RECOBRIMENTO CONTÍNUO ÓTIMO

Antonio Alberto Fernandes de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

Aprovada por:

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga
(Presidente)

Prof. Ronaldo C.Marinho Persiano

Prof. Carlos Humes Júnior

Prof. Pedro Nowosad

Prof. Claudio T. Bornstein

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1979

DE OLIVEIRA, ANTONIO ALBERTO FERNANDES

RECOBRIMENTO CONTÍNUO ÓTIMO (RIO DE JANEIRO) 1979.

viii,234p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1979)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Otimização I. COPPE/UFRJ II.Título (série).

Antonio Alberto Fernandes de Oliveira, que considera absolutamente desnecessária essa "biografia", nasceu no Rio de Janeiro a 7 de maio de 1949. Em 1973 formou-se em Engenharia Eletrônica pela UFRJ porém nunca exerceu essa profissão. Nesse mesmo ano entrou para a COPPE mas foi no IMPA em 1974 que obteve o Mestrado. Começou o doutorado na COPPE em 1975 quando ingressou no seu quadro docente e se mais não fez digno de registro, atribua-se a falta de tempo, dinheiro e aptidão.

A meus pais e tia,
a Ana Maria e a Me
mória de minha Avó.

AGRADECIMENTOS

- As pessoas que me suportaram nos momentos de insegurança e frustração que caracterizam as crises inerentes aos trabalhos de tese.

- Ao Professor Cláudio T. Bornstein que suportou resignado a sobrecarga de trabalho na linha de Planejamento Agropecuário que lhe trouxe meu envolvimento com esta tese.

- Aos Professores Clóvis C. Gonzaga e Ronaldo C. Marinho Persiano que aceitaram minha proposta de tese, aguentaram minhas preleções e ainda contribuiram com sugestões relevantes para o trabalho.

- Ao Professor Nelson Maculan Filho que propiciou minha vinda para a COPPE que acabou dando nesta tese.

- Ao Professor Carlos Humes Júnior cuja tarefa de ser membro da banca começou efetivamente seis meses antes do dia da defesa.

- Ao Professor Pedro Nowosad e outros docentes do IMPA pela colaboração que me prestaram no decorrer deste trabalho.

- A datilografia muito boa da Angela principalmente e da Daisy.

RESUMO

São tratados neste trabalho os problemas de otimização que podem ser colocados no formato de I e II dados abaixo.

$$\min \sum_{i=1}^{k} c(y_i)$$

$$\text{(I)} \qquad \text{suj.a} : G(y) = \sup_{x \in X}\{\min_{i \in \overline{1,k}}\{g_i(x,y)\}\} \leq 0$$

$$\text{e} \quad y \in Y$$

$$\text{(II)} \qquad \min_{y \in Y}\{\max_{x \in X}\{\min_{i \in \overline{1,k}}\{g_i(x,y)\}\}\}$$

onde X é um conjunto compacto e c e g são funções contínuas.

Inicialmente são obtidas expressões para as derivadas unidirecionais de função G dada acima, considerando-se cinco situações distintas. A partir dessas expressões se obtem então condições necessárias de otimalidade para os problemas I e II.

Adicionalmente é apresentado ainda um teorema de função implícita seguindo-se uma de suas aplicações.

ABSTRACT

Here we give an analytical treatment to the optimization problems which can be formulated as I or II as follows:

(I)
$$\min \sum_{i=1}^{k} c(y_i)$$
$$\text{subject to: } G(y) = \sup_{x\varepsilon X}\{ \min_{i\varepsilon \overline{1,k}} \{g_i(x,y)\}\} \leq 0$$
$$\text{and } \quad y \varepsilon Y$$

(II)
$$\min_{y\varepsilon Y}\{\max_{x\varepsilon X}\{ \min_{i\varepsilon \overline{1,k}}\{g_i(x,y)\}\}\}$$

In both cases X is a compact set and c and g are continuous functions.

First we develop expressions for the directional derivatives of the function G, given above considering five distinct cases. From these expressions necessary otimality criteria for the problems I and II are then obtained.

In addition an implicit function theorem is also presented followed by one of its applications.

ÍNDICE

Notação Utilizada

A seguir se encontram listadas todas as notações empregadas que se considerou passíveis de causar alguma espécie de dúvida. Convém lembrar ainda que parte da notação empregada será introduzida no decorrer do texto.

1. $f'(x,v)$ = derivada unidirecional de função f em x segundo o vetor v
2. $f(\bar{x},.)$ = restrição de função f a $x = \bar{x}$.
3. S' = fronteira do conjunto S.
4. $\dot{S}'$ = interior relativo do conjunto S.
5. $[S]'$ = variedade linear gerada pelo conjunto S.
6. $\underline{\lim}\ a_n$ = limite inferior da sequência a_n
7. $\overline{\lim}\ a_n$ = limite superior da sequência a_n

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1.

Chamam-se problemas de determinação do recobrimento ótimo aqueles que podem ser colocados na forma:

$$\min f(y)$$
$$\text{sujeito a: } \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \{\inf_{z \in Z} \{g(z,x,y)\}\} \leq 0 \qquad (1)$$

Entre esses problemas se pode incluir mediante uma simples adaptação o de recobrimento mínimo que é expresso por:

$$\min \{\sup_{x \in X} \{\inf_{z \in Z} \{g(z,x,y)\}\}\}$$
$$\text{sujeito a: } y \in Y \qquad (2)$$

Se todos os conjuntos que aparecem nesses problemas forem finitos então eles podem ser tratados diretamente por uma série de algoritmos combinatórios já bastante desenvolvidos. Os mais conhecidos desses algoritmos são aqueles que empregam técnicas de programação inteira bivalente.

Suponha agora que apenas a variável y é contínua mantendo-se X e Z finitos. Nesse caso o problema 2 quando g e $\partial g/\partial y$ são contínuas e $Y = \mathbb{R}^q$ pode ser tratado pelo método apresentado por Demyanov em | 1 |. Esse método é do tipo "steepest descent" podendo ser descrito mais detalhadamente da seguinte forma: Assuma que na k.ª iteração do algoritmo se te nham obtido o vetor $y_k \varepsilon Y$ e dois parâmetros do algoritmo $\varepsilon_k > 0$ e $\delta_k > 0$. Considere então

$$G: Y \to \mathbb{R} | G(y) = \max_{x \varepsilon X} \{\min_{z \varepsilon Z} g(z,x,y)\}$$

chamada função de recobrimento de X em y e os mapeamentos

$$M_\varepsilon: Y \to X | M_\varepsilon(y) = \{x \varepsilon X | \min_{z \varepsilon Z} g(z,x,y) \geq$$

$$G(y) - \varepsilon\} \cancel{\forall} \varepsilon \geq 0 \quad e \quad m_o: X \times Y \to \overline{1,K} \;|$$

$$m_o(x,y) = \{z \varepsilon Z \quad \text{que resolvem}$$

$$\min_{z \varepsilon Z} \{g(z,x,y)\}\}$$

Se y_k satisfaz a uma condição de otimalidade como por exemplo: "Existem famílias ($z_x \varepsilon m_o(x,y)$, $x \varepsilon M_o(y)$) e ($\lambda_x \geq 0$; $x \varepsilon M_o(y)$) tais que

$$\sum_{x \varepsilon M_o(y)} \lambda_x > 0 \quad e \quad \sum_{x \varepsilon M_o(y)} \lambda_x \frac{\partial g}{\partial y} (z_x, x, y_k) = 0\text{"} \tag{3}$$

então pare.

