CONTRIBUIÇÃO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR E PROGRAMAÇÃO INTEIRA COM ESTRUTURAS ESPECIAIS

Maria Luiza Villares

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:

Nelson Maculan Filho

Prof. Nelson Maculan Filho
(Presidente)

AAF Oliveira

Prof. Antonio A.F. de Oliveira

Dina Feigenbaum Cleiman

Prof. Dina F. Cleiman

Ruy Eduardo Campello

Prof. Ruy Eduardo Campello

Prof. Luiz Flávio Autran M. Gomes

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1981

Ao Professor e amigo Maculan

AGRADECIMENTOS

A Nelson Maculan Filho, que não mediu forças em ficar a meu lado, não só pelo apoio intelectual e científico, inerente à função de orientador, mas pelo apoio diante das especiais dificuldades de vida que se me apresentaram - sem o qual meu trabalho de tese, certamente, ficaria inconcluso.

Aos amigos que representaram também, um suporte indispensável à criação de condições de possibilidade para a realização do meu trabalho, ajudando-me, não só psicológica como materialmente, incasáveis e dadivosos.

Ao Prof. Miguel Taube Netto, que não recuou diante de uma ajuda científica que, sabia, havia de ficar anônima.

A Agostinho Guerreiro, que contribuiu muito e carinhosamente na etapa final da execução da tese.

A IBM, pela concessão da bolsa de estudos durante todo o tempo que durou a pesquisa.

Agradeço também ao excelente trabalho de datilografia de Suely Klajman.

Algumas palavras aos doutorandos:

É frequente particularmente, quando do término da realização dos créditos, quando chega a hora de "enfrentar a tese"; que se caia no desânimo e muitos desistam: as dificuldades são muitas, os horizontes do possível pouco devessáveis e a recompensa incerta.

Agora que ultrapassei este momento quero dizer-lhes que valeu a pena ter continuado - que o esforço é válido e compensador o preço que se paga.

RESUMO

A Programação Linear e a Programação Inteira, são técnicas de otimização largamente utilizadas na resolução de problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares, e em especial, na resolução de problemas lineares que apresentam estruturas especiais.

Este trabalho tem por finalidade, explicar em nível introdutório, alguns dos conceitos envolvidos na Programação Linear e na Programação Inteira, e está basicamente, dividido em três partes. Na primeira, é feita uma revisão dos conceitos mais importantes do Método Revisado do Simplex e do Método de Decomposição, principalmente aqueles indispensáveis ao perfeito entendimento dessas técnicas de otimização.

Na segunda parte, apresentaremos métodos de solução para quatro problemas com estruturas especiais. Esses problemas, podem ter o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \min\ & z = c\,x \\ \text{s.a.:}\ & Ax = b \\ & x \in X \end{aligned}$$

onde c^T, $x \in R^n$; $b \in R^m$; A é uma matriz com m linhas e n colunas, e X representa o conjunto de estruturas especiais.

Finalmente, na terceira parte apresentamos uma aplicação da Programação Linear no planejamento dinâmico de plantios de diferentes culturas.

ABSTRACT

Linear and Integer Programming are largely used optimization techniques to solve problems modelled by linear expressions, for problems with special characteristics, we can generate specific algorithms which are more efficient.

Here we try to introduce some of the most important aspects involved in Linear and Integer Programming. At first we review the Revised Simplex and Decomposition Methods.

After that the general problem

$$\min z = c\,x$$

suject to

$$Ax = b$$

$$x \in X$$

where c^T and $x \in R^n$; $b \in R^m$; A is a (mxn) matrix and X is a special set is treated considering four different special choices for the structure of X.

At last an application of Linear Programming to the plenning of the plantation of different agricultural products is presented, considering dynamic aspects.

ÍNDICE

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

INTRODUÇÃO

Pretendemos neste trabalho oferecer uma contribuição às técnicas matemáticas para a resolução de problemas de Programação Linear e Programação Inteira, problemas estes constituidos de estruturas especiais. Representamos esse tipo de problema da seguinte maneira:

$$\underline{\text{máx}}\ z = cx \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b \tag{2}$$

$$x \in X \quad , \tag{3}$$

onde $c^T, x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; A é uma matriz com m linhas e n colunas, e onde X representa o conjunto de estruturas especiais.

O estudo será apresentado em seis capítulos, consistindo o primeiro deles de um resumo do Método Revisado do Simplex e do Método de Decomposição de Dantzig e Wolfe. Consideramos isto necessário, uma vez que esses métodos serão utilizados em todos os demais capítulos.

No Capítulo II estudaremos o problema em que as variáveis obedecem a uma ordem pré-determinada. Este problema, poderá, por exemplo, ter a seguinte representação:

$$\underline{\text{máx}}\ x_o \tag{4}$$

$$\text{s.a.} \quad a_o x_o + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b \tag{5}$$

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq d \quad , \tag{6}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 0,\ldots,n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $d \in \mathbb{R}$ e $d > 0$.

No problema acima, as variáveis foram ordenadas de forma crescente, sendo que denominamos (6), "restrição de precedência".

Apresentaremos primeiramente, uma solução para este tipo de problema utilizando o Método do Simplex, considerando $d = +\infty$.

O método estudado neste capítulo, difere do método usual do simplex em alguns pontos:

(i) trabalharemos sempre com a base B, e não sua inversa, B^{-1}, isto é, resolveremos diretamente os sistemas lineares;

(ii) a solução básica inicial será formada pelas p últimas variáveis da restrição de precedência, pela variável x_0 e pelas restantes variáveis de folga, até completar $(m + n)$ elementos;

(iii) na escolha da variável a entrar na base, isto é, uma vez satisfeitas as condições de não-negatividade dos multiplicadores do simplex, devemos calcular o $z_j - c_j$ relativo à primeira variável da restrição de precedência, que não está na base. Se este valor for negativo, a variável associada a ele, entrará na base, caso contrário, a solução obtida será ótima.

Muitas vezes as variáveis, além de obedecerem a uma ordem pré-determinada, podem assumir somente um dos valores 0 ou 1 . Neste caso a restrição de precedência ficará:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots \leq x_n \leq 1 .$$

Este problema será resolvido a partir do desenvolvimento da Dualidade em Programação Inteira, sendo que neste caso o problema auxiliar será:

$$\underline{\text{máx}} \quad qx \tag{7}$$

$$\text{s.a.} \qquad x \in X \quad , \tag{8}$$

onde:

$$X = \{x/x\in\mathbb{R}^n, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1; x_j \in \{0,1\}, j=1,\ldots,n\} \quad , \tag{9}$$

e $q = (q_1,\ldots,q_n)$ é um vetor linha dado.

A solução ótima deste problema, será determinada da seguinte maneira: devemos calcular os valores s_p, $p = 1, \ldots, n$, tal que:

$$s_p = \sum_{j=p}^{n} q_j , \quad p=1,\ldots,n \quad . \tag{10}$$

Tomemos s_k , tal que:

$$s_k = \underset{p=1,..,n}{\text{máx}} \{s_p\} \quad . \tag{11}$$

(i) se $s_k \leq 0$, a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_j = 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \quad ,$$

ou

$$\hat{x} = (0,\ldots,0)^T \quad .$$

(ii) se $s_k > 0$, a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1} = \dots = \hat{x}_n = 1$$

e

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_{k-1} = 0 \quad ,$$

ou

$$\hat{x} = (0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{(n-k+1) \text{ elementos unitários.}})^T \quad .$$

Neste capítulo, apresentaremos também, solução utilizando o Método de Decomposição, para os problemas nos quais as variáveis, além de serem ordenadas, são limitadas e ordenadas por grupos.

Finalmente, apresentaremos como solução do problema (4) - (6), um método que consiste em uma mudança de variável, recaindo assim, num problema de Programação Linear.

No Capítulo III, apresentaremos um algoritmo proposto para resolver problemas inteiros, cujas variáveis podem assumir somente um dos valores 0 ou 1, denominado "Enumeração Implícita". Este algoritmo resolve problemas com o seguinte aspecto:

$$\underline{\min}\ x_o = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{12}$$

s.a. $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in M = \{1,\dots,m\} \quad , \tag{13}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \ \forall j \in N = \{1,\dots,n\}, \tag{14}$$

onde $c_j \geq 0$, $\forall j \in N$.

e

O algoritmo inicia considerando todas as n variáveis iguais a zero, e consiste de um procedimento sistemático de sucessivas indicações do valor 1 para as variáveis, de modo a apresentar como resultado, depois de se tentar uma pequena parte das 2^n soluções, ou uma solução ótima ou um indício de que não existe solução viável.

Apresentaremos também, utilizando o Método de Decomposição, outra solução para o problema (12)-(14), onde o conjunto X é definido da seguinte maneira:

$$X = \{0,1\}^n \quad .$$

A estrutura do problema auxiliar neste caso, é a mesma do problema (7)-(8). Sua solução ótima será obtida da seguinte maneira: $x_j = 1$ se o coeficiente de x_j na função objetivo (7), for positivo, e $x_j = 0$, caso seu coeficiente na função objetivo seja negativo. Quando o coeficiente de x_j for nulo, a variável x_j poderá assumir um dos valores 0 ou 1.

O Capítulo IV consiste de um estudo relativo à problemas de Programação Linear, nos quais as variáveis são limitadas, superior e inferiormente. Podemos representar este problema da seguinte maneira:

$$\underline{\min}\ z = cx \tag{15}$$

$$Ax = b \tag{16}$$

$$\ell \leq x \leq u \quad , \tag{17}$$

onde c^T, x, ℓ, $u \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $u > \ell$ e A é uma matriz com m linhas e n colunas.

Apresentaremos solução para o problema (15)-(17), utilizando dois métodos, o primeiro, o Método do Simplex, com algumas adaptações para este tipo de problema. É importante frizarmos, que neste método as (n-m) variáveis não-básicas, assumirão sempre, um dos seus limites, inferior ou superior, e só então, poderemos calcular o vetor básico x_i, $\forall i \in I_B$, de modo que, $\bar{x}_i$ esteja dentro de seus limites, isto é:

$$\ell_i \leq \bar{x}_i \leq u_i , \qquad \forall i \in I_B \quad . \tag{18}$$

O segundo método de solução para o problema (15)-(17), é o Método de Decomposição de Dantzig e Wolfe. Neste caso, o problema auxiliar será também, identico ao problema (7)-(8), onde:

$$X = \{x / x \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ \ell \leq x \leq u \ , \ u > \ell\} \quad .$$

A solução ótima deste problema auxiliar, será obtida da seguinte maneira: se $q_j \geq 0$ a variável x_j assumirá o valor do seu limite superior, isto é, $x_j = u_j$. Entretanto, se $q_j < 0$ a variável assimirá o valor do seu limite inferior, isto é, $x_j = \ell_j$.

Apresentaremos também neste capítulo, uma comparação entre os dois métodos: o Método Clássico e o Método de Decomposição.

No Capítulo V, apresentaremos solução para o problema denominado "GUB" (Generalized Upper Bounding), tendo o seguinte aspecto:

$$\underline{\min}\ x_0 \tag{19}$$

s.a. $$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j = b \tag{20}$$

$$\sum_{j \varepsilon J_p} x_j = 1 \quad , \quad p = 1,\ldots,P \tag{21}$$

$$x_j \geq 0 \ , \quad \forall j \quad , \tag{22}$$

onde

$J = \{1,\ldots,n\}$,

$J_r \cup J_s = J$,

$J_r \cap J_s = \emptyset$; $r,s \varepsilon J$; $r \neq s$.

Apresentaremos um procedimento que nada mais é que uma especialização do Método do Simplex. Este procedimento resolve os problemas com estruturas semelhantes a (19)-(22), mantendo uma "base de trabalho" de dimensão reduzida $m \times n$. Esta "base de trabalho" é de vital importância, pois,dela são derivados todos os elementos necessários para a realização de uma iteração do método do simplex, como por exemplo, os valores das variáveis básicas, os multiplicadores do simplex, etc.

Além disso, apresentaremos também, uma solução pelo Método de Decomposição, cujo problema auxiliar será:

$$\underline{\max}\ \ qx \tag{23}$$

s.a. $$\sum_{j \varepsilon J_p} x_j = 1 \quad , \quad p = 1,\ldots,P \tag{24}$$

$$x_j \geq 0 \ , \ \forall j \ \varepsilon \ J = \{1,\ldots,n\} \ , \tag{25}$$

onde $q = (q_1,\ldots,q_n)$ é um vetor linha dado, e

$$J_r \cup J_s = J,$$

$$J_r \cap J_s = \emptyset \ ; \ r,s\varepsilon J \ ; \ r \neq s.$$

A solução ótima deste problema auxiliar, será obtida, considerando para cada subconjunto J_p , o seguinte índice j_o:

$$c_{j_o} = \max_{j\varepsilon J_p} \{c_p\} \ , \quad p = 1,\ldots,P \ , \tag{26}$$

assim, atribuiremos o valor um para a variável x_{j_o} $(x_{j_o}=1)$, e zero para as demais.

No Capítulo VI, descreveremos uma aplicação da Programação Linear no planejamento para N anos de plantios de diferentes culturas, sendo que, as áreas em que estas culturas serão plantadas, estão inicialmente ocupadas por outras culturas com diferentes idades. Portanto, será necessário, erradicar estas culturas, para finalmente, podermos plantar as culturas substitutas.

O objetivo da programação do cultivo, é determinar as quantidades que se devem plantar e desativar, de cada cultura, em cada ano, durante N anos, de tal maneira que o valor atual da receita líquida total, ao longo do horizonte de planejamento, seja máximo.

É importante salientarmos, que para a implementação deste modelo de Programação Linear, devemos fazer as seguintes considerações:

(i) o início e o final de cada ano, serão respectivamente, as épocas de plantio e cômputo da receita líquida total;

(ii) as culturas em estudo, são consideradas perenes;

(iii) e finalmente, para a mão-de-obra, são fixadas variações mensais

Além disso, são respeitadas as restrições relativas aos recursos produtivos, que basicamente são três: mão-de-obra, crédito e área disponível, cujos totais anuais serão especificados para cada ano do horizonte de planejamento.

Finalmente, para que a compreensão e a assimilação dos métodos possam ser feitas, apresentaremos exemplos completos em cada capítulo.

CAPÍTULO I

TÓPICOS EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

I.1. Introdução

Quando usamos a teoria linear de otimização, para resolvermos certos problemas práticos nas áreas econômica ou industrial, aparece na formulação de tais problemas, sistemas com muitas restrições e variáveis, além desses problemas, apresentarem estruturas especiais.

Para esses casos, o algoritmo convencional do simplex pode falhar em apresentar um método efetivo. Já o algoritmo desenvolvido por Dantzig e Wolfe, permite que o problema original se decomponha em diferentes sub-problemas menores, sendo possível resolvê-los pelos métodos conhecidos, de tal forma, que a solução do problema original seja obtida através das soluções desses sub-problemas.

Como o Método de Decomposição, será um dos métodos apresentados para resolver os problemas com estruturas especiais, estudados neste trabalho, achamos necessário fazer um resumo deste método, assim como também, do Método Revisado do Simplex, pois, será fundamental para o nosso estudo.

I.2. Algoritmo Primal do Simplex (Forma Revisada)

Vejamos primeiramente, as principais noções e definições do Método Revisado do Simplex.

Um problema de programação linear pode ser definido como sendo:

$$\underline{\text{máx}}\ z = cx \qquad (I.2.1)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b \qquad (I.2.2)$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad (I.2.3)$$

onde c^T, $x \varepsilon \mathbb{R}^n$; $b \varepsilon \mathbb{R}^m$; e A uma matriz com m linhas e n colunas de posto m, isto é, $\rho(A) = m$.

Desejamos encontrar um vetor $x \varepsilon \mathbb{R}^n$, que maximize a função objetivo z, mas que, além disso, satisfaça (I.2.2) e (I.2.3), sendo considerados dados do problema os vetores c, b e a matriz dos coeficientes A.

Seja B, a matriz formada por m colunas linearmente independentes de A, e N as demais colunas restantes de A, isto é:

$$A = [B,\ N] \quad . \qquad (I.2.4)$$

Sejam x_B e c_B partições de x e c associadas a B, e x_N e c_N associadas a N. Desta forma, podemos reescrever (I.2.2):

$$[B,\ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \qquad ,$$

portanto:

$$Bx_B + Nx_N = b \qquad ,$$

logo:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad , \qquad (I.2.5)$$

onde x_B é o vetor das variáveis básicas, e x_N, das não-básicas.

Assim, dados valores a x_N em (I.2.5), obtemos os respectivos valores de x_B. Se fizermos $x_N = \bar{x}_N = 0$, obtemos $x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b$, desta forma, diremos que $\bar{x}_B$ é uma <u>solução básica</u> de (I.2.2). Se ainda tivermos, $\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, diremos que $\bar{x}_B$ é uma <u>solução básica viável</u> ou <u>primal viável</u>.

<u>Teorema I.2.1</u>:

"Caso o problema de Programação Linear (I.2.1), (I.2.2) e (I.2.3) admita uma solução ótima, então, ao menos uma solução ótima será básica".

Ver demonstração em |4|, |8|, |7|, |1| e |5|.

A idéia do Método do Simplex, é justamente partir de uma solução básica viável, passar para outra solução básica viável, de modo que não piore o valor de z obtido no passo anterior. Como o número de soluções básicas de (I.2.2) é finito, pois este número é limitado superiormente por $\binom{n}{m}$, e pelo teorema I.2.1, podemos pôr em prática a idéia do Método do Simplex. O método convergirá, caso não cicle, isto é, caso não repita as soluções básicas já testadas. Existem modificações introduzidas neste método, que evitam ciclagem, ver |4| e |8|.

Podemos verificar facilmente, que o conjunto:

$$X = \{x / x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\} \quad ,$$

caso não seja vazio, é fechado e convexo, ver |8| e |7|.

Para passarmos de uma solução básica para outra, faremos uma troca (permutação) de duas variáveis, isto é, uma componente x_k do vetor x_B ocupará o lugar de x_e em x_N, e x_e ocupará o lugar de x_k em x_B. Esta operação é denominada "pivoteamento".

Sejam os conjuntos:

$$I = \{1,2,\ldots,n\} \ ,$$

$$I_B = \{i / x_i \text{ seja uma solução básica}\} \ ,$$

$$I_N = \{j / x_j \text{ seja uma solução não-básica}\} \quad .$$

Sabemos então que:

$$I_B \cap I_N = \emptyset$$

e

$$I_B \cup I_N = I \quad .$$

Para explicarmos o algoritmo primal do simplex, sob forma revisada, consideraremos novamente (I.2.5):

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad ,$$

supondo que para $x_N = \bar{x}_N = 0$, $x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, isto é, $\bar{x}_B$ é uma <u>solução básica primal viável</u>.

Sabemos também que:

$$z = cx$$

$$z = (c_B \;\; c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

ou

$$z = c_B\, x_B + c_N\, x_N \qquad (I.2.6)$$

Levando (I.2.5) em (I.2.6), temos:

$$z = c_B(B^{-1}b - B^{1}Nx_N) + c_N x_N$$

$$z = c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}Nx_N + c_N x_N$$

$$z = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N \quad . \qquad (I.2.7)$$

Sejam:

(i) $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j \in I$, as colunas da matriz A

(ii) $c_B B^{-1} = u$, os multiplicadores do simplex

(iii) $z_j = c_B B^{-1} a_j = ua_j$

(iv) $\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub$.

Assim sendo, (I.2.7) poderá ser colocada sob a seguinte forma:

$$z = \overline{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)x_j \quad .$$

No caso de maximização de z , se tivermos $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$, então $\overline{x}_B$ será uma solução ótima do problema de Programação Linear (I.2.1), (I.2.2) e (I.2.3) , pois, x_j para $j \in I_N$, ao entrar na base tomaria um valor $\overline{x}_j \geq 0$, que multiplicado por $z_j - c_j \geq 0$, daria $(z_j-c_j)\overline{x}_j \geq 0$, logo teríamos $z = \overline{z} - (z_j - c_j)\overline{x}_j$,e portanto, $z \leq \overline{z}$. Sabe mos então, que z não poderá crescer em uma vizinhança de $\left[\bar{x}_B,\bar{x}_N\right]^T$, assim sendo, $\left[\bar{x}_B,\bar{x}_N\right]^T$ que dá a z o valor $\bar{z}$, é um ótimo local do problema de Programação Linear, no entanto, como a função que queremos maximizar é linear, isto é, é côncava-convexa, logo um ótimo local, é também, um ótimo global.

Diremos mais uma vez, que a idéia do algoritmo do simplex é a de partir de uma solução básica viável inicial, passar por operações de pivoteamento, a outra solução básica viável, para a qual o valor da função objetivo z a ela associado, seja maior ou igual ao valor associado à base anterior, até que o critério de otimalidade seja verificado, isto é, até que:

$$z_j - c_j \geq 0 \ , \ \forall j \in I_N \text{ (maximização de } z\text{)}.$$

Quando houver ao menos um $z_j - c_j < 0$, as variáveis não-básicas associadas a esses $z_j - c_j$, são candidatas a entrarem na base. Devemos então, selecionar uma que entrará na base por operação de pivoteamento.

Devemos lembrar que quando (I.2.2) e (I.2.3) não forem limitados, poderemos ter, às vezes, z não limitado superiormente, neste caso diremos que a solução do problema de Programação Linear é ilimitada. Quando (I.2.2) e (I.2.3) formarem um conjunto vazio, diremos que o problema de Programação Linear é vazio ou não tem solução.

Tentaremos de uma maneira mais formal, desenvolver as idéias aqui descritas, para isso colocaremos (I.2.1),(I.2.2) e (I.2.3) sob outra forma:

$$\underline{\text{máx}}\ z$$

s.a. $$z - c_B x_B - c_N x_N = 0 \qquad \text{(I.2.8)}$$

$$B x_B + N x_N = b \qquad \text{(I.2.9)}$$

$$x_B \geq 0 \ ; \ x_N \geq 0 \quad , \qquad \text{(I.2.10)}$$

onde B é uma matriz $m x m$, tal que $\det(B) \neq 0$.

O sistema (I.2.8) e (I.2.9), poderá ser resolvido se expressarmos z e x_B , em função de x_N . Esse sistema sob a forma matricial ficará:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_B & -c_N \\ 0 & B & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad . \qquad \text{(I.2.11)}$$

Como B admite inversa, a matriz $\hat{B}$ dada por:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad ,$$

também admitirá, e cuja inversa será:

$$\hat{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \quad ,$$

conseguida por processo imediato de particionamento em evidência na estrutura de $\hat{B}$, ver |13|.

Pré-multiplicando (I.2.11) por $\hat{B}^{-1}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c_B & -c_N \\ 0 & B & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_B B^{-1} N - c_N \\ 0 & I & B^{-1} N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{pmatrix} ,$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N \\ B^{-1} b - B^{-1} N x_N \end{bmatrix} ,$$

que ainda poderá ser explícito:

$$z = c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N = \bar{x}_B - B^{-1} N x_N \quad .$$

Denominemos $B^{-1}N = Y = (y_j) = (y_{ij})$, onde $y_j = B^{-1} a_j \in \mathbb{R}^m$ e $y_{ij} \in \mathbb{R}$, onde y_{ij} são os elementos de Y. Podemos ainda, representar por $\bar{x}_i$ as componentes de $\bar{x}_B = B^{-1} b$, assim sendo, teremos:

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j \quad , \qquad (I.2.12)$$

e

$$x_i = \bar{x}_i - \sum_{j \in I_N} y_{ij} \, x_j \quad , \quad \forall i \in I_B \quad . \qquad (I.2.13)$$

Lembremos que para $x_j = 0$, $\forall j \in I_N$, teremos

$\bar{x}_i \geq 0$, $\forall i \in I_B$, pois $\bar{x}_B$ é uma solução básica viável.

Suponhamos agora, que exista um $(z_k - c_k) < 0$, para $k \in I_N$, então levaremos x_k para base, que deverá entrar no lugar de uma variável básica, de modo que a nova solução básica continue viável. Lembremos ainda, que as variáveis não-básicas x_j para $j \in I_N \backslash \{k\}$ continuarão com valores iguais a zero.

Os valores de x_i deverão continuar não-negativos, assim, de (I.2.13) podemos escrever:

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik} x_k \geq 0 \ , \text{ para } \forall i \in I_B ,$$

portanto:

$$\bar{x}_i \geq y_{ik} x_k \qquad , \qquad \forall i \in I_B \quad . \tag{I.2.14}$$

Podemos considerar (I.2.14) de três maneiras:

(i) $y_{ik} = 0$, $\bar{x}_i$ independerá de x_k ,

(ii) $y_{ik} < 0$, $x_k \geq \dfrac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \leq 0$, portanto, x_k não será limitada superiormente,

(iii) $y_{ik} > 0$, $x_k \leq \dfrac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \geq 0$, portanto, $0 \leq x_k \leq \dfrac{\bar{x}_i}{y_{ik}}$.

