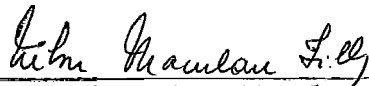


CORTES DISJUNTIVOS PARA O  
PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO

Ruy Eduardo Campello

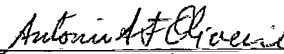
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE pós-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D. Sc.)

Aprovada por:



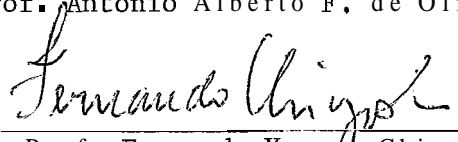
---

Prof. Nelson Maculan Filho  
Presidente



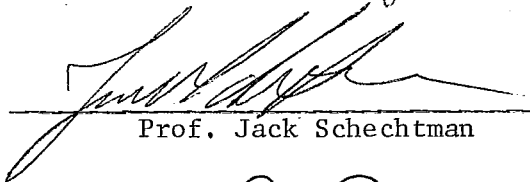
---

Prof. Antonio Alberto F. de Oliveira



---

Prof. Fernando Yassuo Chiyoshi



---

Prof. Jack Schechtman



---

Prof. Eduardo Modiano



---

Prof. Carlos Humes Jr.

CAMPELLO, RUY EDUARDO

CORTES DISJUNTIVOS PARA O PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO [Rio de Janeiro]  
1980.

XVIII, 156 p., 29,7 cm (COPPE-UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas  
e Computação, 1980).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de  
Engenharia.

1. Programação Matemática I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

(iii)

A Ana e Eduardo

AGRADECIMENTOS

Meu particular agradecimento ao Prof. Nelson Maculan Filho que, com seu apoio, criou algumas das condições indispensáveis à realização desta pesquisa.

Ao Prof. Egon Balas, de Carnegie-Mellon University, pelo tema da tese e pelas sugestões dadas ao longo do desenvolvimento do trabalho.

A Raquel Mellman, pelo excelente trabalho de ~~datilografia~~.

A todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a conclusão desta pesquisa.

RESUMO

Diversos problemas de programação matemática, incluindo o de particionamento, podem ser formulados como Problemas de Programação Disjuntiva. Esta abordagem oferece um meio eficaz de gerar novos e poderosos planos de corte com propriedades convenientes, tirando proveito da estrutura particular do problema.

Para problemas gerais de programação inteira, metodologias baseadas em planos de cortes mostraram-se menos eficientes do que técnicas de enumeração; entretanto, para certas classes de problemas como o de particionamento, planos de corte são considerados eficientes. Visto que os cortes disjuntivos são mais fortes, podemos esperar que sejam mais promissores.

Esta dissertação trata do desenvolvimento teórico e aspectos computacionais dos cortes  $B(\cdot)$ , para o problema do particionamento, avaliados em termos de recursos computacionais e medidas independentes requeridas para a resolução de problemas teste gerados aleatoriamente sob condições controladas. Estes planos de corte são gerados a partir do Princípio Básico da Programação Linear Disjuntiva desenvolvido por Balas e Jeroslow.

Mostra-se que os cortes  $B(\cdot)$ , particularmente os novos,  $B(4)$  e sua versão aprofundada  $B(5)$ , são não somente computacionalmente promissores, mas oferecem linhas novas e produtivas para futuras pesquisas.

ABSTRACT

Several mathematical programming problems, including the set partitioning, can be formulated as Disjunctive Programming Problems. This approach offers a powerful procedure for the generation of new and strong cutting planes with desirable properties, taking advantage of particular problem structure.

For general integer programs, the traditional cutting plane methodologies proved less efficient than enumerative techniques; however, on certain classes of problems, such as set partitioning, cutting planes are known to be efficient. Since the disjunctive cuts are stronger, they can be expected to be more promising.

This dissertation deals with the theoretical development and computational aspects of the disjunctive  $B(\cdot)$  cuts, for the set partitioning problem, evaluated in terms of computer sources and independent measures required to solve specific randomly generated test problems under controlled conditions. These cutting planes are generated from the Basic Principle of Disjunctive Linear Programming posed by Balas and Jeroslow.

It is shown that  $B(\cdot)$  cuts, especially the new  $B(4)$  and its deeper version  $B(5)$ , are not only computationally promising but offer new and fruitful lines for future research.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	-	<u>INTRODUÇÃO</u>	.....	1
CAPÍTULO II	-	<u>CONCEITOS BÁSICOS E TERMINOLOGIA</u>		
	2.1	-	Programação Linear Disjuntiva	..... 4
	2.2	-	Condições Lógicas	..... 6
	2.3	-	Definições	..... 7
	2.4	-	Formas Normais	..... 8
	2.5	-	Alguns Exemplos	..... 12
CAPÍTULO III	-	<u>PRINCÍPIO BÁSICO DA PROGRAMAÇÃO DISJUNTIVA</u>		
	3.1	-	Caracterização da Família	..... 15
	3.2	-	O Corte de Gomory	..... 21
	3.3	-	O Corte Convexo de Glover	..... 25
	3.4	-	O Problema da Degenerescência Dual	..... 39
CAPÍTULO IV	-	<u>APROFUNDAMENTOS DE CORTES DISJUNTIVOS</u>		
	4.1	-	Aspectos Preliminares	..... 46
	4.2	-	Geração de Faces de CONV(F)	..... 53
	4.3	-	Aspectos Preliminares do Princípio Geral de Aprofundamento	..... 59
	4.4	-	Princípio Básico	..... 62
	4.5	-	Algoritmo para o Cálculo dos $\beta_j$ , $j \in J_1$	..... 66

CAPÍTULO V	-	<u>CORTES DISJUNTIVOS PARA O PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO</u>	
5.1	-	Cortes $B(j)$ , $j = 1, 2, 3$ .....	75
5.2	-	Corte $B(4)$ .....	82
5.3	-	Corte Aprofundado $B(5)$ .....	85
5.4	-	Critérios de Escolha da Linha Geradora do Corte .....	87
5.5	-	Aplicação Numérica .....	91
CAPÍTULO VI	-	<u>EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL</u>	
6.1	-	comentários Gerais .....	99
6.2	-	Planejamento do Experimento .....	102
6.3	-	Resultados .....	107
CAPÍTULO VII	-	<u>RESUMO E CONCLUSÕES</u> .....	113
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>		.....	116
<u>ANEXOS</u>			



## INTRODUÇÃO

Problemas de programação matemática não convexa como o da complementaridade linear e o de programação quadrática, bem como todos os de programação inteira e mista, podem ser formulados como problemas lineares sujeitos a condições lógicas adicionais.

Esta abordagem possui considerável poder e flexibilidade, já que, ao contrário das formulações tradicionais, explora a estrutura formal particular de cada problema, tornando possível incorporar aos algoritmos informações relevantes na busca das soluções Ótimas globais.

Os fundamentos teóricos da programação disjuntiva são discutidos nos trabalhos de Balas [2, 3, 4], Jeroslow [20], Glover [9], e Owen [10]; porém, os resultados mais importantes são devidos aos dois primeiros. Estes resultados fornecem a base para a unificação da teoria de planos de corte e, além disso, uma forma de examinar esta teoria a partir de um novo ponto de vista.

Dentre todos os problemas de programação inteira com estrutura especial, o de particionamento, denominado algumas vezes de problema do recobrimento com restrições de igualdade, está provavelmente entre os de maior relevância prática.

Em se tratando de problemas gerais de programação inteira, os algoritmos tradicionais de plano de corte são menos eficientes que os métodos de enumeração; entretanto, para certas classes de problemas como o de particionamento, os algoritmos duais de corte têm mostrado sua eficiência no

que concerne a pequeno e médio porte. A medida, porém, que as dimensões vão aumentando, exigindo um número maior de cortes para atingir o Ótimo global, a eficiência desta técnica se reduz sensivelmente devido, principalmente, a presença maciça de degenerescência dual.

~través de procedimentos disjuntivos, é possível gerar cortes válidos mais profundos que os tradicionais para o problema, os quais, reque-  
rendo pequeno esforço computacional adicional, possuem a desejável proprieda  
de de poderem ter coeficientes negativos, o que frequentemente elimina o pro-  
blema da degenerescência dual, verificada ao empregarmos cortes tradicionais  
com coeficientes não negativos.

No que se refere à organização e apresentação do trabalho, con-  
sideramos que a contribuição deveria ser vista não somente em termos dos as-  
pectos originais, mas como um meio didático de divulgação científica. Par-  
tindo desta premissa, a conceituação da família de cortes disjuntivos  $B(\cdot)$  é  
apresentada de modo a facilitar a leitura do texto. Certas definições, exem-  
plos e algumas demonstrações são incluídas, visando unicamente assegurar o  
aspecto didático.

Desta forma, após este primeiro capítulo de cunho meramente in-  
trodutório, procura-se estabelecer alguns conceitos básicos e a terminologia  
a ser utilizada ao longo do texto.

No terceiro capítulo, o princípio básico da família de cortes  
disjuntivos é formalizado como um teorema, sendo explorados alguns corolá-  
rios e extensões. Mostra-se como ficará claro que cortes como os de Glover  
[9] e Gomory [11] pertencem a esta família exaustiva. O problema da degene-  
rescência dual é interpretado geometricamente, confrontando-se os cortes dis-

juntivos com os tradicionais, de coeficientes não-negativos.

As condições sob as quais é possível aprofundar os cortes  $B(i)$ , podendo obter-se o corte mais profundo implicado pela disjunção, são explicitadas no capítulo quatro, sendo posteriormente aplicadas.

No capítulo cinco, são deduzidos e comentados os cinco cortes disjuntivos  $B(i)$ , que serão alvo de nossa experiência computacional no capítulo seis. Os três primeiros cortes foram desenvolvidos por Balas [7, 8]; porém até a data não existe nenhuma experiência computacional realizada [6]. Os cortes  $B(4)$  e  $B(5)$  são mais recentes, tendo sido idealizados por Balas em 1977, pouco antes do curso por ele ministrado na COPPE/UFRJ, do qual participamos. Sua consolidação, discussão e desenvolvimento computacional são a principal contribuição deste trabalho.

## CAPÍTULO II

### CONCEITOS BÁSICOS E TERMINOLOGIA

Neste capítulo, procuramos enfocar o problema geral da programação disjuntiva, colocando ao longo do mesmo alguns exemplos, com o intuito de tornar mais claras estas definições iniciais.

#### 2.1 - Programação Linear Disjuntiva

Seja o seguinte problema de programação matemática:

$$(PD) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \quad A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \quad \underline{x} \geq \underline{0} \\ \quad \underline{x} \in \psi \end{array} \right]$$

onde

$A$  é uma matriz  $m \times n$

$\underline{a}_0 \in R^m$

é o *Conjunto de Condições Lógicas*

Diremos que o problema acima é de Programação Linear Disjuntiva ou, simplesmente, um Problema Disjuntivo (PD). A razão desta denominação tornar-se-á mais clara adiante.

Tomemos, a título de ilustração, um exemplo trivial.

$$\begin{array}{l}
 \text{(PD)} \quad \left[ \begin{array}{l}
 \text{minimizar} \quad x_1 + 2x_2 \\
 \text{sujeito a:} \\
 x_1 + x_2 \leq 4 \\
 x_1, x_2 \geq 0 \\
 x_1 \geq 2 \quad \text{e/ou} \quad x_2 \geq 2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Neste caso, teríamos o conjunto de condições lógicas dado por:

$$\psi = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 2 \quad \text{e/ou} \quad x_2 \geq 2\}$$

Geometricamente, o conjunto não-convexo de soluções viáveis para (PD)  $\tilde{E}$  é representado na Figura II-1, onde verificamos que a solução ótima  $\tilde{x}^* = (2,0)$  pode ser, para este caso simples, obtida, resolvendo-se dois problemas de programação linear contínua.

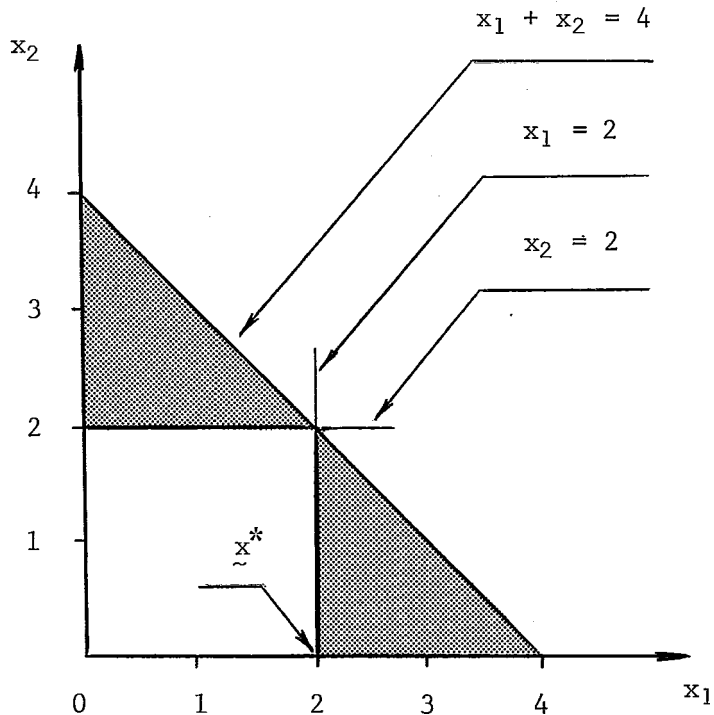


Figura II-1

## 2.2 - Condições Lógicas

Nesta abordagem, devemos entender por Condições Lógicas declarações envolvendo restrições lineares, através dos seguintes operadores:

- e  $\wedge$  , conjunção ou justaposição
- e  $\vee$  , disjunção
- e  $\neg$  , complemento de, ou negação

Para nosso melhor posicionamento, julgamos oportuno mencionar algumas propriedades conhecidas.

