t), \overset{\circ}{x}^*(t)) \geq 0$, para $t_0 \leq t \leq t_1$.

6 Mais Exemplos

Exemplo 6.1 (Braquistócrona, veja [3] e [5]) *Em 1969 Jonhan Bernoulli propôs um problema que influenciou fortemente o desenvolvimento do cálculo das variações:*
Dados dois pontos P_0 e P_1 em um plano vertical, determinar a trajetória de uma partícula de massa m que, partindo do repouso e sob a ação única da força da gravidade, passa de um ponto ao outro no menor tempo possível.

Solução: Suponhamos que no plano vertical compreendo os pontos P_0 e P_1 se tenha escolhido o referencial cartesiano da figura 3, no qual P_0 e P_1 recebem as coordenadas $(0, 0)$ e (x_1, y_1), respectivamente.

Se $s = s(t)$ representa a distancia sobre $y = y(t)$ a partir de P_0 temos que

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

onde t representa o tempo e v a velocidade da partícula. Como o movimento é, por hipótese, sem atrito com velocidade inicial 0 e é influenciado apenas pela força gravitacional, temos do principio da conservação da energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx$$

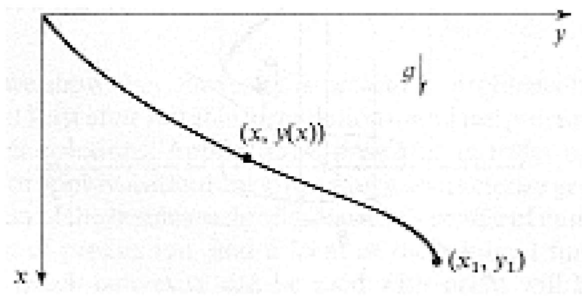

Figura 3:

onde x é a distancia vertical do nível inicial. Assim,

$$v = \sqrt{2gx}$$

e portanto

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$$

ou

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+\overset{\circ}{y}^2}\,dx}{\sqrt{2gx}}.$$

Integrando de 0 a x_1 teremoso tempo necessário para que a partícula passe seguindo a trajetória $y = y(x)$ do ponto P_0 ao ponto P_1. Assim temos de minimizar o seguinte funcional:

$$T(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+\overset{\circ}{y}^2}{2gx}}dx$$

O integrando sendo explicitamente independente de y teremos a equação de Euler reduzida a $L_{\overset{\circ}{y}} = 1/c$, ou seja,

$$\frac{\overset{\circ}{y}}{\sqrt{2gx(1+\overset{\circ}{y}^2)}} = \frac{1}{c},$$

donde

$$\frac{\overset{\circ}{y}^2}{2gx(1+\overset{\circ}{y}^2)} = \frac{1}{c^2}$$

ou

$$2gx(1+\overset{\circ}{y}^2) = c^2\overset{\circ}{y}^2,$$

portanto

$$(c^2 - 2gx)\overset{\circ}{y}^2 = 2gx,$$

logo

$$\overset{\circ}{y}^2 = \frac{2gx}{c^2 - 2gx} = \frac{x}{\frac{c^2}{2g} - x}. \tag{0.6.6}$$

Introduzindo a nova variável independente θ através da relação

$$x(\theta) = \frac{c^2}{2g}(1-\cos\theta) = \frac{c^2}{g}sen^2(\frac{\theta}{2}),$$

temos $\theta = 0$ quando $x = 0$, e para $\theta < \pi$, θ cresce com x. Pela regra da cadeia temos

$$\frac{dy}{d\theta} = \overset{\circ}{y}(x)\frac{dx}{d\theta} = \overset{\circ}{y}(x)(\frac{c^2}{g}sen\,\theta),$$

e a equação (0.6.6) torna-se

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \frac{4}{(\frac{c^2}{g}sen^2\theta)^2} = \overset{\circ}{y}(x)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta},$$

ou

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{c^2}{g}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}sen\theta = \frac{c^2}{g}(1-\cos\theta).$$

Assim $y(\theta) = \frac{c^2}{g}(\theta - sen\,\theta) + c_1$ e $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$. Chega-se assim ao sistema monoparamétrico de ciclóides

$$\begin{cases} x(\theta) &= \frac{c^2}{g}(1-\cos\theta) \\ y(\theta) &= \frac{c^2}{g}(\theta - sen\,\theta) \quad 0 < \theta < \theta_1 \end{cases}$$

onde c^2 e θ_1 podem ser determinados pela condição $x(\theta_1) = x_1$, $y(\theta_1) = y_1$. A curva descrita por estas equações é a ciclóide com cuspíde em $(0,0)$ que é traçada por um ponto sobre a circunferência de um disco de raio $\frac{c^2}{g}$ quando rola ao longo do eixo y como mostra a figura (4) abaixo.