Das observações acima podemos tirar as seguintes conclusões:

a) se todos os y_{ik} , para $i \in I_B$, forem menores ou iguais a zero, x_k poderá tender para $+\infty$, levando z para $+\infty$ (solução ilimitada).

b) suponhamos que $L_k = \{i/y_{ik} > 0 , i \in I_B\}$, então o índice e associado a

$$\frac{\bar{x}_e}{y_{ik}} = \min_{i \in L_k} \{\frac{\bar{x}_i}{y_{ik}}\} \quad ,$$

dirá que x_e é a variável que deixará a base para que x_k tome seu lugar. Nesse caso a coluna a_e entrará no lugar de a_k, na matriz B . Calcularemos a nova inversa (pivoteamento) e recomeçaremos o processo no qual:

$$(I_B \setminus \{e\}) \cup \{k\} \to I'_B$$

$$(I_N \setminus \{k\}) \cup \{e\} \to I'_N \ .$$

O quadro do simplex será do seguinte tipo:

			$\lambda^k \downarrow$
1	$c_B B^{-1} = u$	$\bar{z}$	$z_k - c_k$
0	B^{-1}	$B^{-1}b$	$B^{-1}a_k$

onde:

$$z_j - c_j = u\, a_j - c_j \quad , \quad \forall j \in I_N ,$$

e

$$z_k - c_k = \min_{j \in I_N} \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\} \quad ,$$

sendo λ^k o vetor gerado associado à variável λ_k que entrará na base,e definido da seguinte maneira:

$$\lambda^k = (z_k - c_k \, , \, B^{-1} a_k)^T \quad .$$

O Método Revisado do Simplex converge, no entanto, algumas modificações devem ser feitas, ver |4|,|8| e |7|.

I.3. Dualidade em Programação Linear

Seja o problema de programação linear (primal):

$$\left.\begin{aligned} & \underline{\text{máx}}\ z = cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \ . \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Primal}} \qquad (I.3.1)$$

Defineremos como sendo o problema dual de (I.3.1), o seguinte problema de programação linear:

$$\left.\begin{aligned} & \underline{\min}\ w = ub \\ \text{s.a.} \quad & uA \geq c \ . \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Dual}} \qquad (I.3.2)$$

Podemos verificar facilmente que o dual do problema

$$\begin{aligned} & \underline{\text{máx}}\ z = cx \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \ , \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{será} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & \underline{\min}\ w = ub \\ \text{s.a.} \quad & uA \geq c \\ & u \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Lema I.3.1:

"O dual do dual é o primal".

Ver demonstração em |4|,|1| e |8|.

Vejamos agora, algumas propriedades que ligam os problemas duais (I.3.1) e (I.3.2).

Propriedade I.3.1:

"Se $\bar{x}$ for uma solução viável de (I.3.1), isto é, $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$, e se $\bar{u}$ for viável de (I.3.2), isto é, $\bar{u}A \geq c$, então, $c\bar{x} \leq \bar{u}b$."

Propriedade I.3.2:

"Se $\bar{x}$ for solução viável de (I.3.1) e $\bar{u}$ de (I.3.2), tal que $c\bar{x} = \bar{u}b$, então, $\bar{x}$ é uma solução ótima de (I.3.1) e $\bar{u}$ é uma solução ótima de (I.3.2)."

Propriedade I.3.3:

"Se $\bar{x} = [\bar{x}_B, \bar{x}_N]^T$ onde $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0$, for uma solução (viável) ótima de (I.3.1), então $\bar{u} = c_B B^{-1}$ é uma solução (viável) ótima de (I.3.2)".

Ver as demonstrações das propriedades (I.3.1), (I.3.2) e (I.3.3) em |10|.

É interessante verificarmos que quando resolvemos (I.3.1) pelo método do simplex sob a forma revisada, podemos tirar do quadro ótimo a solução ótima do dual (I.3.2).

Podemos agora, enunciar o teorema da dualidade (existência).

Teorema I.3.1:

"Dados dois problemas duais (I.3.1) e (I.3.2), apenas uma das afirmações abaixo é verdadeira:

(i) (I.3.1) e (I.3.2) são vazios ,

(ii) (I.3.1) é ilimitado e (I.3.2) é vazio,

(iii) (I.3.1) e (I.3.2) têm soluções ótimas e os valores das funções objetivo no ótimo de ambos, são iguais."

Ver demonstração em |[10]|.

Observação: dados dois problemas duais (I.3.1) e (I.3.2) podemos afirmar:

a) se (I.3.1) tiver solução ótima finita, (I.3.2) também o terá ($z^* = w^*$),

b) se (I.3.1) for ilimitado, (I.3.2) será vazio,

c) caso (I.3.1) for vazio, (I.3.2) poderá ser ou vazio ou ilimitado.

Vejamos agora, o teorema das folgas complementares (fraco).

Teorema I.3.2:

"Sejam $\overline{x}$ solução ótima de (I.3.1) e $\overline{u}$ solução ótima de (I.3.2), então:

$$(\overline{u}A - c)\overline{x} = 0."$$

Ver demonstração em |[10]|.

Podemos escrever $(\bar{u}A - c)\bar{x} = 0$ da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{n} (\bar{u}_1 a_{1j} + \bar{u}_2 a_{2j} + \ldots + \bar{u}_m a_{mj} - c_j)\bar{x}_j = 0 \quad ,$$

logo,

$$(\bar{u}_1 a_{1j} + \bar{u}_2 a_{2j} + \ldots\ldots + \bar{u}_m a_{mj} - c_j)\bar{x}_j = 0 \quad , \quad j=1,2,\ldots,n \ .$$

I.4. Algoritmo Dual do Simplex (forma revisada)

Tomemos novamente:

$$\left.\begin{array}{ll} & \underline{\text{máx}}\ z = cx \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \ , \end{array}\right\} \qquad (I.4.1)$$

cujo dual será:

$$\left.\begin{array}{ll} & \underline{\min}\ \ w = ub \\ \text{s.a.} & uA \geq c \ . \end{array}\right\} \qquad (I.4.2)$$

Seja:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad ,$$

quando $x_N = \bar{x}_N = 0$, então, $x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_B$ é uma <u>solução básica</u> de $Ax = b$, se $\bar{x}_B \geq 0$ diremos que é uma <u>solução básica primal-viável</u>.

Consideremos $\bar{u} = c_B B^{-1}$, se $\bar{u}$ satisfizer a $\bar{u}A \geq c$, ou $c_B B^{-1} a_j - c_j \geq 0$, $j=1,\ldots,n$, ou ainda,

$z_j - c_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, diremos neste caso, que $\overline{x}_B$ é uma solução básica dual-viável .

Se $\overline{x}_B$ for primal e dual-viável, será também uma solução ótima do problema (I.4.1).

O algoritmo dual do simplex parte de uma solução básica dual-viável de $Ax = b$ e passa a outra solução básica dual-viável, parando quando a solução dual-viável obtida for também primal-viável.

Seja o quadro do simplex sob forma revisada:

1	$c_B B^{-1}$	$\overline{z}$	$z_j - c_j$
0	B^{-1}	$B^{-1}b$	$B^{-1}a_j$

Consideremos $\overline{x}_B = B^{-1}b$, tal que $c_B B^{-1} a_j - c_j \geq 0$, $j \in I_N$, isto é, $\overline{x}_B$ é dual-viável. Suponhamos que ao menos uma componente de $\overline{x}_B = B^{-1}b$ seja negativa, por exemplo $\overline{x}_e$. Nesse caso, x_e será uma candidata a deixar a base.

Tomemos a linha associada à variável x_e na matriz $B^{-1}N$ e a linha associada à função objetivo na forma do quadro:

z	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	....	$z_n - c_n$	$\overline{z}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_e	y_{e1}	y_{e2}		y_{en}	$\overline{x}_e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

Para que $\overline{x}_e < 0$ possa ser modificada, após pivoteamento em um elemento y_{ej}, de tal maneira que o valor que aparecerá em seu lugar (lugar de $\overline{x}_e$) seja positivo, temos que ter pelo menos um y_{ej}, $j=1,2,\ldots,n$, negativo. Caso não exista nenhum y_{ej} negativo nessa linha, o problema de programação linear em questão será vazio.

Seja $K_e = \{j/y_{ej} < 0,\ j=1,\ldots,n\}$. Gostaríamos de escolher entre as variáveis não-básicas, tais que seus índices pertençam ao conjunto K_e, aquela que entrará na base, mantendo, após o pivoteamento, a viabilidade dual da solução básica.

Seja $y_{ek} < 0$, o elemento pivô, então:

$$(z_j-c_j)' = (z_j-c_j) - \frac{(z_k-c_k)}{y_{ek}} y_{ej} \quad ,$$

a operação pivoteamento.

Após o pivoteamento, temos que ter:

$$(z_j-c_j) - \frac{(z_k-c_k)}{y_{ek}} y_{ej} \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,\ldots,n \quad .$$

Vejamos os seguintes casos:

(i) para $y_{ej} \geq 0$, a relação acima será sempre verificada, pois, $z_k - c_k \geq 0$ e $y_{ek} < 0$, desta forma:

$$\frac{z_k-c_k}{y_{ek}} < 0 \quad ,$$

portanto:

$$z_j - c_j \geq \frac{z_k - c_k}{y_{ek}} \quad y_{ej} \quad .$$

(ii) para $y_{ej} < 0$, temos:

$$\frac{z_j - c_j}{y_{ej}} \leq \frac{z_k - c_k}{y_{ek}} \quad , \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad ,$$

pois, $z_k - c_k \geq 0$ e $y_{ek} < 0$.

A variável x_k que entrará na base,estará associada ao índice k de:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{ek}} = \max_{j \varepsilon K_e} \{ \frac{z_j - c_j}{y_{ej}} \} \quad ,$$

ou ainda:

$$\left| \frac{z_k - c_k}{y_{ek}} \right| = \min_{j \varepsilon K_e} \{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{ej}} \right| \} \quad .$$

Esta fórmula é válida para o problema de maximização e minimização de z .

I.5: <u>Método de Decomposição</u>

Passemos agora, ao resumo do Método de Decomposição de Dantzig e Wolfe, apresentando seus principais conceitos e definições.

Inicialmente, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\underline{\min}\ cx \\ \text{s.a.}\quad & Ax = b \\ & x \in X \ , \end{aligned}$$

onde A é uma matriz $m \times n$, o vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e os vetores c^T, $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, o conjunto X é um conjunto poliédrico, representando as restrições que possuem estruturas especiais.

Dividiremos nosso estudo em dois casos:

(i) o conjunto X é um conjunto poliédrico limitado.

(ii) o conjunto X é um conjunto poliédrico ilimitado.

Faremos primeiramente, um estudo detalhado do caso (i).

I.6. X → conjunto poliédrico limitado

Para facilidade nossa, vamos reescrever o problema definido anteriormente, isto é:

$$\underline{\min}\ cx \tag{I.6.1}$$

$$\text{s.a.}\quad Ax = b \tag{I.6.2}$$

$$x \in X \ , \tag{I.6.3}$$

onde A matriz $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e c^T, $x \in \mathbb{R}^n$.

Como o conjunto X é um conjunto poliédrico limitado, então, qualquer ponto de X pode ser escrito como uma combinação convexa do número finito de seus pontos extremos, isto é:

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ ,$$

onde:

$x^j \rightarrow$ pontos extremos de X ,

$p \rightarrow$ número de vértices ou pontos extremos do conjunto X ,

$n \rightarrow$ número de variáveis.

Substituindo a expressão de x definida acima em (I.6.1) e (I.6.2), temos:

$$\underline{\min} \sum_{j=1}^{p} (cx^j)\lambda_j$$

s.a.
$$\sum_{j=1}^{p} (Ax^j)\lambda_j = b \qquad \text{(I.6.4)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \qquad \text{(I.6.5)}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ . \qquad \text{(I.6.6)}$$

Podemos representar a matriz A, e a base B do problema (I.6.4) - (I.6.6), da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} Ax^1 & Ax^2 & \dots & Ax^{m+1} & \dots & Ax^p \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} Ax^1 & \dots\dots\dots & Ax^{m+1} \\ 1 & \dots\dots\dots & 1 \end{bmatrix}_{(m+1)x(m+1)}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_B = (cx^1, \dots\dots, cx^{m+1}) \quad ,$$

e

$$\lambda_B = (\lambda_1, \dots\dots, \lambda_{m+1})^T = B^{-1}\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Como o número de pontos extremos de X é geralmente muito grande, não existe nenhum interesse nosso em resolver este problema, enumerando todos os pontos extremos. Assim veremos um método alternativo para encontrar a solução ótima do problema (I.6.4) - (I.6.6).

I.7. Solução do Problema

Vamos estudar o problema aplicando o Método Revisado do Simplex, de forma que teremos uma solução básica viável inicial $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)^T$, a matriz básica B e sua inversa B^{-1}.

Sejam u, u_o, as variáveis duais correspondentes a (I.6.4) e (I.6.5), de modo que tenhamos:

$$(u,u_o) = \hat{c}_B \; B^{-1} \;,$$

onde:

$\hat{c}_B \rightarrow$ é o custo associado às variáveis básicas

e

$\hat{c}_j = cx^j$, para cada variável λ_j .

Além disso, seja

$$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \;,$$

desta forma, temos todos os elementos para construirmos o seguinte quadro:

(u,u_o)	$\hat{c}_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

Quadro (Q.I.7.1)

Do Método Revisado do Simplex, temos:

$$z_k - \hat{c}_k = \max_{1\le j\le p} \{z_j - \hat{c}_j\} \quad .$$

Sabemos que:

$$z_j - \hat{c}_j = \hat{c}_B \; B^{-1} a_j - \hat{c}_j \qquad , \quad j=1,\ldots,p \;,$$

onde, a_j são os vetores coluna da matriz A , isto é:

$$a_j = \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad , \quad j = 1,\dots,p \ ,$$

portanto:

$$z_j - \hat{c}_j = c_B B^{-1} \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} - \hat{c}_j \quad , \qquad j = 1,\dots,p.$$

Como

$$(u,u_o) = \hat{c}_B B^{-1} \qquad ,$$

temos:

$$z_j - \hat{c}_j = (u,u_o) \begin{pmatrix} Ax^j \\ 1 \end{pmatrix} - \hat{c}_j \qquad , \ j = 1,\dots,p \quad ,$$

$$z_j - \hat{c}_j = uAx^j + u_o - cx^j \qquad , \ j = 1,\dots,p \ ,$$

$$z_j - \hat{c}_j = u_o + (uA - c)x^j \qquad , \ j = 1,\dots,p \ .$$

Assim,

$$z_k - \hat{c}_k = \max_{1 \leq j \leq p} \{u_o + (uA-c)x^j\} \quad . \tag{I.7.1}$$

Sabemos que para as variáveis básicas, teremos:

$$z_j - \hat{c}_j = 0 \quad .$$

Se tivermos $z_k - \hat{c}_k = 0$, isto é:

$$z_k - \hat{c}_k = \max_{1 \leq j \leq p} \{z_j - \hat{c}_j\} = 0 \qquad ,$$

então, $z_j - \hat{c}_j \leq 0$ para todas as variáveis não-básicas. Assim sendo, o <u>critério de parada</u> do algoritmo de decomposição será: <u>$z_k - \hat{c}_k = 0$</u> . As <u>condições de otimalidade</u> para o problema de minimização são as seguintes:

$$z_j - \hat{c}_j = 0 \text{ , para as variáveis básicas,}$$

$$z_j - \hat{c}_j \leq 0 \text{ , para as variáveis não-básicas.}$$

Portanto, se existir ao menos um $z_k - \hat{c}_k > 0$, a variável x_k deverá assumir um valor maior, isto é, a variável x_k deverá entrar na base.

Do ponto de vista computacional, é impossível determinarmos o índice k através da equação (I.7.1), pois, o número dos pontos extremos x^j é muito grande. Vejamos portanto, um esquema alternativo.

Como o conjunto X é um conjunto poliédrico limitado, sabemos que o máximo de qualquer objetivo linear será encontrado em um dos seus pontos extremos, assim sendo, obtemos o seguinte problema auxiliar (P.A.):

$$\max_{1 \leq j \leq p} \{(uA-c)x^j + u_o\} = \max_{x \in X}\{(uA-c)x^j + u_o\} \quad .$$

Vamos supor que $\hat{x}$ seja a solução ótima do problema auxiliar e $z_k - \hat{c}_k$ o correspondente valor da função objetivo:

(i) se $z_k - \hat{c}_k = 0$, então a solução básica viável $\lambda^k = (\lambda_B, \lambda_N)^T$ será a solução ótima do problema original.

(ii) caso contrário, isto é, se existir ao menos um $z_k - \hat{c}_k > 0$, então a variável λ_k associada ao vetor coluna λ^k , deverá entrar na base.

A coluna correspondente da matriz A, $[A\hat{x},1]^T$, deve ser atualizada, isto é, devemos pré-multiplicá-la pela inversa B^{-1} , ou seja, devemos obter o seguinte vetor $y_k = B^{-1}[A\hat{x},1]^T$. O vetor coluna gerado $\lambda^k = (z_k - \hat{c}_k \; , \; y_k)^T$, é adicionado ao quadro anterior. A variável λ_{B_r} deixará a base e o índice r é determinado da seguinte maneira:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m+1} \{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \; / \; y_{ik} > 0\} \quad . \qquad (I.7.2)$$

Após o pivoteamento ao redor do elemento pivô y_{rk} , a coluna de λ^k é eliminada. Devemos então, repetir o procedimento, se necessário.

Faremos agora, algumas observações sobre o algoritmo de decomposição, que achamos de real importância:

(i) O algoritmo de decomposição é uma implementação direta do método revisado do simplex. A única diferença se resume no cálculo de $z_k - \hat{c}_k$, que se restringe a um sub-problema. Além disso, o algoritmo converge em um número finito de iterações, da mesma forma que o revisado.

(ii) A cada iteração, o passo principal fornece uma solução básica viável melhor para o sistema definido pelas equações (I.6.4) - (I.6.6). Isto é obtido introduzindo a variável não-básica λ_k , gerada pelo sub-problema. A cada iteração o sub-problema fornece um ponto extremo x^k , verificando se para todos os λ_j temos $z_j - \hat{c}_j \leq 0$, ou determinando o maior dos $z_j - \hat{c}_j$ positivo.

(iii) A cada iteração, o sub-problema não precisa ser completamente otimizado. É somente necessário que o ponto extremo x^j satisfaça a seguinte condição:

$$z_k - \hat{c}_k = (uA - c)x^j + u_o > 0 \quad .$$

Neste caso, a variável λ_k associada ao vetor λ^k , é candidata a entrar na base.

I.8. Limite inferior

O critério de parada do algoritmo de decomposição é quando obtemos:

$$\max \; z_j - \hat{c}_j = 0 \quad .$$

Para grandes problemas práticos, podemos levar muito tempo para satisfazermos esta condição. Uma vez que o algoritmo de decomposição gera pontos viáveis com valores objetivos melhores, podemos então, parar o algoritmo quando a diferença entre o objetivo de um ponto viável e o limite inferior,estiver dentro de uma tolerância aceitável. Isto pode não dar um ponto ótimo verdadeiro, mas garantirá boas soluções viáveis.

Consideremos o seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{máx}} \quad (uA - c)x + u_o$$
$$\text{s.a.} \qquad x \in X \ ,$$

onde u e u_o são os vetores duais.

Seja $z_k - \hat{c}_k$, o objetivo ótimo do problema auxiliar definido acima. Consideremos x como sendo qualquer solução viável do problema (I.6.2) e (I.6.3), isto é:

$$Ax = b$$

e

$$x \in X \quad .$$

Pela definição de $z_k - \hat{c}_k$, temos:

$$z_k - \hat{c}_k = \underset{x \in X}{\text{máx}}\{(uA-c)x + u_o\} \quad ,$$

portanto:

$$z_k - \hat{c}_k \geq (uA-c)x + u_o \quad .$$

Uma vez que $x \in X$ e $Ax = b$, pois, x é qualquer solução viável do problema, temos:

$$z_k - \hat{c}_k \geq uAx - cx + u_o$$

$$- cx \leq (z_k - \hat{c}_k) - uAx - u_o$$

$$cx \geq uAx + u_o - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$cx \geq ub + u_o - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$cx \geq (u,u_o)\binom{b}{1} - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$\boxed{cx \geq \hat{c}_B\,\bar{b} - (z_k - \hat{c}_k)} \quad .$$

Esta desigualdade é válida para qualquer $x \in X$ e $Ax = b$, em particular, temos:

$$\min_{\substack{x\in X\\ Ax=b}} cx \geq c_B\,\bar{b} - (z_k - \hat{c}_k) \quad .$$

Portanto, o limite inferior (L.I.), será dado por:

$$\boxed{L.I. = \hat{c}_B\,\bar{b} - (z_k - \hat{c}_k)} \quad ,$$

onde o valor $\hat{c}_B\,\bar{b}$ é tirado dos quadros e $z_k - \hat{c}_k$, calculado.

I.9. <u>X → conjunto ilimitado</u>

O problema estudado agora, é o mesmo definido por (I.6.1) - (I.6.3), isto é:

$$\underline{\min}\ cx \qquad \text{(I.9.1)}$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b \qquad \text{(I.9.2)}$$

$$x \in X \quad , \qquad \text{(I.9.3)}$$

onde, A é uma matriz (mxn) ; $b \in \mathbb{R}^m$ e c^T , $x \in \mathbb{R}^n$.

Como o conjunto X é agora um conjunto ilimitado, qualquer ponto de X não pode ser escrito como uma combinação convexa dos seus pontos extremos, mas sim, como uma combinação convexa dos seus pontos extremos mais uma combinação não-negativa das suas direções extremas. Assim,

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j + \sum_{j=1}^{r} d^j w_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \; j = 1,\ldots,p \quad ,$$

$$w_j \geq 0 \quad , \; j = 1,\ldots,r \quad ,$$

onde:

$x^j \rightarrow$ pontos extremos de X $(x^1,\ldots,x^p)$,
$d^j \rightarrow$ direções extremas de X $(d^1,\ldots,d^r)$.

Substituindo a expressão de x dada acima em (I.9.1) - (I.9.3), temos:

$$\underline{\min} \quad \sum_{j=1}^{p} (cx^j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{r} (cd^j) w_j$$

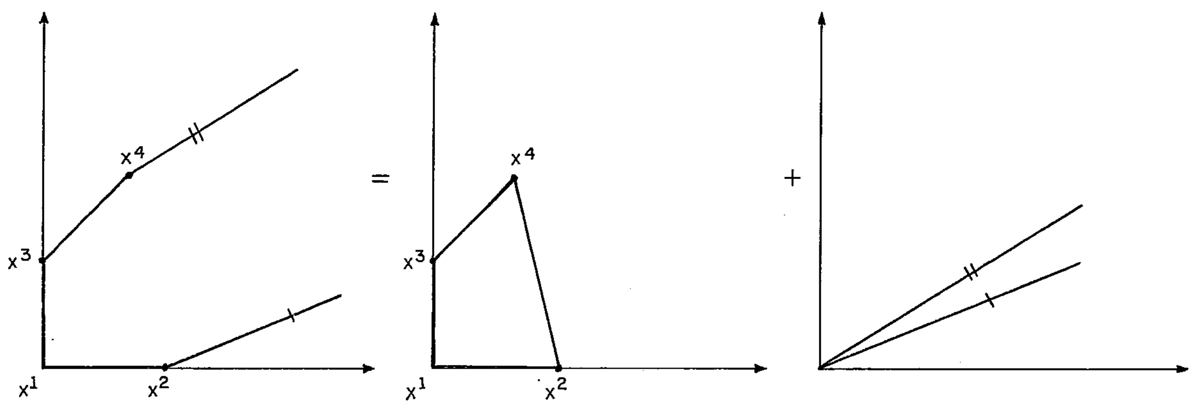
$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{p} (Ax^j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{r} (Ad^j) w_j = b \qquad \text{(I.9.4)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \qquad \text{(I.9.5)}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \; j = 1,\ldots,p \quad , \qquad \text{(I.9.6)}$$

$$w_j \geq 0 \quad , \; j = 1,\ldots,r \quad . \qquad \text{(I.9.7)}$$

Para o conjunto X ilimitado, podemos ter o seguinte representação gráfica:



envoltória convexa dos vértices

cone assintótico de X

Como normalmente os número p e r são muito grandes, resolveremos este problema pelo método revisado do simplex.