Os operadores lógicos  $\wedge$  e  $\vee$  são distributivos, isto é, sendo A, B e C restrições lineares, teremos:

- $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

O operador lógico  $\neg$  obedece às Leis de Morgan, ou seja:

- e  $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
- $\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Cumpramos notar que os operadores lógicos  $\wedge$  e  $\neg$  , quando aplicados a restrições lineares, como no caso presente, dão origem a conjuntos poliédricos convexos e, portanto, o problema de otimizar uma forma linear sujeita a estas restrições pertence ao escopo da programação linear contínua. São as disjunções que introduzem as não-linearidades e, portanto, por serem elementos críticos, dão nome ao problema em questão.

## 2.3 - Definições

2.3.1 - Suponhamos que  $f$  e  $g$  são duas funcionais definidas em  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

tais que:  $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\forall \underline{x} \in S, f(\underline{x}) > 0 \implies g(\underline{x}) \geq 0$

Em termos disjuntivos, teríamos:

$$\bigwedge_{\underline{x} \in S} ( [f(\underline{x}) \leq 0] \vee [g(\underline{x}) \geq 0] )$$

Portanto, sendo  $A$  e  $B$  duas restrições, são equivalentes às seguintes condições:

$$\bullet A \text{ — } \equiv B \text{ (} \overline{A} \vee B \text{)}$$

Diremos, de modo informal, que a restrição  $B$  é uma "consequência de" ou "implícada por"  $A$ .

Um "plano de corte" é uma desigualdade linear válida, em relação a algum conjunto de restrições. Sendo:

$$\left[ \begin{array}{l} D \text{ matriz } m \times n \\ \underline{a}_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^m \\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_0 \in \mathbb{R} \\ X = \{ \underline{x} / D\underline{x} \geq \underline{a}_0 \} \end{array} \right.$$

$\underline{\alpha}\underline{x} \geq \alpha_0$  é um plano de corte válido ou implicado por  $X \iff$  a disjunção  $(\underline{x} \notin X) \vee (\underline{\alpha}\underline{x} \geq \alpha_0)$  é verdadeira  $\forall \underline{x} \in X$ .

A seguir, colocamos outro conceito que, como o anterior, será repetidamente utilizado.

2.3.2 - Sejam  $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$  e  $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$  dois cortes válidos para  $X$ . Diremos que  $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$  é mais "profundo" que  $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0 \iff$

$$\left[ \bigvee_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} (\beta_j < \alpha_j ; \beta_h \leq \alpha_h, h \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}) \right] \wedge \left[ \beta_0 \geq \alpha_0 \right]$$

Pela mesma argumentação,  $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$  é um "enfraquecimento" de  $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$ .

Note-se que, sendo  $\underline{x} \geq \underline{0}$ , qualquer enfraquecimento de  $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$  também será um corte válido para  $X$ , já que:  $(\alpha - \beta) \underline{x} \geq \underline{0}$ ,  $\underline{x} \geq \underline{0}$ ; ou seja, um corte 'contém' todos os seus enfraquecimentos.

## 2.4 - Formas Normais

Há mais de uma maneira de representar um problema disjuntivo, sendo que duas serão fundamentais.

Diremos que (PD) está na forma normal disjuntiva (conjuntiva) se for definido por uma disjunção (conjunção) cujos termos não contêm disjunções (conjunções) adicionais.

### 2.4.1 - Forma Normal Disjuntiva

$$(PD) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a:} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \underline{c} \underline{x} \\ \bigvee_{h \in H} \left( \begin{array}{l} A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Seja  $X_h = \{ \underline{x} / A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h, \underline{x} \geq \underline{0} \}$ ,  $\forall h \in H$ . Para que (PD) tenha solução viável, devemos ter, pelo menos, um  $\neq \phi$ , ou seja,



$$\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \emptyset).$$

O conceito de viabilidade para (PD) é formalizado na proposição a seguir, cuja prova decorre, trivialmente, da aplicação do Lema de Minkowski-Farkas [13].

#### 2.4.1.1 - Proposição

$$\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \emptyset) \iff \bigvee_{h \in H} (\Theta_h = \emptyset), \text{ onde:}$$

$$\Theta_h = \{ \tilde{\theta}^h \in \mathbb{R}_+^m / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0} \text{ e } \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h > 0 \}, \forall h \in H$$

#### Prova:

Consideremos o seguinte par de problemas lineares duais:

$$(P)^h: \text{ minimizar } \{ \tilde{0} \tilde{x} / A^h \tilde{x} \geq \tilde{a}_0^h, \tilde{x} \geq \tilde{0} \}$$

$$\text{e } (D)^h: \text{ maximizar } \{ \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0}, \tilde{\theta}^h \geq \tilde{0} \}$$

(i) ( $\implies$ ) Suponhamos que  $\exists h \in H$  tal que  $\Theta_h \neq \emptyset$ . Então  $(P)^h$  tem uma solução viável  $\tilde{x}$  que será ótima, já que  $\tilde{0} \tilde{x} = 0, \forall \tilde{x}$ . Pela teoria da dualidade da programação linear contínua [16],  $(D)^h$  terá uma solução ótima  $\tilde{\theta}^h$  tal que  $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h = 0$ . Logo,  $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h \leq 0, \forall \tilde{\theta}^h \in U_h = \{ \tilde{\theta}^h / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0}, \tilde{\theta}^h \geq \tilde{0} \}$ ; assim,  $\nexists \tilde{\theta}^h \in U_h$  tal que  $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h > 0$ , caso contrário,  $\tilde{\theta}^h$  não seria solução ótima de  $(D)^h$ . Portanto,  $\Theta_h = \emptyset$ .

(ii) ( $\implies$ ) Por outro lado, supondo que  $\exists h \in H$  tal que  $\Theta_h = \emptyset$ , então

$\tilde{\theta}^h = \tilde{0}$  é uma solução ótima para  $(D)^h$ , já que  $\tilde{0} \in U_h$  e  $e^h \in U_h$   
 $\iff \tilde{\theta}^h a_0^h \leq 0$ ; caso contrário,  $\theta_h \neq \phi$ , contrariando a suposição.  
 Então, pela teoria da dualidade,  $(P)^h$  tem solução Ótima e, portanto,  
 $X_h \neq \phi$ .

Assim, (i) e (ii) completam a prova.  $\blacksquare$

Adicionalmente, definamos os seguintes conjuntos, que serão utilizados no capítulo três:

$$F = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \forall_{h \in H} (A^h \tilde{x} \geq \tilde{a}_0^h, \tilde{x} \geq \tilde{0}) \}$$

$$e \quad H^* = \{ h \in H / X_h \neq \phi \}$$

A condição de viabilidade anteriormente mencionada resume-se, portanto, em:

$$H^* \neq \phi \quad \text{ou} \quad F \neq \phi$$

#### 2.4.2 - Forma Normal Conjuntiva

$$(PD) \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \tilde{c} \tilde{x} \\ \text{sujeito a:} \quad \left( \begin{array}{l} A \tilde{x} \geq \tilde{a}_0 \\ \tilde{x} \geq \tilde{0} \end{array} \right) \\ \forall_{i \in H_j} (d_j^i \tilde{x} \geq d_{i0}^j), \quad j \in S \end{array} \right]$$

Alternativamente, podemos escrever:

$$\text{(PD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{x} \\ \text{sujeito a:} \\ \left( \begin{array}{l} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{a_0} \\ \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{array} \right) \\ \wedge \left[ \underset{\sim}{V}_{i \in H} \left( \underset{\sim}{d}^i \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{d}_{i0} \right) \right] \wedge \dots \wedge \left[ \underset{\sim}{V}_{i \in H_{\#(S)}} \left( \underset{\sim}{d}^i \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{d}_{i0} \right) \right] \end{array} \right.$$

onde

$$\underset{\sim}{d}^i \in \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\sim}{d}_{i0} \in \mathbb{R}$$

$$H, H_j, j \in S$$

são conjuntos que podem, em tese, ser finitos ou não.

Devido à distributividade dos operadores  $\wedge$  e  $\vee$ , as duas formas estarão relacionadas, podendo uma ser obtida a partir da outra. Assim, no exemplo inicial, teríamos:

FORMA NORMAL DISJUNTIVA	FORMA NORMAL CONJUNTIVA
minimizar $x_1 + 2x_2$ sujeito a: $\left( \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right) \vee \left( \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right)$	minimizar $x_1 + 2x_2$ sujeito a: $\left( \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right) \wedge \underset{\sim}{V}_{j \in \{1,2\}} (\underset{\sim}{x}_j \geq 2)$

## 2.5 - Alguns Exemplos

A título de ilustração, são colocados na forma disjuntiva alguns problemas e restrições de ocorrência frequente.

### 2.5.1 - Programação Bivalente

Seja o seguinte problema de programação inteira a  $n$  variáveis:

$$(PI): \text{ minimizar } \{ \underline{c} \underline{x} / A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \text{ e } \underline{x} \in \{0,1\}^n \}$$

A forma normal disjuntiva será dada por:

$$(PD) \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \\ \forall \\ h \in H \quad \left( \begin{array}{l} A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \underline{x} = \underline{x}^h \end{array} \right) \end{array} \right]$$

onde  $H = \{x^1, x^2, \dots, x^{\#(H)}\}$  é o conjunto de todos os elementos 0-1, sendo  $\#(H) = 2^n$ .

A forma normal conjuntiva será:

$$(PD) \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \\ A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \bigwedge_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \left[ (x_j = 0) \vee (x_j = 1) \right] \end{array} \right]$$

Do exemplo anterior, nota-se que, uma vez estabelecidas as restrições correspondentes às conjunções e disjunções, as respectivas formas são únicas.

Sendo esta formulação suficientemente geral, nela se enquadram problemas clássicos, tais como: caixeiro viajante, mochila, particionamento, recobrimento, escolha de projetos de investimento alternativos, alocação, seqüenciamento e outros.

### 2.5.2 - Considerações Adicionais

De importância prática será representarmos (PD) em mais de uma forma. Seja, por exemplo, o sistema:

$$\left[ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,2,3 \end{array} \right]$$

que, quando colocado na forma disjuntiva, terá  $2^3 = 8$  termos. Enquanto que, se for escrito como a seguir, é uma disjunção com 4 termos.

$$\left[ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 1 \\ \left[ \bigvee_{i \in \{1,2,3\}} (x_i = 1, x_j = 0, j \neq i) \right] \vee \left[ (x_j = 0, \forall j) \right] \end{array} \right]$$

Restrições do tipo:

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{j \in Q} x_j = 1 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in Q \end{array} \right]$$

podem ser expressas na forma disjuntiva, como:

$$\bigvee_{i \in Q} \left( \begin{array}{l} x_i = 1 \\ x_j = 0, \quad j \in Q \setminus \{i\} \end{array} \right)$$

Vemos que condições lógicas podem, de várias maneiras, ser convertidas em restrições lineares envolvendo variáveis bivalentes; porém, a geração de cortes a partir destas condições, sem o concurso destes artifícios, trará, em muitos casos, algumas vantagens, como ver-se-á no caso específico do problema do particionamento.

CAPÍTULO IIIPRINCÍPIO BÁSICO DA PROGRAMAÇÃO DISJUNTIVA

Procuramos, neste capítulo, caracterizar a família de todos os cortes válidos para um problema disjuntivo. Os resultados aqui apresentados são, na realidade, generalizações e extensões de proposições clássicas no terreno de inequações lineares.

3.1 - Caracterização da Família

Estaremos interessados na família de restrições lineares implícadas pelo conjunto de restrições de um (PD),  $F$ . Todos os cortes válidos para (PD) devem pertencer a esta família.