Em caso contrário resolva

$$\max_{d \varepsilon S(0,1)} G'_{\varepsilon_k} (y_k, d) \tag{4}$$

onde

$$G'_{\varepsilon_k}(y_k,d) = \max_{x\varepsilon M_\varepsilon(y)} \{ \min_{z\varepsilon m_0(x,y)} \{\frac{\partial g}{\partial y}(z_x, x,$$

$$y_k). d\}\}.$$

$G'_{\varepsilon_k}(y_k,d)$ é uma superestimativa da derivada unidirecional $G'(y_k,d)$ que pode ser obtida substituindo-se na expressão acima $M_\varepsilon(y)$ por $M_0(y)$. Usando-se $G'_{\varepsilon_k}(y_k,d)$, que inclui na sua expressão avaliações efetuadas nos pontos de X ditos ε-ativos , ao invés da própria derivada unidirecional se procura garantir que se o algoritmo gerar uma sequência infinita (y_k) qualquer ponto de acumulação dessa sequência satisfará a condição 3. Observe entretanto que essa condição é necessária mas não suficiente para garantir a otimalidade local.

Se

$$\max_{d\varepsilon S(0,1)} G'_{\varepsilon_k}(y_R,d) > \delta_k \tag{5}$$

faça $\varepsilon_k = \varepsilon_k/2$, $\delta_k = \delta_k/2$ (6) e resolva 4 para o novo valor de ε. Se 5 ainda se verificar devida outra vez ε_k e δ_k por 2 resolva de novo 4 e assim por diante. Pode ser verificado que 5 não se repete uma infinidade de vezes.

Quando 5 não ocorrer tome um vetor d_k ótimo para 4 e determine uma solução λ_k de

$$\min_{\lambda\varepsilon[0,\infty)} \{\max_{x\varepsilon X} \{\min_{z\varepsilon Z} \{g(z,x,y_k + \lambda_k d_k)\}\}\} \tag{7}$$

ou verifique que esse problema é ilimitado inferiormente. Nesse último caso o mesmo acontecerá com 2.

Existindo λ_k como dado anteriormente, faça $y_{k+1} = y_k + \lambda_k d_k$ e repita todo o processo indicado com $k+1$ no lugar de k. Sob certas condições a determinação de λ_k como solução exata de 7 pode ser substituida por um passo do método de Armijo.

Imagine agora que além de y, x também é contínua (Z continua finito). Suponha ainda que além das condições já estabelecidas (g e $\frac{\partial g}{\partial y}$ contínuas e $Y = \mathbb{R}^q$) se tenha X compacto $\subseteq \mathbb{R}^p$ para evitar que G(y) seja + ∞ ou M_o perca a semicontinuidade superior.

Para se poder pensar em construir um algoritmo tipo "steepest descent" como o método de Demyanov para o problema 2 com essas especificações as seguintes dificuldades precisam ser contornadas.

A) Determinar que condições sobre a função g e o conjunto X precisam ser impostas de forma a garantir a existência de derivadas unidirecionais para G e expressar essas derivadas como função apenas de y e da direção. A expressão

$$\max_{x \varepsilon M_o(y)} \{ \min_{z \varepsilon m_o(x,y)} \{ (\frac{\partial g}{\partial y} (z_x, x, y_k) . d \} \} \tag{8}$$

que dava G'(y,d) no caso anterior e que era aproximada de forma conveniente no método de Demyanov não é mais válida.

B) Estabelecer algum tipo de condição de otimalidade para pôr no lugar de 3 que deixa de ser condição necessária para caracterizar um ótimo local uma vez que 8 não expressa mais G'(y,d).

Este trabalho tem por objetivo exatamente dar tratamento analítico aos problemas de recobrimento ótimo em que y, x e g são contínuas, X é compacto e Z finito de forma a levantar esses elementos indicados em A e B.

Inicialmente o problema de determinação de derivadas unidirecionais é tratado sob diferentes conjuntos de hipóteses. Cada um deles corresponde em geral, a um par de grupos de condições: um de condições sobre g e outro sobre X. Esses grupos de condições se complementam de forma a assegurar a existência das G'(y,d).

As expressões obtidas para essas derivadas generalizam, dentro do contexto em que se aplicam, um resultado clássico sobre diferenciação de funções extremas em que se indica como expressar as derivadas unidirecionais da função $\max_{x \in X} \{f(x,y)\}$ num ponto $\bar{y}$ se X é compacto e f satisfaz determinados requisitos (ver Pshenichnyi | 2 |).

Com base numa das fórmulas obtidas para G'(y,d) e com a ajuda de um teorema de otimalidade para problemas convexos são obtidas condições necessárias para caracterizar a otimalidade local nos problemas 1 e 2. Para o caso do problema 2 as condições obtidas podem ser consideradas uma extensão de 3.

Os problemas de recobrimento em que todas as variáveis são contínuas com X e Z compactos não serão abordados nesse trabalho. Embora uma parte dos resultados obtidos para o caso em que Z é finito sejam extensíveis sem maiores complicações a esse caso mais geral existem algumas situações de interesse (por exemplo: no caso em que g(•,•,z) é convexa $\forall y \in Y$ e $\forall z \in Z$ e X é um politopo) em que se precisa impor mais do que simples condições adicionais pouco restritivas para que se possa obter os elementos pretendidos. O algoritmo randômico proposto por Vachnadze e Propoi em |3| pode ser aplicado a esse caso.

I.2 - Duas Aplicações

Dois problemas de otimização que se enquadram dentro das formulações gerais dadas em 1 e 2 são os seguintes.

1º - Considere um sistema que possui duas espécies de controle (um inicial $y \in Y$ e outro permanente $z \in Z$) e imagine também que existe um parâmetro aleatório x que também influencia o desempenho (g) do sistema. O controle permanente Z é aplicado após a realização do evento aleatório representado por x enquanto a aplicação do controle inicial y é feita logicamente antes dessa realização.

Suponha ainda que a distribuição da variável x fixado y não seja conhecida mas que se tenha informações sobre o conjunto X dos possíveis valores de x. Nessas condições um tratamento em que dado y se considere a realização mais desfavorável de x se justifica e nessas condições o problema de otimizar o desempenho do sistema pode ser posto na forma

$$\max_{y \in Y} \{\min_{x \in X} \{\max_{z \in Z} g(x,y,z)\}\}$$

que é análoga a forma expressa em 2.

2º - Deseja-se instalar ou ampliar uma rede de facilidades (ambulatórios, grupos escolares, guarnições do corpo de bombeiros, etc) em uma região de forma que qualquer localidade dentro dessa região possa ser atendida por um posto assistencial localizado a uma distância menor que um determinado limite considerado razoável para o deslocamento de um usuário. De uma forma mais geral incluindo na medida do padrão de atendimento, outros fatores além da distância se pode dizer que se objetiva localizar e dimensionar os postos da rede de forma a garantir um nível de atendimento mínimo a qualquer ponto da região segundo um determinado critério (h).

Se a rede que se pretende obter é entre as que atendem a condição apresentada acima, aquela de custo de instalação (ou ampliação, ou manutenção, etc) mínimo então o problema pode ser colocado no seguinte formato

$$\min \sum_{i \in \overline{1,K}} c(y_i)$$

sujeito a:

$$\max_{x \in X} \{\min_{i \in \overline{1,K}} \{h(x, y_i)\}\} \leq 0 \qquad (1)$$

$$y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_K) \in X^K \qquad \text{onde}$$

K é um limite superior para o número de componentes da rede , X é a região dada, y_i representa a localização e as dimensões da iª componente da rede e c é o custo de instalação (ou manutenção) de uma unidade.

Este problema se encaixa na formulação ge ral dada em I.1-1. Entretanto devido ao fato que uma discretização eficiente de X pode ser facilmente obtida (basta possuir um mapa da região) ele se presta mais a um tratamento inteiramente combinatório sendo apresentado aqui em especial porque se constitui numa concretização bastante imediata do problema apresentado em I.1-1.

Parte da terminologia empregada neste trabalho, provem desta aplicação.