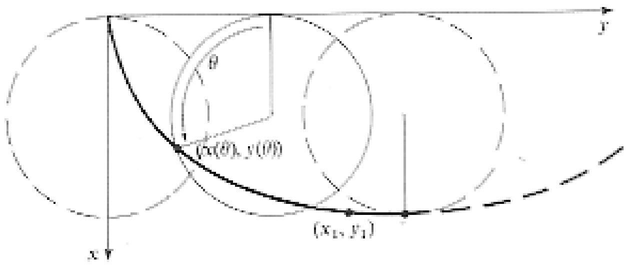

Figura 4:

Exemplo 6.2 (Veja [6]) *: Determine as funções que ligando $A(1,3)$ e $B(2,5)$ minimizam o funcional*

$$J(x) = \int_1^2 \mathring{x}[1 + t^2\mathring{x}]\, dt$$

Solução: Como $L = \mathring{x}[1 + t^2\mathring{x}]$ não depende explicitamente de x, a equação de Euler será

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L_{\mathring{x}} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(1 + 2t^2\mathring{x}) &= 0 \\ 1 + 2t^2\mathring{x} &= C. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathring{x} = \frac{C-1}{2t^2},$$

de modo que

$$x^*(t) = \frac{C_1}{t} + C_2, \qquad \text{com} \qquad C_1 = \frac{1-C}{2}.$$

Para que x^* satisfaça as condições de contorno devemos ter

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 5 \end{cases}$$

obtendo $C_1 = -4$ e $C_2 = 7$ o que acarreta $x^*(t) = 7 - \dfrac{4}{t}$. ■

Exemplo 6.3 (veja [6]) *Verificar se a condição de Jacobi se verifica para o extremo do funcional*

$$J(x) = \int_0^a \overset{\circ}{x}^2 - 4x^2 + e^{-t^2}\, dt$$

cujas extremidades são $A(0,0)$ e $B(a,0)$.

Solução: Como $L = \overset{\circ}{x}^2 - 4x^2 + e^{-t^2}$ temos que a equação de Euler será $L_x - \frac{d}{dt}L_{\overset{\circ}{x}} = 0$ e assim teremos,

$$\begin{aligned} -8x - \frac{d}{dt}(2\overset{\circ}{x}) &= 0 \\ -8x - 2\overset{\circ\circ}{x} &= 0 \\ \overset{\circ\circ}{x} + 4x &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral é $x(t) = C_1 sen\, 2t + C_2 \cos 2t$ sujeita à condição

$$\begin{aligned} x^*(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^*(t) = C_1 sen\, 2t,\ C_1 \neq 0. \\ x^*(a) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^*(a) = C_1\, sen\, 2a = 0 \end{aligned}$$

Como $sen\, 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{k\pi}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$ temos que a condição de Jacobi se cumprirá ou não segundo $a < \pi/2$ ou $a \geq \pi/2$, ou seja, se $a < \pi/2$ não teremos pontos conjugados para $(0,0)$ e para $a \geq \pi/2$ teremos pelo menos o ponto conjugado $(\pi/2, 0)$ e x^* não será um mínimo de J. ■

Exemplo 6.4 (Veja [6]) *Determinar o mínimo local fraco do funcional*

$$J(x) = \int_0^1 L(t, x_1, x_2, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)\, dt$$

onde $L(t, x_1, x_2, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = \overset{\circ}{x}_1^2 + \overset{\circ}{x}_2^2$ com as condições de fronteiras

$$\begin{cases} x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 2. \end{cases}$$

Solução: Temos o seguinte sistema de equações de Euler:

$$\begin{aligned} L_{x_1} - \tfrac{d}{dt}L_{\overset{\circ}{x}_1} = 0 \Rightarrow \overset{\circ\circ}{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = C_1 + C_2 t \\ L_{x_2} - \tfrac{d}{dt}L_{\overset{\circ}{x}_2} = 0 \Rightarrow \overset{\circ\circ}{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2(t) = C_3 + C_4 t \end{aligned}$$

Devido às condições de fronteiras, teremos

$$\begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = 2t \end{cases}$$

ou seja, $x^*(t) = (t, 2t)$.