Note-se que o conjunto de pontos satisfazendo todas as restrições lineares desta família será a envoltória convexa de (PD), a qual tem sua estrutura e propriedades devidamente caracterizadas em [3, 4]. Para o exemplo dado no capítulo II, teríamos a envoltória dada a seguir, na Figura III-1

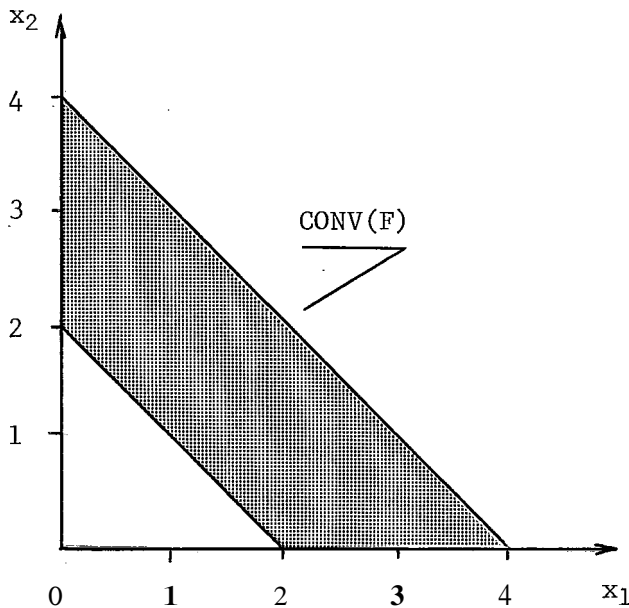


Figura III-1

Vejamos, agora, alguma notação adicional necessária ao desenvolvimento formal do *Teorema Fundamental da Família de Cortes Disjuntivos*.

$$\text{Sejam: } \left[ \begin{array}{l} \underline{\alpha} , \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_0 \in \mathbb{R} \\ N = \{1, 2, \dots, n\} \\ h \in H \quad (\text{n\~ao necessariamente finito}) \\ \underline{a}_0^h , \underline{\theta}^h \in \mathbb{R}^{m_h} \\ A^h = (a_j^h) \quad \text{matriz } (m_h \times n) , \quad h \in H \quad \text{e} \quad j \in N \\ \text{onde } \underline{a}_i^h \text{ \~e a } j\text{-\~esima coluna de } A^h \end{array} \right.$$

### 3.1.1 - Teorema Fundamental da Família de Cortes Disjuntivos

O corte  $\underline{a} \underline{x} \geq \alpha_0$  \~e uma consequ\~encia da disjun\~c\~ao

$$\forall_{h \in H} (A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h , \underline{x} \geq 0) \iff \exists \underline{\theta}^h \geq 0 \quad \text{satisfazendo a } \underline{a} \geq \underline{\theta}^h A^h \quad \text{e}$$

$$\alpha_0 \leq \underline{\theta}^h \underline{a}_0^h , \quad \forall h \in H^* \subseteq H.$$

Prova:

( $\implies$ ) Suponhamos que o corte em quest\~ao seja implicado pela disjun\~c\~ao; vale dizer que:

$$\forall \underline{x} \in F \iff \underline{a} \underline{x} \geq \alpha_0$$



Portanto,  $\forall h \in H^* \subseteq H$  tem-se  $\min_{\tilde{x} \in X_h} a \tilde{x} \geq \alpha_0$  .

Definamos, adicionalmente, o seguinte par de problemas duais:

$$\begin{array}{l|l}
 (P^h): \text{ minimizar } a \tilde{x} & (D^h): \text{ maximizar } \tilde{u}^h a_0^h \\
 \text{sujeito a:} & \text{sujeito a:} \\
 A^h \tilde{x} \geq a_0^h & \tilde{u}^h A^h \leq \alpha \\
 \tilde{x} \geq 0 & \tilde{u}^h \geq 0
 \end{array}$$

Como estamos assumindo a hipótese verdadeira, temos que  $a \in R^n$  é tal que  $(P^h)$  tem solução Ótima finita e, portanto,  $(D^h)$  também o terá.

Sendo  $\tilde{\theta}^h$  a solução Ótima de  $(D^h)$ , segue-se que:

$$\left. \begin{array}{l}
 \tilde{\theta}^h A^h \leq \alpha \\
 \tilde{\theta}^h a_0^h \geq \alpha_0 \\
 \tilde{\theta}^h \geq 0
 \end{array} \right\} \forall h \in H^* \subseteq H \quad \textcircled{i}$$

Assim:

$$\alpha_j^h = \tilde{\theta}^h a_j^h, \quad \forall j \in N \quad \text{e} \quad \alpha_j \geq \alpha_j^h, \quad \forall h \in H^* \quad \text{e} \quad j \in N$$

Ou de forma equivalente:

$$\bullet \quad \alpha_0 \leq \inf_{h \in H^*} \{ \tilde{\theta}^h a_0^h \}$$

$$a_j \geq \sup_{h \in H^*} \{\theta_{\sim j}^h a_{\sim j}^h\}, \quad j \in N$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $\exists \delta_{\sim}^h \geq 0$  tal que  $a_{\sim} \geq \theta_{\sim}^h A^h$  e  $\alpha_0 \leq \theta_{\sim}^h a_{\sim}^h \quad \forall h \in H^* \subseteq H$ .

Se escolhermos um dado  $h \in H^*$  e tomarmos  $\underline{x} \in X_h$ , tem-se imediatamente que:

$$\alpha_{\sim} \underline{x} \geq \theta_{\sim}^h A^h \underline{x} \geq \theta_{\sim}^h a_{\sim}^h \geq \alpha_0, \quad \forall \underline{x} \in X_h \quad \textcircled{\text{ii}}$$

Logo,  $\forall \underline{x} \in F$  teremos  $a_{\sim} \underline{x} \geq \alpha_0$ .

Assim, **a** e  $\textcircled{\text{ii}}$  completam a prova. **a**

Evidentemente, como  $H^* \subseteq H$ , o teorema permanece válido se  $H^* \equiv H$ .

Observamos, então, que todos os planos de corte válidos para (PD) podem ser obtidos a partir destas relações, escolhendo-se adequadamente os multiplicadores  $\delta_i^h$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_h$ . Na realidade, Jeroslow [19, 20, 21] mostrou que a família de cortes definida pelo Teorema Fundamental (3.1.1) é exaustiva, no sentido que todos os cortes válidos para (PD) estão aí contidos. Inclusive os mais profundos, isto é, as faces de  $\text{CONV}(F)$ .

Em algumas situações, poderemos ter restrições de igualdade fazendo parte das disjunções. As modificações necessárias são estabelecidas na proposição a seguir.

## 3.1.1.1 - Proposição

Se para algum  $h \in H^*$ ,  $\exists i \in \{1, 2, \dots, m_h\}$  tal que  $(a_{i1}^h, \dots, a_{in}^h)_{\tilde{x}} = a_{0i}^h$ , então a  $i$ -ésima componente de  $\tilde{x}^h$  no Teorema (3.1.1) é irrestrita.

Prova:

Basta lembrar que, sendo  $H^* \neq \emptyset$ , para um certo  $h \in H^*$ , temos  $X_h \neq \emptyset$  e, em particular para a  $i$ -ésima restrição de  $A_{\tilde{x}}^h \geq a_0^h$ , vem que:

$$\theta_i^h (a_{i1}^h, \dots, a_{in}^h)_{\tilde{x}} = \theta_i^h a_{0i}^h, \quad \forall \theta_i^h \in \mathbb{R}$$

Portanto, o Teorema (3.1.1) se verifica para  $\theta_p^h \geq 0$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, m_h\} \setminus \{i\}$  e  $\theta_i^h \in \mathbb{R}$ ,  $\forall h \in H^*$ . ■

Adicionalmente, como estaremos admitindo  $a_0^h > 0$ ,  $\forall h \in H$ , vemos que  $0 \notin X_h \quad \forall h \in H$ . Por outro lado, como nosso interesse é utilizar os resultados do Teorema (3.1.1) para gerar cortes válidos que eliminem a solução Ótima do problema de programação linear contínuo associado a (PD), então um corte válido da forma  $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$  eliminará a solução contínua Ótima se e somente se  $\alpha_0 > 0$ . Portanto,  $\alpha_0$  deverá ser fixado em um valor positivo. Desigualdades com  $\alpha_0 \leq 0$  podem cortar partes do conjunto de soluções viáveis do programa linear associado, mas não cortam a solução contínua Ótima.

Merece tratamento especial o caso em que cada disjunção consiste em uma Única desigualdade, ou seja:

$$X_h = \{x / \sum_{j=1}^n a_j^h x_j \geq a_0^h, x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n\}, \quad h \in H$$

Neste caso, podemos obter, com certa facilidade, o conjunto  $H''$  porquanto como por hipótese  $a_0^h > 0 \quad \forall h \in H$  devemos ter  $a_j^h > 0$  para algum  $j \in \{1,2,\dots,n\}$ , caso contrário  $X_h = \emptyset$  e deve ser descartado. Calculado  $H^*$ , podemos aplicar o Teorema (3.1.1) à disjunção  $\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \emptyset)$ .

### 3.1.2 - Corolário

Seja  $H$  finito e  $H'' \neq \emptyset$ . O corte  $C = \text{máximo}_{j \in N} \{a_j^h / a_0^h\} \cdot x_j \geq 1$  é uma consequência da disjunção:  $\bigvee_{h \in H} (C = \text{máximo}_{j \in N} \{a_j^h \cdot x_j \geq a_0^h, x_j \geq 0\})$ .

#### Prova:

Do Teorema Fundamental (3.1.1), temos que:

$$C = \text{máximo}_{j \in N} \{ \text{supremo}_{h \in H^*} \theta^h \cdot a_j^h \} x_j \geq \text{infimo}_{h \in H''} \{ \theta^h \cdot a_0^h \} \quad \text{para } \theta^h \geq 0, \forall h \in H^* \subseteq H.$$

Assim, a família de cortes válidos é da forma:

$$\sum_{j \in N} \alpha_j \cdot x_j \geq \alpha_0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha_j \geq \text{supremo}_{h \in H^*} \theta^h \cdot a_j^h \\ \alpha_0 \leq \text{infimo}_{h \in H^*} \theta^h \cdot a_0^h \end{cases}$$

Escolhendo multiplicadores  $\theta^h = 1/a_0^h$ ,  $\forall h \in H^* \subseteq H$  e lembrando que  $H$  é finito, temos:

$$\sum_{j \in N} \alpha_j \cdot x_j \geq \alpha_0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha_j \geq \max_{h \in H^*} \{a_j^h / a_0^h\} \\ \alpha_0 \leq 1 \end{cases}$$

Assim, obtemos o resultado desejado, ou seja:

$$\sum_{j \in N} \max_{h \in H} \{a_j^h / a_0^h\} \cdot x_j \geq 1 \quad \blacksquare$$

Desnecessário lembrar que o resultado permanece válido para  $H^* \equiv H$ .

Como observação complementar, devemos notar que, se os coeficientes do corte obtido a partir do Corolário (3.1.2) forem positivos, este será o corte mais poderoso implicado na disjunção; por outro lado, se houver coeficientes negativos, poderemos, em tese, aprofundar o corte. No capítulo 4, voltaremos a discutir o problema.

### 3.2 - O Corte de Gomory

Vamos, agora, mostrar como o corte de Gomory para o algoritmo fracionário pode ser obtido através do corte definido pela proposição anterior.

Seja o seguinte problema de programação linear mista na forma completada:

(PI):      minimizar       $x_0$

          sujeito a:       $x_k = 0 + \sum_{j \in I_N} (-\delta_{kj}) (-x_j)$  ,  $k \in I_N$

$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in I_N} a_{ij} (-x_j)$  ,  $i \in I_B \cup \{0\}$

$x_i \geq 0$  ,  $\forall i \in N = I_B \cup I_N$

$x_i$  inteiro ,  $\forall i \in J_1$

$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 , & k = j \\ 0 , & k \neq j \end{cases}$  ,  $k, j \in I_N$

onde:

$$N = \{1, 2, \dots, n\} = I_B \cup I_N , \quad I_B \cap I_N = \phi$$

$I_B$             é o conjunto de variáveis básicas

$I_N$             é o conjunto de variáveis não-básicas

$J_2 = N \setminus J_1$  é o conjunto de variáveis contínuas

Suponhamos que, para uma base do programa linear associado, a variável  $x_i$  , nesta solução, é não inteira.

Podemos escrever que:

$$y_i = f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* \cdot (-x_j) , \quad y_i \text{ inteiro}$$

onde:

$$f_{ij}^* = \begin{cases} f_{ij} & , j \in J_1^+ = \{j \in J / f_{i0} \geq f_{ij}\} \\ f_{ij} - 1 & , j \in J_1^- = \{j \in J / f_{i0} < f_{ij}\} \\ a_{ij} & , j \in J_2 \end{cases}$$

$$f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] \quad , j \in I_N \cup \{0\}$$

$$I_N = J_1^+ \cup J_1^- \cup J_2$$

Jã que cada  $y_i$  ê inteiro, podemos colocar esta condiçãõ na forma normal conjuntiva, ou seja:

$$\left[ \begin{array}{l} y_i = f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \\ [y_i \leq 0] \vee [y_i \geq 1] \end{array} \right]$$

o que equivale a:

$$\left[ f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* \cdot (-x_{ij}) \leq 0 \right] \vee \left[ f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \geq 1 \right] \quad \therefore$$

$$\therefore \left[ \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* x_j \geq f_{i0}^* \right] \vee \left[ \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \geq (1 - f_{i0}^*) \right] \quad \therefore$$

$$\therefore \left[ \sum_{j \in J_1^+} f_{ij} x_j + \sum_{j \in J_1^-} (f_{ij} - 1) x_j + \sum_{j \in J_2} a_{ij} \cdot x_j \geq f_{i0} \right] \vee$$

$$\left[ \sum_{j \in J_1^+} (-f_{ij}) x_j + \sum_{j \in J_1^-} (f_{ij} - 1) x_j + \sum_{j \in J_2} -a_{ij} \cdot x_j \geq (1 - f_{i0}) \right]$$

Aplicando a proposição com multiplicadores:  $\theta^1 = 1/a_0^1 = 1/f_{i0}$   
e  $\theta^2 = 1/a_0^2 = 1/(1 - f_{i0})$ , vem que:

$$\text{máximo} \left\{ \frac{f_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-f_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \frac{f_{ij}}{f_{i0}} \quad j \in J_1^+$$

$$\text{máximo} \left\{ \frac{f_{ij} - 1}{f_{i0}}, \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \quad , \quad j \in J_1^-$$

$$\text{máximo} \left\{ \frac{a_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{f_{i0}} & , \quad j \in J_2^+ \\ \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} & , \quad j \in J_2^- \end{cases}$$

sendo  $J_2^+ = \{j \in J / a_{ij} \geq 0\}$  e  $J_2^- = \{j \in J / a_{ij} < 0\}$ .