Por exemplo os elementos do conjunto $M_0(y)$ como foi definido em I.1. são por vezes chamados de pontos pior atendidos.

Uma aplicação da teoria de diferenciação de funções max-min em teoria dos jogos é apresentado por Matsumoto |4|.

I.3 - Descrição do Trabalho

Como neste trabalho Z será sempre considerado finito vai-se substituí-lo daqui em diante por $\overline{1,K}$ e ao invés de se considerar no problema I.1-2 uma única função g dependente de três variáveis vai-se tomar um conjunto de funções g_i, $i \in \overline{1,K}$ que se aplicam a (x,y) apenas.

O problema I.1-1 será tratado especialmente na forma apresentada em I.2-1 só que não necessariamente se considera $Y = X^K$.

Tendo em vista essas considerações os problemas de recobrimento que serão abordados neste trabalho serão os que podem assumir uma das seguintes formas:

Problema I:

$$\min \sum_{i=1}^{K} c(y_i)$$

sujeito a:

$$\max_{x \in X} \{\min_{i \in \overline{1,K}} \{h(x,y_i)\}\} \leq 0$$

$$y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_K) \in Y_1^K$$

Problema II:

$$\min_{y \in Y} \{\max_{x \in X} \{\min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(x,y)\}\}\}$$

As condições gerais sobre X as g_i, c e h comuns a todos os casos tratados são:

X compacto $\subseteq X_0$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$, $Y \subseteq Y_0$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^q$, p e q inteiros, g_i: $X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ contínua $\forall i \in \overline{1,K}$, Y_1 fechado $\subseteq Y_{1,0}$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^m$, c: $Y_{1,0} \to \mathbb{R}$ contínua e h: $X_0 \times Y_{1,0} \to \mathbb{R}$ também contínua.

O desenvolvimento do trabalho é efetuado da seguinte forma:

Inicialmente no Capítulo II se apresentam alguns resultados básicos que serão utilizados nesse capítulo e em posteriores nos processos de obtenção de derivadas unidi direcionais de G sob três conjuntos de hipóteses diferentes. Além disso é mostrado que sob um conjunto de condições comumente atendidas, as $G'(y,d)$ existem e são dadas por uma expressão $(\hat{G}'(y,d))$ análoga a apresentada por Demyanov em |5|.

No Capítulo III se estabelece que essa expressão análoga a de Demyanov dá o valor da $G'(y,d)$ em dois casos correlatos. No primeiro as restrições $g_i(\cdot,y)$ são côncavas e X é uma união finita de conjuntos convexos . Essa propriedade é exigida do complementar de X no segundo caso quando as $g_i(\cdot,y)$ são convexas. Em ambos os casos é requerido ainda que $g_i(x,\cdot)'(y,d)$ possa ser obtida por um limite uniforme em X(1).

Ao contrário do Capítulo III, no Capítulo IV são dados exemplos de classes de problemas de recobrimento em que as derivadas unidirecionais de G existem mas não são indicadas por $\hat{G}'(y,d)$.

Na parte inicial é estudado o caso em que $X \subseteq \mathbb{R}$ atende a uma condição de regularidade e as $g_i(\cdot,y)$ que sejam não-nulas possuem uma derivada de alguma ordem diferente de zero em todo ponto de $M_0(y)$.

Usando os resultados obtidos no estudo desse caso se mostra a seguir a existência das $G'(y,d)$ quando as g_i satisfazem 1, suas restrições $g_i(\cdot,y)$ são analíticas e $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é dado por um número finito de restrições também analíticas.

No Capítulo V condições de otimalidade para os problemas I e II são apresentadas. Essa apresentação também é dividida em duas partes. No caso tratado na primeira parte a exigência fundamental é que $G'(y,d) = \hat{G}(y,d)$ para qualquer direção d viável em Y no ponto y. Na outra parte se procura obter resultados mais específicos para quando as $g_i(\cdot,y)$ forem convexas ou, precisando melhor, para quando se verificarem as condições do segundo caso tratado no Capítulo III.

Finalmente no Capítulo VI é apresentado um teorema de função implícita seguindo-se uma aplicação dele dentro do contexto de problemas de recobrimento. Esste teorema se aplica a sistemas homogêneos, em que cada equação é dada por uma função convexa ou pela diferença de duas delas.

A continuação natural desse trabalho se dará com a construção de um algoritmo do tipo descrito em I.1 aproveitando parte do ferramental levantado aqui.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados preliminares que serão utilizados posteriormente na determinação de derivadas unidirecionais para a função do recobrimento e de condições de otimalidade para os problemas dados no capítulo anterior. Os resultados iniciais se constituem basicamente no estabelecimento de limitações a direita e a esquerda para o quociente $\frac{G(y+h) - G(y)}{\|h\|}$ quando $h \to 0$ e G é a função de recobrimento. Um exemplo extremamente simples e apresentado com o intuito de mostrar que é necessário existir pelo menos um tipo de convexidade local nos pontos do conjunto a ser coberto para que se possa garantir, que o quociente acima tende para um único valor quando $h \to 0$ e $h/\|h\| \to d$. Além disso, é claro, determinadas condições de regularidade sobre as funções g_i devem ser requeridas para assegurar esse fato. Uma dessas condições é indicada ao final da seção. Ela permite assegurar uma espécie de estabilidade para um subconjunto dos pontos onde o atendimento é mais crítico quando se efetuam perturbações na variável cobertora. Os pontos pior cobertos que não se incluem nesse subconjunto são melhor atendidos por apenas uma das g_i podendo ser tratados separadamente utilizando-se um conhecido resultado sobre derivadas direcionais de uma função máximo (ver Pshenichnyi | 2 |).

Sob as condições estabelecidas neste capítulo é válida uma expressão para as derivadas unidirecionais da função de recobrimento que consiste na aplicação de um operador max-min sobre um argumento linear. Essa expressão se repetirá com pequenas alterações quando se tratar proximamente de casos um pouco mais complexos. Não é possível entretanto generalizá-la para todas as classes de problemas que serão abordados neste trabalho.

II.1 - Notação

Para uma série de conceitos já introduzidos no capítulo anterior se utilizará uma notação concisa. Essa notação bem como a terminologia empregada para referenciar cada um desses conceitos pode ser encontrada na lista abaixo:

1. $g(x,y) = \min_{i=1,\dots,k} \{g_i(x,y)\}$ é a função melhor recobrimento de $\{x\}$ em y

2. $G(y) = \max_{x \in X} \{g(x,y)\}$. G é chamada de função melhor recobrimento de X em y ou simplesmente função de recobrimento de X

3. $M_0(y) = \{x \in X \mid G(y) = g(x,y)\}$ $M_0(y)$ é referenciado por conjunto de pontos pior cobertos ou pior atendidos em y.

4. $m_0(x,y) = \{i \in \overline{1,k} \mid g(x,y) = g_i(x,y)\}$, $\overline{1,k} = \{1,\dots,k\}$ ..

   $m_0(x,y)$ é o conjunto de melhores coberturas de x em y ou das funções (coberturas) ativas em (x,y)

5. $L(y,d) = \{\ell \in R \mid \exists (h_n),\ h_n > 0 \ \ \forall n,$

$$, h_n \to 0 \;\middle|\; \frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell\}$$

II.2)

Com relação aos quatro conceitos indicados em II.1 existe uma série de resultados básicos que serão usados constantemente no decorrer deste estudo. Os que dizem respeito a algum tipo de continuidade foram reunidos na proposição a abaixo. Essa proposição será apresentada sem prova por-se considerar que as afirmações nela contidas são de simples constatação.