Vamos provar que x^* é um mínimo local fraco em $0 \leq t \leq 1$.

$$L_{\mathring{x}_1\mathring{x}_1} = 2, L_{\mathring{x}_1\mathring{x}_2} = 0, L_{\mathring{x}_2\mathring{x}_1} = 0, L_{\mathring{x}_2\mathring{x}_2} = 0.$$

Logo

$$\begin{vmatrix} L_{\mathring{x}_1\mathring{x}_1} & L_{\mathring{x}_1\mathring{x}_2} \\ L_{\mathring{x}_2\mathring{x}_1} & L_{\mathring{x}_1\mathring{x}_2} \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

o que satisfaz a condição de Legendre. ■

Exemplo 6.5 (Veja [4]) *Dados dois pontos* (t_0, x_0) *e* (t_1, x_1) *no plano, encontrar a curva de menor comprimento que as une.*

Solução: Supondo as curvas admissíveis continuamente diferenciáveis, o nosso problema variacional pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar } J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \mathring{x}^2(t)}\, dt \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0 \text{ e } x(t_1) = x_1.$$

Como $L(t, x, \mathring{x}) = (1+\mathring{x}^2)^{1/2}$ temos que a equação de Euler é $L_{\mathring{x}} = c\,(constante)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\mathring{x}}{\sqrt{1 + \mathring{x}^2}} &= c \\ \frac{\mathring{x}^2}{1 + \mathring{x}^2} &= c^2 \\ \mathring{x}^2 &= c^2 + c^2\mathring{x}^2 \\ (1 - c^2)\mathring{x}^2 &= c^2 \\ \mathring{x}^2 &= \frac{c^2}{1 - c^2} \\ \mathring{x} &= A \text{ (constante)} \end{aligned}$$

Logo $x(t) = At + B$, isto é, a reta que passa por (t_0, x_0) e (t_1, x_1).

Como,

$$L_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}} = \frac{\sqrt{1+\overset{\circ}{x}^2} - \overset{\circ}{x} \cdot \dfrac{\overset{\circ}{x}}{\sqrt{1+\overset{\circ}{x}^2}}}{1+\overset{\circ}{x}^2} = \frac{1}{(1+\overset{\circ}{x}^2)\sqrt{1+\overset{\circ}{x}^2}} > 0$$

temos a convexidade estrita de L e portanto de J, e assim sendo x^* é ponto de mínimo (único). ■

7 Apêndice

Teorema 7.1 *Sejam $f : I\!R^2 \to I\!R$ de classe C^2 e*

$$\Delta(x, y, v, w) = f_{xx}(x, y)v^2 + 2f_{xy}(x, y)vw + f_{yy}(x, y)w^2 = d^2 f(x, y) \cdot h^2,$$

para $h = (v, w) \in I\!R^2$. Se $\Delta(x, y, v, w) > 0$ para todo $(v, w) \in I\!R^2 - \{(0, 0)\}$ então f é estritamente convexa.

Prova: De fato, sejam $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ pontos de $I\!R^2$ e $\lambda \in (0, 1)$. Seja

$$u = \lambda u_2 + (1-\lambda)u_1 = u_1 + \lambda(u_2 - u_1) = u_2 + (1-\lambda)(u_1 - u_2).$$

Assim,

$$u_1 = u - \lambda(u_2 - u_1) \text{ e } u_2 = u + (1+\lambda)(u_2 - u_1).$$

Pela fórmula de Taylor[6] temos:

$$f(u_1) = f(u) - \lambda \nabla f(u) \cdot (u_2 - u_1) + \frac{1}{2}\lambda^2 d^2 f(u^*) \cdot (u_2 - u_1)^2 \qquad (0.7.7)$$

$$f(u_2) = f(u) + (1-\lambda)\nabla f(u) \cdot (u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(1-\lambda)^2 d^2 f(u^{**}) \cdot (u_2 - u_1)^2 \quad (0.7.8)$$

[6] $f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2}d^2 f(a^*) \cdot h^2$, onde a^* é um ponto do segmento de reta unindo a e a+h.

onde u^* e u^{**} são pontos do segmento de reta unindo u a u_1 e u_2 respectivamente.

Multiplicando (0.7.7) por $(1-\lambda)$ e (0.7.8) por λ, somando-as e usando o fato que $\Delta > 0$, obtemos

$$(1-\lambda)f(u_1) + \lambda f(u_2) > f(u) = f(\lambda u_2 + (1-\lambda)u_1).$$

■

Lema 7.1 *Seja X um espaço vetorial e $J : \mathcal{A} \subset X \to lR$ tal que para todo par de elementos x,v de X satisfazendo $x, x+v \in \mathcal{A}$, a variação de Gateaux $\delta J(x;v)$ existe. São equivalentes as afirmações:*

i) *J é convexo em $\mathcal{A}$;*

ii) *Para todo par de elementos $x, v \in X$, com $x, x+v \in \mathcal{A}$, temos*

$$J(x+v) - J(x) \geq \delta J(x;v).$$

Temos ainda que J é estritamente convexo em $\mathcal{A}$, quando há igualdade na desigualdade do item (ii) ocorre se e somente se $v = 0$.