Substituindo, temos:

$$\sum_{j \in J_1^+} \frac{f_{ij}}{f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_1^-} \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_2^+} \frac{a_{ij}}{f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_2^-} \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} \cdot x_j \geq 1,$$

que é o corte de Gomory para o algoritmo fracionário obtido via restrições disjuntivas.

O resultado acima não nos deve surpreender, já que o Teorema Fundamental caracteriza todos os cortes válidos para (PD) e, como foi mostra



do no capítulo II, o problema de programação linear mista pode ser colocado na forma disjuntiva. Assim, o corte de Gomory é um membro da família caracterizada.

### 3.3 - O Corte Convexo de Glover

A idéia de utilizar os raios vetores que emanam de um vértice do conjunto de soluções viáveis para gerar um hiperplano que corte este vértice não é restrita a problemas de programação inteira, podendo ser aplicado a qualquer problema de programação matemática cujas restrições se reduzam ou impliquem em:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 - \sum_{j \in J} \tilde{a}_j \cdot x_j, \quad \tilde{x}_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

Os fundamentos deste corte, proposto por Glover [9] são oriundos dos trabalhos de Balas [1] e Young [22], sendo vantajoso em certas aplicações, devido ao pequeno esforço computacional requerido em sua obtenção.

Mostraremos, a seguir, em rápida digressão, que o tradicional Corte Convexo de Glover pertence à família disjuntiva definida pelo Teorema (3.1. 1), aplicando-o, a seguir, à resolução de um Problema Linear com Custos Fixos na Origem através de um algoritmo dual de cortes.

#### 3.3.1 - O Algoritmo de Taha [23]

Basicamente, o algoritmo é válido para qualquer problema de minimização de funções côncavas sobre poliedros convexos. É da família "Branch and Bound", utilizando uma "solução local" para gerar um corte legítimo, construído com o intuito de eliminar aquela solução de considerações

futuras.

Os cortes poderão gerar novos vértices e devem ser computados de tal forma a não multiplicarem-se indefinidamente.

Neste ponto, o objetivo será formalizar gradualmente as idéias do algoritmo facilitando, a nosso ver, o entendimento global do mesmo.

Seja o seguinte Problema Linear com Custos Fixos na Origem, na forma normal conjuntiva:

$$(PD) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad f(\underline{x}) \\ \text{sujeito a:} \\ \quad \left( \begin{array}{l} A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right) \\ \quad \bigwedge_{j \in N} \left[ (x_j = 0, y_j = 0) \vee \right. \\ \quad \left. (x_j > 0, y_j = 1) \right] \end{array} \right]$$

onde:

$$\#(N) = n$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{tal que} \quad y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in N$$

$$\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{tal que} \quad k_j \geq 0 \quad \forall j \in N$$

$$e \quad f(\underline{x}) = \underline{c} \underline{x} + \underline{k} \underline{y}$$

Cabem, neste ponto, algumas observações de ordem geral. Sendo

$F$  e  $\bar{F}$ , respectivamente, os conjuntos de soluções viáveis para (PD) e para o problema linear relaxado, vemos que existe uma correspondência bi-unívoca entre os elementos de  $F$  e os de  $\bar{F}$ . Por outro lado, sabemos que o mínimo da função côncava  $f$  sobre  $\bar{F}$ , caso exista, será um vértice deste.

Como detalhe complementar, se  $k_j = m \forall j \in N$  e o problema for não degenerado, a solução Ótima para (PD) pode ser obtida diretamente, resolvendo-se o problema linear contínuo minimizar  $\{c \underline{x} / \underline{x} \in \bar{F}\}$ .

Assim surge; naturalmente, a idéia de enumerar de modo eficiente os pontos extremos de  $\bar{F}$  na busca da solução Ótima de (PD).

A idéia central se resume em utilizar um algoritmo dual de planos de corte gerando uma seqüência  $S = \{\underline{x}^0, \underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k\}$  de elementos de  $\bar{F}$  de modo que:

- $c \underline{x}^i \leq c \underline{x}^{i+1}$ , onde  $c \underline{x}^i = \text{mínimo} \{c \underline{x} / \underline{x} \in X^i\}$   
 $i = 0, 1, \dots, k-1$
- $X^{i+1} \subset X^i$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ) é o conjunto de soluções viáveis para o problema de programação linear, obtido a partir de  $\bar{F}$ , pela introdução de  $(i+1)$  cortes sucessivos do tipo  $\sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1$  onde  $J^i$  é o conjunto de índices das variáveis não-básicas no ótimo local  $\underline{x}^i$  e que aplicado a  $X^i$  só elimina um Único de seus vértices, o Ótimo local  $\underline{x}^i$ . Obviamente,  $X^0 \equiv \bar{F}$  e  $X^{i+1} = X^i \cap \{\underline{x} \geq 0 / \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j > 1\}$ .

Cumpra notar que alguns dos elementos de  $S$  podem não ser vérti

ces efetivos de  $\bar{F}$ , surgindo como resultado da aplicação dos cortes convexos.

Desta forma, podemos garantir a enumeração dos vértices do polítopo básico até que a regra de parada se verifique ou, então, em casos mais desfavoráveis, até a enumeração completa.

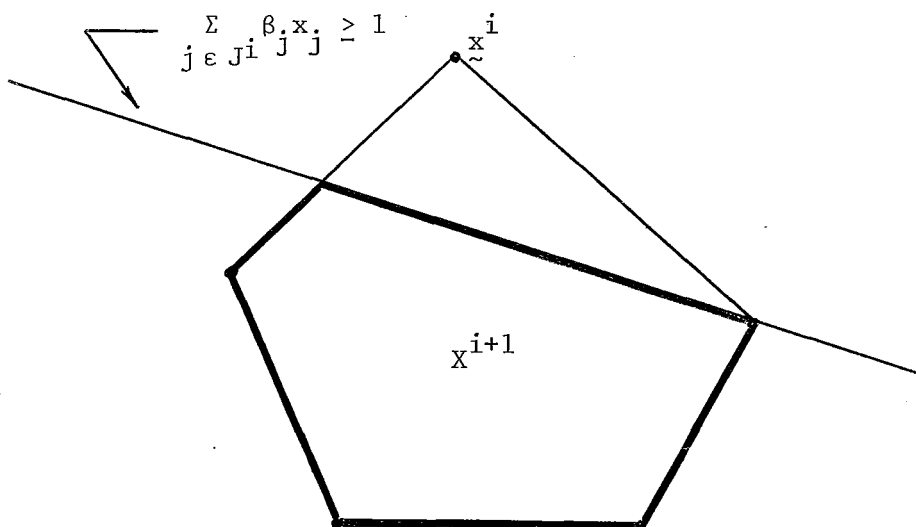


Figura III-2

Passemos, agora, à construção desta regra de parada para a qual necessitaremos de um limite inferior e um limite superior para o valor da solução Ótima global. Estes limites serão dados por:

e  $\underline{f} = \underline{c} \underline{x}^0$ , limite inferior inicial para (PD), atualizado a cada iteração para  $\underline{f} = \underline{c} \underline{x}^{i+1}$

e  $\bar{f}$ , limite superior, atualizado sempre que  $(\underline{c} \underline{x}^{i+1} + \underline{k} \underline{y}^{i+1}) < \bar{f}$  na iteração anterior.

A regra de parada, cuja prova formal encontra-se logo após o detalhamento do algoritmo, será:

- e Se  $\underline{c} \underline{x}^{i+1} >$  paramos com  $(\underline{x}^i, \underline{y}^i)$  sendo a solução ótima para (PD).

O algoritmo listado a seguir formaliza as idéias colocadas de forma natural, determinando o Ótimo global para (PD) em um número finito de iterações.

### Passo 0

#### Inicialização

- e Resolver o seguinte programa linear:

$$(P^0): \text{ minimizar } \{ \underline{c} \underline{x} / \underline{x} \in \bar{F} \}$$

- e Testar

- se  $(P^0)$  for ilimitado termine, (PD) não tem solução ótima finita.

- se  $(P^0)$  for inviável termine, (PD) não tem solução ótima viável.

- Sendo  $\underline{x}^0$  a solução Ótima de  $(P^0)$ , fazer:

$$\begin{cases} \underline{f} = \underline{c} \underline{x}^0 \\ \bar{f} = \underline{c} \underline{x}^0 + \underline{k} \underline{y}^0 \text{ onde } y_j^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j^0 > 0 \\ 0, & \text{se } x_j^0 = 0 \end{cases} \quad \forall j \in N \\ \underline{x}^* = \underline{x}^0, \underline{y}^* = \underline{y}^0 \text{ e } i = 0 \end{cases}$$

Vã para o Passo 1.

Passo 1
---------

## Iteração Padrão

e Resolver o seguinte programa linear:

$(P^{i+1})$ . minimizar  $\{c \tilde{x} / \tilde{x} \in X^{i+1}\}$  onde

$$X^{i+1} = X^i \cap \{\tilde{x} \geq 0 / \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1\}$$

e Aproximar o limite inferior, ou seja, sendo  $\tilde{x}^{i+1}$  a solução ótima de  $(P^{i+1})$  fazer  $\underline{f} = c \tilde{x}^{i+1}$

Vá para o Passo 2.

Passo 2
---------

## Regra de Parada

e Teste de Otimalidade Global

- se  $c \tilde{x}^{i+1} \geq \bar{f}$  termine,  $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$  é o ótimo global.

- se  $c \tilde{x}^{i+1} + k \tilde{y}^{i+1} < \bar{f}$ , aproximar o limite superior fazendo:

$$\bar{f} = c \tilde{x}^{i+1} + k \tilde{y}^{i+1}$$

$$\tilde{x}^* = \tilde{x}^{i+1} \quad \text{e} \quad \tilde{y}^* = \tilde{y}^{i+1}$$

- incrementar:  $i \leftarrow i+1$

Vá para o Passo 1.

## 3.3.2 - Teorema

Se  $\exists \underline{x}^p \in S$  tal que  $f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k$ ,  $0 \leq p \leq k-1$ , então  $\underline{x}'' \in S$  onde  $(\underline{x}'', \underline{y}^*)$  é o Ótimo global de (PD).

Prova:

Por hipótese temos que  $f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k$ ,  $0 \leq p \leq k-1$ , portanto:

$$f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k \leq c \underline{x} \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X^k \subset \bar{F}$$

já que  $k \geq 0$  e  $\underline{y} \in \{0,1\}^n$ .

Sendo  $f(\underline{x}^*)$  o valor da função objetivo de (PD) no Ótimo, temos que:

$$f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k \leq c \underline{x} \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X^k \subset \bar{F}$$

Por outro lado:  $f(\underline{x}'') \leq f(\bar{\underline{x}}) \leq f(\underline{x}^p)$  onde:

$$f(\bar{\underline{x}}) = \text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in S\}.$$

Se  $\underline{x}^* \neq \bar{\underline{x}}$  então  $\underline{x}^* \notin S$ ; isto implica em  $c \underline{x}^k \leq f(\underline{x}^*)$  já que  $\text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in X^k\} \leq \text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in X^i\}$ ,  $i > k$  o que contraria o desenvolvimento inicial.

Logo,  $\underline{x}^* = \bar{\underline{x}}$  e  $\underline{x}^* \in S$  ■

## 3.3.3 - Corte de Glover Via Disjunção

Sem perda de generalidade, consideremos a solução do problema linear associado, escrita em termos das variáveis não básicas.

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I$$

Eliminar a solução contínua corrente, equivale a resolver o problema a seguir na forma normal conjuntiva:

$$\left[ \begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (a_{h0} + \sum_{j \in J} a_{hj}(-x_j) \leq 0) \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} x_j \geq a_{h0}) \end{array} \right]$$

Aplicando o Corolário (3.1.2), com multiplicadores

$$\theta^h = \begin{cases} 1/a_{h0}, & \text{se } a_{h0} > 0 \\ \infty, & \text{se } a_{h0} = 0 \end{cases}, \quad \forall h \in I$$

obtemos a seguinte equivalência:

$$\left[ \begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} x_j \geq a_{h0}) \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_0 \end{array} \right]$$



onde:

$$\begin{cases} \alpha_j = \underset{i \in I}{\text{m\u00e1ximo}} \{ \theta^i \cdot a_{ij} \} , & j \in J \\ \alpha_0 = 1 \end{cases}$$

Reescrevendo os coeficientes na forma:

$$\beta_j^! = \underset{i \in I}{\text{m\u00ednimo}} \{ (e^i \cdot a_{ij})^{-1} , a_{ij} \neq 0 \}$$

A equival\u00eancia se mant\u00e9m ao substituirmos  $\sum_{j \in J} \alpha_j \cdot x_j \leq \alpha_0$  por  $\sum_{j \in J} x_j / \beta_j^! \geq 1$ .