Proposição 1

Nas condições indicadas em I é verdade que:

a) As funções g e G são contínuas

b) Os mapeamentos $m_o: X \times Y \to \overline{1,k}$ e $M_o: Y \to X$ são semi-contínuos superiormente.

c) Seja $H_{y,d} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$h \to \frac{G(y + hd) - G(y)}{h}$$

então $H_{y,d}$ é contínua e portanto $L(y,d)$ é um intervalo fechado em $\bar{R}$

II-3)

Num exemplo simples em que a função G não tem derivadas unidirecionais devido a irregularidade do conjunto a ser coberto

Ex. 1:

Sejam

a) $X = \{1/_2 n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

b) $g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y_1, y_2) \rightarrow y_1 - x$

c) $g_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y_1, y_2) \rightarrow x - y_2$

d) $\tilde{y} = (4, -4)$

e) $d = (-1, +3)$

f) $h \geq 0$

Pode-se provar que com esses elementos o quociente $\dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h}$ não tende a um único valor quando $h \rightarrow 0$ conforme mostra a figura a seguir.

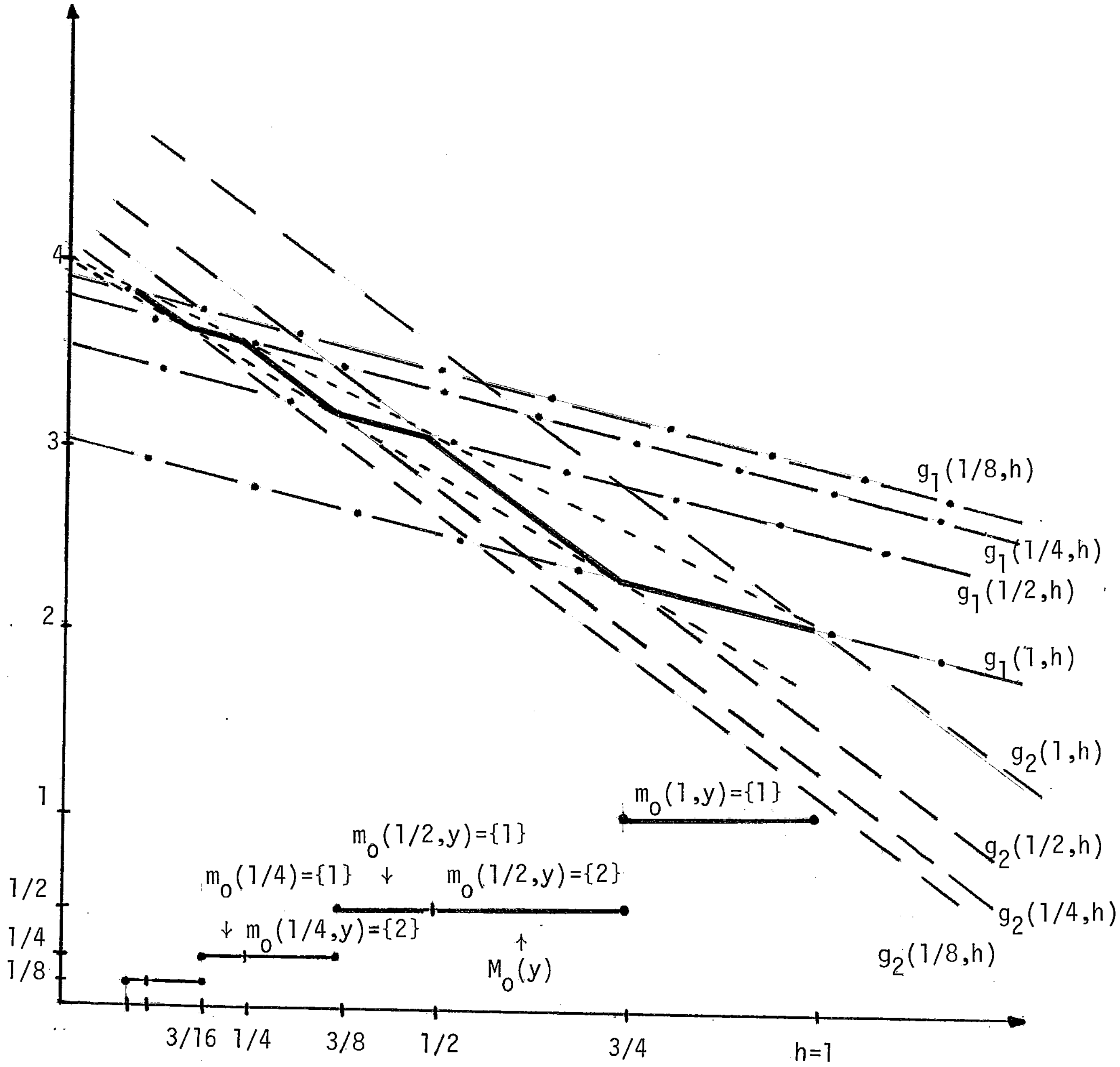

FIGURA 1

A figura 1 permite observar as oscilações que ocorrem na inclinação dos segmentos que constituem o gráfico de $G(\tilde{y} + hd)$ impedindo que a aproximação do ponto (0,4) se faça segundo uma única tangente. Essas oscilações resultam da alternância entre g_1 e g_2 como função ativa nos pontos de $M_o(\tilde{y} + hd)$ o que é ocasionado pela própria descontinuidade do conjunto X.

Para expressar precisamente em termos numéricos esse comportamento irregular de G pode-se tomar duas sequências

$h_n^1 = 2^{-n}$ e $h_n^2 = 3 \quad 2^{-(n+1)}$ $n \in N$ e

computar $H_{\tilde{y},d}\ (h_n^i) = \dfrac{G(\tilde{y} + h_n^i\ d) - G(\tilde{y})}{h_n^i}$ $i = 1,2$

Para (h_n^1) teremos $M_o(\tilde{y} + h_n^1\ d) = \{h_n^1\}$ e

$g_1(h_n^1,\ \tilde{y} + h_n^1\ d) = g_2(h_n^1,\ \tilde{y} + h_n^1\ d)$

$G\ (\tilde{y} + h_n^1\ d)$ valerá nesse caso

$(4 - 2\ h_n^1)$ e portanto $H_{\tilde{y},d}\ (h_n^1) = -2\ \forall n \in N$

Para (h_n^2) ficaremos $M_o(\tilde{y} + h_n^2\ d) = \{2^{-(n-1)},\ 2^{-n}\} =$

$\{\frac{2}{3}\ h_n^2,\ \frac{4}{3}\ h_n^2\}$ $m_o(\ \frac{2}{3}\ h_n^1,\ h_n^2) = \{2\}$, $m_o\ (\frac{4}{3}\ h_n^2\ ,\ h_n^2) =$

$= \{1\}$ e $G(\tilde{y} + h_n^2\ d) = (4 - 7/3\ h_n^2)$. Assim $H_{\tilde{y},d}(h_n^2) = -7/3$

Verifica-se assim que $H(\tilde{y},d)$ pode-se aproximar de valores distintos quando se tende ao ponto zero de maneiras diferentes. Não existe portanto $\lim H_{y,d}(h)$. Os valores -2 e -7/3 são na realidade extremos do conjunto $L\ (\tilde{y},d)$

II-4)

Suponha que $\forall\ x \in X$ e $\forall\ i \in \overline{1,k}$ as derivadas unidirecionais das funções $g_i(x,.)$ segundo um dado vetor d existem em $\tilde{y}$ e satisfazem condições que assegurem a convergência uniforme em X de $\frac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i(x,y)}{h}$ quando $h \to 0$. Então é possível concluir que $L(\tilde{y},d)$ caberá entre os valores extremos do conjunto dessas derivadas. Esse resultado será precisamente formalizado no Teorema abaixo

Teorema 1

Suponha satisfeitas as condições gerais dadas em I.3 sobre X e as g_i

a) Se $x \in M_0(\tilde{y})$ é tal que $\forall$ i existe $g_i(x, .)' (\tilde{y},d)$