Sejam dados uma solução básica viável do problema, B a base e u e u_o as variáveis duais correspondentes a (I.9.4) e (I.9.5), respectivamente. Assim sendo, podemos construir o seguinte quadro:

$(u,u_o) = \hat{c}_B B^{-1}$	$\bar{z} = \hat{c}_B\ \bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b} = B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$

onde:

$\bar{z} = \hat{c}_B\ \bar{b} \rightarrow$ valor da função objetivo ,

$\hat{c}_B \rightarrow$ custos associados às variáveis básicas ,

$$\hat{c}_j = cx^j \text{ , para todo } j \text{ .}$$

A matriz das restrições será:

$$A = \begin{bmatrix} Ax^1 & \cdots\cdots & Ax^p & Ad^1 & \cdots\cdot & Ad^r \\ & & & & & \\ 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 & \cdots\cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que a matriz A apresenta dois tipos de colunas:

$$\begin{bmatrix} Ax^j \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} Ad^j \\ \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Sabemos que a solução ótima será encontrada quando $z_j - \hat{c}_j \leq 0$, para cada variável. Em particular, temos:

a) $\underline{z_j - \hat{c}_j \leq 0}$, <u>para λ_j não-básicas</u>

$$z_j - \hat{c}_j = (u,u_o)\begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} - cx^j \leq 0$$

$$z_j - \hat{c}_j = uAx^j + u_o - cx^j \leq 0 \quad . \tag{I.9.8}$$

b) $\underline{z_j - \hat{c}_j \leq 0}$, <u>para w_j não-básicas</u>

$$z_j - \hat{c}_j = (u,u_o)\begin{bmatrix} Ad^j \\ 0 \end{bmatrix} - cd^j \leq 0$$

$$z_j - \hat{c}_j = uAd^j - cd^j \leq 0 \quad . \tag{I.9.9}$$

Nosso objetivo, é então, encontrar um vértice x^j tal que $uAx^j + u_o - cx^j \leq 0$, ou um raio vetor d^j, tal que $uAd^j - cd^j \leq 0$. Desta forma, as <u>condições de otimalidade</u> para o problema de minimização, serão:

$$uAx^j + u_o - cx^j \leq 0 \text{ , para os } \lambda_j \text{ não-básicos,}$$

e

$$uAd^j - cd^j \leq 0 \qquad \text{, para os } w_j \text{ não-básicos.}$$

Para isto, devemos resolver o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\text{máx}}\ (uA - c)x + u_o \\ \text{s.a.} & x \in X \ . \end{array}$$

Temos dois casos a considerar:

1) <u>A solução ótima do problema auxiliar é ilimitada</u>

Isto é possível se o raio vetor d^k é tal que:

$$(uA-c)d^k > 0 \quad ,$$

ou

$$z_k - \hat{c}_k = (uA-c)d^k > 0.$$

Neste caso, o vetor $[Ad^k, 0]^T$ deve ser atualizado, isto é:

$$y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} Ad^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

e assim geramos o vetor coluna λ^k associado à variável λ_k, e definido da seguinte maneira:

$$\lambda^k = (z_k - \hat{c}_k \ , \ y_k)^T$$

ou

$$\lambda^k = ((uA-c)d^k \ , \ B^{-1}[Ad^k,0]^T)^T \quad ,$$

que será introduzido no último quadro ótimo, isto é:

		$\lambda^k \downarrow$
(u,u_o)	$\bar{z}$	$(uA-c)\,d^k$
B^{-1}	$\bar{b}$	$B^{-1}\begin{bmatrix} Ad^k \\ 0 \end{bmatrix}$

Quando não pudermos realizar o pivoteamento, estaremos diante de $B^{-1}[Ax^k,1]^T \leq 0$, ou $B^{-1}[Ad^k,0]^T \leq 0$, e o problema linear será ilimitado.

2) <u>A solução ótima do problema auxiliar é limitada</u>

Uma condição necessária e suficiente para esta limitação é que:

$$(uA-c)\,d^j \leq 0 \text{ , para todos os raios vetores.}$$

Seja $\hat{x}$ a solução ótima do problema auxiliar e $z_k - \hat{c}_k$ o respectivo valor da função objetivo, tal que:

$$z_k - \hat{c}_k = \text{máx}\{(uA-c)x^j + u_o\} \quad .$$

(i) Se tivermos $z_k - \hat{c}_k \leq 0$, encontramos a solução ótima do problema, pois:

$$(uA-c)d^j \leq 0 \quad ,$$

e

$$(uA-c)x^j + u_o \leq 0.$$

(ii) Se existir ao menos um $z_k - \hat{c}_k > 0$, devemos gerar o vetor coluna λ^k correspondente à variável λ_k que provavelmente entrará na base:

$$\lambda^k = (z_k - \hat{c}_k \; , \; y_k)^T \quad ,$$

onde

$$z_k - \hat{c}_k = (uA - c)\hat{x} + u_o$$

e

$$y_k = B^{-1}[A\hat{x},1]^T \; .$$

O quadro do simplex, será:

		$\lambda^k \downarrow$
(u,u_o)	$\bar{z}$	$(uA-c)\hat{x} + u_o$
B^{-1}	$\bar{b}$	$B^{-1}\begin{bmatrix} A\hat{x} \\ 1 \end{bmatrix}$

Finalmente, se o problema auxiliar for vazio, o problema original também o será. Além disso, se as restrições forem do tipo desigualdades, devemos verificar os $z_j - \hat{c}_j$ relativos às variáveis de folga.

CAPÍTULO II

VARIÁVEIS ORDENADAS

II.1. Introdução

Neste capítulo, apresentaremos soluções para o "Problema Linear de Ordenação" (P.L.O.), que consiste em um problema de programação linear, no qual as variáveis são ordenadas, de modo que qualquer componente do vetor solução obedece a uma ordem pré-determinada.

A restrição que explicita a ordenação dessas variáveis será denominada "restrição de precedência". Assim, para um vetor solução x em $\mathbb{R}^n$, temos dois tipos de restrição de precedência: no primeiro, as variáveis estarão ordenadas de forma crescente e, no segundo, de forma decrescente:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad 0 \leq x_j \leq x_{j+1} & , \; j=1,\ldots,n-1 & \rightarrow \underline{\text{crescente}} \\[2ex] \text{(ii)} \; x_j \geq x_{j+1} \geq 0 & , \; j=1,\ldots,n-1 & \rightarrow \underline{\text{decrescente}} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \underline{\text{restrições}} \\ \underline{\text{de}} \\ \underline{\text{precedência}} \end{array}$$

Dedicaremos nossa atenção às restrições do tipo (i), fazendo um estudo sobre as variáveis ordenadas de forma crescente. Quando houver necessidade, faremos uma comparação entre as diferenças básicas apresentadas pelas duas restrições de precedência.

Podemos assim, representar um problema linear de ordenação da seguinte maneira:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad x_0 \qquad \text{(II.1.1)}$$

$$\text{sujeito à:} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x_j = b \qquad \text{(II.1.2)}$$

$$0 \leq x_j \leq x_{j+1} \leq d \quad , \; j = 1,\ldots,n-1 \quad , \qquad \text{(II.1.3)}$$

onde os $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 0,\ldots,n$, são vetores coluna e x um vetor coluna n-dimensional, $x \in \mathbb{R}^n$. O vetor b é um vetor coluna m-dimensional, sendo sempre não-negativo e formado pelos elementos b_i , isto é:

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \; ,$$

$$b \geq 0 \quad ,$$

e, finalmente, d , um número real positivo.

Apresentaremos solução para o problema de ordenação (II.1.1) - (II.1.3), através de três métodos: o Simplex; a Dualidade em Programação Inteira e Mudança de Variável. No Método do Simplex, consideraremos $d = +\infty$, já na Dualidade em Programação Inteira, tomaremos $d = +1$ e, finalmente, através de uma mudança de variável estudaremos os dois casos, isto é, quando $d = +\infty$ e $0 < d < +\infty$.

II.2. Definição do problema

Iniciaremos nosso estudo apresentando o Método do Simplex como solução para o problema de ordenação, considerando neste caso $d = +\infty$. Assim, a restrição de precedência terá o seguinte aspecto:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \quad . \tag{II.2.1}$$

Desta forma, diremos que o problema linear de ordenação estará sujeito à dois tipos de restrição, uma igualdade e outra de precedência, isto é:

$\underline{\text{maximizar}}$ x_o (II.2.2)

sujeito à:

$$a_o x_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \tag{II.2.3}$$

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \ , \tag{II.2.4}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 0,1,\dots,n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $b \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Para facilitar nosso estudo, devemos realizar algumas modificações na restrição (II.2.4), de forma a obter:

$$\begin{aligned}
-x_1 &\leq 0 \\
x_1 &\leq x_2 \\
x_2 &\leq x_3 \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_{n-1} &\leq x_n \quad .
\end{aligned}$$

Podemos ainda, escrevê-las de maneira mais conveniente:

$$
\begin{array}{lr}
-x_1 & \leq 0 \\
x_1 - x_2 & \leq 0 \\
x_2 - x_3 & \leq 0 \\
\quad \ddots & \vdots \\
\qquad x_{n-2} - x_{n-1} & \leq 0 \\
\qquad\quad x_{n-1} - x_n & \leq 0
\end{array}
\qquad (II.2.5)
$$

Introduzindo as variáveis de folga $s_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, no sistema de desigualdades (II.2.5), obteremos o seguinte sistema de equações:

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
-x_1 & & + s_1 & & & & = 0 \\
x_1 - x_2 & & & + s_2 & & & = 0 \\
x_2 - x_3 & & & & + s_3 & & = 0 \\
\quad \ddots & & & & & \ddots & \vdots \\
\qquad x_{n-1} - x_n & & & & & + s_n & = 0 \, .
\end{array}
\right.
\qquad (II.2.6)
$$

O problema inicial (II.2.1) - (II.2.3), pode agora ser reescrito, utilizando-se o sistema de equações (II.2.6), como segue:

maximizar x_o

sujeito à:

$$
\begin{array}{llllll}
a_o x_o + a_1 x_1 + \cdots\cdots + a_n x_n & & & & & = b \\
-x_1 & + s_1 & & & & = 0 \\
x_1 - x_2 & & + s_2 & & & = 0 \\
\ddots & & & \ddots & & \vdots \\
x_{n-1} - x_n & & & & + s_n & = 0
\end{array} \qquad \text{(II.2.7)}
$$

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \geq 0 ,$$

onde $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 0,1,\ldots,n$; $b \in \mathbb{R}^m$ e $s \in \mathbb{R}^n$.

O problema (II.2.7) pode ser representado de maneira mais conveniente, usando-se notação matricial:

maximizar x_o:

sujeito à:

$$
\begin{bmatrix}
a_o & a_1 & \cdots & a_{n-p+1} & a_{n-p+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_o \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.2.8)}
$$

$$s = (s_1, \ldots, s_n)^T \geq 0.$$

A seguir, definiremos os seguintes vetores coluna:

$$\bar{x} = (x_o, x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_n)^T \quad ,$$

$$\bar{b} = (b^T, 0, \ldots, 0)^T \quad ,$$

e a matriz P com (m+n) linhas e (2n+1) colunas, definida por:

$$P = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots\ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & -1 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{(m+n)x(2n+1)}$$

A matriz P , pode ainda, ser representada pelos vetores colunas p_j , $j = 0,\ldots,2n$, isto é:

$$P = \left[p_1, \ldots, p_n, p_{s_1}, \ldots, p_{s_n}, p_o\right]$$

Observamos que a matriz P é formada por três tipos de vetores coluna: p_j , $j = 1,\ldots,n$; p_{s_j} , $j = 1,\ldots,n$; e p_o . Esses vetores são definidos da seguinte maneira:

1) os n primeiros vetores coluna p_j , $j = 1,\ldots,n$, são constituídos de duas partes: a primeira é composta do vetor coluna m-dimensional $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$, e a segunda,

constituída de n elementos nulos com excessão de dois, -1 e 1, que são respectivamente, os $(m+j)$ e $(m+j+1)$-ésimos elementos de p_j:

$$p_j = (a_j^T, 0, \ldots, \underbrace{-1}_{(m+j)\text{-ésimo elemento}}, \underbrace{1}_{(m+j+1)\text{-ésimo elemento}}, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+n} \quad , \; j=1,\ldots,n \, ,$$

$$a_j \in \mathbb{R}^m \; , \; j = 1,\ldots,n \; .$$

2) os n vetores coluna consecutivos p_{s_j}, $j = 1,\ldots,n$, são também constituídos de duas partes: a primeira, é composta de m elementos nulos e a segunda, do vetor unitário n-dimensional e_j:

$$p_{s_j} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\substack{\text{m elemen-}\\ \text{tos nulos}}}, e_j)^T \in \mathbb{R}^{m+n} \quad , \quad j = 1,\ldots,n \; ,$$

onde

$$e_j = (0, \ldots, \underbrace{1}_{j\text{-ésimo elemento}} \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n \; , \quad j = 1,\ldots,n \; .$$

3) e, finalmente, um último vetor coluna p_o, composto pelo vetor coluna unitário m-dimensional a_o, e por n elementos nulos:

$$p_o = (a_o^T, \underbrace{0 \; \ldots\ldots \; 0}_{\text{n elementos nulos}})^T$$

$$a_o = e_1 \in \mathbb{R}^m \; .$$

Além disso, podemos representar a matriz P de uma maneira, que futuramente será muito útil para o nosso estudo:

$$P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c:c} A & 0 & a_0 \\ \hdashline S & I & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \} \text{ m linhas} \\ \} \text{ n linhas} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\quad}_{\text{n colunas}} & \underbrace{\quad}_{\text{n colunas}} & \underbrace{\quad}_{\text{1 coluna}} \end{array} \end{array} ,$$

onde A é uma matriz mxn ; S uma matriz quadrada nxn ; I matriz identidade nxn , e a_0 um vetor coluna do $\mathbb{R}^m$. Além disso, a matriz S terá sempre o seguinte aspecto:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}_{nxn} , \quad \rho(S) = n$$

Desta forma, o problema (II.2.8) ficará:

$\underline{\text{maximizar}}$ x_0

sujeito à:

$$\left(\begin{array}{l} P\bar{x} = \bar{b} \\ s \geq 0 \end{array}\right) . \qquad \text{(II.2.9)}$$

Partiremos da hipótese, de que a característica da matriz dos coeficientes P , será igual a característica da matriz aumentada, e igual ao número de restrições de (II.2.7), de forma que teremos:

$$\rho(P) = \rho(P,\bar{b}) = m + n \quad .$$

Na realidade, o que fizemos foi partir da hipótese de que a característica da matriz A é m, isto é, $\rho(A) = m$, uma vez que $\rho(S) = n$ e $\rho(I) = n$, portanto, $\rho(P) = m+n$.

Após reagruparmos as colunas $\left[p_1,\ldots,p_n,p_{s_1},\ldots,p_{s_n},p_o\right]$ de P, podemos particioná-la:

$$P = [B,N] \ , \tag{II.2.10}$$

onde B é uma matriz inversível de ordem $(m+n)$ e, N uma matriz com $(m+n)$ linhas e $(n-m+1)$ colunas.

Sejam os seguintes conjuntos:

$I_B \rightarrow$ conjunto dos índices das colunas de B ,

$I_N \rightarrow$ conjunto dos índices das colunas de N ,

sendo que:

$$I_B \cup I_N = \{0,\ldots,2n\}$$

$$I_B \cap I_N = \emptyset$$

Para um ponto qualquer $x = (x_B,x_N)^T$, podemos definir:

Definição II.2.1:

"O vetor $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)^T$ será uma solução básica viável para o problema (II.2.9) se:

$$Bx_B = B\bar{x}_B = b$$

e

$$x_N = \bar{x}_N = 0. \text{"}$$

A matriz B é denominada matriz básica e N , matriz não-básica. As componentes de $\bar{x}_B$ são as variáveis básicas, e as de $\bar{x}_N$, as variáveis não-básicas.

Para determinarmos uma solução ótima para o problema (II.2.9), utilizaremos o método do simplex, que consiste em um procedimento sistemático a partir de uma solução básica viável inicial, obtendo-se outras soluções básicas viáveis e alcançando, em um número finito de passos, uma solução ótima, de tal forma, que o valor da função objetivo a cada iteração, seja, no caso de maximização, sempre maior ou igual ao da iteração anterior.

Antes de estudarmos uma maneira de determinar uma solução básica viável inicial para o problema (II.2.9), recordemos que partimos da hipótese de que para o conjunto de restrições $P\bar{x} = \bar{b}$, tínhamos:

$$\rho(P) = \rho(P, \bar{b}) = m + n \quad . \tag{II.2.11}$$

Tendo em vista o que foi exposto, podemos definir as restrições de um problema de ordenação, como um conjunto de (m+n) equações lineares a (2n+1) incógnitas:

$$P\bar{x} = \bar{b} \quad . \tag{II.2.12}$$

A j-ésima coluna da matriz P será denominada p_j , $j = 0, \ldots, 2n$. Podemos formar uma matriz básica B , cujas colunas p_i , $i \in I_B$, serão quaisquer (m+n) colunas linearmente independente de P . A seguinte notação será usada para representar tal combinação.

$$p_j = y_{oj}p_o + y_{1j}p_1 + \ldots + y_{m+n-1}p_{m+n-1} = \sum_{i=0}^{m+n-1} y_{ij}p_i \quad , j \in I_N , \tag{II.2.13}$$

onde

$$y_j = (y_{o\,j}, y_{1\,j}, \ldots, y_{m+n-1,j})^T \quad , \quad j \in I_N \quad ,$$

e

$$B = \left[p_o, p_1, \ldots\ldots, p_{m+n-1}\right] \quad ,$$

portanto:

$$p_j = B\, y_j \quad , \; j \in I_N \quad ,$$

ou

$$y_j = B^{-1}\, p_j \quad , \; j \in I_N \quad . \tag{II.2.14}$$

Assim, conhecendo o vetor y_j , $j \in I_N$, podemos expressar o vetor p_j , $j \in I_N$, como uma combinação linear das (m+n) colunas de B, ou seja o vetor y_j , $j \in I_N$, é o vetor p_j , $j \in I_N$, atualizado para a base B . A i-ésima componente de y_j será y_{ij} .

Como já demonstramos, qualquer matriz básica B, determina uma solução básica para (II.2.12), isto é, para

$P\bar{x} = \bar{b}$. Assim, dada uma solução básica viável inicial, desejamos encontrar uma outra solução básica viável, de modo que tenhamos sempre, um valor da função objetivo pelo menos tão bom quanto o anterior.

Vamos supor agora, que as p, $1 \leq p \leq n$, últimas variáveis da restrição de precedência, estejam na base B, assim, a solução básica associada a B , será definida por um vetor $\bar{x}_B$ com $(m+n)$ componentes, dado por:

$$\bar{x}_B = (x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_{n-p}, s_i, \ldots, s_{i_{m-1}}, x_o)^T \quad .$$

Além disso, fica implicitamente entendido da definição II.2.1, que todas as $(n-m+1)$ variáveis associadas com as colunas de N , são nulas. Desta forma, temos:

$$\bar{x} = (\bar{x}_B, 0)^T \quad ,$$

ou

$$\bar{x}_B = B^{-1} \bar{b} \quad . \tag{II.2.15}$$

Associado a qualquer variável básica $\bar{x}_B$, podemos definir um vetor linha c_B com $(m+n)$ componentes, representando os preços destas variáveis:

$$c_B = (c_{x_{n-p+1}}, c_{x_{n-p+2}}, \ldots, c_{x_n}, c_{s_1}, c_{s_2}, \ldots, c_{x_o}) \quad ,$$

portanto:

$$c_B = (0, 0, \ldots, 0, 1) \quad . \tag{II.2.16}$$

Para qualquer solução básica viável, o valor da função objetivo será dada por:

$$\bar{x}_o = c_B \bar{x}_B \qquad \text{(II.2.17)}$$

$$\bar{x}_o = (0,0,\ldots,1)\begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ x_{n-p+2} \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-p} \\ s_{i_1} \\ \vdots \\ s_{i_{m-1}} \\ x_o \end{pmatrix} = x_o \ ,$$

uma vez que todas as variáveis não-básicas são nulas. Considerando uma equação semelhante a (II.2.13), podemos definir uma nova variável real z_j :

$$z_j = y_{oj}c_o + \ldots + y_{m+n-1}c_{m+n-1} = \sum_{i=0}^{m+n-1} y_{ij}c_i = c_B\, y_j \ , \ j \in I_N \ . \qquad \text{(II.2.18)}$$

Para cada vetor p_j em P , existe uma variável real z_j ; os z_j correspondentes às colunas p_j mudam de valor com as colunas de P , o mesmo acontecendo quando a base B sofre alguma alteração, isto é, quando trocamos uma coluna básica por uma coluna não-básica. De (II.2.18), temos:

$$z_j = c_B \, y_j \qquad , \quad j \; \varepsilon \; I_N \quad ,$$

além disso, de (II.2.14), temos:

$$y_j = B^{-1} \, p_j \qquad , \quad j \; \varepsilon \; I_N \quad ,$$

portanto:

$$z_j = c_B \, B^{-1} \, p_j \qquad , \quad j \; \varepsilon \; I_N \quad . \tag{II.2.19}$$

Assim sendo, teremos:

$$z_j - c_j = c_B \, B^{-1} \, p_j - c_j \quad , \quad j \; \varepsilon \; I_N \quad . \tag{II.2.20}$$

II.3. Solução básica viável inicial

Para obtermos uma solução básica viável inicial para o problema (II.2.7), devemos considerar a base B construída da seguinte forma:

(i) pelos vetores coluna da matriz P , associados às p últimas variáveis da restrição de precedência:

$$\left[p_{n-p+1}, p_{n-p+2}, \ldots, p_{n-1}, p_n \right] \quad ,$$

onde

$$p_j = \left[a_j^T , 0, \ldots, \underbrace{-1}_{\substack{(m+n-p+1)\text{-ésimo} \\ \text{elemento}}} , \underbrace{1}_{\substack{(m+n-p+2)\text{-ésimo} \\ \text{elemento}}}, \ldots, 0 \right]^T \quad , \quad j = n-p+1, \ldots, n$$

$$a_j \; \varepsilon \; \mathbb{R}^m \; , \; j = n-p+1, \ldots, n.$$

(ii) pelo vetor coluna p_o de P , associado à variável x_o :

$$p_o = [a_o^T, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{n elementos nulos}}]^T \quad ,$$

onde:

$$a_o = e_1 \in \mathbb{R}^m \quad .$$

(iii) pelos $[(m+n)-(p+1)]$ vetores coluna de P , associada com as variáveis de folga:

$$p_{s_j} = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{m elementos nulos}}, e_j]^T \; , \; j=1, \ldots, [(m+n)-(p+1)] \quad ,$$

$$e_j = (0, .. \underset{\text{j-ésimo elemento}}{1}, .., 0)^T \in \mathbb{R}^n \; , \; j = 1, \ldots, [(m+n)-(p+1)] \quad .$$

A matriz básica B terá a seguinte representação:

$$
B = \begin{array}{cccc|c}
p \text{ colunas} & (n-p) \text{ colunas} & (m-1) \text{ colunas} & 1 \text{ coluna} & \\
\left[\begin{array}{c:c:c:c}
a_{n-p+1} \; a_{n-p+2} \cdots a_{n-1} \; a_n & \bigcirc & \bigcirc & a_o \\
\hdashline
\bigcirc & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & \bigcirc & \bigcirc \\
\hdashline
\begin{matrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & \\ & & 1 & -1 \end{matrix} & \bigcirc & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & \bigcirc
\end{array}\right] & & & & \begin{matrix} m \text{ linhas} \\ (n-p) \text{ linhas} \\ p \text{ linhas} \end{matrix} \\
x_B & y_1 & y_2 & x_o &
\end{array}
$$

ou ainda,

$$
B = \left[\begin{array}{ccc|c}
A_p & 0 & 0 & a_o \\
0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\
S_p & 0 & K_p & 0
\end{array}\right]_{(m+n)\times(m+n)} , \qquad (II.3.1)
$$

onde:

A_p → matriz com m linhas e p colunas, constituida pelos vetores $a_j \in \mathbb{R}^m$ associados às p últimas variáveis da restrição de precedência:

$$
A_p = \left[a_{n-p+1}, a_{n-p+2}, \ldots, a_n\right] , \qquad (II.3.2)
$$

$I_{n-p} \rightarrow$ matriz identidade de ordem $(n-p)$,

$S_p \rightarrow$ matriz quadrada de ordem p ,

$K_p \rightarrow$ matriz com p linhas e $(m-1)$ colunas .

A matriz K_p é formada por $(m-1)$ vetores unitários, isto é:

$$K_p = \left[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{m-1}}\right]$$

O vetor coluna p_o estará sempre na base, sendo em geral, um vetor unitário $(m+n)$ - dimensional:

$$p_o = e_1 \in \mathbb{R}^{m+n} . \tag{II.3.3}$$

Obtida a base inicial B, e dado o vetor $\bar{b}$, pela equação (II.2.15), podemos obter o vetor solução $\bar{x}_B$, resolvendo o seguinte sistema de equações lineares:

$$B\,\bar{x}_B = \bar{b} . \tag{II.3.4}$$

Da mesma forma que decompomos a matriz quadrada B, em outras matrizes, faremos o mesmo com o vetor básico $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B = (x_B, y_1, y_2, x_o)^T , \tag{II.3.5}$$

sendo que o vetor x_B contem as p últimas variáveis da restrição de precedência:

$$x_B = (x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n)^T \quad ,$$

$$y_1 = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-p})^T \quad ,$$

$$y_2 = (s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{m-1}})^T \quad .$$

Substituindo (II.3.1) e (II.3.5) em (II.3.4), obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_B \\ y_1 \\ y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{(II.3.6)}$$

pois:

$$\bar{b} = (b^T, 0, 0)^T \quad .$$

Resolvendo o sistema matricial (II.3.6), obtemos:

$$\begin{cases} A_p\, x_B + a_o x_o = b & \text{(II.3.7)} \\ I_{n-p}\, y_1 = 0 & \text{(II.3.8)} \\ S_p x_B + K_p\, y_2 = 0 \quad . & \text{(II.3.9)} \end{cases}$$

Os valores de x_B, y_1, y_2 e x_o serão obtidos resolvendo as equações (II.3.7), (II.3.8) e (II.3.9). Assim sendo, da equação (II.3.8) obtemos:

$$I_{n-p}\, y_1 = 0 \qquad ,$$

portanto:

$$\boxed{y_1 = 0} \quad ,$$

ou

$$y_1 = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-p})^T = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-p)\text{ elementos nulos}})^T \ . \qquad \text{(II.3.10)}$$

Da equação (II.3.9), obtemos:

$$S_p x_B + K_p y_2 = 0$$

$$S_p x_B = -K_p y_2$$

$$\boxed{x_B = -S_p^{-1} K_p\, y_2} \ . \qquad \text{(II.3.11)}$$

Substituindo (II.3.11) em (II.3.7), obtemos:

$$A_p x_B + a_o x_o = b$$

$$A_p(-S_p^{-1} K_p\, y_2) + a_o x_o = b$$

$$-A_p S_p^{-1} K_p y_2 + a_o x_o = b$$

$$\left[-A_p S_p^{-1} K_p \;\vdots\; a_o\right] \begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = b \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \left[-A_p S_p^{-1} K_p \,\vdots\, a_o \right]^{-1} b} \quad . \qquad \text{(II.3.12)}$$

Da relação (II.3.12), obtemos os valores de y_2 e x_o. Com o valor obtido de y_2, calculamos x_B, através da relação (II.3.11). Com este procedimento, obtemos uma solução básica viável $\overline{x}_B$, que também poderá ser obtida resolvendo o sistema de equações lineares (II.3.4), ou seja, $B\ \overline{x}_B = \overline{b}$.