Prova: $(i) \Rightarrow (ii)$ Para $0 < \epsilon < 1$ podemos escrever $x + \epsilon v$ na forma da combinação linear convexa

$$x + \epsilon v = (1-\alpha)x + \alpha(x+v),$$

com $\alpha = \epsilon \in [0,1]$. Da convexidade de J segue que

$$J(x+\epsilon v) \leq (1-\epsilon)J(x) + \epsilon J(x+v),$$

de onde obtemos

$$\frac{1}{\epsilon}[J(x+\epsilon v) - J(x)] \leq J(x+v) - J(x).$$

Tomando agora o limite quando $\epsilon \to 0$, obtemos a desigualdade em (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Dados $x, v \in X$ e $\alpha \in [0,1]$, defina $w := \alpha x + (1-\alpha)v$. Da hipótese (ii) segue

$$\delta J(w;h_1) \leq J(v) - J(w), \qquad \delta J(w;h_2) \leq J(x) - J(w),$$

para $h_1 = \alpha(v-x)$, $h_2 = (1-\alpha)(x-v)$. Segue[7] que

$$\frac{1}{\alpha}[J(v)-J(w)] \geq \delta J(w;(v-x)) \geq \frac{1}{1-\alpha}[J(w)-J(x)],$$

de onde obtemos

$$\alpha J(x) + (1-\alpha)J(v) \geq \delta J(w)$$

e o lema fica provado. ■

Teorema 7.2 *Seja o integrando variacional L como definido em (Prob1). Se L satisfaz*

$$L(t,x+v,y+w) - L(t,x,y) \geq L_x(t,x,y)\cdot v + L_y(t,x,y)\cdot w \qquad (0.7.9)$$

para todo $(t,x,y),(t,x+v,y+w) \in [t_0,t_1]\times I\!R^{2n}$. São verdadeiras as afirmações:

i) *J é convexo em $\mathcal{A}$;*

ii) *Se L é tal que a igualdade em (0.7.9) ocorre se e somente se $v_i w_i = 0$ para $i = 1,2,\ldots,n$, então J é estritamente convexo em $\mathcal{A}$.*

Prova: Dados $x, x+v \in \mathcal{A}$, a desigualdade (0.7.9) implica que

$$L(t,x+v,x'+v') - L(t,x,x') \geq L_x(t,x,y')\cdot v + L_y(t,x,x')\cdot v' \qquad (0.7.10)$$

Integrando obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1}[L(t,x+v,x'+v') - L(t,x,x')]dt \geq \int_{t_0}^{t_1}[L_x(t,x,x')\cdot v + L_{x'}(t,x,x')\cdot v']dt,$$

isto é, $J(x+v)-J(x) \geq \delta J(x;v)$, provando o item (i).
(ii) Se a hipótese é verdadeira, então dados $x, x+v \in \mathcal{A}$ a igualdade em (0.7.10) ocorre se e somente se $v_i(t)v_i'(t) \equiv 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, em $[t_0,t_1]$. Note que $v_i(t)v_i'(t) = 1/2(v_i^2(t))'$, logo $v_i(t)v_i'(t) \equiv 0$ se e somente se $v_i^2(t)$ é constante. Note ainda que $v^2(t_0) = 0$[8]. Portanto $J(x+v)-J(x) = \delta J(x;v)$ se e somente se $v \equiv 0$ e (ii) fica provado. ■

[7] $\delta J(x;\alpha v) = \alpha\delta J(x;v), \alpha \in I\!R$.

[8] De fato, como x e x+v pertencem a $\mathcal{A}$, então $v(t_0) = v(t_1) = 0$.

Referências

[1] Fleming, W. H. and Rishel, R. W.,Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag New York, 1975.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the Calculus of Variations, Phoenix Science Series, 1946.

[3] Troutman, J. L.,Variational Calculus with Elementary Convexity, Springer-Verlag New York Inc., 1983.

[4] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V., Cálculus of Variations, Prentice-Hall, Inc. 1963.

[5] Sagans, H., Introduction to the Calculus of Variations, MacGraw-Hill Book Company, 1969.

[6] Krasnov, M.L., Makarenko, G.L. and Kisliov, A. I., Calculo Variacional, Mir. Moscovo, 1984.