Então $\exists$ $i_x \in m_0(x,y)$

$$g_i(x, .)'(\tilde{y},d) \leq \ell^- = \min(L(\tilde{y},d))$$

b)

b.1) Se $\forall$ $x \in X$ e $\forall$ $i \in \overline{1,k}$ $\exists$ $g_i(x, .)'(\tilde{y},d)$

e se

$$\forall \in \overline{1,k},\ r_i(x,h) \triangleq \frac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i(x,\tilde{y})}{h} \underset{h \to 0}{\to}$$

$g_i(x, .)'(\tilde{y},d)$ uniformemente em X

ou

b.2) Se $g_i(x, .)$ é convexa $\forall$ $x \in X$ e $1 \in \overline{1,k}$

Então:

$\exists x' \in M_0(\tilde{y})$ e $i' \in m_0(x',\tilde{y}) \mid g_{i'}(x', .)'(\tilde{y},d) \geq$

$\ell^+ = \max (L(\tilde{y},d))$

Prova:

a) Seja $x \in M_0(\tilde{y}) \mid \forall i \in m_0(x,\tilde{y})$ existe $g_i(., x)'(\tilde{y},d)$ e $(h_n) \mid$

$h_n > 0,\ h_n \to 0$ e $\dfrac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^-$

Seja $i_n \in (x,\tilde{y} + h_n d)$. Passando se necessário a uma subsquên-cia podemos fazer $i_n = i_x$ constante $\forall n$, $i_x \in m_0\ (x,\tilde{y})$ pois m_0 é semi-contínuo superiormente.

Assim: $G(\tilde{y} + h_n d) \geq g_{i_x}(x,\tilde{y} + h_n d)$

e $G(\tilde{y}) = g_{i_x}(x,\tilde{y})$

Dessa forma:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \frac{g_{i_x}(x,\tilde{y} + h_n d)}{h_n} - \frac{g_{i_x}(x,y)}{h_n}$$

Passando aos limites quando $h_n \to 0$ obtem-se:

$$\ell^- \geq g_{i_x}(x, .)'(\tilde{y},d)$$

b) Considere $(h'_n) \mid h'_n > 0$, $h'_n \to 0$

e $\dfrac{G(\tilde{y} + h'_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^+$.

Seja agora $(x_n) \mid x_n \in M_0(\tilde{y} + h'_n d)$. Passando se necessário a uma subsequência pode-se fazer $x_n \to x'$ (X compacto). $x' \in M_0(\tilde{y})$ (M_0 semi-contínuo superiormente). Tome então $i_n \in m_0(x_n, \tilde{y})$. Como $\forall n\ m_0(x_n, \tilde{y}) \leq \overline{1,k}$ pode-se, considerando-se apenas se necessário uma subsequência, fazer $i_n = i'$ constante $\forall n . i' \in m_0(x', \tilde{y})$ (m_0 semi-contínuo superiormente).

Assim:

$$G(\tilde{y} + h'_n d) = g_{i'}(x_n, \tilde{y} + h'_n d)$$

$$G(\tilde{y}) \geq g_{i'}(x_n, \tilde{y})$$

e $$\frac{G(\tilde{y} + h'_n d) - G(\tilde{y})}{h'_n} \leq r_{i'}(x_n, h'_n)$$

Fazendo $h'_n \to 0$ em ambos os lados da desigualdade obtem-se:

$$\ell^+ \leq \overline{\lim}\ r_{i'}(x_n, h'_n) \qquad (1)$$

Pela primeira hipótese do item b

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) \mid \forall\ i \in \overline{1,k}$ e $\forall\ x \in X$

se $h < \delta(\varepsilon)$ $| r_i (x,h) - g_i(x, .)' (y,d) | < \varepsilon$

Assim dado $\varepsilon > 0$, se n for feito suficientemente grande para que $h_n < \delta(\varepsilon)$ então

$$r_{i'} (x_n, h'_n) \leq g_{i'} (x_n, .)'(\tilde{y},d) + \varepsilon$$

o que permite afirmar que

$$\overline{\lim}\ r_{i'} (x_n, h'_n) \leq \overline{\lim}\ g_{i'} (x_n, .)' (\tilde{y}, d) \qquad (2)$$

Além disso como $R_{i'}: X \to \mathbb{R}$

$x \to g_{i'} (x, .)' (\tilde{y}, d)$

é limite uniforme das funções contínuas $r_{i'} (. , h)$ tem-se $R_{i'}$ contínua e portanto $g_{i'} (x_n, .)' (\tilde{y}, d) \to g_{i'}(x', .)'(\tilde{y}, d)$ (3)

Juntanto os resultados de (1), (2) e (3) completamos a demonstração considerando a primeira hipótese do item b. Para se provar b a partir da segunda hipótese é necessário o seguinte resultado:

<u>Lema 1</u>: Seja $F: X \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ contínua e $|\ \forall\ x \in X\ F(x, .)$ é convexa. Nesse caso $\hat{F}: X \times [0,\infty) \to R$

$(x, z) \to F (x, .)'(z,1)$

é semi-contínua superiormente.

Prova:

Sejam $(\hat{x},\hat{z}) \in X \times [0, \infty)$ e $(x_n, z_n) \in X \times [0, \infty)$ $| \ (x_n, z_n) \to (\hat{x}, \hat{z})$ e que $F(x_n, .)' (\hat{z}_n, 1) \to \ell \in \bar{R}$

Suponha por absurdo que $\ell > F(\hat{x}, .)' (\hat{z}, 1)$.

Pela convexidade de $F(x, .)$ é verdade que $\forall \ \varepsilon \ 0 \quad \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \ | \ $ se $\ \delta(\varepsilon) > z - \hat{z} > 0$

$F(\hat{x}, z) < F(\hat{x}, \hat{z}) + (F(\hat{x}, .)'(\hat{z},1) + \varepsilon) \cdot (z-\hat{z})$

Tomando então $\hat{\varepsilon}$ suficientemente pequeno e z' qualquer $\varepsilon \ [0, \delta(\hat{\varepsilon}))$ tem-se, lembrando que como $z' - \hat{z} \neq 0$ não há perigo de indeterminações, que $F(\hat{x},z') < F(\hat{x}, \hat{z}) + \ell(z' - \hat{z})$ (4)

Fazendo agora, n grande o bastante para que $z_n < z'$ se terá pela própria convexidade de $F(x_n, .)$, que $F(x_n, z) \geq F(x_n, z_n) + F(x_n, ..)'((z_n, 1),(z' - z_n))$

Tomando os limites dos dois lados usando a continuidade de F fica-se com:

$F(\hat{x}, z') \geq F(\hat{x}, \hat{z}) + \ell(z' - \hat{z})$ em flagrante contradição com (4)

Fazendo então $F \equiv (x, h) \to g_{i'}(x,\tilde{y} + hd)$ e usando o lema 1 pode-se ver tomando novamente a sequência (h_n') como definida anteriormente, que: $\overline{\lim}\ g_{i'}(x_n, .) (\tilde{y} + h_n' d) \leq g_{i'} (x, .)' (\tilde{y},d)$ (2')

Além disso a convexidade de $g_i'(x, .)$ assegura que:

$$\overline{\lim}\ r_{i'}(x_n, h'_n) \leq \overline{\lim}\ g_{i'}(x_n, .)'(\tilde{y} + h'_n d) \qquad (3)$$

As inequações 1, 3' e 2' tomadas nessa ordem permitem se chegar de novo ao resultado pretendido.