Dedicaremos nossa atenção, àquelas soluções básicas viáveis, em que somente uma coluna de B seja mudada em cada iteração, isto é, removeremos um vetor coluna de B e o substituiremos por algum outro vetor de N, de modo que o novo conjunto de vetores de B, formem ainda uma base.

Uma vez calculada a solução $\overline{x}_B$, temos dois casos a considerar:

(i) se $\overline{x}_B$ for uma solução inviável, abandonamos o problema;

(ii) se $\overline{x}_B$ for uma solução viável, devemos verificar se esta solução é otima.

II.4. Observações

Teceremos agora, algumas considerações que julgamos úteis, sobre o que foi demonstrado até o momento.

Observação II.4.1:

É importante salientarmos que se x_p , $p \neq 0$,for uma variável básica, automaticamente, a variável x_{p+1}, $p \neq 0$, também o será. Para maior clareza, podemos supor que x_p seja básica (diferente de zero, $x_p \neq 0$, $p \neq 0$) e igual a um valor $d \neq 0$, logo:

$$x_p = d \quad .$$

Pela restrição de precedência, temos:

$$x_{p+1} \geq x_p = d \quad ,$$

e da definição II.2.1. segue o resultado.

Sempre que uma variável x_p , $p \neq 0$, esteja na base, fica implicitamente entendido, que todas as variáveis de x_{p+1} até x_n , estarão na mesma base.

Observação II.4.2:

A matriz S_p será quadrada, de ordem pxp. Se a restrição de precedência for crescente, a matriz S_p será constituída da seguinte forma:

a) todos os elementos da diagonal principal serão iguais a -1 ,

b) todos os elementos acima da diagonal principal serão nulos,

c) os primeiros elementos abaixo da diagonal principal serão iguais a 1, e os restantes nulos,

$$S_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{p\times p}$$

Se a restrição de precedência for decrescente, a matriz S_p será formada da seguinte maneira:

a) todos os elementos da diagonal principal serão iguais a -1 ,

b) todos os elementos abaixo da diagonal principal serão nulos,

c) os primeiros elementos acima da diagonal principal serão iguais a 1, e os restantes nulos,

$$S_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{p\times p}$$

Em vista disto, o determinante de S_p será sempre igual a ± 1 , ou seja:

$$\det(S_p) = \begin{cases} 1 \text{ , se } p \text{ for par ,} \\ -1 \text{ , se } p \text{ for impar .} \end{cases}$$

Como S_p é quadrada e o seu determinante sempre diferente de zero, concluimos que esta matriz, sempre admitirá inversa.

Observação II.4.3:

Dada a matriz quadrada S_2,

$$S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

calculemos a sua inversa, S_2^{-1}.

Como S_2 é uma matriz quadrada 2x2, e como o $\det(S_2) = 1$, concluímos que S_2 admite inversa, portanto:

$$S_2^{-1} = E_2\, E_1$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1/-1 & 0 \\ -1/-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_2^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Considerando

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

onde L_2 é uma matriz triangular inferior de ordem 2x2, tendo todos os seus elementos iguais a 1 , portanto,

$$\boxed{S_2^{-1} = -L_2} \quad .$$

Tomemos agora, uma matriz quadrada S_3 e calculemos a sua inversa.

$$S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_3^{-1} = E_3 \, E_2 \, E_1$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1/-1 & 0 & 0 \\ -1/-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/-1 & 0 \\ 0 & -1/-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

onde L_3 é uma matriz triangular inferior de ordem 3x3, temos:

$$\boxed{S_3^{-1} = -L_3} .$$

Observamos também que:

$$\det(S_2^{-1}) = +1$$

e

$$\det(S_3^{-1}) = -1 .$$

Observação II.4.4:

Podemos traduzir nossas observações anteriores, na forma de uma propriedade, frisando que trabalhamos sempre com a base B e não com sua inversa B^{-1}.

Propriedade II.4.1

"A inversa da matriz S_p será sempre uma matriz triangular inferior, tendo todos os seus elementos iguais a -1."

Para demonstrarmos esta propriedade, basta verificar que a matriz identidade será sempre o produto matricial de S_p e S_p^{-1}, e o $\det(S_p) = \det(S_p^{-1}) = \pm 1$, conforme o valor p seja par ou impar. Portanto,

$$S_p S_p^{-1} = S_p^{-1} S_p = I_p ,$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{pxp} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{pxp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{pxp}$$

II.5. Cálculo dos multiplicadores do simplex

Vamos partir da hipótese que temos uma solução básica viável inicial, determinada de acordo com a seção II.4.

Da relação (II.2.19), temos:

$$z_j = c_B B^{-1} p_j \quad , \quad j \in I_N . \tag{II.5.1}$$

Consideremos o vetor linha u, $(m+n)$-dimensional definido por:

$$uB = c_B \quad ,$$

portanto:

$$u = c_B B^{-1} .$$

Substituindo esta relação em (II.5.1), obtemos:

$$z_j = u p_j \quad , \quad j \in I_N ,$$

logo,

$$\boxed{z_j - c_j = u p_j - c_j} \quad , \quad j \in I_N . \tag{II.5.2}$$

Tomemos agora, os seguintes vetores linhas u_1, u_2 e u_3, sendo $u_1 \in \mathbb{R}^m$, cujas componentes estão associadas às m primeiras restrições de (II.2.7); $u_3 \in \mathbb{R}^p$, cujas componentes estão associadas às p últimas restrições de (II.2.7), e finalmente, $u_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, cujas componentes estão associadas às $(n-p)$ restrições restantes de (II.2.7). À vista disto temos:

$$(u_1, u_2, u_3)B = c_B \quad , \tag{II.5.3}$$

onde $c_B \in \mathbb{R}^{m+n}$, isto é, c_B é um vetor linha com $(m+n)$ componentes, ou ainda:

$$c_B = (c_{x_B}, c_{y_1}, c_{y_2}, c_{x_o}) \quad ,$$

portanto:

$$c_B = (0, 0, 0, 1) \quad .$$

Reescrevendo (II.5.3), teremos:

$$(u_1, u_2, u_3) \left[\begin{array}{ccc:c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] = (0,0,0,1) \; ,$$

ou ainda,

$$\left[u_1A_p + u_3S_p ; u_2I_{n-p} ; u_3K_p ; u_1a_o\right] = (0,0,0,1) \quad , \qquad \text{(II.5.4)}$$

onde:

$$\underset{1xm}{\overset{u_1}{\downarrow}} \; \underset{mxp}{\overset{Ap}{\downarrow}} \rightarrow 1 \text{ x } p$$

$$\underset{1x(n-p)}{\overset{u_2}{\downarrow}} \; \underset{(n-p)x(n-p)}{\overset{I_{n-p}}{\downarrow}} \rightarrow 1 \text{ x } (n-p)$$

$$\underset{1xp}{\overset{u_3}{\downarrow}} \; \underset{px(m-1)}{\overset{K_p}{\downarrow}} \rightarrow 1 \text{ x } (m-1)$$

$$\underset{1\text{x}m}{\underset{\downarrow}{u_1}} \quad \underset{m\text{x}1}{\underset{\downarrow}{a_o}} \rightarrow 1 \text{ x } 1$$

$$\underset{1\text{x}p}{\underset{\downarrow}{u_3}} \quad \underset{p\text{x}p}{\underset{\downarrow}{S_p}} \rightarrow 1 \text{ x } p$$

Resolvendo o problema matricial (II.5.4), temos:

$$u_1A_p + u_3S_p = \underbrace{(0\ldots.0)}_{p \text{ componentes nulas}} \tag{II.5.5}$$

$$u_2I_{n-p} = \underbrace{(0\ldots.0)}_{(n-p) \text{ componentes nulas}} \tag{II.5.6}$$

$$u_3K_p = \underbrace{(0\ldots.0)}_{(m-1) \text{ componentes nulas}} \tag{II.5.7}$$

$$u_1a_o = 1 \quad . \tag{II.5.8}$$

De (II.5.6), temos:

$$u_2 \; I_{n-p} = (0,\ldots,0) \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{u_2 = (0,\ldots\ldots,0) \;\varepsilon\; \mathbb{R}^{n-p}} \quad .$$

De (II.5.8), temos:

$$\boxed{u_1 a_o = 1} \quad .$$

De (II.5.5), temos:

$$\begin{aligned} u_1 A_p + u_3 S_p &= (0,\dots,0) \\ u_3 S_p &= -u_1 A_p \\ u_3 S_p S_p^{-1} &= -u_1 A_p S_p^{-1} \\ u_3 &= -u_1 A_p S_p^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Como:

$$S_p^{-1} = -L_p \quad ,$$

temos:

$$\begin{aligned} u_3 &= u_1 A_p L_p \\ u_3 K_p &= u_1 A_p L_p K_p \quad . \end{aligned}$$

Comparando (II.5.7) com a expressão acima, temos:

$$u_3 K_p = u_1 A_p L_p K_p = (0,\dots,0) \quad ,$$

ou

$$\boxed{u_1 A_p L_p K_p = (0,\dots,0)} \quad . \tag{II.5.9}$$

De (II.5.8) e (II.5.9), obtemos:

$$u_1 A_p L_p K_p = (0,\dots,0)$$

$$u_1 a_o = 1 ,$$

ou

$$u_1 \left[A_p L_p K_p \,\vdots\, a_o \right] = (0,0,\ldots,0,1) ,$$

portanto,

$$\boxed{u_1 = (0,0,\ldots,0,1) \left[A_p L_p K_p \,\vdots\, a_o \right]^{-1}} \; . \qquad \text{(II.5.10)}$$

Da relação (II.5.10), observamos que o setor u_1 corresponde à última linha da matriz $\left[A_p L_p K_p \,\vdots\, a_o \right]^{-1}$. Assim, podemos calcular o vetor u_3 através do valor de u_1, obtido em (II.5.10), pois:

$$\boxed{u_3 = u_1 A_p L_p} \; . \qquad \text{(II.5.11)}$$

Passemos agora, a uma análise dos valores das componentes do vetor linha $u_3 \in \mathbb{R}^p$, pois essas componentes estão associadas às p últimas restrições de (II.2.7).

Do teorema de folga complementar (fraco), sabemos que, a cada restrição do primal está associada uma variável dual não-negativa. Assim sendo, as componentes de u_3 associadas às p últimas restrições de (II.2.7), têm que ser todas não-negativas, no ótimo, ou seja, $u_3 \geq 0$. À vista disso, temos dois casos a considerar.

1) Pelo menos uma componente de u_3 é negativa. Neste caso, uma variável não-básica deverá entrar na base, no lugar de uma variável básica.

Seja x_k a variável não-básica, que entrará na base, associada ao mínimo dos $z_j - c_j$ negativos, relativos às variáveis de folga que estão fora da base e, relativo à primeira variável da restrição de precedência que não está na base, isto é:

$$z_k - c_k = \min_{j \varepsilon I_N} \{z_{n-p} - c_{n-p} < 0 \; ; \; z_{s_j} - c_{s_j} < 0\} \; .$$

Atualizando o vetor coluna p_k associado à variável x_k, teremos:

$$p_k = B \, y_k \qquad ,$$

onde

$$y_k = (y_{1k}, \ldots, y_{m+n,k})^T \quad .$$

Se não existe nenhum elemento de y_k positivo, a solução do problema (II.2.9) será ilimitada. Caso contrário, isto é, se existe ao menos um y_{ik}, $i \varepsilon I_B$, positivo, devemos calcular a variável básica que deixará a base.

Seja x_r a variável básica que sairá da base, tal que:

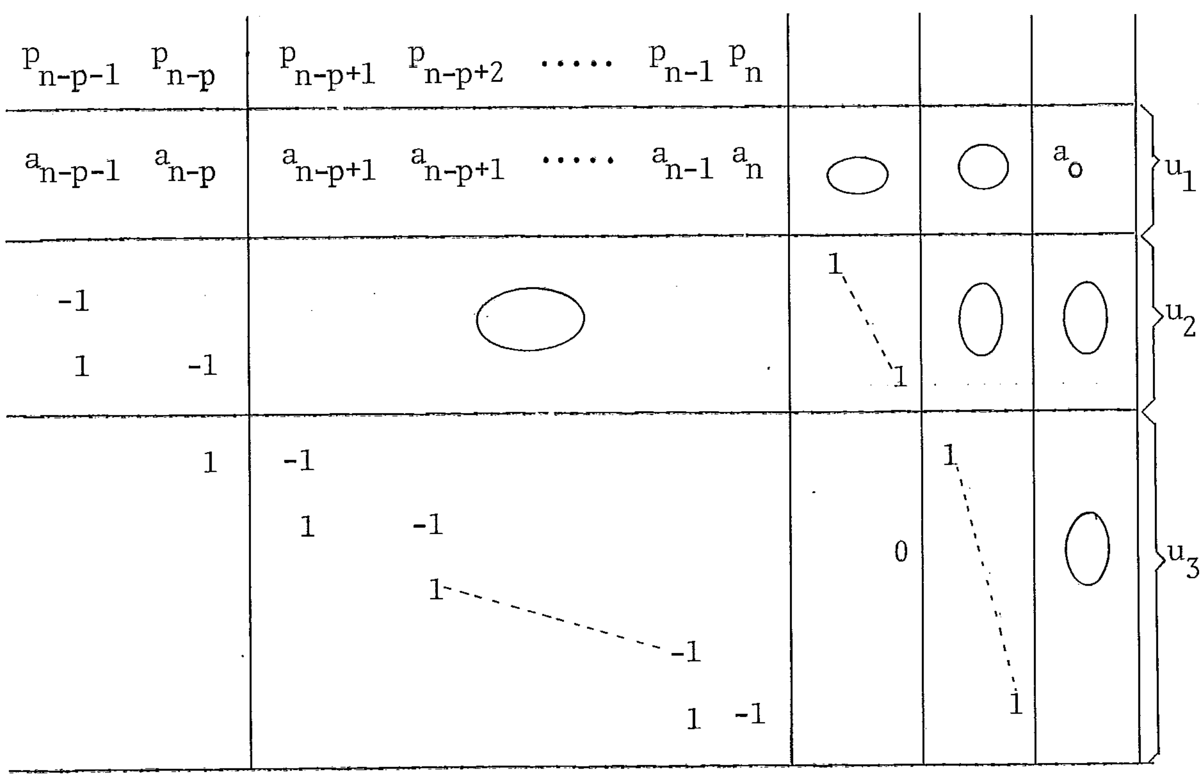
$$\frac{x_r}{y_{rk}} = \min_{i \varepsilon I_B} \{\frac{x_i}{y_{ik}} \; / \; y_{ik} > 0\} \; .$$

Trocando a r-ésima coluna pela k-ésima coluna de B, iremos obter uma nova base. Calcularemos novamente a solução $\bar{x}_B$, e os vetores linha u_1, u_2 e u_3. O procedimento se repetirá até que todas as componentes de u_3 sejam não-negativas.

2) Todas as componentes de u_3 são não-negativas, isto é, $u_3 \geq 0$. Neste caso, devemos calcular o $z_j - c_j$ relativo à primeira variável da relação de precedência, que não está na base, isto é, calcular $z_{n-p} - c_{n-p}$. De (II.5.2), temos:

$$z_{n-p} - c_{n-p} = u\, p_{n-p} - c_{n-p} \quad . \qquad \text{(II.5.12)}$$

Podemos assim, representar a coluna p_{n-p} da seguinte maneira:



Verificamos que o vetor coluna p_{n-p} poderá ser escrito da seguinte maneira:

$$p_{n-p} = (a_{n-p}^T, 0, \ldots, \underbrace{-1}_{\substack{(m+n-p)\text{-ésimo}\\ \text{elemento}}}, \underbrace{1}_{\substack{(m+n-p+1)\text{-ésimo}\\ \text{elemento}}}, \ldots, 0)^T \quad . \qquad \text{(II.5.13)}$$

Além disso, podemos observar que as m componentes do vetor linha u_1, estão associadas às m primeiras linhas do vetor p_{n-p}, portanto, estão associadas às componentes de $a_{n-p} \varepsilon R^m$. As $(n-p)$ componentes do vetor u_2 estão associadas às componentes do vetor $(0,\ldots,0,-1)^T$, e finalmente as p componentes de u_3 estão associadas às p componentes do vetor $(1,0,\ldots,0)^T$. Observamos também, que os vetores a_{n-p}, $(0,0,\ldots,0,-1)^T$ e $(1,0,\ldots,0)^T$ constituem o vetor coluna p_{n-p}, definido anteriormente em (II.5.13). Assim sendo, podemos reescrever $z_{n-p} - c_{n-p}$, isto é:

$$z_{n-p} - c_{n-p} = (u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} a_{n-p} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - c_{n-p} \quad ,$$

ou

$$z_{n-p} - c_{n-p} = u_1 a_{n-p} + u_2(0,\ldots,-1)^T + u_3(1,0,\ldots,0)^T - $$
$$- c_{n-p} \ .$$

Como $c_{n-p} = 0$ e $u_2 = 0$, temos:

$$z_{n-p} - c_{n-p} = u_1 a_{n-p} + u_3(1,0,\ldots,0)^T ,$$

portanto:

$$z_{n-p} - c_{n-p} = u_1 a_{n-p} + u_3 , \qquad \text{(II.5.14)}$$

pois , $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^p$.

Agora também, temos dois casos a considerar:

(i) Se $z_{n-p} - c_{n-p} < 0$, então a variável x_{n-p} entrará na base, no lugar de uma variável de folga.

(ii) Se $z_{n-p} - c_{n-p} \geq 0$, então a solução encontrada é ótima.

I.6. Descrição do método

Consideremos o seguinte problema de programação linear:

<u>maximizar</u> x_o (II.6.1)

sujeito à:

$$P\bar{x} = \bar{b} \qquad \text{(II.6.2)}$$

$$s \geq 0 , \qquad \text{(II.6.3)}$$

onde, a matriz P é uma matriz de ordem $(m+n)$ por $(2n+1)$; o vetor $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ um vetor dado por:

$$\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_n,x_o)^T ;$$

o vetor $\overline{b} \in \mathbb{R}^{m+n}$ um vetor coluna dado por:

$$\overline{b} = (b_1,\ldots,b_m,0,\ldots,0)^T .$$

A característica da matriz P é (m+n), ou seja, $\rho(P) = m+n$, e o vetor $s \in \mathbb{R}^n$, um vetor não-negativo.

Devemos inicialmente, construir uma base B, cuja característica é (m+n), isto é, $\rho(B) = (m+n)$. Esta base será formada pelos vetores coluna associados às p últimas variáveis da restrição de precedência; pelo vetor coluna p_o de P associado à variável x_o e por alguns vetores associados às variáveis de folga de (I.2.7). Como qualquer matriz básica B, determina uma solução básica para $P\overline{x} = \overline{b}$, obtemos da equação (II.2.15):

$$B\,\overline{x}_B = \overline{b} \quad ,$$

onde

$$\overline{x}_B = (x_{n-p+1},\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_{n-p},s_{i_1}\ldots,s_{i_{m-1}},x_o)^T \quad ,$$

é uma solução básica viável inicial de $P\overline{x} = \overline{b}$. Uma vez obtida uma solução básica viável, devemos verificar se tal solução é otima. Para isto, devemos calcular os vetores linha u_1, u_2 e u_3, tal que:

$$(u_1,\ u_2,\ u_3)B = c_B \quad ,$$

onde c_B é um vetor linha com (m+n) componentes dado por:

$$c_B = (0,0,\dots,1) \ ,$$

e a base B , uma matriz com a seguinte configuração:

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right]_{(m+n)x(m+n)}$$

Obtidos os valores dos vetores u_1, u_2 e u_3 , temos novamente que considerar dois casos:

1) Ao menos uma componente de u_3 é negativa. Neste caso, uma variável não-básica entrará na base, no lugar de uma variável básica. Para determinarmos qual variável não-básica entrará na base, devemos calcular os $z_j - c_j$ relativo à variável x_{n-p} e relativo às variáveis de folga fora da base. A variável que obtiver o valor $z_j - c_j$ mais negativo, será a variável escolhida a entrar na base, isto é:

$$z_k - c_k = \min_{j \varepsilon I_N}\{z_{n-p} - c_{n-p} < 0 \ ; \ z_{s_j} - c_{s_j} < 0\} \ ,$$

portanto, x_k entrará na base.

Para determinarmos qual variável deixará a base, devemos primeiramente, atualizar o vetor coluna associado à variável não-básica x_k , isto é:

$$p_k = B \ y_k \quad ,$$

onde

$$y_k = (y_{1k}, \ldots, y_{m+n,k})^T \quad ,$$

e y_{ik} , $i \in I_B$, os elementos de y_k . Se não existir nenhum elemento de y_k positivo, a solução do problema (II.6.1) - (II.6.3) será ilimitada. Caso contrário, isto é, se existir ao menos um y_{ik} positivo, calculamos a variável básica x_r , que sairá da base, da mesma forma que o método usual do simplex, assim,

$$\frac{x_r}{y_{rk}} = \min_{i \in I_B} \{\frac{x_i}{y_{ik}} \; / \; y_{ik} > 0\} \, .$$

Após, simplesmente trocarmos a r-ésima coluna pela k-ésima coluna da base B , obteremos uma nova base. Para esta base, calcularemos novamente os vetores linha u_1 , u_2 e u_3. O procedimento se repete até que todas as componentes do vetor u_3 sejam não-negativas.

2) Todas as componentes de u_3 são não-negativas, $u_3 \geq 0$. Neste caso, devemos calcular o $z_{n-p} - c_{n-p}$:

$$z_{n-p} - c_{n-p} = u_1 \, a_{n-p} + u_3 \, .$$

Temos novamente, dois casos a considerar:

(i) Se $z_{n-p} - c_{n-p} < 0$, a variável x_{n-p} deverá entrar na base no lugar de uma variável de folga.

(ii) Se $z_{n-p} - c_{n-p} > 0$, devemos parar o procedimento, pois, já obtivemos a solução ótima.

Estas são pois, as condições de otimalidade, isto é, para o problema de maximização devemos ter $u_3 \geq 0$ e $z_{n-p} - c_{n-p} > 0$. Já, para o problema de minimização devemos ter $u_3 \geq 0$ e $z_{n-p} - c_{n-p} < 0$.

II.7. Passos do Algoritmo

Faremos agora, um resumo dos passos do algoritmo.

PASSO 1

Dada uma solução básica viável inicial $\bar{x}_B$, formada pelas p últimas variáveis das restrições de precedência; por algumas variáveis de folga e pela variável x_o , isto é:

$$\bar{x}_B = (x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_{n-p}, s_{i_1}, \ldots, x_o)^T .$$

Calcule os vetores linha u_1, u_2 e u_3.

Se houver pelo menos uma componente negativa de u_3 , siga para o passo 2 .

Se todas as componentes de u_3 forem positivas, siga para o passo 6 .

PASSO 2

Determine a variável não-básica x_k , que entrará na base:

$$z_k - c_k = \min_{j \varepsilon I_N} \{z_{n-p} - c_{n-p} < 0 \; ; \; z_{s_j} - c_{s_j} < 0\} \; .$$

PASSO 3

Atualize o vetor coluna correspondente à variável x_k , isto é:

$$p_k = B \, y_k \; .$$

Se todos os elementos de y_k forem negativos ou nulos, pare, pois a solução do problema (II.6.1) - (II.6.3) é ilimitada.

Se existir ao menos um elemento positivo de y_k , siga para o passo 4 .

PASSO 4

Calcule a variável básica x_r , que deixará a base, isto é:

$$\Theta = \frac{x_r}{y_{rk}} = \min_{i \varepsilon I_B} \{ \frac{x_i}{y_{ik}} \; / \; y_{ik} > 0 \} \; .$$

PASSO 5

Determine a nova base B , substituindo a coluna y_r pela coluna y_k .