Se impusermos a condi\u00e7\u00e3o adicional de apenas um v\u00e9rtice ser eliminado quando do corte, o que pode ser interpretado como um enfraquecimento, obtemos o Corte Convexo de Glover [9],  $\sum_{j \in J} x_j / \beta_j \leq 1$ , onde:

$$\beta_j = \begin{cases} \underset{i \in I}{\text{m\u00ednimo}} \left[ (\theta^i \cdot a_{ij})^{-1} \right], & a_{ij} > 0 \\ \infty & , a_{ij} \leq 0 \end{cases} , \quad j \in J$$

Note-se que, sendo  $\bigvee_{i \in I} (a_{i0} = 0)$  \u00e9 poss\u00edvel que o corte convexo fique indeterminado. Para superarmos esta indetermina\u00e7\u00e3o, fruto da degeneresc\u00eancia, usaremos o procedimento devido a Balas [1].

Ocorrer\u00e1 degeneresc\u00eancia, sempre que o v\u00e9rtice correspondente,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ , est\u00e1 determinado por mais do que  $n$  hiperplanos.

Balas prova que, ignorando cada restrição para a qual a variável associada  $\bar{e}$  é nula no quadro do Simplex, o politopo convexo resultante associa necessariamente  $n$  arestas distintas  $\hat{a}$ quele vértice. Assim, podemos determinar rapidamente os valores de  $\beta_j$  e quando adicionarmos o corte ao quadro para a fase de pós-otimização, reativamos as restrições ignoradas no cálculo dos coeficientes do corte, a menos que estas sejam completamente redundantes com respeito ao problema atual, podendo, neste caso, ser definitivamente eliminadas.

Geometricamente, conforme ilustrado na Figura III-3, para o  $\mathbb{R}^2$ , ao utilizarmos este corte, estaremos interceptando os raios vetores  $\underline{r}_j, j \in J$  do cone envoltório convexo  $T$ , definido a partir de  $\underline{a}_0$ , onde:

$$T = \{ \underline{x} / \underline{x} = \underline{a}_0 + \sum_{j \in J} \underline{a}_j (-x_j), x_j \geq 0 \quad \forall j \in J \}$$

$$\underline{r}_j = \underline{a}_0 - \beta_j \underline{a}_j, \quad \beta_j \geq 0 \quad j \in J$$

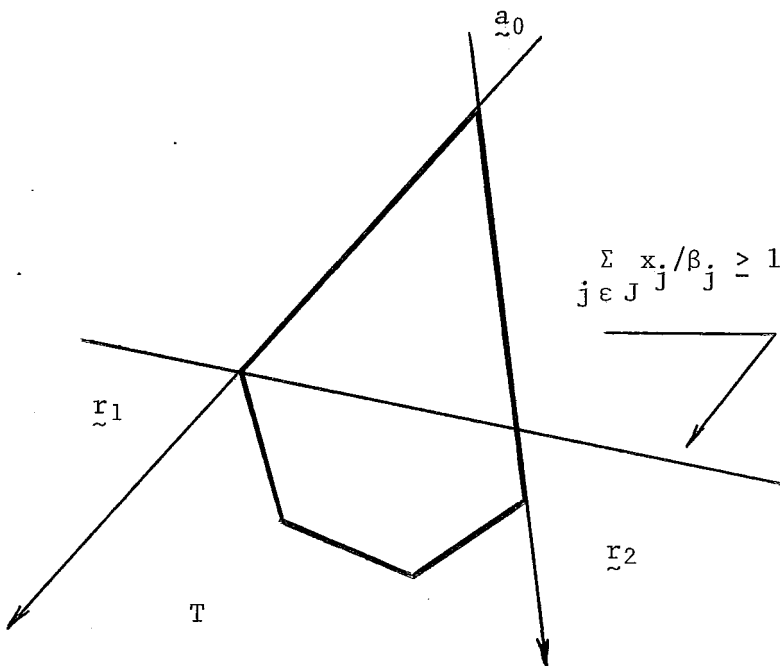


Figura III-3

Assim, o Corte Convexo pode ser obtido a partir do enfraquecimento de um corte da família disjuntiva.

### 3.3.4 - Exemplo de Aplicação

Seja o seguinte Problema Linear com Custos Fixos na Origem na forma normal conjuntiva:

$$\text{minimizar } x = -3x_1 - 5x_2 + 5y_1 + 2y_2$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$$

$$x_1 + x_4 = 4$$

$$x_2 + x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$\bigwedge_{j \in \{1,2\}} \left[ (x_j > 0, y_j = 1) \vee (x_j = 0, y_j = 0) \right]$$

Aplicaremos o algoritmo descrito para obtenção do ótimo global de (PD).

**Passo 0**

Inicialização

- Resolvendo-se o programa linear associado a (PD), temos o seguinte quadro final:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	-36	0	0	-1	0	-3
$x_1$	2	1	0	1/3	0	-2/3
$x_4$	2	0	0	-1/3	1	2/3
$x_2$	6	0	1	0	0	1

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = (2, 6, 0, 2, 0) \\ \tilde{x}^* = \tilde{x}^0 \\ \underline{f} = -36 \\ \bar{f} = x_0^0 = -29 \\ \mathbf{i} = 0 \quad \text{e vá para o } \underline{\text{Passo 1}}. \end{cases}$$

**Passo 1**

Iteração Padrão

- Determinam-se os coeficientes do "Corte Convexo 1":

$$\beta_3 = \text{mínimo} \{6, \infty, \infty\} = 6$$

$$\beta_5 = \text{mínimo} \{\infty, 3, 6\} = 3$$

$\implies$

$$\boxed{1/6x_3 + 1/3x_5 \geq 1}$$

e Anexando o corte ao quadro e re-otimizando, temos:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	-30	0	0	0	0	-1	-6
$x_1$	0	1	0	0	0	-4/3	2
$x_4$	4	0	0	0	1	4/3	-2
$x_2$	6	0	1	0	0	1	0
$x_3$	6	0	0	1	0	2	-6

Então,  $f = -30$

Vá para o Passo 2.

**Passo 2**

Regra de Parada

$$\underline{c} \underline{x}^1 = -30 < \bar{f} = -29$$

$$\underline{c} \underline{x}^1 + \underline{k} \underline{y}^1 = -30 + 2 = -28 < \bar{f} = -29 \implies \bar{f} = -29$$

$$\underline{x}^* = (0, 6, 6, 4, 0)$$

$i = 1$  e vá para o Passo 1.

**Passo 1**

Iteração Padrão

e Determinam-se os coeficientes do Corte Convexo 2:

$$\beta_5 = \text{mínimo} \{3, 6, 3, \infty\} = 3$$

$$\beta_6 = \infty$$

$$\implies \boxed{x_5 \geq 3}$$

e Anexando o corte ao quadro e re-otimizando, temos:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
	-27	0	0	0	0	0	-6	-3
$x_1$	4	1	0	0	0	0	2	-4
$x_4$	0	0	0	0	1	0	-2	4
$x_2$	3	0	1	0	0	0	0	3
$x_3$	0	0	0	1	0	0	-6	6
$x_5$	3	0	0	0	0	1	0	-3

Então,  $\underline{f} = -27$

Vá para o Passo 2.

Passo 2

Regra de Parada

$$\underline{c} \tilde{x}^2 = -27 > \bar{f} = -29 \implies \text{Solução } \tilde{\text{Ótima}} \text{ Global}$$

$$\tilde{x}^* = (0, 6, 6, 4, 0)$$

$$x_0^* = -28$$

Geometricamente, podemos observar o desenvolvimento dos cortes na Figura III-4, a seguir.

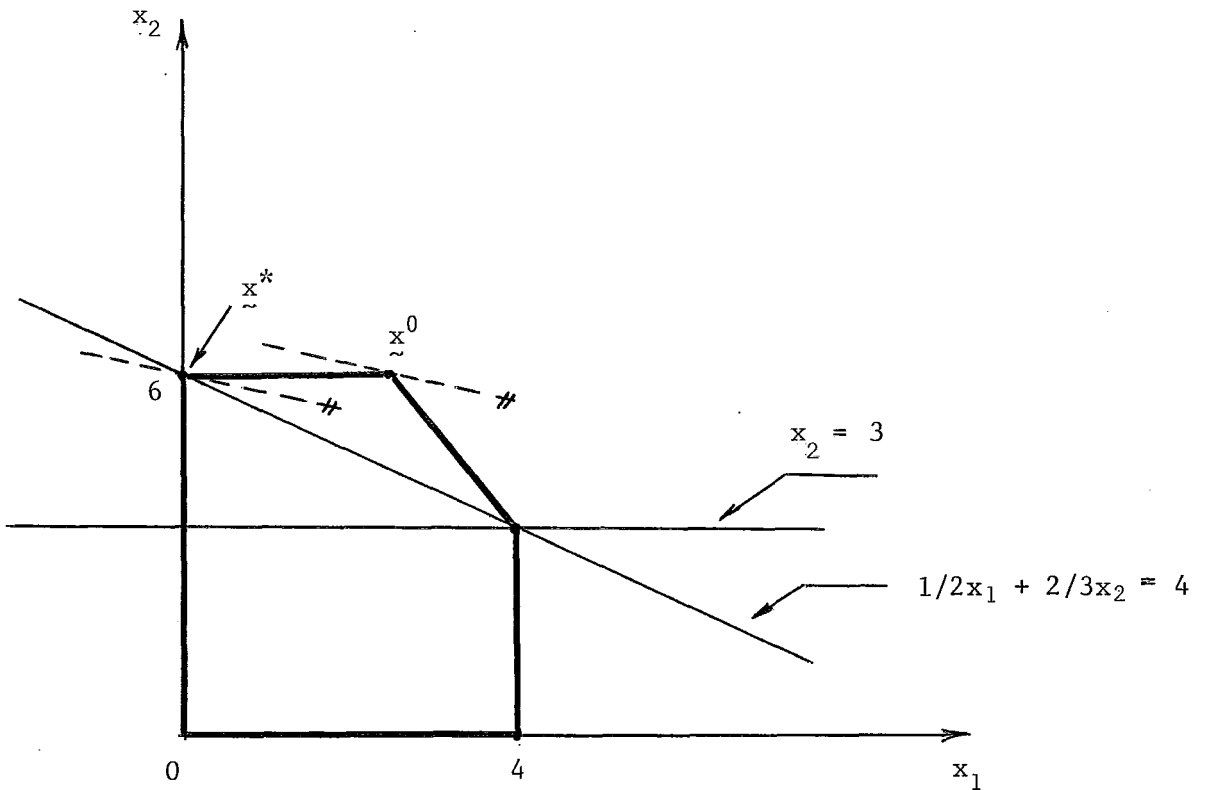


Figura III-4

Este algoritmo foi por nós programado em linguagem FORTRAN IV-H para o IBM/370-158 e testado para problemas de pequeno e médio porte. Co-

no era de se esperar, os resultados obtidos reproduzem os contidos em [23], mostrando a utilidade do método. À medida, porém, que o porte dos problemas aumentou, a eficiência da técnica decresceu, ficando bastante comprometida. Uma das razões foi, como sempre, o acúmulo de erros de processamento; outro adversário foi a ocorrência intensa de degenerescência dual.

### 3.4. O Problema da Degenerescência Dual

Um dos fatores preponderantes para a ineficiência dos algoritmos duais de cortes, quando aplicados a problemas de programação inteira é a ocorrência de degenerescência dual após algumas iterações.

Isto se deve ao fato dos cortes tradicionalmente usados nestes algoritmos terem todos os seus coeficientes não negativos. A primeira operação de pivoteamento, após adicionarmos cada novo corte, faz com que os coeficientes da linha zero (linha da função objetivo) decresçam; de fato, com a possível exceção do elemento correspondente à coluna do pivot, nenhum deles crescerá. Este fato tende, gradualmente, a fazer com que um número maior de coeficientes  $a_{0j}$ ,  $j \in J$  tornem-se nulos.

Geometricamente, sendo  $T$  o cone convexo envoltório associado a uma solução contínua  $\underline{a}_0$ , um corte cujos coeficientes são positivos corresponde ao caso em que os raios vetores  $\underline{r}_j = \underline{a}_0 - \theta_j \underline{a}_j$ ,  $\theta_j \geq 0$ ,  $j \in J$  que emanam de  $\underline{a}_0$  são interceptados pelo plano de corte  $\sum_{j \in J} \beta_j x_j \leq \beta_0$ .

A utilização repetida deste tipo de corte levará a um certo "enfraquecimento" do conjunto de soluções viáveis na região dos cortes, e estes tendem a tomar-se "paralelos" à família de hiperplanos definidos pela função objetivo. Tentamos ilustrar o problema em  $R^2$  na Figura III-5.