Observações:

A) Do item a e da desigualdade da demonstração acima pode-se concluir que sendo

$$L_{i,x}(\tilde{y},d) \stackrel{\Delta}{\equiv} \{\ell \mid \quad (h_n) \mid h_n \to 0,\ h_n > 0\ \forall$$

$$\text{e}\ \frac{g_i(x, \tilde{y} + h_n d) - g_i(x, y)}{h_n} \to \ell\ \}$$ uniformemente limitado a

direita em X $\forall$ i ε $\overline{1,k}$ então $L(\tilde{y}, d)$ será limitado. Essa limitação superior uniforme não será satisfeita por exemplo se uma das g_i for a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to -\sqrt{x}\ e^{\left|\frac{y}{x}\right|},\ x \neq 0$$

$$(0,y) \to 0 \qquad ,$$

d for positivo e x for qualquer conjunto contendo uma vizinhança de 0. Não obstante F é contínua e F(x, .) possui derivadas laterais em todos os pontos.

B) Usando o teorema do valor médio é fácil verificar que a primeira hipótese do item b é satisfeita se as funções

$$S_{i,d} : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to g_i(x, .)'\ (y, d)$$

são contínuas $\forall$ i.

II-5)

Um outro limite inferior para o conjunto $L(y, d)$ é apresentado a seguir na proposição 2. Ele é mais eficiente que o dado no teorema anterior e na presença de condições apropriadas sobre X e as funções g_i será o próprio valor de $G'(\tilde{y}, d)$. Na presença de quasi-diferenciabilidade cujo conceito é precisado a seguir é possível tornar a expressão desse limite um pouco mais simples.

Definição:

Diz-se que uma função $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é quasi-diferenciável em x quando existe um conjunto convexo fechado $\partial F(x)$ chamado subdiferencial de F em x | $\forall\, v \in R^n$ $F'(x,v)$ existe e é dado por $\max\limits_{w \in \partial F(x)} w.v.$.

Neste trabalho para eliminar os casos em que existem derivados unidirecionais infinitas, que são de pouco interesse, se exigirá que $\partial F(x)$ seja de fato, compacto. Qualquer referência futura a quasi-diferenciabilidade subentenderá essa exigência adicional. Na realidade o conceito de quasidiferenciável servirá aqui, principalmente, para englobar numa mesma categoria os funcionais diferenciáveis e os convexos.

Proposição 2:

Se além das condições expressas em I.3 se verificar que:

a) $\forall\ i \in \overline{1,k}$ e $\forall\ x \in M_0(\tilde{y})$ $g_i(\cdot\ , y)'(x, v)$ $\forall\ v \in \overline{CR(x, X)}$

onde $CR(x, X)$ representa o cone radial de X em x

b) Se, como no item b do teorema 1, $\forall\ x \in X$ e, $\forall\ i \in \overline{1,k}$

$g_i(x, .)'(\tilde{y}, d)$ e se $r_i(x, h) = \dfrac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i(x, \tilde{y})}{h} \to$

$g_i(x, .)'(\tilde{y}, d)$ uniformemente em X. Então:

$$\ell^- = \lim_{h \to 0} \frac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \geq \hat{G}' \triangleq \sup_{x \in M_0(\tilde{y})} \{$$

$$\{ \sup_{v \in \overline{CR(x, X)}} \{ \min_{i \in m_0(x, y)} \{ g(\cdot\ , \tilde{y})(x, v) +$$

$$g(x, .)'(y, d)\}\}\} \qquad (1)$$

Se as $g_i'((x,\tilde{y}),(v,d))$ exitirem $\forall\ x \in M_0(y)$ e $v \in \overline{CR(x,X)}$ então

$$\ell^- \leq \hat{G}'(\tilde{y},d) = \{\sup_{x\in M_0(\tilde{y})} \{\sup_{v\in\overline{CR(x,X)}} \{\min_{i\in m_0(x,y)} g_i'((x,y),(v,d))\}\}\} \qquad (1')$$

Prova

Seja $x \in M_0(y)$ e $v \in CR(x, X)$

Seja ainda $\bar{h} \mid \forall\ h \in [0, \bar{h}]$ $x + hv \in X$

Considere como anteriormente $(h_n) \mid h_n > 0\ \forall\ n$,

$h_n \to 0$ e $\dfrac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \min\limits_{i \in \overline{1,k}} \dfrac{g_i(\tilde{x} + h_n v, \tilde{y} + h_n d)}{h_n}$ -

$$\frac{\min\limits_{i \,\varepsilon\, \overline{1,k}} g_i(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} \qquad (x \,\varepsilon\, M_o(\tilde{y})\,) \tag{2}$$

Passando se necessário uma subsequência de h_n podemos escolher $i' \mid i' \,\varepsilon\, m_o\,(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\, d)$. i' pertencerá também a $m_o(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Assim o lado direito de (2) é igual a

$$\frac{g_{i'}(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\, d) - g_{i'}\,(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} =$$

$$\frac{g_{i'}\,(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\, d) - g_{i'}\,(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y})}{h_n} +$$

$$\frac{g_{i'}\,(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y}) - g_{i'}\,(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} \tag{3}$$

Pela condição (b) quando $h_n \to 0$ o primeiro termo de (3) tenderá para $g_{i'}(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d)$. O limite do segundo termo é por definição $g_{i'}(.\ ,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ v)$.

Assim juntanto (2) e (3) e tomando os limites quando $h_n \to 0$ encontra-se que:

$$\ell^- \geq g_{i'}\,(\cdot,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ v) + g_{i'}\,(\tilde{x},\ \cdot)\ (\tilde{y},\ d) =$$

$$= \min_{i\ \varepsilon\ m_0(\tilde{x},\ \tilde{y})} \{\ g_{i'}(\cdot,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ v) + g_{i'}(\tilde{x},\ \cdot)\ (\tilde{y},\ d)\} \quad \stackrel{\Delta}{=}$$

$$= \quad g'\ (\ (\tilde{x},\ \tilde{y}),\ (v,\ d)).$$

Como x é qualquer em $M_0(y)$ e v qualquer em $CR(x,\ X)$ é possível escrever:

$$\ell^- \geq \sup_{x\ \varepsilon\ M_0(y)} \{\ \sup_{v\ \varepsilon\ CR(x,\ X)} \{\ \min_{i\ \varepsilon\ m_0(\tilde{x},\ \tilde{y})} \{$$

$$\{\ g_i\ (\cdot,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ v) + g_i\ (\tilde{x},\ \cdot)'\ (\tilde{y},\ d)\}\}\}$$

Pela continuidade de $v \to g'\ ((\tilde{x},\ \tilde{y}),\ (v,\ d)$ pode-se extender o domínio do maximando interno para $\overline{CR\ (x,\ X)}$ completando a primeira parte da demonstração.

Para provar que se as $g_i'((x,\tilde{y}),(v,d)$ existirem $\forall x \varepsilon M_0(\tilde{y})$ e $v \varepsilon \overline{CR(x,X)}$ se pode usar a expressão 1' basta verificar que dados $\tilde{x},v,h_n,i'$ como na primeira parte da prova se terá:

$$\ell^- = \lim \frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \lim \frac{g_i'(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n d)}{h_n} - \frac{g_i'(\tilde{x},\tilde{y})}{h_n} =$$

$$= g_i'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d)) = \min_{i \varepsilon m_0(\tilde{x},\tilde{y})} \{g_i'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d))\}$$

Observação C:

Se as $g_i(\cdot,y)$ forem quasi-diferenciáveis em $\tilde{y}$ e X for o complementar de uma união finita de convexos abertos então se terá que o

$\sup_{v \in \overline{CR(x,X)}}$ que aparece em 1(1') será realmente atingido por algum $v \in \overline{CR(x,X)}$.