Calcule os novos valores das variáveis básicas, através do sistema $B\overline{x}_B = \overline{b}$, e volte para o passo 1 .

PASSO 6

Calcule $z_{n-p} - c_{n-p}$.

Se $z_{n-p} - c_{n-p} < 0$, a variável não-básica x_{n-p} entrará na base. Após as modificações necessárias, volte para o passo 1 .

Se $z_{n-p} - c_{n-p} > 0$, pare a solução é ótima.

Fluxograma

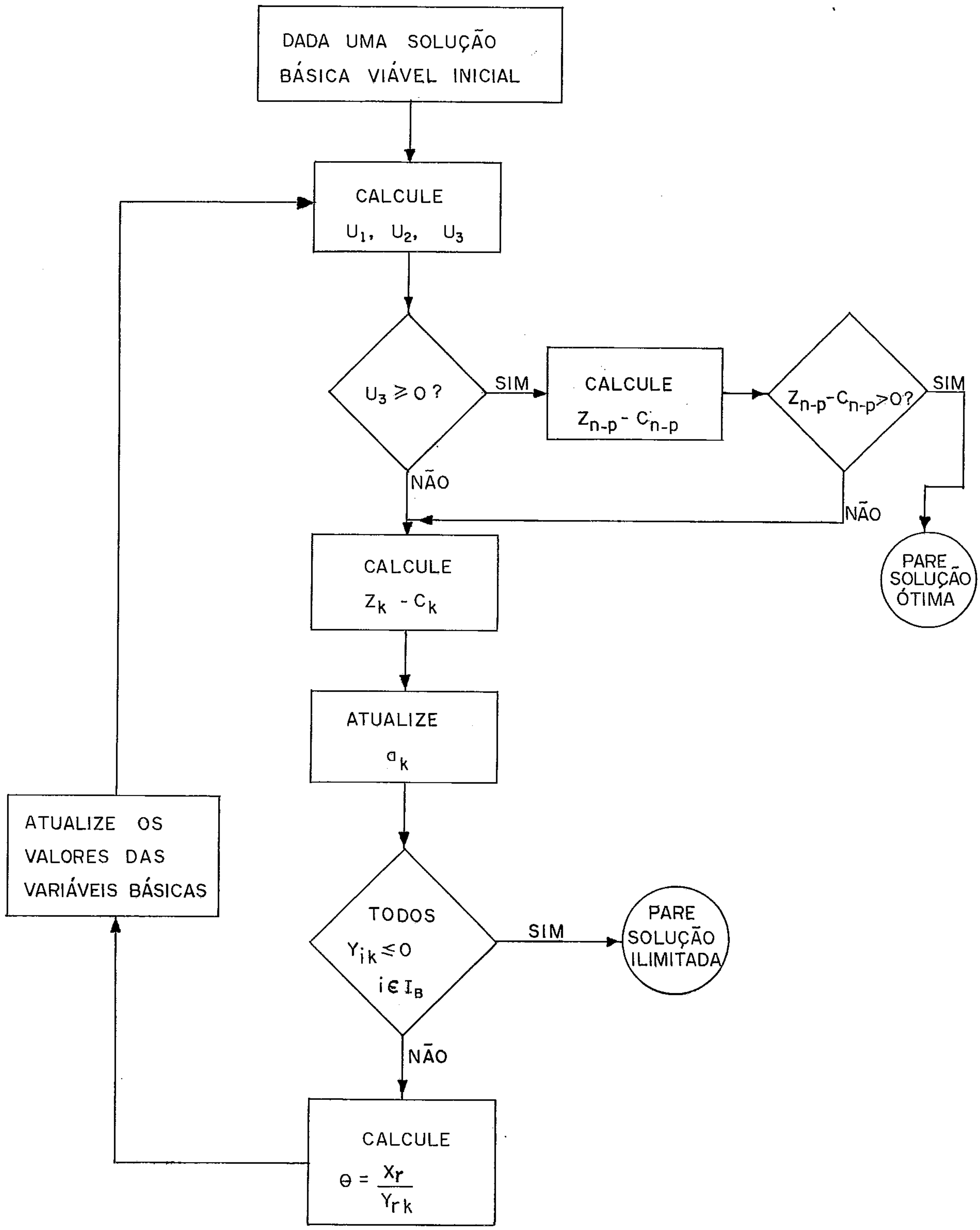


Figura (II.7.1)

II.8. Exercícios Resolvidos

Vejamos agora, alguns exercícios resolvidos para melhor compreensão do que foi demonstrado até o momento.

Exercício II.8.1

maximizar x_o

sujeito à:

$$\begin{aligned} x_o - 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0 \le x_1 \le x_2 & \quad . \end{aligned}$$

Escrevendo este problema de uma maneira mais conveniente, teremos:

maximizar x_o

sujeito à:

$$\begin{aligned} x_o - 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ - x_1 &\le 0 \\ x_1 - x_2 &\le 0 \quad . \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga $s_j \geq 0$, $j = 1,2,$, obtemos:

<u>maximizar</u> x_o

sujeito à:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_o & - 2x_1 & + x_2 & & & = 4 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & & = 3 \\
 & - x_1 & & + s_1 & & = 0 \\
 & x_1 & - x_2 & & + s_2 & = 0 \\
\end{array}$$

$$s_1, s_2 \geq 0 \quad .$$

A base inicial B , será formada pelas colunas associadas às variáveis x_2 , s_1, s_2 e x_o , isto é:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & s_1 & s_2 & x_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \end{array}$$

Esta base é uma matriz de ordem 4x4, e pode ser representada da seguinte maneira:

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right]_{4x4} ,$$

onde:

$$A_p = A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2x1}$$

$$S_p = S_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}_{1x1}$$

$$I_{n-p} = I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1x1}$$

$$K_p = K_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1x1}$$

$$a_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1} .$$

Além disso, sabemos que:

$$B\overline{x}_B = \overline{b} \qquad ,$$

onde:

$$\overline{x}_B = (x_B, y_1, y_2, x_o)^T = (x_2, s_1, s_2, x_o)^T \qquad ,$$

portanto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & K_1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_B \\ y_1 \\ y_2 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este problema matricial, temos:

$$\begin{cases} A_1\ x_B + a_o x_o = b \\ \quad I_1 y_1 = 0 \\ S_1\ x_B + K_1 y_2 = 0 \quad . \end{cases}$$

Explicitando o sistema acima, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8.1.1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} y_1 = 0 \qquad \text{(II.8.1.2)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} y_2 = 0 \quad . \qquad \text{(II.8.1.3)}$$

De (II.8.1.2), temos:

$$\boxed{y_1 = 0} \rightarrow y_1 = s_1 \rightarrow \boxed{s_1 = 0} \, . \qquad \text{(II.8.1.4)}$$

De (II.8.1.3), temos:

$$-x_B + y_2 = 0$$

$$\boxed{x_B = y_2} \rightarrow y_2 = s_2$$

$$\rightarrow \boxed{x_2 = s_2} \, . \qquad \text{(II.8.1.5)}$$

$$x_B = x_2$$

De (II.8.1.1), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Como a matriz quadrada $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ admite inversa, pois, det $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} ,$$

portanto,

$$\boxed{x_B = 3/2} ,$$

e

$$\boxed{x_o = 5/2} ,$$

logo,

$$\boxed{x_B = x_2 = s_2 = 3/2}$$

e

$$\boxed{\bar{x}_B = (3/2, 0, 3/2, 5/2)^T} \quad . \qquad \text{(II.8.1.6)}$$

A solução obtida $\bar{x}_B$, é uma solução básica viável para o problema inicial, entretanto, não sabemos ainda,se é uma solução ótima.

Para essa verificação, devemos efetuar o cálculo dos multiplicadores do simplex:

$$(u_1, u_2, u_3)B = (c_{x_o}, c_{s_1}, c_{s_2}, c_{x_o}) \quad ,$$

$$(u_1, u_2, u_3) \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & K_1 & 0 \end{array} \right] = (0, 0, 0, 1) \quad .$$

Resolvendo o produto matricial:

(i) $\underset{1\text{x}2}{\underset{\downarrow}{u_1}} \; \underset{2\text{x}1}{\underset{\downarrow}{A_1}} + \underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{u_3}} \; \underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{S_1}} = 0$

(ii) $\underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{u_2}} \; \underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{I_1}} = 0$

(iii) $\underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{u_3}} \; \underset{1\text{x}1}{\underset{\downarrow}{K_1}} = 0$

(iv) $\underset{1\times 2}{u_1} \; \underset{2\times 1}{a_o} = 1$.

Explicitando as equações acima, temos:

$$(u_1^1, u_1^2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + u_3[1] = 0 \qquad \text{(II.8.1.7)}$$

$$u_2[1] = 0 \qquad \text{(II.8.1.8)}$$

$$u_3[1] = 0 \qquad \text{(II.8.1.9)}$$

$$(u_1^1, u_1^2)\binom{1}{0} = 1 \;. \qquad \text{(II.8.1.10)}$$

De (II.8.1.8), temos:

$$\boxed{u_2 = 0}\;.$$

De (II.8.1.9), temos:

$$\boxed{u_3 = 0}\;.$$

De (II.8.1.10), temos:

$$u_1^1 + 0.u_1^2 = 1$$

$$\boxed{u_1^1 = 1}\;,$$

e u_1^2 não está definido ainda.

De (II.8.1.7), temos:

$$u_1^1 + 2u_1^2 = 0$$

$$2u_1^2 = -u_1^1$$

$$\boxed{u_1^2 = -1/2} \quad .$$

Assim, o vetor u será:

$$\boxed{u = (1, -1/2, 0, 0)} \quad .$$

Como $u_3 \geq 0$, devemos calcular o valor de $z_{x_1} - c_{x_1} = z_1 - c_1$. Se este valor for positivo, a solução $\overline{x}_B$, dada por (II.8.1.6), será a solução ótima. Caso contrário, isto é, se $z_1 - c_1$, for negativo, devemos introduzir a variável x_1 na base. Vejamos pois:

$$z_1 - c_1 = u\, p_1 - c_1$$

$$z_1 - c_1 = (1,-1/2,0,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{z_1 - c_1 = -5/2 < 0} \quad .$$

Como $z_1 - c_1$ é negativo, a variável x_1, entrará na base. Para determinarmos qual variável deixará a base, devemos primeiramente, atualizar o vetor coluna p_1, isto é, devemos calcular o vetor y_1, tal que:

$$B\, y_1 = p_1 \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial, temos:

$$\begin{array}{lr} y_{11} + y_{41} = -2 & (a) \\ 2y_{11} = 1 & (b) \\ y_{21} = -1 & (c) \\ -y_{11} + y_{31} = 1 \quad . & (d) \end{array}$$

De (b), temos:

$$2y_{11} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{11} = 1/2} \; .$$

De (c), temos:

$$\boxed{y_{21} = -1} \quad .$$

De (d), temos:

$$y_{31} = 1 + y_{11}$$

$$y_{31} = 1 + 1/2 = 3/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{31} = 3/2} \quad .$$

De (a), temos:

$$y_{41} = -2 - y_{11}$$

$$y_{41} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{41} = -\frac{5}{2}} \quad ,$$

portanto,

$$y_1 = (y_{11},\ y_{21},\ y_{31},\ y_{41})^T$$

$$\boxed{y_1 = (1/2,\ -1,\ 3/2,\ -5/2)^T} \ .$$

Calculemos então:

$$\min\{\frac{\bar{x}_i}{y_{i1}} \ / \ y_{i1} > 0\}$$

$$\min\{\frac{x_2}{y_{11}} \ , \ \frac{s_2}{y_{31}}\} = \min\{\frac{3/2}{1/2} \ ; \ \frac{3/2}{3/2}\} =$$

$$\min\{3,1\} = 1 = \frac{s_2}{y_{31}} \ .$$

Assim, a variável a sair da base é a variável de folga s_2 , entrando em seu lugar a variável x_1 . A nova base será:

$$B = \left[p_1, p_2, p_{s_1}, p_o\right]$$

$$B = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & x_o \\ \end{array}$$
$$B = \left[\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Esta base pode ser representada da seguinte maneira:

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} A_p & 0 & a_o \\ & & \\ S_p & K_p & 0 \end{array}\right] ,$$

onde:

$$A_p = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$S_p = S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$K_p = K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1}$$

$$a_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1} .$$

Além disso, sabemos que:

$$B\ \overline{x}_B = \overline{b} \quad ,$$

onde $\overline{x}_B = (x_B, y_2, x_o)^T = (x_1, x_2, s_1, x_o)^T$, pois, $x_B = (x_1, x_2)^T$, logo:

$$\begin{bmatrix} A_p & 0 & \vdots & a_o \\ & & \vdots & \\ S_p & K_p & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto:

$$A_p\ x_B + a_o\ x_o = b$$

$$S_p\ x_B + K_p\ y_2 = 0 \quad .$$

Explicitando o sistema acima, temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8.1.11)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(II.8.1.12)}$$

De (II.8.1.12), temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_B = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 \quad . \qquad \text{(II.8.1.13)}$$

Substituindo (II.8.1.13) em (II.8.1.11), temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{y_2 = 1} \quad \rightarrow \quad \boxed{s_1 = 1} \; , \qquad \text{(II.8.1.14)}$$

$$\boxed{x_o = 5} \quad .$$

Substituindo (II.8.1.14) em (II.8.1.13), temos:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{x_1 = x_2 = 1} \quad .$$

Assim sendo, a nova solução será:

$$\overline{x}_B = (x_1, x_2, s_1, x_o)^T$$

$$\boxed{\overline{x}_B = (1, 1, 1, 5)^T} \; .$$

Como esta nova solução é viável, devemos verificar se ela será ou não, uma solução ótima. Para isto, calculemos os multiplicadores do simplex:

$$u\ B = c_B$$

$$(u_1, u_3) \begin{bmatrix} A_p & 0 & \vdots & a_o \\ & & \vdots & \\ S_p & K_p & \vdots & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 1)$$

(i) $\underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_1}}\ \underset{2x2}{\underset{\downarrow}{A_p}} + \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_3}}\ \underset{2x2}{\underset{\downarrow}{S_p}} = (0, 0)$

(ii) $\underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_3}}\ \underset{2x1}{\underset{\downarrow}{K_p}} = 0$

(iii) $\underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_1}}\ \underset{2x1}{\underset{\downarrow}{a_o}} = 1$.

Explicitando as relações acima, temos:

$$(u_1^1, u_1^2) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (u_3^1, u_3^2) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (0, 0) \qquad \text{(II.8.1.15)}$$

$$(u_3^1, u_3^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(II.8.1.16)}$$

$$(u_1^1, u_1^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \ . \qquad \text{(II.8.1.17)}$$

De (II.8.1.16), temos:

$$u_3^1 + 0\ u_3^2 = 0$$

$$\boxed{u_3^1 = 0} \quad , \qquad \text{(II.8.1.18)}$$

e u_3^2 não está ainda definido.

De (II.8.1.17), temos:

$$u_1^1 + 0.u_1^2 = 1$$

$$\boxed{u_1^1 = 1} \quad , \qquad \text{(II.8.1.19)}$$

e u_1^2 não está ainda definido.

De (II.8.1.15), temos:

$$(-2u_1^1 + u_1^2;\ u_1^1 + 2u_1^2) + (-u_3^1 + u_3^2;\ -u_3^2) = (0,0)$$

$$(-2u_1^1 + u_1^2 - u_3^1 + u_3^2;\ u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^2) = (0,0)\ .$$

$$\left.\begin{aligned} -2u_1^1 + u_1^2 - u_3^1 + u_3^2 &= 0 \\ u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^2 &= 0\ . \end{aligned}\right\}$$

Substituindo (II.8.1.18) e (II.8.1.19) no sistema acima, temos:

$$\left.\begin{aligned} -2 + u_1^2 + u_3^2 &= 0 \\ 1 + 2u_1^2 - u_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\}\ .$$

Somando as equações, obtemos:

$$-1 + 3u_1^2 = 0 \rightarrow \boxed{u_1^2 = 1/3} \quad , \qquad \text{(II.8.1.20)}$$

portanto:

$$u_3^2 = 2 - u_1^2 = 2 - 1/3 = 5/3 \rightarrow \boxed{u_3^2 = 5/3} \; .$$

Assim sendo, o vetor linha u será:

$$\boxed{u = (1,\ 1/3,\ 0,\ 5/3)} \quad .$$

Como $u_3 \geq 0$, passemos ao cálculo de $z_{s_2} - c_{s_2}$, isto é:

$$z_{s_2} - c_{s_2} = u\, p_{s_2} - c_{s_2}$$

$$z_{s_2} - c_{s_2} = (1\ \ 1/3\ \ 0\ \ 5/3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} -0 = 5/3$$

$$\boxed{z_{s_2} = c_{s_2} = 5/3} \; .$$

A solução encontrada $\overline{x}_B$, dada por:

$$\boxed{\overline{x}_B = (1,\ 1,\ 1,\ 5)^T} \quad ,$$

é a solução ótima do problema inicial, pois, $u_3 \geq 0$ e $z_{s_2} - c_{s_2} > 0$.

Podemos também, resolver graficamente este problema. Devemos primeiramente, realizar algumas modificações no mesmo, de forma que o problema definido abaixo seja equivalente ao problema original:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad x_o = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$\text{sujeito à:} \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x = (x_1, x_2)^T \ \varepsilon \ X \ ,$$

onde X é definido por:

$$X = \{x \ \varepsilon \ \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x_1 \leq x_2\} \quad .$$

A representação gráfica deste problema será:

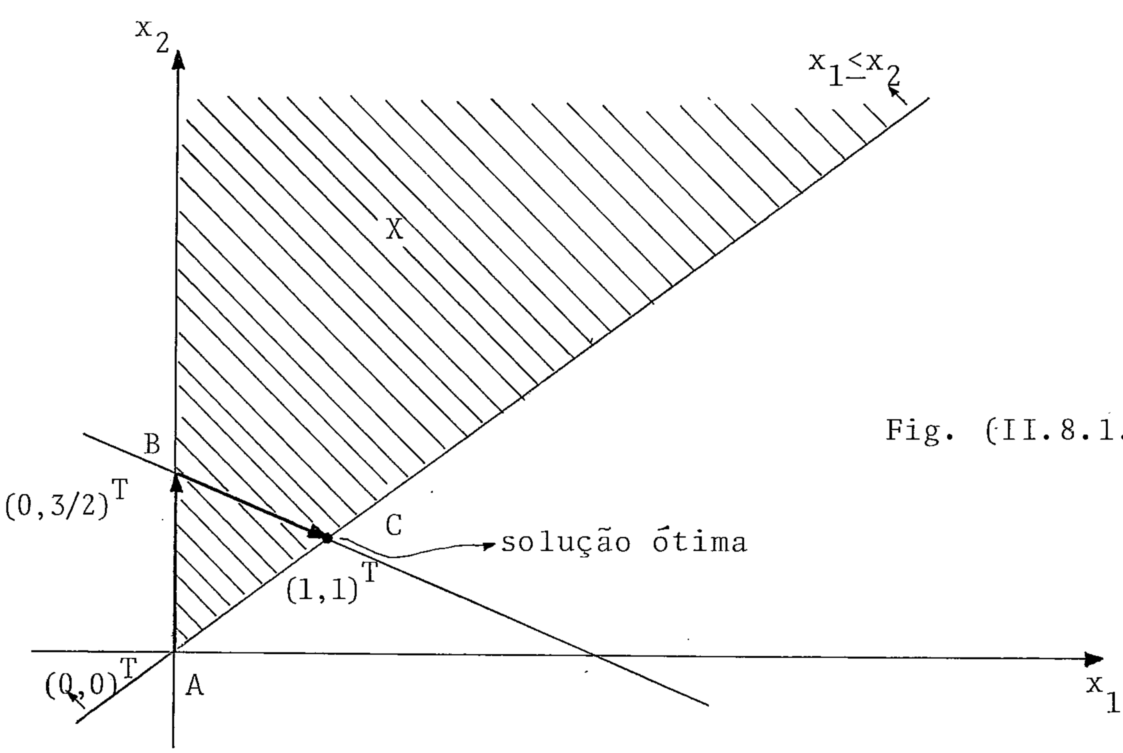


Fig. (II.8.1.1)

Ponto A:

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$\boxed{x_o = 4} \quad .$$

Ponto B:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3/2$$
$$x_o = 4 - 3/2 = 5/2 \rightarrow \boxed{x_o = 5/2}\ .$$

Ponto C:

$$x_1 = x_2 = 1$$
$$x_o = 4 + 2 - 1 = 6 - 1 = 5 \rightarrow \boxed{x_o = 5}\ ,$$

portanto, a solução ótima, será:

$$\boxed{x_1^* = x_2^* = 1}\ ,$$

dando $\boxed{x_o^* = 5}$.

Exercício II.8.2:

maximizar x_o

Sujeito à:

$$x_o + 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$
$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\ .$$

<u>maximizar</u> x_o

Sujeito à:

$$\begin{array}{rcl}
x_o + 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 4 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 2 \\
-x_1 & \leq & 0 \\
x_1 - x_2 & \leq & 0 \\
x_2 - x_3 & \leq & 0 \\
x_3 - x_4 & \leq & 0 \quad .
\end{array}$$

Introduzindo as variáveis de folga $s_j \geq 0$, $j = 1,2,3,4$, no sistema acima, obtemos:

<u>maximizar</u> x_o

sujeito à:

$$\begin{array}{rcl}
x_o + 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 4 \\
x_1 \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 2 \\
-x_1 + s_1 & = & 0 \\
x_1 - x_2 + s_2 & = & 0 \\
x_2 - x_3 + s_3 & = & 0 \\
x_3 - x_4 + s_4 & = & 0
\end{array}$$

$$s_j \geq 0 \ , \ j = 1,2,3,4 \quad .$$

$\boxed{\text{Iteração 1}}$

Consideremos, por exemplo, as variáveis x_3 e x_4 na base. Assim sendo, a matriz básica inicial será:

$$B = \begin{array}{cccccc} x_3 & x_4 & s_1 & s_2 & s_3 & x_o \\ \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6x6}$$

A base B é uma matriz 6x6 , e pode ter a seguinte representação:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] ,$$

onde:

$$a_o = e_1 = (1 \quad 0)^T$$

$$K_p = K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1}$$

$$I_{n-p} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$S_p = S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$A_p = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} .$$

Além disso, sabemos que:

$$B\ \bar{x}_B = \bar{b} \quad ,$$

onde:

$$\bar{x}_B = (x_B, y_1, y_2, x_o)^T \quad ,$$

e

$$x_B = (x_3, x_4)^T \quad ,$$

$$y_1 = (s_1, s_2)^T \quad ,$$

$$y_2 = s_3 \quad ,$$

portanto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_B \\ y_1 \\ y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_p x_B + a_o x_o &= b \\ I_{n-p}\ y_1 &= 0 \\ S_p x_B + K_p y_2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Explicitando o sistema acima, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8.2.1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8.2.2)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.8.2.3}$$

De (II.8.2.2), temos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{s_1 = s_2 = 0} \quad ,$$

ou

$$\boxed{y_1 = (s_1, s_2)^T = (0,0)^T} \quad . \tag{II.8.2.4}$$

De (II.8.2.3), temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_B = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_2$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 \quad . \qquad \text{(II.8.2.5)}$$

Substituindo (II.8.2.5) em (II.8.2.1), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_o = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{y_2 = 2}$$

e

$$\boxed{x_o = 4} \quad ,$$

logo

$$\boxed{y_2 = s_3 = 2} \quad . \qquad \text{(II.8.2.6)}$$

Substituindo (II.8.2.6) em (II.8.2.5), obtemos:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 2$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{x_3 = x_4 = 2} \quad .$$

Assim, a solução básica $\overline{x}_B$ será dada por:

$$\overline{x}_B = (x_3, x_4, s_1, s_2, s_3, x_o)^T$$

$$\boxed{\overline{x}_B = (2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 4)^T} \quad . \qquad \text{(II.8.2.7)}$$

Podemos ainda, obter esta solução resolvendo o seguinte sistema:

$$B\ \overline{x}_B = \overline{b} \quad .$$

Explicitando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lr} x_3 - x_4 + x_o = 4 & \text{(a)} \\ -x_3 + 2x_4 = 2 & \text{(b)} \\ s_1 = 0 & \text{(c)} \\ s_2 = 0 & \text{(d)} \\ -x_3 + s_3 = 0 & \text{(e)} \\ x_3 - x_4 = 0 & \text{(f)} \end{array}$$

De (c), temos:

$$\boxed{s_1 = 0} \; .$$

De (d), temos:

$$\boxed{s_2 = 0} \; .$$

De (e), temos:

$$\boxed{x_3 = s_3} \; .$$

De (f), temos:

$$\boxed{x_3 = x_4} \; ,$$

assim, substituindo esta expressão em (b), temos:

$$-x_3 + 2x_3 = 2$$

$$\boxed{x_3 = 2} \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{x_3 = x_4 = s_3 = 2} \quad .$$

Substituindo esses valores em (a), temos:

$$x_o = 4 - x_3 + x_4$$

$$x_o = 4 - 2 + 2 = 4$$

$$\boxed{x_o = 4} \quad .$$

Assim, a solução básica será:

$$\bar{x}_B = (x_3, x_4, s_1, s_2, s_3, x_o)^T$$

$$\boxed{\bar{x}_B = (2, 2, 0, 0, 2, 4)^T} \quad .$$

Verifiquemos a seguir, se esta solução é ótima ou não, passando ao cálculo dos multiplicadores do simplex.

$$(u_1, u_2, u_3) B = c_B \quad ,$$

onde

$$c_B = (c_{x_3}, c_{x_4}, c_{s_1}, c_{s_2}, c_{s_3}, c_{x_o})$$

$$c_B = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad ,$$

portanto,

$$(u_1, u_2, u_3) \left[\begin{array}{ccc|c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)\ .$$

Resolvendo o sistema matricial dado acima, obtemos:

$$\text{(i)} \quad \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_1}} \ \underset{2x2}{\underset{\downarrow}{A_p}} + \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_3}} \ \underset{2x2}{\underset{\downarrow}{S_p}} = (0,0)$$

$$\text{(ii)} \quad \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_2}} \ \underset{2x2}{\underset{\downarrow}{I_{n-p}}} = (0,0)$$

$$\text{(iii)} \quad \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_3}} \ \underset{2x1}{\underset{\downarrow}{K_p}} = 0$$

$$\text{(iv)} \quad \underset{1x2}{\underset{\downarrow}{u_1}} \ \underset{2x1}{\underset{\downarrow}{a_o}} = 1\ .$$

Explicitando as expressões (i), (ii), (iii) e (iv), obtemos:

$$(u_1^1, u_1^2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + (u_3^1, u_3^2) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (0,0) \qquad \text{(II.8.2.8)}$$

$$(u_2^1, u_2^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0) \qquad \text{(II.8.2.9)}$$

$$(u_3^1,u_3^2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(II.8.2.10)}$$

$$(u_1^1,u_1^2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1 \quad . \qquad \text{(II.8.2.11)}$$

De (II.8.2.9), temos:

$$(u_2^1,u_2^2)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = (0,0)$$

$$(u_2^1,u_2^2) = (0,0) \quad ,$$

portanto,

$$u_2^1 = u_2^2 = 0 \quad ;$$

ou ainda,

$$\boxed{u_2 = (u_2^1,u_2^2) = (0,0)} \; . \qquad \text{(II.8.2.12)}$$

De (II.8.2.10), temos:

$$(u_3^1,u_3^2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$u_3^1 + 0.u_3^2 = 0$$

$$\boxed{u_3^1 = 0} \quad , \qquad \text{(II.8.2.13)}$$

e u_3^2 ainda não está definido.