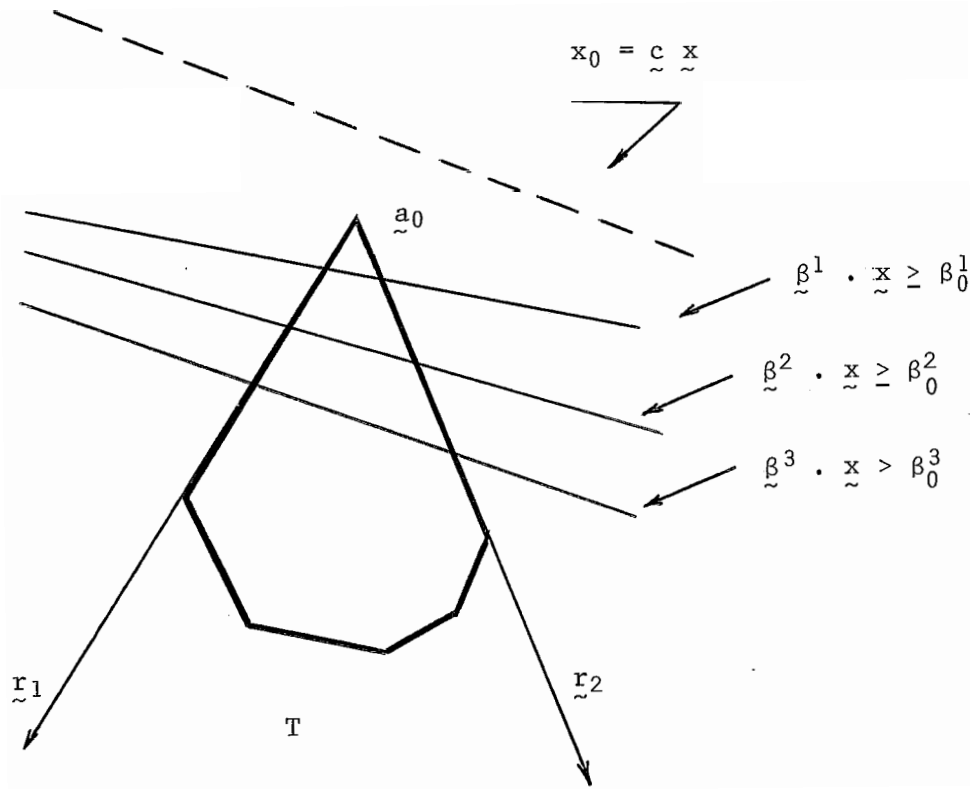


Figura III-5

A abordagem disjuntiva, além de valer-se da estrutura de certos problemas importantes e muito frequentes na prática, permite a obtenção de cortes com coeficientes de sinais diferentes. A utilização destes fatores tornam possível a obtenção de cortes mais profundos cuja utilização repetida não leva necessariamente ao fenômeno indesejável da degenerescência dual.

Geometricamente, conforme ilustrado em  $R^2$  na Figura III-6, um corte  $\sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_0$  com coeficientes negativos corresponde à situação em que algumas das arestas do cone  $T$  são interceptadas fora do poliedro.



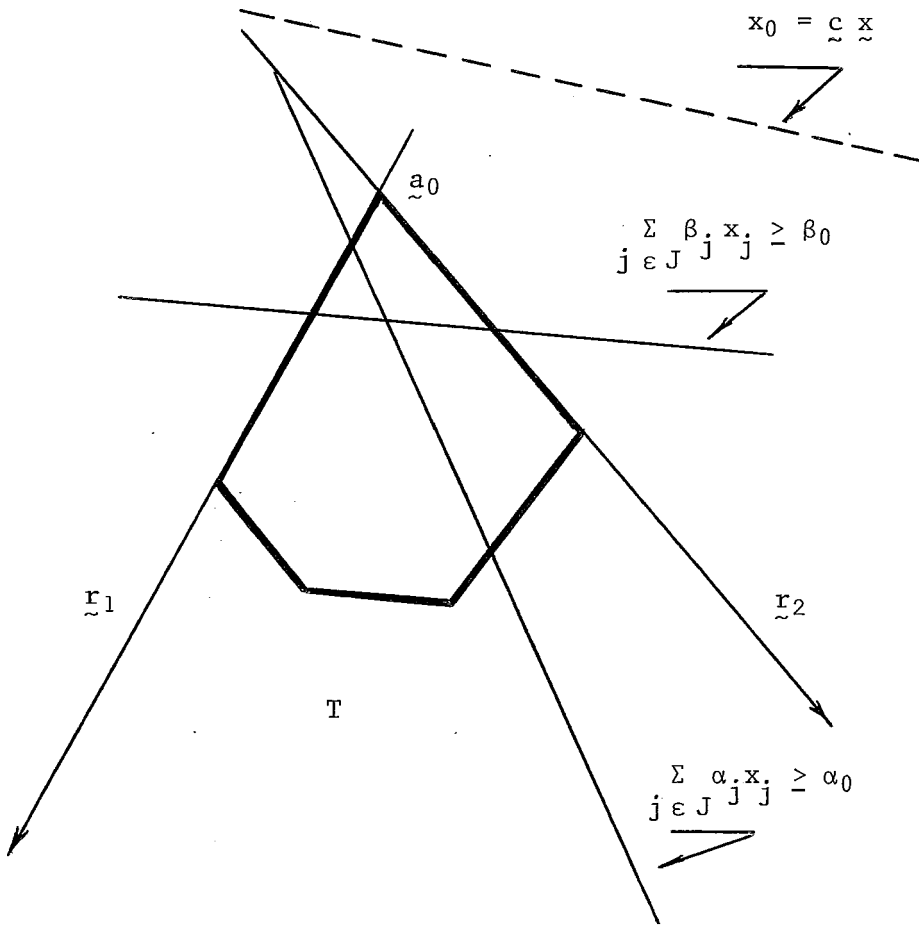


Figura III-6

CAPÍTULO IV

APROFUNDAMENTO DE CORTEIS DISJUNTIVOS

Suponhamos que um corte  $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$ , válido para (PD), não seja satisfeito a nível de igualdade estrita por nenhum  $\underline{x} \in F$ . Então, este corte poderá ser aprofundado no sentido de (2.1.2).

Note-se que o conjunto dos  $\underline{x}$  satisfazendo a:

$$\left[ \sup_{h \in H^* \subseteq H} \{ \theta^h A^h \} \right] \underline{x} \geq \inf_{h \in H^* \subseteq H} \{ \theta^h a_0^h \}, \quad \theta^h \geq 0, \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

é poliédrico convexo; logo, para que seja válido, deverá conter, necessariamente, a envoltória convexa de  $F$ , que é também um conjunto poliédrico.

Assim, deduzimos que um corte aprofundado desejável será uma face de  $\text{CONV}(F)$  ou pelo menos seu suporte.

Uma face de dimensão  $(n-1)$  de  $\text{CONV}(F)$ , já que  $\text{DIM} [\text{CONV}(F)] = \text{DIM}(F) = n$ , é um conjunto  $S$  satisfazendo a:

- $S = \text{CONV}(F) \cap \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / \underline{\pi} \underline{x} = \pi_0 \}$

- $\underline{\pi} \underline{x} \geq \pi_0 \quad \forall \underline{x} \in \text{CONV}(F)$

e  $\underline{\pi} \underline{x} = \pi_0$  para exatamente  $n$  pontos linearmente independentes de  $\text{CONV}(F)$ .

Adicionalmente, diremos que:

- $x_j \geq 0$ ,  $\forall j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$  é uma face trivial de  $\text{CONV}(F)$ , e que
- Toda face não-trivial de  $\text{CONV}(F)$  satisfaz a:  
 $\pi_j \geq 0 \quad \forall j \in N$  e  $\pi_0 > 0$ .

Para o (PD) exemplificado em (2.1), teríamos as quatro faces de dimensão unitária ①, ②, ③ e ④, incluindo duas triviais ① e ②, assinaladas na Figura IV-1

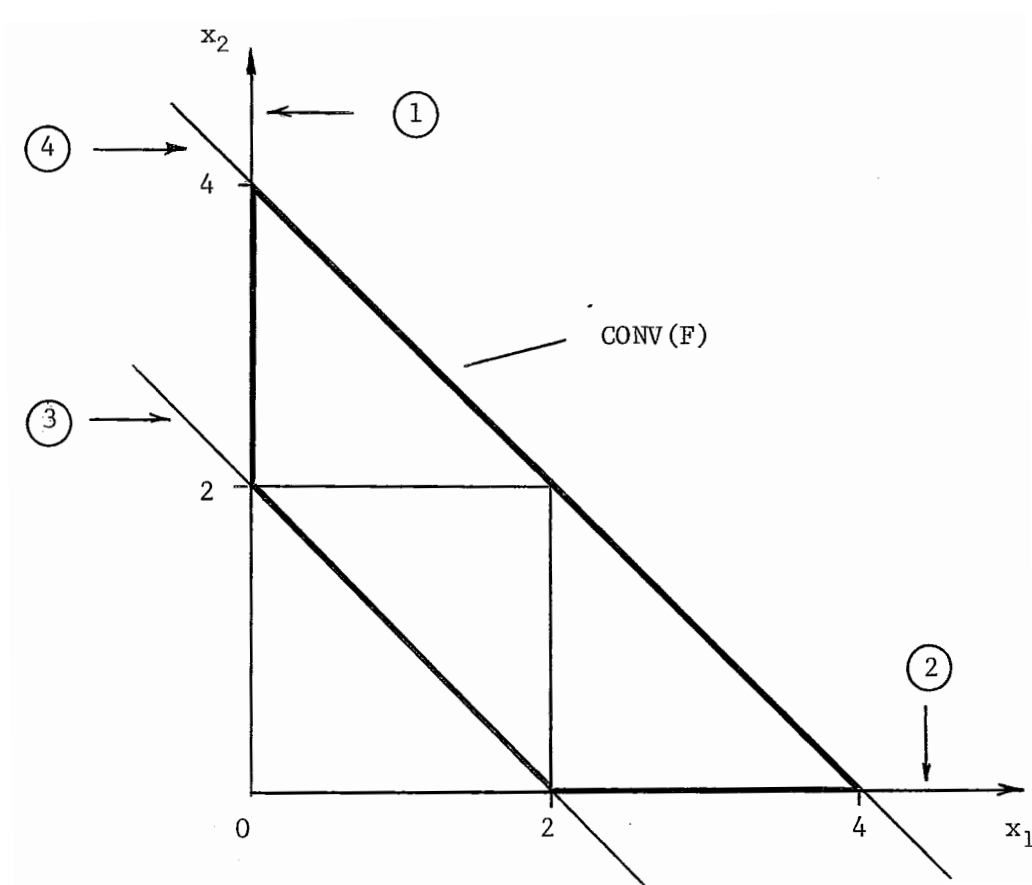


Figura IV-1

Note-se que um corte  $\underline{a} \underline{x} \geq \underline{a}_0$  é implicado pela disjunção

$$\bigvee_{h \in H} (A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h, \underline{x} \geq \underline{0}) \iff \underline{a} \in C; \text{ onde:}$$

$$C = \{ \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^n / \tilde{\beta} \tilde{x} \geq \alpha_0, \forall \tilde{x} \in F \}$$

Consideremos o Teorema (3.1.1) na definição do seguinte conjunto:

$$C^* = \{ \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^n / \tilde{\beta} \geq \tilde{\theta}^h \cdot A^h, \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0 \leq a_0, \tilde{\theta}^h \geq 0 \forall h \in H^* \subseteq H \}$$

Podemos mostrar [4] que  $\tilde{a} \tilde{x} \geq \alpha_0$  ( $\alpha_0 \neq 0$ ) é uma face de  $\text{CONV}(F) \iff \tilde{a} \neq 0$  é um vértice de  $C^*$  e que se  $\tilde{a} \tilde{x} \geq 0$  é uma face de  $\text{CONV}(F)$ , então  $\tilde{a} \neq 0$  é um raio vetor de  $C^*$ .

É possível, então, obtermos as faces de  $\text{CONV}(F)$  através da resolução de programas lineares da forma:

$$\begin{aligned} \text{(PL):} \quad & \text{maximizar} \quad \tilde{d} \tilde{\beta} \\ & \text{sujeito a:} \\ & \bigwedge_{h \in H^* \subseteq H} \left[ \begin{array}{l} \tilde{\beta} - \tilde{\theta}^h A^h \geq 0 \\ \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0 \geq \alpha_0 \\ \tilde{\theta}^h \geq 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

onde  $\tilde{d}$  será um vetor escolhido adequadamente para cada (PL).

Esta pode não ser uma abordagem prática, porquanto em geral os elementos de  $H^*$  são desconhecidos e sua cardinalidade pode ser elevada, levando a problemas de grande porte. O primeiro problema pode ser contornado, trabalhando-se com  $H$  ao invés de  $H^*$  [4], porém, o porte do problema desta forma resultaria maior. Por outro lado, como estamos interessados nas faces devemos determinar valores de  $\tilde{d}$  para os quais o (PL) tem solução ótima finita, o que nem sempre será uma tarefa evidente.