II-6)

Sob determinadas condições com respeito a X e as g_i e quando se puder garantir que o conjunto de pontos pior cobertos não se afasta infinitamente rápido de $M_0(\tilde{y})$ se a variável cobertora é perturbada, então é possível assegurar que as $G'(y, d)$ existem e podem ser obtidas resolvendo-se o problema expresso no lado direito da desigualdade (1) da proposição anterior. As condições sobre X relacionam os cones: tangente sequencial (CTS), como definido em Cannon, Cullun e Pollak | 6 | e o cone radial (CR). Sobre cada uma das $g_i(\cdot\,, y)$ será exigido em especial que elas sejam localmente de Lipschutz além de, é claro, possuirem derivadas unidirecionais. Todas essas condições são, entretanto, corriqueiramente atendidas nos casos de maior interesse. Ao contrário, a propriedade que será requerida das g_i conjuntamente de forma a assegurar a estabilidade do mapeamento M_0 em $\tilde{y}$[1] citada acima é uma exigência bastante forte podendo não ser atendida em casos triviais.

---

[1] Considera-se aqui que um mapeamento $M: Y \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \mid M(y)$ é limitado $\forall y$ é estável em $\tilde{y}$ se $\exists K > 0 \mid \forall y \in Y$, $\sup_{x \in M_0(y)} d(x, M_0(\tilde{y})) \leq K \| y - \tilde{y} \|$, ou seja a função $y \to \sup_{x \in M_0(y)} d(x, M_0(\tilde{y}))$ é estável em $\tilde{y}$ segundo definição encontrada em Varaya | 7 |

Teorema 2:

Se além das condições indicadas em II.1 e nos itens a) e b) da proposição 2 se der que:

a) $\forall x \in M_o(y)$ e $|\ \# m_o(x, y) > 1 \qquad CTS(x, X) = \overline{CR(x, X)}$

b) $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall x \in M_o(\tilde{y})$, $g_i(. , \tilde{y})'$ $(\tilde{x}, d)$ existe e $g_i(. , y)$ é localmente de Lipschutz

c) $\forall x \in M_o(\tilde{y})$ $|\ \# m_o(x, y) > 1$ e $\forall\ v \in \overline{CR(x, X)}$ $\exists\ i_v \in m_o(x, y)|$

$g_{i_v}(. , \tilde{y})\ (\tilde{x}, v) < 0$ então:

G'(y) existe e é igual a

$$G'(y,d) = \sup_{x \in M_o(\tilde{y})} \{ \sup_{v \in \overline{CR(x, X)}} \{ \min_{i \in m_o(x, y)} \{ g_i(. , \tilde{y})' (\tilde{x}, v) + g_i(\tilde{x}, .)' (\tilde{y}, d)\}\}\} \qquad (1)$$

Prova:

A proposição 2 mostra que

$\underline{\lim}_{h \to o} \dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \geq \hat{G}'(\tilde{y})$. Basta portanto provar que

$\ell^+ = \overline{\lim}_{h \to o} \dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \leq \hat{G}'(\tilde{y})$ para se completar a prova-

Seja então mais uma vez

$(h_n) \mid h_n > 0,\ h_n \to 0$ e

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^+ .$$

Seja ainda (x_n) com $x_n \in M_0(\tilde{y} + h_n d)$. Passando a uma subsequência pode-se fazer com que $x_n \to \tilde{x} \in M_0(\tilde{y})$. Suponha inicialmente que $\# m_0(\tilde{x}, \tilde{y}) > 1$. Considere-se também o que sempre é possível, que $x_n - x / \| x_n - \tilde{x} \| \to u$ em $CTS(\tilde{x}, X) = \overline{CR(x, X)}$ por a.

A projeção ortogonal de x_n sobre u será chamada z_n. Seja agora i_u satisfazendo a condição c em x. Para i_u se obterá o seguinte.

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \leq \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y} + h_n d)}{h_n} -$$

$$- \frac{g_{i_u}(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i_u}(x_n, \tilde{y})}{h_n} +$$

$$\frac{\| z_n - \tilde{x} \|}{h_n} \left\{ \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y}) - g_{i_u}(z_n, \tilde{y})}{\| z_n - \tilde{x} \|} + \right.$$

$$\left. \frac{g_{i_u}(z_n - \tilde{y}) - g_{i_u}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\| z_n - \tilde{x} \|} \right\} \qquad (2)$$

Suponha agora que $\dfrac{\| z_n - \tilde{x} \|}{h_n} \to \infty$. O último quociente na expressão acima converge a $g_{i_u}(\cdot\ ,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ u)$ enquanto que como $g_{i_u}(\cdot\ ,\ \tilde{y})$ é localmente de Lipschutz em $\tilde{x}$ então para algum $k > 0$ vale que

$$\frac{g_{i_u}(x_n,\ \tilde{y}) - g_{i_u}(z_n,\ \tilde{y})}{\|\ z_n - x\|} \leq K\ \frac{\|x_n - z_n\|}{\|z_n - \tilde{x}\ \|} \to 0$$

Portanto o limite da expressão entre chaves é $g_{i_u}(\cdot,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ u\ ) < 0$. Assim como pelas hipóteses efetuadas sobre $g_{i_u}(\tilde{x},\ .)$ a primeira parcela tende para $g_{i_u}(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d)$, valor limitado, se obtem o absurdo $\ell^+ = \infty$. Dessa maneira $\dfrac{z_n - \tilde{x}}{h_n}$ é limitada se podendo fazer portanto $\dfrac{\|z_n - \tilde{x}\|}{h_n} \to \tilde{a} < \infty$. Tomando agora $i' \in m_o(x_n,\ \tilde{y} + h_n\ d)\ \forall n$, o que é sempre viável vem que:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n\ d) - G(\tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i'}(x_n,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_{i'}(\tilde{x},\ \tilde{y})}{h_n}$$

$$\leq \frac{g_i(z_n,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_i(\tilde{x},\ \tilde{y})}{h_n}\quad \forall i \in m_o(\tilde{x},\ \tilde{y})$$

Tratando os dois últimos quocientes de forma inteiramente análoga a que foi feita em (2) e passando aos limites verifica-se que:

$\ell^+ = g_{i'}(\cdot\ ,\ \tilde{y})\ (\tilde{x},\ \tilde{a}u) + g_{i'}(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d) \leq g_i(\cdot\ ,\ y)\ (\tilde{x},\ \tilde{a}u) +$

$+\ g_i(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d)\ \forall i \in m_o(\tilde{x},\ \tilde{y})$

Assim,

$$\ell^{+} = g'((\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{a}u, d)) \leq \hat{G}'(\tilde{y}) \text{ pois } \tilde{a}.u \in \overline{CR(\tilde{x}, X)}$$

completando-se a prova.

Considere agora que $m_o(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{i^*\}$

Então numa vizinhança V de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ o mesmo acontece e assim $\forall n \mid (x_n, \tilde{y} + h_n d)$ esteja em V é verdade que:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i^*}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i^*}(x, \tilde{y})}{h_n} \leq$$

$$\frac{g_{i^*}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i^*}(x_n, \tilde{y})}{h_n}$$

que pelo teorema 1 tende $g_{i^*}(\tilde{x}, .)'(y, d)$

Portanto $\ell^{+} \leq g_{i^*}(\tilde{x}, .)'(y, d) \leq \hat{G}'(y, d)$ encerrando a prova.

Observação D:

A condição b.1 do enunciado do teorema 1 é chamada "condição de desacoplamento" por permitir que, a exemplo do que ocorreu no teorema 2, condições adicionais para garantir a existência de $G'(\tilde{y},d)$ precisem ser impostas apenas sobre as restrições $g_i(.,y)$ ao invés de sobre as próprias g_i.