De (II.8.2.11), temos:

$$(u_1^1, u_1^2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_1^1 + 0.u_1^2 = 1$$

$$\boxed{u_1^1 = 1} \quad , \qquad \text{(II.8.2.14)}$$

e u_1^2 também não está ainda definido.

De (II.8.2.8), temos:

$$(u_1^1, u_1^2)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + (u_3^1, u_3^2)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (0,0)$$

$$(u_1^1 - u_1^2;\ -u_1^1 + 2u_1^2) + (-u_3^1 + u_3^2;\ -u_3^2) = (0,0)$$

$$(u_1^1 - u_1^2 - u_3^1 + u_3^2;\ -u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^2) = (0,0) \quad ,$$

portanto,

$$\left.\begin{aligned} u_1^1 - u_1^2 - u_3^1 + u_3^2 &= 0 \\ -u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Substituindo (II.8.2.13) e (II.8.2.14) no sistema acima, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} 1 - u_1^2 + u_3^2 &= 0 \\ -1 + 2u_1^2 - u_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

Somando as equações acima, temos:

$$\boxed{u_1^2 = 0} \quad . \qquad \text{(II.8.2.15)}$$

Substituindo (II.8.2.15) em uma das equações do sistema acima, temos:

$$1 + u_3^2 = 0$$

$$\boxed{u_3^2 = -1} \quad . \qquad \text{(II.8.2.16)}$$

O vetor linha u será representado por:

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$u = (u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2, u_3^1, u_3^2) \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{u = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1)} \ .$$

Como uma componente de u_3 é negativa, isto é, $u_3^2 = -1 < 0$, a solução básica $\overline{x}_B = (2,2,0,0,2,4)^T$ não é a solução ótima do problema inicial, portanto, uma variável deverá entrar na base. As possíveis candidatas serão as variáveis x_2 e s_4 . Vejamos qual devemos escolher. Para isto, calculemos os $z_j - c_j$ relativos a ambas, isto é:

$$z_j = c_B \; B^{-1} \; p_j$$

$$z_j - c_j = c_B \; B^{-1} \; p_j - c_j \quad ,$$

como,

$$u = c_B \; B^{-1} \quad ,$$

temos:

$$z_j - c_j = u\,p_j - c_j \quad ,$$

ou mais explicitamente:

$$z_{s_4} - c_{s_4} = u\,p_{s_4} - c_{s_4}$$

$$z_{s_4} - c_{s_4} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - 0 = -1 < 0$$

$$\boxed{z_{s_4} - c_{s_4} = -1} \quad ,$$

e

$$z_2 - c_2 = u\,p_2 - c_2$$

$$z_2 - c_2 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1)\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = -3 < 0$$

$$\boxed{z_2 - c_2 = -3} \quad ,$$

$$z_k - c_k = \min_{j \varepsilon I_N} \{z_j - c_j \ / \ z_j - c_j < 0\}$$

$$z_k - c_k = \min\{z_{s_4} - c_{s_4} ; \ z_2 - c_2\} = \min\{-1,-3\} = -3 \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{z_k - c_k = z_2 - c_2 = -3} \ .$$

Assim, a variável x_2 entrará na base no lugar de uma outra que deverá deixar a base. Para calcularmos a variável que sairá da base, devemos em primeiro lugar, atualizar a coluna associada à variável x_2, isto é:

$$p_2 = B\, y_2 \quad ,$$

ou explicitamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{42} \\ y_{52} \\ y_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

onde:

$$y_2 = (y_{12}, y_{22}, y_{32}, y_{42}, y_{52}, y_{62})^T \quad .$$

Resolvendo o sistema matricial dado acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
y_{12} - y_{22} \qquad\qquad + y_{62} &= -3 && \text{(a)} \\
-y_{12} + 2y_{22} \qquad\qquad &= 2 && \text{(b)} \\
y_{32} &= 0 && \text{(c)} \\
y_{42} &= -1 && \text{(d)} \\
-y_{12} \qquad\qquad + y_{52} &= 1 && \text{(e)} \\
y_{12} - y_{22} &= 0 \quad . && \text{(f)}
\end{aligned}$$

De (c), temos:

$$\boxed{y_{32} = 0} \quad .$$

De (d), temos:

$$\boxed{y_{42} = -1} \quad .$$

De (f), temos:

$$\boxed{y_{12} = y_{22}} \quad ,$$

e substituindo esta expressão em (b), temos:

$$-y_{12} + 2y_{12} = 2$$

$$\boxed{y_{12} = 2} \quad .$$

Assim,

$$\boxed{y_{12} = y_{22} = 2} \quad .$$

De (e), temos:

$$y_{52} = 1 + y_{12}$$

$$y_{52} = 1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{52} = 3} \quad .$$

De (a), temos:

$$y_{62} = -3 - y_{12} + y_{22}$$

$$y_{62} = -3 -2 + 2 = -3 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{62} = -3} \; ,$$

portanto:

$$\boxed{y_2 = (2,\ 2,\ 0,\ -1,\ 3,\ -3)^T} \; .$$

Para determinarmos a variável que deixará a base, devemos calcular:

$$\Theta = \min_{i \varepsilon I_B} \{\frac{x_i}{y_{ik}} \; / \; y_{ik} > 0\}$$

$$\theta = \min\{\frac{x_3}{y_{12}} \; , \; \frac{s_3}{y_{53}}\} = \min\{\frac{2}{2} \; , \; \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\theta = \frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{s_3}{y_{53}}} \; .$$

Verificamos que a variável de folga s_3 deixará a base, entrando em seu lugar a variável x_2 . A nova base será constituida da seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Iteração 2}}$

Repetindo todo o procedimento anterior, calcularemos os valores das novas variáveis básicas:

$$\bar{x}_B = (x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, x_o)^T .$$

Como $B\,\bar{x}_B = \bar{b}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolvendo o sistema matricial, temos:

$$\begin{array}{lr} -3x_2 + x_3 - x_4 + x_o = 4 & \text{(a)} \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 & \text{(b)} \\ s_1 = 0 & \text{(c)} \\ -x_2 + s_2 = 0 & \text{(d)} \\ x_2 - x_3 = 0 & \text{(e)} \\ x_3 - x_4 = 0 \;. & \text{(f)} \end{array}$$

De (c), temos:

$$\boxed{s_1 = 0} \;.$$

De (d), temos:

$$\boxed{x_2 = s_2} \quad .$$

De (e), temos:

$$\boxed{x_2 = x_3} \quad .$$

De (f), temos:

$$\boxed{x_3 = x_4} \quad .$$

Portanto:

$$\boxed{x_2 = x_3 = x_4 = s_2} \quad .$$

Substituindo esta condição em (b), temos:

$$2x_2 - x_2 + 2x_2 = 2$$

$$3x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2/3} \quad .$$

Logo,

$$\boxed{x_2 = x_3 = x_4 = s_2 = 2/3} \quad .$$

Substituindo esses valores em (a), temos:

$$x_o = 4 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

$$x_o = 4 + 3.2/3 - 2/3 + 2/3 = 4 + 2 = 6$$

$$\boxed{x_o = 6}\ .$$

À vista disso, o novo vetor básico será:

$$\bar{x}_B = (x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, x_o)^T$$

$$\boxed{\bar{x}_B = (2/3,\ 2/3,\ 2/3,\ 0,\ 7/3,\ 6)^T}\ .$$

Verificaremos a seguir, se esta solução será ou não a solução ótima, de forma que, passaremos, ao cálculo dos multiplicadores do simplex:

$$u\ B = c_B$$

$$(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3) \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0,0,1)\ ,$$

ou de outra forma:

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) \left[\begin{array}{ccc|c} A_p & 0 & 0 & a_o \\ 0 & I_{n-p} & 0 & 0 \\ S_p & 0 & K_p & 0 \end{array}\right] = (0,\ldots,1)\ ,$$

onde:

$$A_p = A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$S_p = S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$I_{n-p} = I_1 = [1]_{1x1}$$

$$K_p = K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$$

$$a_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1} \quad .$$

Resolvendo o sistema matricial dado acima, temos:

(i) $$\underset{\substack{\downarrow \\ 1x2}}{u_1} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 2x3}}{A_p} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1x3}}{u_3} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 3x3}}{S_p} = (0\,,\ 0\,,\ 0)$$

(ii) $$\underset{\substack{\downarrow \\ 1x1}}{u_2} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 1x1}}{I_{n-p}} = 0$$

(iii) $$\underset{\substack{\downarrow \\ 1x3}}{u_3} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 3x1}}{K_p} = 0$$

(iv) $$\underset{\substack{\downarrow \\ 1x2}}{u_1} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 2x1}}{a_o} = 1 \quad .$$

Explicitando as equações acima, temos:

$$(u_1^1, u_1^2)\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} + (u_3^1, u_3^2, u_3^3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

(II.8.2.17)

$$u_2[1] = 0 \qquad \text{(II.8.2.18)}$$

$$(u_3^1,\ u_3^2,\ u_3^3)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(II.8.2.19)}$$

$$(u_1^1,\ u_1^2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad . \qquad \text{(II.8.2.20)}$$

De (II.8.2.19), temos:

$$u_3^1 + 0.u_3^2 + 0.u_3^3 = 0$$

$$\boxed{u_3^1 = 0} \quad , \qquad \text{(II.8.2.21)}$$

e u_3^2 e u_3^3 não estão ainda definidos.

De (II.8.2.18), temos:

$$\boxed{u_2 = 0} \quad . \qquad \text{(II.8.2.22)}$$

De (II.8.2.20), temos:

$$u_1^1 + 0.u_1^2 = 1$$

$$\boxed{u_1^1 = 1} \quad , \qquad \text{(II.8.2.23)}$$

e u_1^2 também não está ainda definido.

De (II.8.2.17), temos:

$$(-3u_1^1 + 2u_1^2;\ u_1^1 - u_1^2;\ -u_1^1 + 2u_1^2) + (-u_3^1 + u_3^2;\ -u_3^2 + u_3^3;\ -u_3^3) = (0,0,0)$$

$$(-3u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^1 + u_3^2;\ u_1^1 - u_1^2 - u_3^2 + u_3^3;\ -u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^3) = (0,0,0) \quad ,$$

ou ainda:

$$\left.\begin{array}{l} -3u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^1 + u_3^2 = 0 \\ u_1^1 - u_1^2 - u_3^2 + u_3^3 = 0 \\ -u_1^1 + 2u_1^2 - u_3^3 = 0 \ . \end{array}\right\}$$

Substituindo (II.8.2.21) e (II.8.2.23) no sistema acima, obtemos:

$$-3 + 2u_1^2 + u_3^2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$1 - u_1^2 - u_3^2 + u_3^3 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$-1 + 2u_1^2 - u_3^3 = 0 \ . \qquad \text{(III)}$$

Somando (I) e (II), temos:

$$-2 + u_1^2 + u_3^3 = 0 \ . \qquad \text{(IV)}$$

Somando (IV) e (III), temos:

$$- 3 + 3u_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_1^2 = 1} \; . \qquad \text{(II.8.2.24)}$$

Substituindo (I.8.2.24) em (IV), obtemos:

$$- 2 + 1 + u_3^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_3^3 = 1} \; . \qquad \text{(II.8.2.25)}$$

Substituindo (II.8.2.24) em (I), temos:

$$-3 + 2 + u_3^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_3^2 = 1} \; .$$

Podemos então, escrever os vetores linhas u_1, u_2 e u_3, assim:

$$u_1 = (u_1^1,\ u_1^2) = (1,1) \quad ,$$

$$u_2 = 0 \quad ,$$

$$u_3 = (u_3^1,\ u_3^2,\ u_3^3) = (0,1,1) \quad ,$$

portanto:

$$u = (u_1,\ u_2,\ u_3) = (1,1,0,0,1,1) \quad .$$

Como todos os elementos de u_3 são não-negativos, devemos efetuar os seguintes cálculos:

$$\text{a)}\ z_1 - c_1 = u\,p_1 - c_1 = (1,1,0,0,1,1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2 + 1 = 3 > 0$$

$$\boxed{z_1 - c_1 = 3 > 0} .$$

b) $z_{s_3} - c_{s_3} = u\, p_{s_3} - c_{s_3} = (1,1,0,0,1,1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1 > 0$

$$\boxed{z_{s_3} = c_{s_3} = 1 > 0} .$$

c) $z_{s_4} - c_{s_4} = u\, p_{s_4} - c_{s_4} = (1,1,0,0,1,1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1 > 0$

$$\boxed{z_{s_4} = c_{s_4} = 1 > 0} .$$

Como $u_3 \geq 0$ e todos $z_j - c_j > 0$, $j \in I_N$, a solução obtida é a <u>solução ótima</u>:

$$x^* = (x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, x_o)^T$$

$$\boxed{x^* = (2/3,\ 2/3,\ 2/3,\ 0,\ 2/3,\ 6)^T} .$$

II.9. <u>Dualidade em Programação Inteira (0-1)</u>

As restrições de precedência podem aparecer em problemas de programação inteira bivalente, onde as variáveis assumem somente um dos valores 0 ou 1 . Podemos traduzir este fato, da seguinte maneira: a cada variável estará associada a realização de um evento, e essas realizações devem ser implementadas segundo uma ordem pré-determinada. Assim, se o evento ocorrer, a variável assumirá o valor 1 , e se não ocorrer, a variável assumirá o valor 0 . Em outras palavras, teremos:

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ , se o evento } j \text{ ocorrer ,} \\ 0 \text{ , caso contrário .} \end{cases}$$

Tal problema poderá, por exemplo, ter a seguinte configuração:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad x_o = cx \qquad \text{(II.9.1)}$$

sujeito à:

$$Ax \leq b \qquad \text{(II.9.2)}$$

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1 \qquad \text{(II.9.3)}$$

$$x_j \text{ , } j = 1,\ldots,n \text{ , inteiros ,} \qquad \text{(II.9.4)}$$

onde c^T, $x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$ e a matriz A com m linhas e n colunas

Apresentaremos então, um procedimento para resolver um problema de programação linear zero-um, mediante a solução de um programa mestre ,obtido a partir do desenvolvimento da dualidade em programação inteira.

As idéias utilizadas para a construção da dualidade em programação inteira, foram derivadas da teoria da dualidade em programação matemática. Ver referências |[11]| e |[24]|.

Baseados nessa teoria, podemos inferir algumas idéias para o problema de programação inteira, e, em particular, para programação zero-um.

Seja o seguinte conjunto representando as restrições de estruturas especiais:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1;\ x_j \text{ inteiros},\ j = 1,\ldots n\}.$$

Desta forma o problema inicial ficará com o seguinte aspecto:

<u>minimizar</u> $x_o = cx$ (II.9.5)

sujeito à: $Ax \leq b$ (II.9.6)

$x \in X$. (II.9.7)

O problema (II.9.5) - (II.9.7) será denominado <u>problema primal (P)</u> .

Para uma melhor visualização do conjunto X , consideremos primeiramente, um vetor x em $\mathbb{R}^2$, assim, X será definido por.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1;\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ inteiros}\} .$$

A figura (II.9.1) será a representação gráfica deste conjunto:

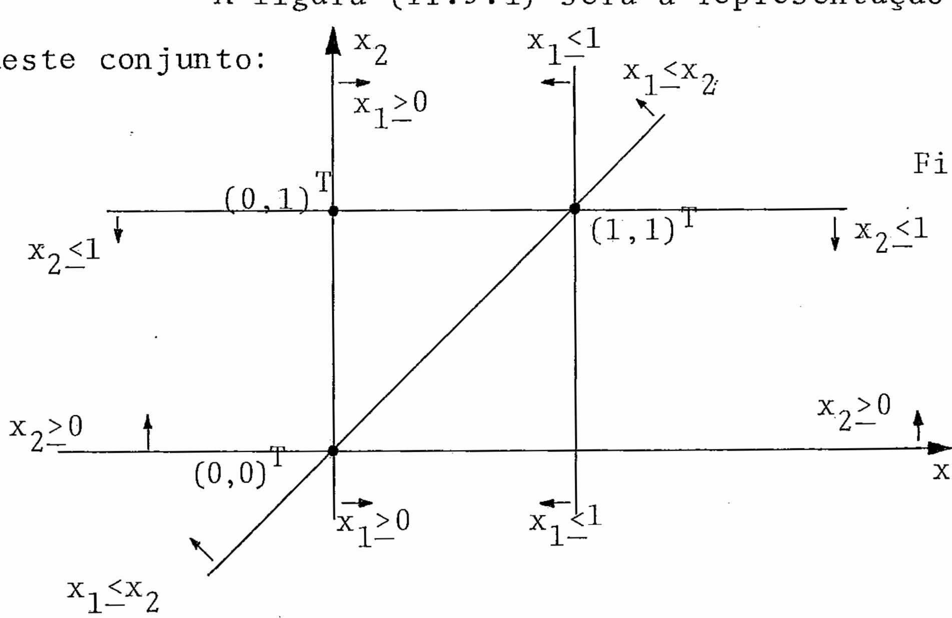


Fig.(II.9.1)

Observamos na fig. (II.9.1), que o conjunto X será formado pelos seguintes pontos: $(0,0)^T$, $(0,1)^T$ e $(1,1)^T$.

Consideremos agora, um vetor x em $\mathbb{R}^3$, assim, X será:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1,\ x_1, x_2 \text{ e } x_3 \text{ inteiros}\} .$$

Graficamente, teremos:

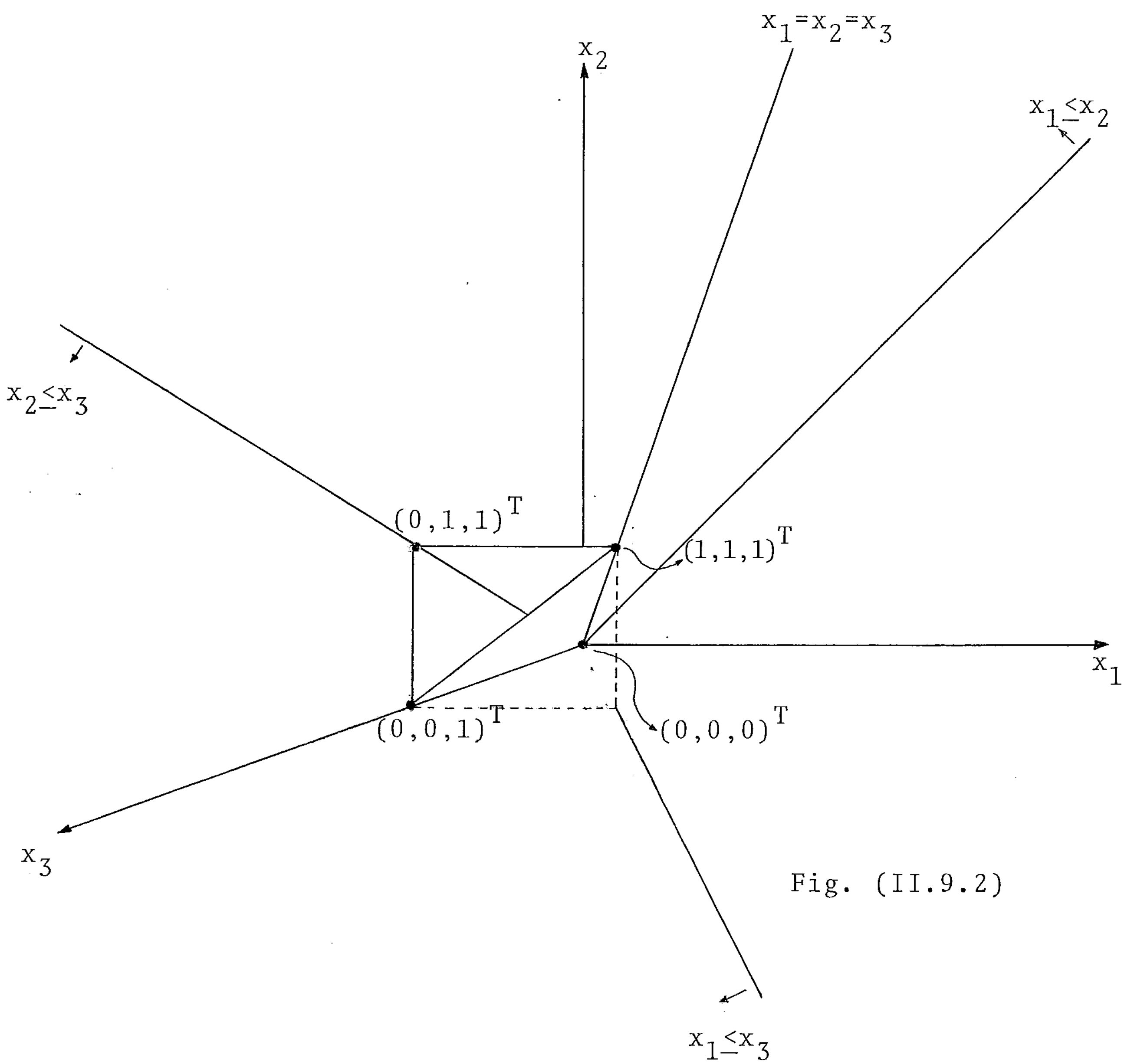


Fig. (II.9.2)

Da mesma forma, da fig.(II.9.2) observamos que o conjunto X é formado pelos seguintes pontos: $(0,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$, $(0,1,1)^T$ e $(1,1,1)^T$.

À vista dos exemplos dados, podemos concluir que o número de pontos do conjunto X, será sempre igual a $(n+1)$, sendo n o número de variáveis do problema primal.

Consideremos o seguinte conjunto:

$$Y = \{ x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\} .$$

O conjunto Y é a envoltória convexa do conjunto X, além de ser um conjunto compacto, denso e possuir p vertices, sendo $p = n+1$, e n o número de variáveis.