Descartada a possibilidade de obtermos todas as faces por este processo, resta ainda o recurso de utilizar o Teorema (3.1.1), na tentativa de obtermos faces. Para o exemplo (2.1), teríamos:

$$\left[ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right] \vee \left[ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right]$$

Assim:

$$\bullet A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_0^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_0^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet H = \{1, 2\}$$

Aplicando o Corolário (3.1.2), temos:

$$\left[ \sup_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h A^h\} \right] x \geq \inf_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h \tilde{a}_0^h\}, \quad \theta^h \geq 0 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

Como  $\#(H) = \#(H^*) = 2$ , podemos escrever:

$$\pi_j = \max_{h \in H} \{\theta^h \tilde{a}_j^h\}, \quad j \in \{1, 2\}$$

$$\pi_0 = \min_{h \in H} \{\theta^h \tilde{a}_0^h\}$$

Tomando  $\tilde{\theta}^h = (1,1) \quad \forall h \in H$ , temos:

$$\pi_0 = 2$$

$$\pi_1 = \text{máximo } \{0,1\} = 1$$

$$\pi_2 = \text{máximo } \{1,0\} = 1$$

Logo,  $x_1 + x_2 \geq 2$  é um corte válido para (PD) e  $x_1 + x_2 = 2$  é ainda uma face de  $\text{CONV}(F)$ , como podemos verificar. Na Figura IV-1, está assinalada pelo número ③.

Nosso intuito aqui é discutir, primeiramente, sob que condições os cortes disjuntivos obtidos do Corolário (3.1.2) podem ser aprofundados, a partir de uma escolha conveniente de multiplicadores, havendo possibilidade, como veremos, de obter um corte, que será uma face da envoltória convexa de  $F$  e, portanto, o corte mais profundo implicado pela disjunção em questão. Posteriormente, discutiremos o princípio geral de aprofundamento de cortes da família disjuntiva, no caso em que, além das disjunções aplicadas às variáveis básicas, há restrições estruturais de integralidade aplicadas a algumas ou todas as variáveis não-básicas.

A discussão completa dos problemas citados pode ser encontrada em detalhe em [4, 13]. Aqui, a ênfase maior é dada ao caso em que  $\#(H) = 2$  já que o corte B(5), obtido a partir da aplicação do princípio geral, é o principal elemento de discussão da dissertação.

#### 4.1 - Aspectos Preliminares

Alguns critérios têm sido utilizados na obtenção de cortes aprofundados. Recentemente, Shetty e Sherali [13] exploraram os critérios da

distância euclidiana e retilínea, respectivamente, para aprofundamento de cortes disjuntivos.

Passamos a apresentar, dentro das características didáticas que propusemos, algumas propriedades dos cortes obtidos a partir do Corolário (3.1.2), com relação a estes critérios.

#### 4.1.1 - Distância Euclidiana

Entendemos por distância euclidiana da origem à região viável de um corte  $C$   $\sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0$ , onde  $\pi_0 > 0$  e  $\pi_j > 0$  para algum  $j \in J$ , a seguinte medida:

$$d_e = \text{mínimo } \{ \| \underline{x} \| / \sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0, \underline{x} \geq 0 \} = \frac{\pi_0}{\| \pi \|}$$

onde  $z_j = \text{máximo } \{0, \pi_j\}$ ,  $j \in J$

#### 4.1.2 - Distância Retilínea

A distância retilínea da origem à região viável de um corte  $H$   $\sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0$ , onde  $\pi_0 > 0$  e  $\pi_j > 0$  para algum  $j \in J$  é dada por:

$$d_r = \frac{\pi_0}{\pi_m}, \text{ onde } \pi_m = \text{máximo}_{j \in J} \{ \pi_j \}$$

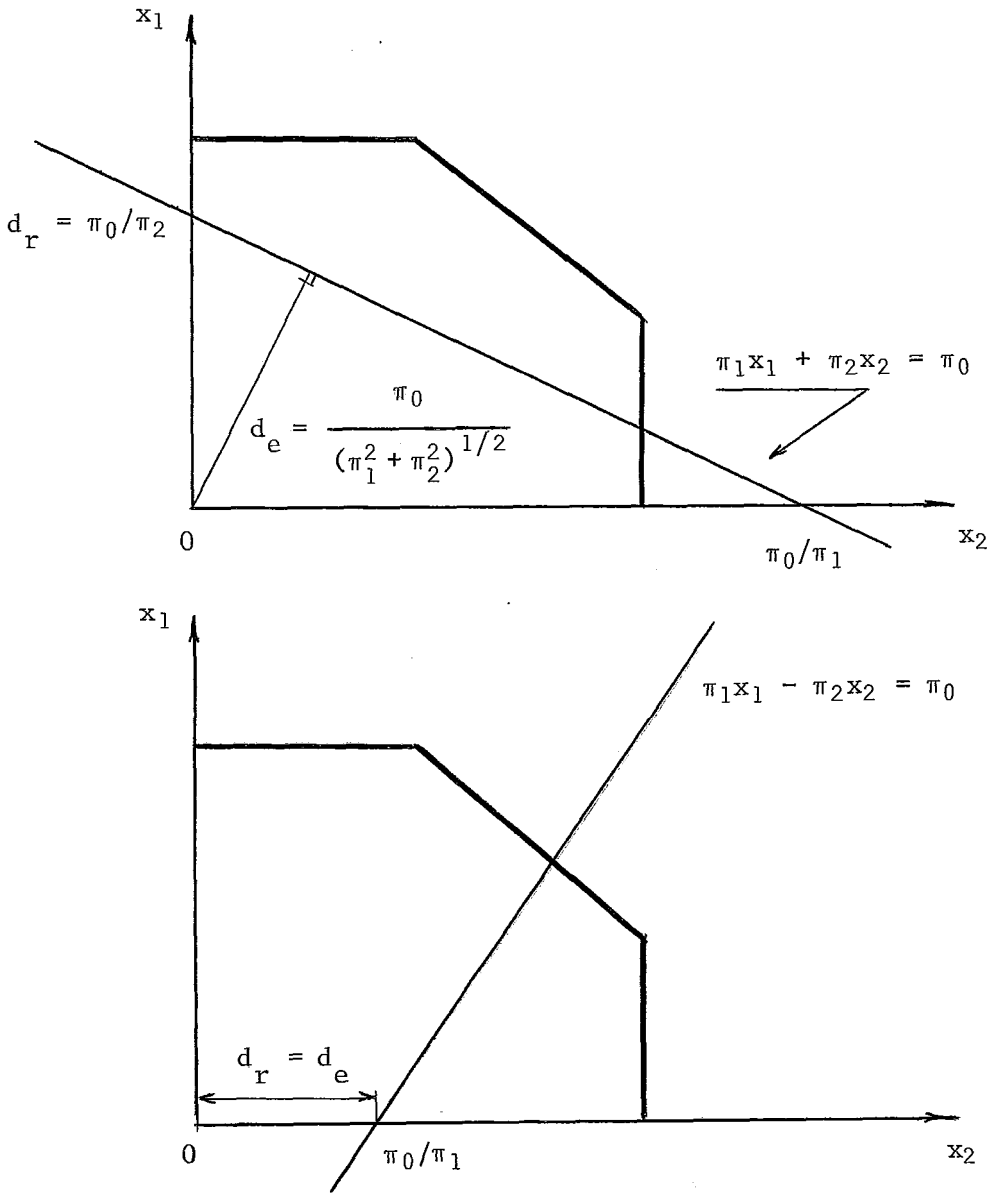


Figura IV-2

Com relação às duas medidas definidas e ilustradas na Figura IV-2, um critério intuitivo para gerar ou selecionar cortes seria o de maximizar a distância euclidiana e/ou retilínea da origem à região viável definida pelo corte. A grande limitação associada à utilização deste critério é o problema da dominância, porquanto podemos ser levados a tratar dois cortes como de mesmo poder, quando na realidade, um deles domina estritamente o ou-



tro; situação ilustrada na Figura IV-3, onde o corte ① domina ② .

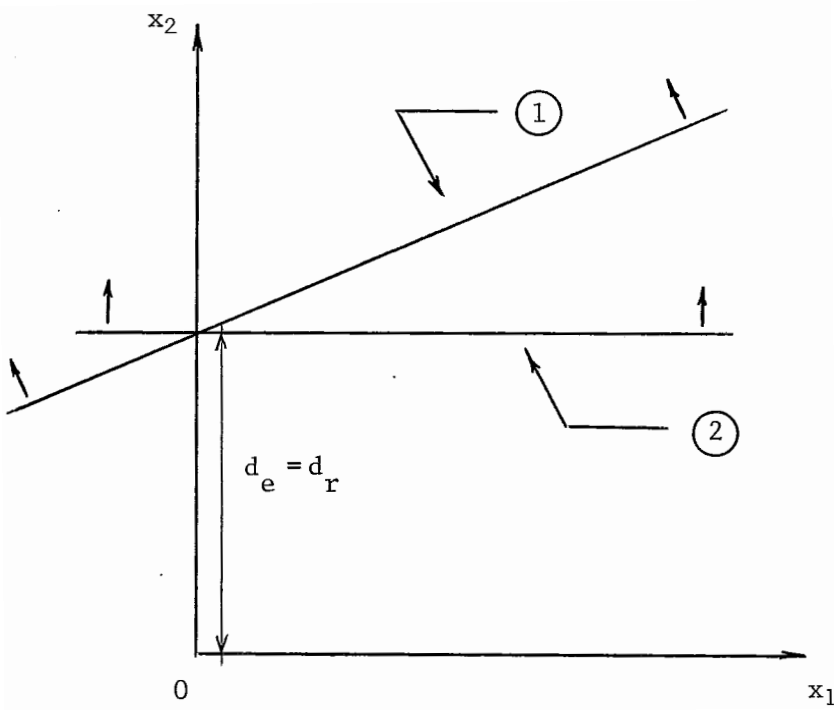


Figura IV-3

Conscientes, então, das limitações, vamos investigar as propriedades dos cortes disjuntivos com relação a estes critérios.

Seja então:

$$X_h = \{ \underline{x} / \sum_{j \in J} a_j^h x_j \geq a_0^h, \quad a_0^h > 0 \quad \forall h \in H, \quad \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

$$H^* = \{ h \in H / X_h \neq \phi \} \neq \phi \quad \text{e finito}$$

Obviamente, de (3.1.1) :

$$\forall \tilde{x} \in \bigcup_{h \in H^*} X_h \iff \sum_{j \in J} \max_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h a_j^h\} x_j \geq \min_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h a_0^h\},$$

$$\theta^h \geq 0, \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

Fazendo  $\theta^h = 1/a_0^h$ ,  $\forall h \in H^* \subseteq H$ , obtemos o resultado do Corolário (3.1.2).

#### 4.1.3 - Proposição

O corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2) é o de maior distância euclidiana à origem.

Prova:

Por definição, a distância euclidiana do corte definido pelo Corolário (3.1.2) à origem é dada por:

$$\hat{d}_e = \min \left\{ \frac{\|\tilde{x}\|}{c \sum_{j \in J} \left\{ \max_{h \in H^* \subseteq H} \frac{a_j^h}{a_0^h} \right\} \cdot x_j \geq 1, \tilde{x} \geq 0} \right\} = 1/\|\tilde{z}\|$$

onde  $\tilde{z} = (\hat{z}_j)$ ,  $j \in J$  é tal que  $\hat{z}_j = \max \left\{ 0, \max_{h \in H^* \subseteq H} \frac{a_j^h}{a_0^h} \right\}$ ,  $\forall j \in J$

Por conveniência algébrica, vamos utilizar o quadrado da distância euclidiana ao corte, ou seja:

$$(\hat{d}_e)^2 = 1 / \sum_{j \in J} z_j^2$$

Se considerarmos multiplicadores  $\theta^h$ ,  $h \in H'' \subseteq H$  diferentes dos utilizados na obtenção do corte disjuntivo do Corolário (3.1.2), teremos:

$$\sum_{j \in J} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h \cdot a_j^h \right\} \cdot x_j \geq \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \}, \quad \theta^h \geq 0 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

O quadrado da distância euclidiana  $\tilde{e}$  é então dado por:

$$d_e^2 = \left[ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \} \right]^2 / \sum_{j \in J} z_j^2 = (\lambda^P)^2 / \sum_{j \in J} z_j^2$$

$$\text{com } z_j = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ \theta^h \cdot a_j^h \} \}, \quad j \in J$$

No caso em que  $\lambda^P = 0$  então  $d_e^2 = 0$  e a proposição é trivialmente verificada. Consideremos, então, o caso em que  $\lambda^P > 0$ .

$$\text{Temos que: } d_e^2 = 1 / \sum_{j \in J} (z_j / \lambda^P)^2$$

$$\text{e sendo } h^P = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \}, \text{ segue-se que } (\theta^h a_0^h) / \lambda^P \geq 1 \quad \forall h \in H^* \subseteq H.$$

Logo:

$$z_j / h^P = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} (\theta^h / h^P) \cdot a_j^h \} \geq \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} a_j^h / a_0^h \} = \hat{z}_j$$

Segue-se que:  $d_e^2 \leq (\hat{d}_e)^2$  para qualquer escolha dos multiplicadores  $\theta^h \geq 0$ ,  $h \in H^* \subseteq H$   $\square$

## 4.1.4 - Proposição

O corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2) é o de maior distância retilínea à origem.