CAPÍTULO III

A COMPLEMENTARIDADE DOS CASOS CÔNCAVO E CONVEXO

O objetivo deste capítulo é mostrar sob que condições sobre o conjunto a ser coberto (X), a expressão $\hat{G}(y,d)$ dada na seção anterior se aplica para a determinação de $G'(y,d)$ quando as $g_i(\cdot,y)$ são primeiro côncavas e depois convexas. As condições indicadas para isso nesta seção na realidade visam simplesmente excluir a ocorrência de concordâncias entre a fronteira de X e as "superfícies" $\{x | g_i\ (x,y) = G(y)\}$ que poderiam ocasionar oscilações em $H_{y,d}(h)$. Tendo em mente essa finalidade não é difícil entender que se as condições exigidas sobre X quando as $g_i(\cdot,y)$ são côncavas forem requeridas de seu complementar quando elas são convexas se possa garantir também nesse segundo caso a existência de $G'(y,d)$. Entretanto convém esclarecer que os dois casos não são de forma nenhuma equivalentes. Por motivos simples e que serão indicados no decorrer desse capítulo o caso em que as g_i são convexas é bem mais complicado.

As condições que serão indicadas não são, de fato, extremamente gerais sendo tarefa relativamente simples conseguir exemplos em que elas não são atendidas e as derivadas existem. Em contrapartida, casos bastante simples podem ser apresentados em que as $G'(y,d)$ não existem. Dois deles serão indicados a seguir.

III.1. Dois Contra-Exemplos

Não é verdade que a função de recobrimento sempre possua derivadas unidirecionais quando as g_i, $i \in \overline{1,K}$ e o conjunto X são todos convexos. O caso do exemplo 1 esclarece esse ponto. Nele as g_i, $i \in \overline{1,K}$ e X são convexos e não existem uma derivada unidirecional para G.

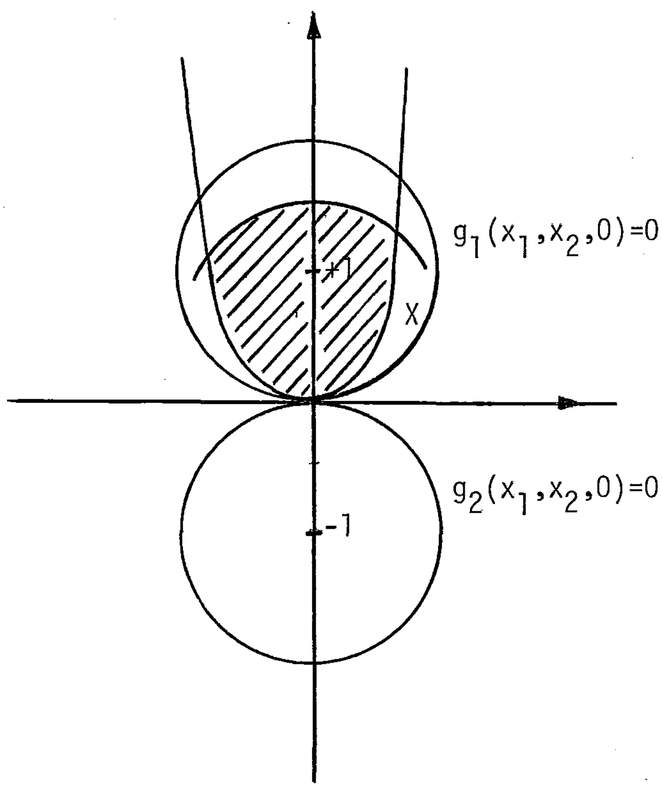

Figura 2

Exemplo 1 : Sejam como na figura ao lado.

a) $y = 0$, $d = 1$

b) $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $i = 1,2|$

$$g_1(x_1,x_2,y) = x_1^2 + (x_2-1)^2-1$$

$$g_2(x_1,x_2,y) = x_1^2 + (x_2+1-y)^2-1.$$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, diferenciável e par com:

1) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$

2) $\nexists \lim\limits_{x_1 \to 0^+} \dfrac{f(x_1)}{x_1^2}$ em $\mathbb{R}$

(o mesmo acontecendo é claro quando $x_1 \to 0^-$).

3) $\exists\ \delta > 0 \mid \forall\ x_1 \in |-\delta,\delta| - \{0\}$ e $f(x_1) > 1 - \sqrt{1-x_1^2}$.

d) X = hipergrafo (f) $\{x \mid \| x_1^2 \| \leq \delta$ e $x_2 \leq 0{,}5 + \sqrt{1-x_1^2}\}$. X e $\{g_i(x_1,x_2,0) \leq 0\}$ se acham representados na figura 2.

Pela própria maneira como X foi construído e por que $g_i(0,0,y) = 0$ $i \in \overline{1,2}$ se tem que $G(0) = 0$. Vai se mostrar agora que G não tem derivada a direita em 0.

Inicialmente a condição c-3 assegura que numa vizinhança da origem a fronteira de X é dada pelo gráfico de f.

Além disso como as $g_i(\cdot, y)$, $i = 1,2$ são estritamente convexas, $x \in M_0(y) \Longleftrightarrow \forall\ d \in CR(x,X)\ \exists\ i \in m_0(x,y) | \nabla g_i(\cdot, y)\ (x) \cdot d < 0$ e se tem que:

a) $M_0(y) \not\subset \dot{X}$

b) Se $x \in M_0(y)$ e $\#(m_0(x,y)) < 2$
então $x = (0,0)$.

Como para $y > 0$ a origem $\not\in M_0(y)$ pelas condições acima incluindo c-3 além da própria semi-continuidade superior da M_0 se verifica que:

$$\exists\ T > 0 | \forall\ y \in [0,T] :$$

a) $M_0(y) \in$ gráfico de f

b) $\forall x \in M_0(y)$, $m_0(x,y) = \{1,2\}$.

Neste caso de a e b se tira que $\forall y \in (0,T]$ $\forall x \in M_0(y)$ $x_2 = y/2$ e $x_2 = f(x_1)$ sendo portanto nesse intervalo $M_0(y)$ constituído de dois pontos $(x_1^y, f(x_1^y) = y/2)$ e $(-x_1^y, f(x_1^y) = y/2)$.

Para $y > 0$ tomando um qualquer desses pontos se pode escrever:

$$\frac{G(y) - G(0)}{y} = \frac{(x_1^y)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 - 1}{y} =$$

Suponha que a afirmação do item A não se verifica para algum $\delta < \bar{o}_\ell - \tilde{o}_\ell^-$. Nesse caso pela analiticidade das S_j se tem considerando se preciso apenas uma nova subsequência

$$(z_{n,1}) \text{ que } \exists\ n_\delta | \forall n > n_\delta\ \bar{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} \bar{q}_r z_{n,1}^{\bar{o}_r} + z_{n,1}^{\bar{o}_{\ell}-\delta}) \notin X.$$

Nesse caso pela própria definição de $z_{n,2}^\ell$ e por que

$$\bar{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} \bar{q}_r z_{n,1}^{\bar{o}_r} + z_{n,2}^\ell) \in X \qquad (39)$$

então tomando uma subsequência de $(z_{n,1}, z_{n,2}^\ell)$ se tem que:

1. $z_{n,2}^\ell < z_{n,1}^{\bar{o}_\ell - \delta}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Existem $w_n \in |z_{n,2}^\ell, z_{n,1}^{\bar{o}_\ell - \delta})$ e $j \in \overline{1,J}|$

$$S_j(z_{n,1}, \sum_{l=0}^{\ell-1} \bar{q}_l z_{n,1}^{\bar{o}_r} + w_n) = 0.$$

Se restringindo o interesse a uma outra subsequência se pode achar

$$k \in \overline{1,K_j}| \ \forall n\ w_n + \sum_{r=0}^{\ell-1} \bar{q}_r z_{n,1}^{\bar{o}_r} = \phi_{jk}(z_{n,1}^{1/m_{jk}})$$

que é equivalente a

$$w_n = \phi_{jk}^\ell (z_{n,1}^{1/\hat{m}_{jk\ell}}).$$