Para o exemplo da fig.(II.9.2), o conjunto Y é a envoltória convexa dos três pontos que constituem o conjunto X, isto é, é a envoltória convexa dos pontos $(0,0)^T$, $(0,1)^T$ e $(1.1)^T$. De outro modo, Y será definido por:

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\} .$$

Graficamente, podemos representá-lo:

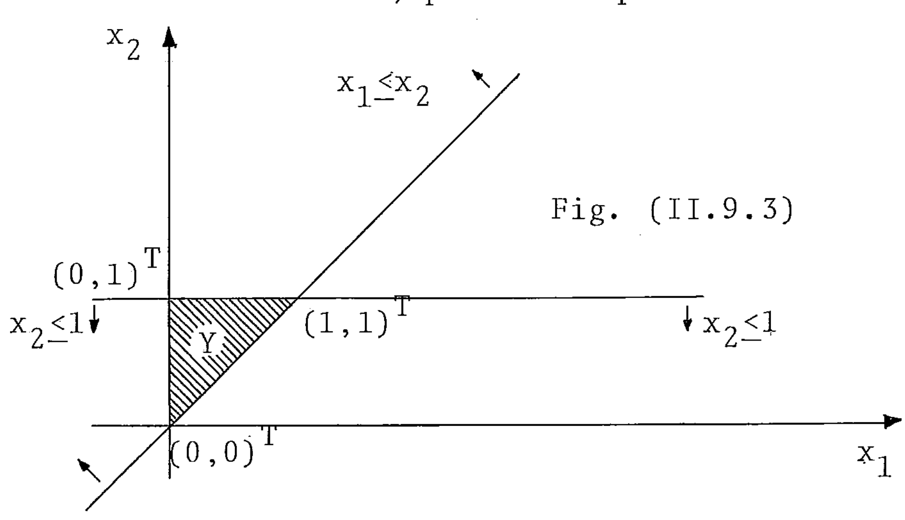


Fig. (II.9.3)

Para o exemplo da fig.(II.9.2), o conjunto Y será a envoltória convexa dos seguintes pontos: $(0,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$, $(0,1,1)^T$ e $(1,1,1)^T$. Podemos ainda, representá-lo da seguinte maneira:

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\} \quad .$$

Graficamente, temos:

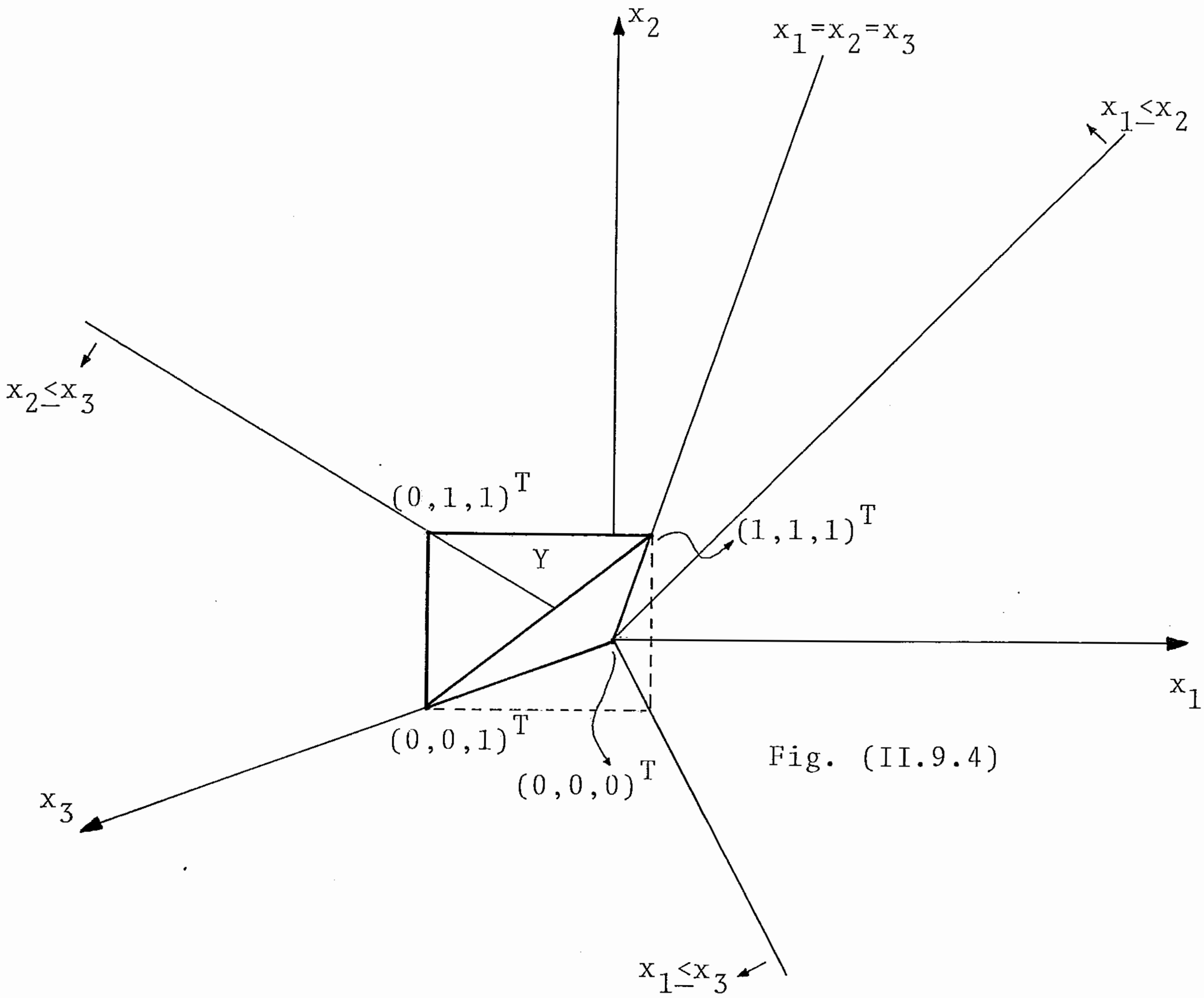


Fig. (II.9.4)

Na fig. (II.9.3) verificamos que os pontos $(0,0)^T$, $(0,1)^T$ e $(1.1)^T$ são os vértices do conjunto Y , ao mesmo tempo que são os pontos de X . Já, na fig.(II.9.4), os pontos $(0,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$, $(0,1,1)^T$ e $(1,1,1)^T$ são os vértices de Y e os pontos de X. À vista disto, podemos facilmente concluir que todo vértice de Y é um ponto de X.

Consideremos agora, o problema primal (P) com uma única restrição. Para isto, devemos associar a cada restrição $i(i = 1,\dots,m)$, de (II.9.2), uma variável dual não-negativa u_i, tal que, $u \in \mathbb{R}_+^m$, onde o conjunto $\mathbb{R}_+^m$ é definido da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}_+^m = \{u/u \in \mathbb{R}^m \text{ e } u \geq 0\} \quad .$$

Assim sendo, o problema primal (P) ficará:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad \{cx + u(Ax - b)\} \tag{II.9.8}$$
$$\text{sujeito à:} \quad x \in X \; .$$

Reescrevendo o problema (II.9.8) de uma maneira mais conveniente, teremos:

$$f(u) = \min \{cx + u(Ax - b)/x \in X\} \quad , \tag{II.9.9}$$

onde u é um vetor linha, cujas componentes são não-negativas. Assim, para um dado $u \geq 0$, $f(u)$ será uma função em termos de x, isto é:

$$f(u) = \min \{cx + uAx - ub/x \in X\} \quad ,$$

ou

$$f(u) = -ub + \min_{x \in X}\{cx + uAx\} \quad .$$

Como vimos anteriormente, os pontos de X são os vértices de Y, e assim, a função $f(u)$ dada acima, ficará:

$$f(u) = -ub + \min_{x \varepsilon Y}\{cx + uAx\} \quad . \tag{II.9.10}$$

O problema (II.9.10) é um problema de programação linear, portanto, o método do simplex fornecerá suas soluções, que obviamente serão os vértices de Y e os pontos de X .

O problema dual (D), do problema primal (P), será definido da seguinte maneira:

$$\underline{\text{maximizar}} \ \{f(u)\}$$
$$\text{sujeito à:} \quad u \geq 0 \quad , \tag{II.9.11}$$

ou mais explicitamente:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad [-ub + \min_{x\varepsilon Y}\{cx + uAx\}]$$
sujeito à:

$$u \geq 0 \quad .$$

Para $\forall u \ \varepsilon \ \mathbb{R}_+^m$, temos:

$$f(u) \leq x_o^* \ ,$$

onde x_o^* é o valor ótimo do objetivo primal.

Se o problema primal (P), não comportasse as restrições de integralidade, o problema (D) seria, o dual de um problema contínuo, e portanto teríamos:

$$f(u^*) = x_o^* \qquad ,$$

onde u^* seria a solução ótima do dual. Entretanto, levando em consideração as restrições de integralidade, temos:

$$f(u^*) \leq x_o^* \; .$$

A diferença $x_o^* - f(u^*)$ é o salto primal-dual ou "duality gap".

II.10. Propriedades do problema dual (D):

Seja $Y = \{x^k\}_{k=1,\ldots,p}$, onde x^k são os pontos extremos ou os vértices do poliedro convexo definido por (II.9.3) e (II.9.4).

Para $k = 1,\ldots,p$, definimos:

$$f(u,x^k) = -ub + cx^k + uAx^k \; .$$

Logo, a função $f(u)$ ficará:

$$f(u) = \min_{k=1\ldots p} f(u,x^k)$$

$$f(u) = \min_{k=1\ldots p} \{-ub + cx^k + uAx^k\} \; .$$

Vejamos algumas propriedades do problema dual.

Propriedade (II.10.1)

"A função $f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ é uma função côncava, onde

$$\mathbb{R}_+^m = \{u/u \in \mathbb{R}^m \text{ e } u \geq 0\} \quad ,$$

e

$$f(u) = \min_{k=1\ldots p} \{cx^k + u(Ax^k - b)/x \in X\}" \; .$$

Demonstração:

Sejam $u^o, u^1 \in \mathbb{R}^m_+$; $0 \leq \lambda \leq 1$; $x \in X$ e

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \; ; \; x_j \text{ inteiros}, j=1\dots,n\}.$$

$$f(u^o) = \min\{cx + u^o(Ax - b)\}$$

$$f(u^1) = \min\{cx + u^1(Ax - b)\} \; .$$

Seja $0 \leq \lambda \leq 1$ e

$$u = \lambda u^o + (1 - \lambda)u^1 \; .$$

Como $u^o, u^1 \in \mathbb{R}^m_+$, então $u \in \mathbb{R}^m_+$, logo,

$$f(u) = \min \{cx + u(Ax - b)\}$$

$$f(u) = \min\{cx + [\lambda u^o + (1-\lambda)u^1](Ax-b)\}$$

$$f(u) = \min\{cx + \lambda u^o(Ax-b) + (1-\lambda)u^1(Ax-b)\}$$

$$f(u) = \min\{cx + \lambda cx - \lambda cx + \lambda u^o(Ax-b) + (1-\lambda)u^1(Ax-b)\}$$

$$f(u) = \min\{\lambda cx + \lambda u^o(Ax-b) + (1-\lambda)cx + (1-\lambda)u^1(Ax-b)\}$$

$$f(u) \geq \min\{\lambda cx + \lambda u^o(Ax-b)\} + \min\{(1-\lambda)cx + (1-\lambda)u^1(Ax-b)\}$$

$$f(u) \geq \lambda \min \{cx + u^o(Ax-b)\} + (1-\lambda)\min\{cx + u^1(Ax-b)\} \; ,$$

portanto:

$$f(u) \geq \lambda f(u^o) + (1 - \lambda) f(u^1) \; ,$$

ou ainda,

$$f[\lambda u^o + (1-\lambda)u^1] \geq \lambda f(u^o) + (1-\lambda)f(u^1) \; ,$$

logo, a função $f(u)$ é uma função côncava.

Propriedade (II.10.2):

"Se x for uma solução viável do problema primal e se $u \geq 0$, então:

$$cx \geq f(u)."$$

Demonstração

Se x for viável para o problema primal, teremos:

$$Ax \leq b \quad e \quad x \in X \quad .$$

Como $u \geq 0$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$u(Ax - b) \leq 0 \quad ,$$

ou ainda:

$$cx + u(Ax - b) \leq cx \quad ,$$

isto para todos os pontos viáveis do problema primal e para todos os $u \geq 0$. Em particular para:

$$\text{mix}\ \{cx + u(Ax - b)\} \leq cx \quad ,$$

portanto:

$$f(u) \leq cx \quad .$$

A propriedade (II.10.2) é válida para qualquer $u \in \mathbb{R}^m_+$ e para qualquer x viável para o problema primal, e em particular, podemos ter:

$\underline{\text{máx}}\{f(u)/u \geq 0\} \leq \underline{\min} \{cx/Ax \leq b \text{ e } x \in X\}$.

Suponhamos que x^* seja a solução ótima do problema primal (P) e, u^* a solução ótima do dual (D), assim:

$$f(u^*) \leq cx^* ,$$

isto é, o ótimo do dual é um limite inferior para o ótimo do primal.

II.11. Resolução do dual por programação linear

A facilidade com que resolvemos o programa dual, justifica o interesse por ele despertado, assim sendo, apresentaremos um método de resolução do problema dual (D), por programação linear.

Veremos que este método, não é outro senão a aplicação do princípio de decomposição de Dantzig e Wolfe, ao problema primal (P), onde a restrição de integralidade é relaxada.

Assim, para um dado $u \geq 0$, resolveremos o seguinte problema:

$$f(u) = \min \{cx + u(Ax - b)\}$$

sujeito à:

$$x \in X .$$

O conjunto X é um conjunto formado por todo os vértices de Y , portanto, podemos substituir o problema ante rior pelo seguinte:

$$f(u) = \min \{cx + u(Ax - b)\}$$
sujeito à: (II.11.1)
$$x \in Y ,$$

pois, este é um problema de programação linear, admitindo ao menos uma solução ótima em um vértice de Y , ver Dantzig |4|. Como esse vértice de Y é um ponto de X , então a solução do problema (II.11.1) é a mesma do dual (D) , dado em (II.9.9). Assim, para um dado vetor linha $u \geq 0$, temos:

$$f(u) = -ub + \min\{(c + uA)x\}$$
sujeito à:
$$x \in Y .$$

Um ponto extremo de Y fornecerá o mínimo de $f(u)$, assim, representaremos a sequência $\{x^k\}_{k=1...p}$ como sendo o conjunto de todos os vértices de Y, desta forma, temos:

$$f(u) = -ub + \min_{k=1...p} \{(c + uA)x^k\} . \qquad \text{(II.11.2)}$$

Nosso objetivo é resolver o problema dual (D) , isto é:

maximizar $\{f(u)\}$
sujeito à: $u \geq 0$.

Para resolvermos este problema, vamos supor que o máximo de $f(u)$ seja igual a w , assim, o problema ficará reduzido a:

<u>maximizar</u> w

sujeito à:

$$w = -ub + \min\{(c + uA)x^k\} \quad , \quad k = 1,\dots,p \ ,$$

$$u \geq 0 \ ,$$

ou ainda:

<u>maximizar</u> w

sujeito à:

$$w \leq -ub + (c + uA)x^k \quad , \quad k = 1,\dots,p \ ,$$

$$u \geq 0 \ . \qquad \text{(II.11.3)}$$

É importante frisar que os vetores x^k , $k=1\dots p$, são considerados como dados para o problema (II.11.3). Além disso, supondo-se que o par (w^*,u^*) seja o ótimo deste problema, teremos $f(u^*) = w^*$, resolvendo desta maneira o dual (D), definido em (II.9.9). Entretanto, o problema (II.11.3) é um problema com m variáveis e um número muito grande de restrições, isto é, um número muito grande de linhas, e para resolvê-lo, poderíamos optar por um método de geração de linhas, ver Lasdon |6|. No entanto, escolhemos uma outra maneira para o cálculo de w^* . Colocaremos o problema definido em (II.11.3), sob outra forma, isto é:

<u>maximizar</u> $t = w$

sujeito à:

$$w - u(Ax^k - b) \leq cx^k \quad , \ k = 1,\dots,p \ , \qquad \text{(II.11.4)}$$

$$u \geq 0 \ .$$

O dual de (II.11.4) será:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\,\lambda_k \tag{II.11.5}$$

sujeito à:

$$-\sum_{k=1}^{p} (Ax^k - b)\,\lambda_k \geq 0 \tag{II.11.6}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \tag{II.11.7}$$

$$\lambda_k \geq 0 \ , \ k = 1,\ldots,p \ , \tag{II.11.8}$$

onde os λ_k são as variáveis primais.

Faremos a seguir, algumas modificações necessárias no problema (II.11.5) - (II.11.8):

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\,\lambda_k$$

sujeito à:

$$-\sum_{k=1}^{p} (Ax^k)\lambda_k + \sum_{k=1}^{p} b\ \lambda_k \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \ , \quad k = 1,\ldots,p \ .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \ v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\ \lambda_k$$

sujeito à:

$$-\sum_{k=1}^{p} (Ax^k)\ \lambda_k + b \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad k = 1,\ldots,p \ .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\, \lambda_k$$

sujeito à:

$$-\sum_{k=1}^{p} (Ax^k)\, \lambda_k \geq -b$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad k = 1,\ldots,p \; .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\, \lambda_k$$

sujeito à:

$$\sum_{k=1}^{p} (Ax^k)\, \lambda_k \leq b$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \qquad \text{(II.11.9)}$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad k = 1,\ldots,p \; ;$$

O problema (II.11.9), tem inúmeras colunas, e para encontrarmos sua solução usaremos o método de decomposição do tipo Dantzig - Wolfe |6|, |12|: utilizando o método revisado do simplex |4|, com uma solução básica inicial, que poderá, ser artificial, e geraremos, a seguir colunas que entrarão na base em substituição de outras.

Assim, introduzindo $s \in \mathbb{R}_+^m$, cujas componentes representarão as variáveis de folga, transformaremos o problema (II.11.9) na forma padrão de problemas de programação linear:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k) \cdot \lambda_k$$

sujeito à:

$$\sum_{k=1}^{p} (Ax^k) \cdot \lambda_k + s = b$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0 \ , \quad k = 1,\ldots,p \ ,$$

$$s \geq 0 \ .$$

O problema acima na forma matricial, ficará:

$\underline{\text{minimizar}}$ v

sujeito à:

$$\begin{bmatrix} 1 & -cx^1 & -cx^2 & \ldots & cx^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Ax^1 & Ax^2 & \ldots & Ax^p & e_1 & \ldots & e_m \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.11.10)}$$

A partir de uma solução básica viável construiremos o quadro inicial do simplex revisado, entretanto, caso não seja possível sua determinação imediata, começaremos com uma solução básica artificial. Assim, seja B a matriz $(m+1)$ por $(m+1)$ associada à base inicial; c_B o vetor linha dos coeficientes (cx^k) das variáveis primais λ_k e (0) das variáveis de folga s_i, na função objetivo, associados à base B. Seja a_j um vetor coluna, tal que:

$$a_k = \left[Ax^k, 1\right]^T \quad ,$$

ou

$$a_i = \left[e_i, 0\right]^T \quad .$$

Além disso, sejam

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

$$u = c_B B^{-1}$$

$$\bar{v} = c_B \bar{b} \quad ,$$

de forma que, o quadro inicial ficará:

Quadro inicial

$\bar{v}$	1	$u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}$	
$\bar{b}$	0	B^{-1}	

coluna onde será colocada o vetor que entrará na base, após ser atualizado.

Para sabermos se este quadro é ótimo ou não, devemos verificar se duas condições são satisfeitas, isto é, se:

(i) $u_2 \geq 0 \; \ldots . \; u_{m+1} \geq 0$,

(ii) todos os $ua_k - cx^k \leq 0$, para todos os k associados aos λ_k não-básicos, ver |6|.

Procederemos da seguinte maneira: primeiramente, verificaremos se todos os u_i são não-negativos, isto é, $u_i \geq 0$, $i = 2, \ldots, m+1$. Caso exista um $u_i < 0$, a variável s_{i-1} é candidata a entrar na base e o vetor

$a_{i-1} = [e_{i-1},0]^T$ é atualizado, isto é, $B^{-1}\ a_{i-1}$, que no estágio atual é a própria i-ésima coluna de B^{-1}, já explícita no quadro do simplex. Após o pivoteamento com a coluna i ,a variável s_{i-1} entrará na base. Quando todos os u_i forem não-negativo, então, procuraremos o máximo dos $u\ a_k - cx^k$, $k = 1,\ldots,p$. Para isto, resolveremos o seguinte problema auxiliar:

<u>maximizar</u> $\{ua_k - cx^k\}$

sujeito à: $x^k \in X$,

ou

<u>maximizar</u> $\{u[Ax,1]^T - cx\}$

sujeito à: $x \in X$.

Agora, fazendo $u = [u_1,u_o]$ temos:

<u>maximizar</u> $\{[u_1,u_o]\begin{bmatrix}Ax\\1\end{bmatrix} - cx\}$

sujeito à: $x \in X$.

<u>maximizar</u> $\{u_1Ax + u_o - cx\}$

sujeito à: $x \in X$.

<u>maximizar</u> $\{u_o + (u_1A - c)x\}$

sujeito à: $x \in X$. (II.11.11)

Nosso problema agora, será resolver (II.11.11) e para isto, vamos colocá-lo sob uma forma mais conveniente, assim:

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{maximizar}} & \{qx^j\} \\ \text{sujeito à:} & x^j \in X \,. \end{array} \qquad \text{(II.11.12)}$$

onde $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ é um vetor linha dado e os x^j, $j = 1,\ldots,p$, os pontos de X. Assim, para obtermos a solução ótima deste problema auxiliar, devemos calcular os s_p, $p = 1\ldots,n$, definidos da seguinte maneira:

$$s_p = \sum_{j=p}^{n} q_j \qquad , \quad p = 1,\ldots,n \quad . \qquad \text{(II.11.13)}$$

Tomemos agora, s_k, tal que:

$$s_k = \max_{p=1,\ldots,n} \{s_p\} \quad . \qquad \text{(II.11.14)}$$

À vista disto, devemos considerar dois casos:

(i) $\boxed{s_k \leq 0}$

Se $s_k \leq 0$, a solução ótima do problema (II.10.12) será:

$$\hat{x}_j = 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \quad ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x} = (0,\ldots,0)^T} \,.$$

(ii) $\boxed{s_k > 0}$

Se $s_k > 0$, a solução ótima do problema (II.11.12) será:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1} = \ldots\ldots = \hat{x}_n = 1$$

e

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \ldots\ldots = \hat{x}_{k-1} = 0 \quad ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots\ldots, 1}_{(n-k+1) \text{ elementos unitários}})^T} \quad .$$

Observamos que, no caso de existir somente um k satisfazendo (II.11.14), a solução ótima do problema auxiliar será única.

Supondo que $\hat{x}$ seja a solução ótima do problema (II.11.12), passamos ao cálculo de $\{u_o + (u_1A - c)\hat{x}\}$. Aqui também, há dois casos a considerar:

(i) se $\{u_o + (u_1A-c)\hat{x}\} > 0$, então, devemos gerar o vetor coluna λ^0 correspondente à variável λ_0 que entrará na base:
$\lambda^0 = (u_o + (u_1A - c)\hat{x} \ ; \ B^{-1}[A\hat{x},1]^T)^T$.

(ii) caso contrário, isto é, se $\{u_o+(u,A-c)\hat{x}\} \leq 0$, o quadro é ótimo.

II.12. Exercício resolvido

Usaremos novamente, um exercício para um entendimento melhor do que foi estudado até o momento.

Exercício II.12.1:

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{minimizar}} & x_o = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 \\ \text{sujeito à:} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 \leq 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1 \\ & x_j \in \{0,1\} \quad , \quad j = \overline{1,6} \; . \end{array}$$

Seja o conjunto X :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^6 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1 \; , \; x_j \in \{0,1\}, \; j = \overline{1,6}\} \; ,$$

assim, o problema inicial ficará:

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{minimizar}} & x_o = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 \\ \text{sujeito à:} & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 \leq 3 \\ & x \in X \; . \end{array}$$

Seja agora, o seguinte conjunto:

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^6 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1\} \; .$$

O conjunto Y é a envoltória convexa dos pontos de X, e sendo um poliedro limitado, qualquer ponto de Y pode ser escrito como uma combinação convexa de seus pontos extremos, assim:

$$\forall x \in Y \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ ,$$

onde $p = n+1$, sendo n o número de variáveis. Assim, o número de vértices do problema original será, $p = n+1 = 6+1= 7$.