Prova:

Por definição, a distância retilínea do corte, definido pelo Corolário (3.1.2), à origem, é dada por:

$$\hat{d}_r = 1 / \left[ \underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \frac{a_j^h}{a_0^h} \right\} \right]$$

Escolhendo multiplicadores  $\theta^h$ ,  $h \in H^* \subseteq H$  arbitrariamente, temos:

$$\begin{aligned} d_r &= \left[ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \theta^h a_0^h \right] / \left[ \underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h a_j^h \right\} \right] = \\ &= \lambda^p / \left[ \underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h a_j^h \right\} \right] \end{aligned}$$

Claro que  $\lambda^p = 0$  implica em um valor de  $d_r = 0$ , inferior, portanto, a  $\hat{d}_r$ , o que verifica trivialmente o resultado. Vamos assumir, então,  $\lambda^p > 0$ .

Por outro lado,  $(\theta^h a_0^h) / \lambda^p \geq 1 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$  e pela definição de  $d_r$  são considerados aqueles  $j \in J$  para os quais  $a_j^h > 0$ .

Logo:

$$1 / \left[ \underset{j \in J}{\text{m\u00e1ximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} (\theta^h / \lambda^P) a_j^h \right\} \right] \leq 1 / \left[ \underset{j \in J}{\text{m\u00e1ximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} a_j^h / a_0^h \right\} \right]$$

Portanto, para qualquer escolha dos multiplicadores  $\theta^h \geq 0$ ,  $h \in H^* \subseteq H$ , tem-se  $d_r \leq \hat{d}_r$   $\square$

Verificamos, portanto, que os dois crit\u00e9rios s\u00e3o satisfeitos simultaneamente, o que \u00e9 bastante interessante. Por outro lado, se os multiplicadores forem selecionados de modo mais elaborado, poderemos obter um corte mais profundo, com as mesmas propriedades, sendo ainda uma face de  $\text{CONV}(F)$ .

Esta escolha de multiplicadores ser\u00e1 definida a seguir.

## 4.2 - Gera\u00e7\u00e3o de Faces de $\text{CONV}(F)$

Primeiramente, discutamos como aprofundar o corte.

### 4.2.1 - Proposi\u00e7\u00e3o

O corte disjuntivo  $\sum_{j \in J} \alpha_j^* \cdot x_j \geq 1$  \u00e9 mais profundo que o obtido no Corol\u00e1rio (3.1.2).

Onde:  $\alpha_j^* = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} \{ \gamma^h (a_j^h / a_0^h) \}$ ,  $j \in J$

$$\gamma^h = \underset{j \in J}{\text{m\u00ednimo}} \left\{ \underset{J}{a_j^h} / \left( \underset{J}{a_j^h} / a_0^h \right) \right\}$$

$$a_j^h / a_0^h > 0$$

$$a_j^h = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} \{a_j^h/a_0^h\}, \quad j \in J$$

Prova:

Consideremos, inicialmente, os par\u00e2metros  $\gamma^h, h \in H^* \subseteq H$ . Temos que  $a_j^h > 0$  para algum  $j \in J, \forall h \in H^*$ . Assim, mesmo que  $\exists a_j^h < 0$ , teremos sempre  $\gamma^h$  positivo. Por outro lado da sua pr\u00f3pria defini\u00e7\u00e3o, segue-se que  $\gamma^h \geq 1, \forall h \in H^*$ .

Definamos a seguinte parti\u00e7\u00e3o de  $J$ :

$$\begin{cases} J^+ = \{j \in J/\alpha_j^* > 0\} & \text{com } \#(J^+) = m \\ J^- = \{j \in J/\alpha_j^* \leq 0\} & \text{com } \#(J^-) = n \end{cases}$$

Evidentemente:

$$J^+ \cup J^- = J, \quad J^+ \cap J^- = \phi \quad \text{e} \quad \#(J) = m+n.$$

Se, para um particular  $j \in J$  tivermos  $a_j^- \leq 0$ , ent\u00e3o:  $a_j^- \leq 0 \forall h \in H^*$ . Logo,  $\gamma^h(a_j^-/a_0^h) \leq (a_j^-/a_0^h), \forall h \in H^*$ .

Segue-se trivialmente que:

$$\underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} \left\{ \underset{J}{\gamma^h(a_j^-/a_0^h)} \right\} \leq \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{m\u00e1ximo}} \left\{ \underset{J}{a_j^-/a_0^h} \right\}$$

Ou seja.,  $a_j^* \leq a_j^-$  quando  $j \in J^-$ .

\* Por outro lado, não é difícil ver que para  $j \in J^+$  teremos  $a_j^* = a_j$ . Assim, mostramos que:

$$\alpha_j^* \begin{cases} = \alpha_j, & j \in J^+ \\ \leq \alpha_j, & j \in J^- \end{cases}, \quad \forall j \in J$$

Pela definição de corte mais profundo, contida em (2.3.2), a prova está completa. ■

A partir deste resultado, torna-se clara a observação feita no capítulo III, com relação aos coeficientes do corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2). Portanto, se algum  $a_j$ ,  $j \in J$  for negativo, podemos tentar aprofundar o corte a partir dos multiplicadores  $\gamma^h$ ,  $h \in H$  como definido. Mostraremos, agora, que este corte também atende aos critérios de distância mencionados.

#### 4.2.2 - Proposição

$$\text{O corte disjuntivo } \sum_{j \in J} \left\{ \max_{h \in H^* \subseteq H} \gamma^h(a_j^h/a_0^h) \right\} x_j > 1$$

com  $\gamma^h = \min_{\substack{j \in J \\ a_j^h/a_0^h > 0}} \{a_j^h/(a_j^h/a_0^h)\}$ ,  $h \in H'' \subseteq H$  maximiza as distâncias euclidianas

na e retilínea à origem.

Prova:

Por definição de distância euclidiana, tem-se:  $\hat{d}_e^Y = 1/\|z^Y\|$ .

Onde  $\tilde{z}^Y = (z_j^Y)$ ,  $j \in J$  com  $z_j^Y = \widehat{\text{máximo}} \{0, \alpha_j\} \quad \forall j \in J$ .

$$\text{Como } \alpha_j^* \begin{cases} = \alpha_j, & \text{se } \alpha_j > 0 \\ \leq \alpha_j, & \text{se } \alpha_j \leq 0 \end{cases}$$

segue-se que  $z_j^Y = \widehat{z}_j$ ,  $\forall j \in J$  e, portanto,  $d_e^Y = \widehat{d}_e$ .

Por outro lado, a distância retilínea  $\widehat{d}_e$  é dada por:

$$d_r^Y = 1 / \left[ \widehat{\text{máximo}}_{j \in J} \alpha_j^* \right]$$

Pela mesma argumentação anterior, tem-se:

$$\widehat{\text{máximo}}_{j \in J} \alpha_j^* = \widehat{\text{máximo}}_{j \in J} \alpha_j \quad \text{e, portanto, } d_r^Y = \widehat{d}_r.$$

Segue-se que:  $d_e^Y \leq \widehat{d}_e^Y$  e  $d_r^Y \leq \widehat{d}_r^Y$  para qualquer escolha dos multiplicadores  $\theta^h \geq 0$ ,  $h \in H^* \subseteq H$ . ■

#### 4.2.3 - Proposição

O corte disjuntivo definido pela Proposição (4.2.1)  $\widehat{e}$  é uma face de  $\text{CONV}(F)$ .

Prova:

$\widehat{e}$  é suficiente identificarmos  $\#(J)$  vetores linearmente independentes de  $\text{CONV}(F)$ , satisfazendo ao corte definido em (4.2.1) a nível de



igualdade estrita, já que dimensão  $\text{CONV}(F) = \#(J)$ ,

Utilizaremos os mesmos conjuntos  $J^+$  e  $J^-$ , os quais são uma partição de  $J$ , conforme (4.2.1).

Seja  $\bar{x}_p = (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, 0)$ ,  $p \in J^+$  onde claramente todos os elementos de  $\bar{x}_p$  são nulos, exceto o  $p$ -ésimo componente,

Como  $p \in J^+$ , temos de (4.2.1) que:

$$\alpha_p^* = \alpha_p = \max_{h \in H_p^*} \{a_p^h / a_0^h\}$$

$$\text{Segue-se que: } \sum_{j \in J} \alpha_j^* \cdot \bar{x}_j = \alpha_p^* \bar{x}_p = 1$$

e, portanto,  $\bar{x}_p \in \text{CONV}(F)$ .

Assim, temos  $\#(J^+)$  elementos da forma  $\bar{x}_j$ ,  $j \in J^+$  pertencentes a  $\text{CONV}(F)$ .

Consideremos, a seguir, um elemento genérico  $q \in J^-$ . Vamos mostrar, inicialmente, que  $\exists X_h$ ,  $h_q \in H$  e  $q \in J^-$ , satisfazendo a:

$$\gamma^h (a_p^h / a_0^h) = \alpha_p^* \quad \text{para algum } p \in J^+$$

$$\text{e } \gamma^q (a_q^h / a_0^h) = \alpha_q^*$$

De (4.2.1), temos que:

$$\alpha_q^* = \underset{h \in H_q^*}{\text{m\u00e1ximo}} \{ \gamma^h(a_q^h / a_0^h) \} = \gamma^q(a_q^h / a_0^h)$$

Assim, para este  $h_4 \in H$ , teremos:

$$\gamma^q = \underset{j \in J}{\text{m\u00ednimo}} \{ \alpha_j^h / (a_j^q / a_0^q) \} = \alpha_p^h / (a_p^q / a_0^q), \quad p \in J^+$$

$$a_j^q / a_0^q > 0$$

Como  $\alpha_p^h = a_p^*$ ,  $p \in J^+$ , segue-se que  $\gamma^q(a_p^q / a_0^q) = \alpha_p^*$ ,  $p \in J^+$ .

Definamos, ent\u00e3o:

$$\underline{d}_q = \begin{cases} (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, -1/\alpha_q^*, \dots, 0), & \text{se } \alpha_q^* < 0 \\ (0, \dots, 0, \dots, \Delta, \dots, 0), & \text{se } \alpha_q^* = 0 \end{cases}$$

sendo  $\Delta > 0$ . Podemos observar que  $\underline{d}_q$  \u00e9 uma dire\u00e7\u00e3o de  $X_{h_4}$ ,  $h_4 \in H$  j\u00e1 que se  $\alpha_q^* = 0$ , temos  $a_q^h = 0$  e o resultado \u00e9 imediato; por outro lado, para  $\alpha_q^* < 0$ ,  $\hat{x} = (0, \dots, \gamma^q / \alpha_p^*, \dots, 0) \in X_{h_4}$  e  $\hat{x} + \lambda(\gamma^q \underline{d}_q) \in X_{h_4}$  para todo  $h \geq 0$ . Assim,  $\underline{d}_q$  \u00e9 uma dire\u00e7\u00e3o de  $\text{CONV}(F)$ .

Fazendo  $\hat{x}_{-4} = \bar{x}_{-4} + \underline{d}_q$ ,  $q \in J^-$ , verificamos que  $\hat{x}_{-4} \in \text{CONV}(F)$ , satisfazendo ao corte como igualdade estrita.

Obtivemos, ent\u00e3o, **#** (J) elementos que satisfazem ao corte a n\u00edvel de igualdade estrita, a saber:

$$\bar{x}_p = (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, 0) \quad , \quad p \in J^+$$

$$\hat{x}_{\sim q} = \bar{x}_{\sim p} + d_{\sim q} \quad , \quad q \in J^-$$

Se dispusermos estes elementos em uma matriz tal que as  $\#(J^+)$  primeiras colunas forem os  $\bar{x}_p^T$ ,  $p \in J^+$  e as  $\#(J^-)$  últimas colunas, os  $\bar{x}_{\sim q}^T$ ,  $q \in J^-$ , nota-se claramente que a mesma poderá ser reduzida, através de operações elementares aplicadas sobre suas linhas, a uma matriz dita "echelon" sem linha nula. Portanto, estes  $\#(J)$  elementos obtidos são linearmente independentes de  $\text{CONV}(F)$ , e como dimensão  $[\text{CONV}(F)] = \#(J)$ , a prova está completa. ■

Assim, mostramos que o corte definido em (4.2.1) é uma face de  $\text{CONV}(F)$  e, portanto, o mais profundo implicado pela disjunção  $\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \phi)$ .

Para o caso generalizado, a situação é mais complexa, não havendo até o momento uma solução analítica; passaremos, então, a discutir alguns aspectos introdutórios ao princípio geral de aprofundamento, quando em presença de restrições bivalentes a um subconjunto de variáveis do problema (PD).

#### 4 - Princípio Geral de Aprofundamento

Consideremos um (PD) na forma normal disjuntiva, ao qual são adicionadas restrições de integralidade a algumas componentes do vetor de decisão  $\underline{x}$ .

Adicionalmente, admitiremos que:

























































































































































































