Substituindo a expressão de x dada acima, no problema inicial, temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(-4 \ -2 \ 3 \ 2 \ -3 \ 2)x^j]\lambda_j$$

$\underline{\text{sujeito à}}$

$$\sum_{j=1}^{p} [(1 \ 2 \ -1 \ 2 \ 1 \ -1)x^j]\lambda_j \leq 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1 \ 1 \ -4 \ -5 \ 4 \ 5)x^j]\lambda_j \leq 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2 \ -3 \ 1 \ 3 \ -3 \ 3)x^j]\lambda_j \leq 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ .$$

Introduzindo as variáveis de folta s_1, s_2 e s_3, e a variável artificial λ_a, ao problema acima, obtemos o seguinte problema:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(-4\ -2\ 3\ 2\ -3\ 2)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 2\ -1\ 2\ 1\ -1)x^j]\lambda_j + s_1 = 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 1\ -4\ -5\ 4\ 5)x^j]\lambda_j + s_2 = 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ -3\ 1\ 3\ -3\ 3)x^j]\lambda_j + s_3 = 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \quad j = 1,\dots,p \ ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ ,$$

$$s \geq 0 \ .$$

Aplicaremos a seguir, o método duas fases, para obtermos uma solução básica viável inicial:

<u>1.ª Fase</u>:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad \xi = \lambda_a$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 2\ -1\ 2\ 1\ -1)x^j]\lambda_j + s_1 = 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 1\ -4\ -5\ 4\ 5)x^j]\lambda_j + s_2 = 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ -3\ 1\ 3\ -3\ 3)x^j]\lambda_j \qquad\qquad + s_3 \qquad = 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda_a = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ ,$$

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \ \geq 0 \ .$$

Passemos agora, a construção do seguinte quadro:

ξ	1	$[\ \xi_{s_1}$	ξ_{s_2}	ξ_{s_3}	$\xi_{s_a}\ ]$	$[\bar{\xi}]$
s_1	0					
s_2	0		B^{-1}			$\bar{b}$
s_3	0					
λ_a	0					

onde:

$$\bar{\xi} = \xi_B\ B^{-1}\ b$$

$$\xi_{s_1} = \xi_B\ B^{-1}\ e_{s_1}$$

$$\xi_{s_2} = \xi_B\ B^{-1}\ e_{s_2}$$

$$\xi_{s_3} = \xi_B\ B^{-1}\ e_{s_3}$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B\ B^{-1}\ e_{\lambda_a} \ .$$

Do problema (II.12.1), tiramos os seguintes resultados:

$$\xi_B = (c_{s_1},\ c_{s_2},\ c_{s_3},\ c_{\lambda_a}) \quad ,$$

portanto:

$$\xi_B = (0,0,0,1)$$

$$B = B^{-1} = I_4 = \left[e_{s_1}, e_{s_2}, e_{s_3}, e_{s_4}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = (2\ \ 4\ \ 3\ \ 1)^T \quad .$$

Efetuando os devidos cálculos, obtemos:

$$\xi_B\, B^{-1} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$\xi_{s_1} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_2} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_3} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{\xi} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{b} = B^{-1}\, b = b = (2\ 4\ 3\ 1)^T \ .$$

						$\bar{b}$
ξ	1	0	0	0	1	1
s_1	0	1	0	0	0	2
s_2	0	0	1	0	0	4
s_3	0	0	0	1	0	3
λ_a	0	0	0	0	1	1

Quadro (Q.II.12.1)

Do quadro (Q.II.12.1), inferimos:

$$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 0\ 1)$$

$$B^{-1} = I_4 \quad .$$

Consideremos agora, o seguinte problema auxiliar (P.A.):

<u>maximizar</u> $\left\{(u_1, u_o)\begin{bmatrix} A\, x^j \\ 1 \end{bmatrix} - cx^j\right\}$

sujeito à: $x^j \in X$.

ou

<u>maximizar</u> $(0\ 0\ 0\ 1)\begin{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -5 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} x^j \\ 1 \end{bmatrix} - 0$

sujeito à:

$x^j \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ 1

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$

$x_j \in \{0,1\}$, $j = 1,2,3,4,5,6$.

Como o máximo do problema auxiliar é igual a 1, , $\sqrt{}_j$, e portanto positivo, podemos, tomar como solução qualquer valor de x , isto é, podemos iniciar considerando a seguinte solução:

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T} \ .$$

Nosso objetivo é obter $\lambda_a = 0$, assim sendo, devemos gerar um vetor coluna λ^1 associado ao escalar λ_1 , que deverá entrar na base no lugar de λ_a . Desta forma, realizemos os seguintes cálculos:

$$[A\hat{x}^1,\ 1]^T = [0\ 0\ 0\ 1]^T$$

$$y_1 = B^{-1}\ [A\hat{x}^1, 1]^T = I\,[0\ 0\ 0\ 1]^T = [0\ 0\ 0\ 1]^T$$

$$z_1 - \hat{c}_1 = 1 \ ,$$

assim, o vetor gerado λ^1 , associado ao escalar λ_1, será:

$$\lambda^1 = (z_1 - \hat{c}_1\ ;\ B^{-1}[A\hat{x}^1,\ 1]^T)^T \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^T} \qquad \rightarrow \qquad (Q.II.12.1)$$

Introduzindo o vetor coluna λ^1 no quadro (Q.II.

12.1), obtemos outro quadro (Q.II.12.2):

$\downarrow\lambda^1$

	ξ	1	0	0	0	1	1	1
	s_1	0	1	0	0	0	2	0
	s_2	0	0	1	0	0	4	0
	s_3	0	0	0	1	0	3	0
$\leftarrow$	λ_a	0	0	0	0	1	1	1

(Q.II.12.2)

Após o pivoteamento, obtemos:

$\downarrow\lambda^1$

v	1	0	0	0	0	0	0
s_1	0	1	0	0	0	2	0
s_2	0	0	1	0	0	4	0
s_3	0	0	0	1	0	3	0
λ_1	0	0	0	0	1	1	1

Q.II.12.3)

$\rightarrow$ quadro inicial

Eliminando a coluna associada à variável λ_1 do quadro (Q.II.12.3), obteremos finalmente, o quadro inicial, e poderemos aplicar o método de Dantzig e Wolfe.

Iteração 1

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \{(u_1, u_0)\begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - cx\}$$

sujeito à: $x \in X$.

Do quadro (Q.II.12.3), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 0\ 0)$$

$$B^{-1} = I_4$$

$$\overline{b} = (2\ 4\ 3\ 1)^T .$$

Substituindo esses valores no problema acima, temos:

$$\underline{\text{maximizar}} \left\{ (0\ 0\ 0\ 0) \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -5 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} x^j \\ 1 \end{matrix} \right] - (-4\ -2\ 3\ 2\ -3\ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \right\}$$

sujeito à: $x^j \in X$.

$$\underline{\text{maximizar}}\ \{4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 2x_6\}$$

$$\text{sujeito à:}\quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$$

$$x_j \in \{0,1\}\ ,\ j = 1,2,3,4,5,6 .$$

Para obtermos a solução ótima do problema auxiliar, procederemos da seguinte maneira, seja:

$$s_p = \sum_{j=p}^{n} q_j \quad , \quad p = 1,\ldots,6 \ ,$$

onde

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (4\ 2\ -3\ -2\ 3\ -2) .$$

Assim sendo, temos:

$$s_1 = \sum_{j=1}^{6} q_j$$

$$s_1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 4 + 2 - 3 - 2 + 3 - 2 = 2 \rightarrow$$

$$\boxed{s_1 = 2}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{6} q_j$$

$$s_2 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 2 - 3 - 2 + 3 - 2 = -2 \rightarrow \boxed{s_2 = 2}$$

$$s_3 = \sum_{j=3}^{6} q_j$$

$$s_3 = q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = -3 - 2 + 3 - 2 = -4 \rightarrow \boxed{s_3 = -4}$$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{6} q_j$$

$$s_4 = q_4 + q_5 + q_6 = -2 + 3 - 2 = -1 \rightarrow \boxed{s_4 = -1}$$

$$s_5 = \sum_{j=5}^{6} q_j$$

$$s_5 = q_5 + q_6 = 3 - 2 = 1 \rightarrow \boxed{s_5 = 1}$$

$$s_6 = \sum_{j=6}^{6} q_j$$

$$s_6 = q_6 = -2 \rightarrow \boxed{s_6 = -2} \, .$$

Seja:

$$s_k = \max_{p=1\ldots6} \{s_p\} = \max\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

$$s_k = \text{máx}\{2, -2, -4, 1, -2\} = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_k = 2}$$

$$\boxed{s_k = s_1 = 2}.$$

Portanto, a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = \hat{x}_6 = 1$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^2 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^T}.$$

Calculemos agora, o valor $z_2 - \hat{c}_2$, isto é:

$$z_2 - \hat{c}_2 = 4\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 + 3\hat{x}_5 - 2\hat{x}_6$$

$$z_2 - \hat{c}_2 = 4 + 2 - 3 - 2 + 3 - 2 = 2$$

$$\boxed{z_2 - \hat{c}_2 = s_1 = 2.}$$

Como $z_2 - \hat{c}_2$ é positivo devemos gerar o vetor coluna λ^2 , associado ao escalar λ_2 e definido por:

$$\lambda^2 = (z_2 - \hat{c}_2\ ,\ y_2)^T \quad ,$$

onde:

$$y_2 = B^{-1}[A\hat{x}^2, 1]^T = I\,[A\hat{x}^2, 1]^T = [A\hat{x}^2, 1]^T$$

portanto:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & +2 & -1 & +2 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -4 & -5 & +4 & +5 \\ 2 & -3 & +1 & +3 & -3 & +3 \\ & & & 1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda^2 = (2,\ 4,\ 0,\ 3,\ 1)^T} \quad . \quad \rightarrow \qquad (Q.II.12.3)$$

Introduzindo o vetor coluna λ^2 no quadro (Q.II. 12.3), obtemos o seguinte quadro:

							↓ λ^2
v	1	0	0	0	0	0	2
← s_1	0	1	0	0	0	2	4
s_2	0	0	1	0	0	4	0
s_3	0	0	0	1	0	3	3
λ_1	0	0	0	0	1	1	1

(Q.II.12.4)

Após o pivoteamento, teremos:

							↓ λ^2
v	1	-1/2	0	0	0	-1	0
λ_2	0	1/4	0	0	0	1/2	1
s_2	0	0	1	0	0	4	0
s_3	0	-3/4	0	1	0	3/2	0
λ_1	0	-1/4	0	0	1	1/2	0

(Q.II.12.5)

Iteração 2

Do quadro (Q.II.12.5), tiramos os seguinte resultados:

$$(u_1, u_o) = (-1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$$

$$\bar{v} = -1$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$\underline{\text{maximizar}}$ $\quad \{(u_1, u_o) \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - cx\}$

sujeito à: $\quad x \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $\quad (-1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -5 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} x^j \\ 1 \end{bmatrix} - (-4 \;\; -2 \;\; 3 \;\; 2 \;\; -3 \;\; 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

sujeito à:

$\quad x^j \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $\quad \{-1/2(x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5-x_6)-(-4x_1-2x_2+3x_3+2x_4-3x_5+2x_6)\}$

sujeito à: $\quad x^j \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $\quad \{7/2x_1 + x_2 - 5/2x_3 - 3x_4 + 5/2x_5 - 3/2x_6\}$

sujeito à: $\; 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$

$\quad x_j \in \{0,1\}$, $j=1,2,3,4,5,6$.

A solução ótima do problema auxiliar será determinada do seguinte modo:

$$s_p = \sum_{j=p}^{6} q_j \qquad , \qquad p = 1,\dots,6 \quad ,$$

onde:

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (7/2,\ 1,\ -5/2,\ -3,\ 5/2,\ -3/2) \ ,$$

portanto:

$$s_1 = \sum_{j=1}^{6} q_j$$

$$s_1 = q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = 7/2 + 1 - 5/2 - 3 + 5/2 - 3/2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_1 = 0}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{6} q_j$$

$$s_2 = q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = 1 - 5/2 - 3 + 5/2 - 3/2 = -7/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_2 = -7/2}$$

$$s_3 = \sum_{j=3}^{6} q_j$$

$$s_3 = q_3+q_4+q_5+q_6 = -\ 5/2 - 3 + 5/2 - 3/2 = -9/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_3 = -\ 9/2}$$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{6} q_j$$

$$s_4 = q_4+q_5+q_6 = -\ 3 + 5/2 - 3/2 = -2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = -2}$$

$$s_5 = \sum_{j=5}^{6} q_j$$

$$s_5 = q_5+q_6 = 5/2 - 3/2 = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_5 = 1}$$

$$s_6 = \sum_{j=6}^{6} q_j$$

$$s_6 = q_6 = -3/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_6 = -3/2}$$

$$s_k = \text{máx}\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\} = \text{máx}\{0,-7/2,-9/2,-2,1,-3/2\} = 1$$

$$\boxed{s_k = s_5 = 1} ,$$

logo, a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_5 = \hat{x}_6 = 1$$

e

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = 0$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)^T} .$$

Calculemos agora, $z_3 - \hat{c}_3$, isto é:

$$z_3 - \hat{c}_3 = 7/2\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 5/2\ \hat{x}_3 - 3\ \hat{x}_4 + 5/2\ \hat{x}_5 - 3/2\ \hat{x}_6$$

$$z_3 - \hat{c}_3 = 5/2 - 3/2 = 1$$

$$\boxed{z_3 - \hat{c}_3 = s_5 = 1 .}$$

Como $z_3 - \hat{c}_3$ é positivo, devemos gerar o vetor coluna λ^3 associado ao escalar λ_3, dado por:

$$\lambda^3 = (z_3 - \hat{c}_3 \ ; \ B^{-1}[A\hat{x}^3, \ 1]^T)^T \quad ,$$

onde:

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 4 + 5 \\ -3 + 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B^{-1}\begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

logo,

$$\boxed{\lambda^3 = (1, \ 0, \ 9, \ 0, \ 1)^T} \ . \qquad \rightarrow \quad \text{(Q.II.12.5)}$$

Introduzindo o vetor λ^3 no quadro (Q.II.12.5) obtemos o seguinte quadro:

							$\downarrow \lambda^3$
v	1	-1/2	0	0	0	-1	1
λ_2	0	1/4	0	0	0	1/2	0
$\leftarrow s_2$	0	0	1	0	0	4	9
s_3	0	-3/4	0	1	0	3/2	0
λ_1	0	-1/4	0	0	1	1/2	1

(Q.II.12.6)

Após o pivoteamento, temos:

							$\downarrow \lambda^3$
v	1	-1/2	-1/9	0	0	-13/9	0
λ_2	0	1/4	0	0	0	1/2	0
λ_3	0	0	1/9	0	0	4/9	1
s_3	0	-3/4	0	1	0	3/2	0
λ_1	0	-1/4	-1/9	0	1	1/18	0

(Q.II.12.7)

Iteração 3

Do quadro (Q.II.12.7), tiramos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (-1/2 \ \ -1/9 \ \ 0 \ \ 0)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passemos portanto, a resolução do problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad (-1/2 \ \ -1/9 \ \ 0 \ \ 0) \begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+4x_5+5x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+3x_4-3x_5+3x_6 \\ 1 \end{bmatrix} - (-4 \ \ -2 \ \ 3 \ \ 2 \ \ -3 \ \ 2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

sujeito à:

$$x \in X \quad .$$

maximizar $\{-1/2(x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5-x_6)-1/9(-x_1+x_2-4x_3-5x_4+4x_5+5x_6)-(-4x_1+$
sujeito à:
$-2x_2+3x_3+2x_4-3x_5+2x_6)\}$

$x \varepsilon X$.

maximizar $\{65/18\ x_1 + 65/18\ x_2 - 37/18\ x_3 - 44/18\ x_4 + 37/18\ x_5 - 37/18\ x_6\}$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$

$x_j \ \varepsilon \ \{0,1\}$, $j = 1,2,3,4,5,6$.

A solução ótima do problema acima, será:

$$s_p = \sum_{j=p}^{6} q_j \qquad , \quad p = 1,\ldots,6 \quad .$$

$$s_1 = \sum_{j=1}^{6} q_j$$

$$s_1 = q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = 65/18 + 16/18 - 37/18 - 44/18 + 37/18 - 37/18 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{s_1 = 0}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{6} q_j$$

$$s_2 = q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 = 16/18 - 37/18 - 44/18 + 37/18 - 37/18 = -65/18 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{s_2 = -68/18}$$

$$s_3 = \sum_{j=3}^{6} q_j$$

$$s_3 = q_3+q_4+q_5+q_6 = -37/18 - 44/18 + 37/18 - 37/18 =-81/18 \rightarrow \boxed{s_3 = -81/18}$$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{6} q_j$$

$$s_4 = q_4+q_5+q_6 = -44/18 + 37/18 - 37/18 = -44/18 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = -44/18}$$

$$s_5 = \sum_{j=5}^{6} q_j$$

$$s_5 = q_5 + q_6 = 37/18 - 37/18 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_5 = 0}$$

$$s_6 = \sum_{j=6}^{6} q_j$$

$$s_6 = q_6 = -37/18 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_6 = -37/18}$$

$$s_k = \text{máx}\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}=\text{máx}\{0,-65/18,-81/18,-44/18,0,-37/18\} = 0$$

$$\boxed{s_k = s_1 = s_5 = 0\,.}$$

Portanto, a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = \hat{x}_6 = 0$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^4 = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T.}$$

Passemos agora, ao cálculo de $z_4 - \hat{c}_4$, isto é:

$$z_4 - \hat{c}_4 = 65/18\ \hat{x}_1 + 16/18\ \hat{x}_2 - 37/18\ \hat{x}_3 - 44/18\ \hat{x}_4 + 37/18\ \hat{x}_5 - $$
$$- 37/18\ \hat{x}_6 = 0$$

$$\boxed{z_4 - \hat{c}_4 = 0 .}$$

Como $z_4 - \hat{c}_4$ é igual a zero, a solução ótima do problema auxiliar é $\hat{x}^4$, ou

$$\boxed{\hat{x}^4 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T} ,$$

que é igual a solução $\hat{x}^1$.

As soluções encontradas pelo método, são as seguintes:

$\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T \rightarrow x_o^* = 0 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^2 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow x_o^* =-2 \rightarrow$ solução. inviável

$\hat{x}^3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)^T \rightarrow x_o^* =-1 \rightarrow$ solução inviável.

As outras soluções que não foram obtidas pelo método são:

$\hat{x}^4 = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow x_o^* = 1 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^5 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow x_o^* = 4 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^6 = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow x_o^* = 2 \rightarrow$ solução inviável

$\hat{x}^7 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T \rightarrow x_o^* = 2 \rightarrow$ solução inviável .

Das soluções obtidas pelo método, a única viável é realmente $\hat{x}^1$, e de todas as soluções viáveis ($\hat{x}^1$,$\hat{x}^4$ e $\hat{x}^5$), aquela que nos fornece o valor mínimo da função objetivo também é a solução $\hat{x}^1$, logo, esta será a solução ótima do problema auxiliar.

Como $z_4 - \hat{c}_4 = 0$, o quadro (Q.II.12.7) é ótimo. Deste quadro, temos que:

$$\lambda_1^* = 1/18 \text{ associado à } \hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T \ ,$$

$$\lambda_2^* = 1/2 \text{ associado à } \hat{x}^2 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \ ,$$

$$\lambda_3^* = 4/9 \text{ associado à } \hat{x}^3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)^T \ .$$

Assim, a solução ótima para o problema original será:

$$x^* = \lambda_1^* \hat{x}^1 + \lambda_2^* \hat{x}^2 + \lambda_3^* \hat{x}^3 \ ,$$

uma vez que:

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = 1$$

$$x^* = \frac{1}{18}(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T + \frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T + \frac{4}{9}(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)^T$$

$$x^* = (1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2)^T + (0\ 0\ 0\ 0\ 4/9\ 4/9)^T$$

$$\boxed{x^* = (1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2\ 17/18\ 17/18)^T .}$$

II.13. Variáveis ordenadas limitadas

Supondo agora, que as variáveis além de ordenadas são também, limitadas superiormente por um número positivo diferente de um, poderemos considerar o seguinte problema de programação linear com variáveis ordenadas e limitadas superiormente:

<u>minimizar</u> $z = cx$ (II.13.1)

sujeito à: $Ax \leq b$ (II.13.2)

$0 \leq x_j \leq x_{j+1} \leq d \ , \quad j=1,\ldots,n-1 \ ,$ (II.13.3) onde c é um vetor linha com n componentes; x um vetor coluna com n componentes; b um vetor coluna com m componentes; A uma matriz com m linhas e n colunas e d um número positivo e diferente de 1, isto é, $d > 0$ e $d \neq 1$, logo, $d > 1$.

Consideremos o seguinte conjunto:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; 0 \leq x_j \leq x_{j+1} \leq d \;,\; j=1,\ldots,n-1 \;\text{ e }\; d > 1\} \;.$$

Este conjunto representa as restrições que possuem estruturas especiais, sendo também um conjunto poliédrico, e pode ser representado de uma maneira mais conveniente, isto é:

$$\begin{array}{lcl} -x_1 & \leq & 0 \\ x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ & \vdots & \\ \qquad\qquad x_{n-1} - x_n & \leq & d \;. \end{array} \qquad \text{(II.13.4)}$$

O sistema (II.13.4) possue n desigualdades, sendo que, o número de vértices de X, representado por (II.13.4), é igual a $(n+1)$. Tais vértices podem ter a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} \hat{x}^0 &= (0,\ 0,\ldots,\ 0,0)^T \\ \hat{x}^1 &= (0,\ 0,\ldots,\ 0,d)^T \\ \hat{x}^2 &= (0,\ 0,\ldots,\ d,d)^T \\ &\vdots \\ \hat{x}^{n-1} &= (0,\ d,\ldots,\ d,d)^T \\ \hat{x}^n &= (d,\ d,\ldots,\ d,d)^T \;. \end{aligned}$$

Como por hipótese $d > 1$, então $X \neq \emptyset$. Sendo também, um conjunto poliédrico limitado, então qualquer ponto de X pode ser escrito como uma combinação convexa do número finito de seus pontos extremos. Assim,

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j \tag{II.13.5}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{II.13.6}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ , \tag{II.13.7}$$

onde os x^j são os pontos extremos de X . Além disso, sabemos que qualquer problema de programação linear do tipo:

<u>maximizar</u> $\{qx\}$
sujeito à: $x \in X$.

onde q é um vetor linha dado, terá pelo menos uma solução em que o ótimo x^* seja um vértice de X . Assim, substituindo a expressão de x , dada em (II.13.5) - (II.13.7) em (II.13.1) - (II.13.3), temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} (cx^j)\lambda_j \tag{II.13.8}$$

$$\text{sujeito à:} \quad \sum_{j=1}^{p} (Ax^j)\lambda_j \leq b \tag{II.13.9}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{II.13.10}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ . \tag{II.13.11}$$

Podemos observar que encontramos um problema igual ao problema (II.11.9), cuja solução será feita através do método de decomposição de Dantzig e Wolfe. O problema auxiliar será resolvido da mesma maneira, isto é, considerando o seguinte problema:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \{qx\} \tag{II.13.12}$$

sujeito à: $x \in X$,

onde $q = (q_1,\ldots,q_n)$ é um vetor linha dado. A solução ótima do problema (II.13.12) será obtida da mesma forma:

$$s_p = \sum_{j=p}^{n} q_j \quad , \; p = 1,\ldots,n \quad . \tag{II.13.13}$$

Tomemos:

$$s_k = \max_{p=1,\ldots,n} \{s_p\} \quad , \tag{II.13.14}$$

portanto, temos que considerar dois casos:

(i) se $s_k \leq 0$, então a solução ótima de (II.13.14) será, $\hat{x}_j = 0$, $j = 1,\ldots,n$, ou

$$\boxed{\hat{x} = (0,\ldots\ldots, 0)^T} \; .$$

(ii) se $s_k > 0$, então a solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1} = \ldots\ldots = \hat{x}_n = d$$

e

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \ldots\ldots\ldots = \hat{x}_{k-1} = 0 \; ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x} = (0, \ldots, 0, \underbrace{d, \ldots, d}_{n-k})^T} .$$

O procedimento se repete até obtermos todos os $z_j - \hat{c}_j \leq 0$, $j = 1,\ldots,n$, quando o método então, pára.

II.14. Exercício resolvido:

Consideremos agora, um exercício para melhor visualizarmos o método apresentado.

$$\underline{\text{minimizar}} \quad x_o = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito à:} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2 . \end{aligned}$$

O conjunto X será definido por:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^4 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2\} ,$$

assim, o problema original ficará:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad x_o = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito à:} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ & x \in X . \end{aligned}$$

Como o conjunto X é um poliedro limitado, podemos escrever qualquer ponto de X como uma combinação convexa de seus pontos extremos:

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ .$$

Substituindo a expressão de x no problema anterior, temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ -4\ 2\ -5)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ -1\ 3\ -1)x^j]\lambda_j \leq 5$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 2\ -2\ 3)x^j]\lambda_j \leq 6$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,p \ .$$

Introduzindo as variáveis de folga s_1 e s_2 , e a variável artificial λ_a , ao problema acima, obtemos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ -4\ 2\ -5)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} [(2\ -1\ 3\ -1)x^j]\lambda_j + s_1 &&= 5 \\
&\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 2\ -2\ 3)x^j]\lambda_j \qquad + s_2 &&= 6 \\
&\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda_a &&= 1
\end{aligned}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,p \quad ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ ,$$

$$s_1,\ s_2 \geq 0 \ .$$

Aplicando o método duas fases, temos:

<u>1ª Fase</u>:

<u>minimizar</u> $\xi = \lambda_a$

sujeito à:

$$\begin{array}{llllll} \sum\limits_{j=1}^{p} [(2\ \ -1\ \ 3\ \ -1)x^j]\lambda_j & + s_1 & & & = 5 & \\ \sum\limits_{j=1}^{p} [(-1\ \ 2\ \ -2\ \ 3)x^j]\lambda_j & & + s_2 & & = 6 & \text{(II.14.1)} \\ \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j & & & + \lambda_a & = 1 & \end{array}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,p \quad ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ ,$$

$$s_1,\ s_2 \geq 0 \ .$$

Passemos a construção do seguinte quadro:

ξ	1	$[\xi_{s_1}$	ξ_{s_2}	$\xi_{\lambda_a}]$	$[\bar{\xi}]$
s_1	0		B^{-1}		$\bar{b}$
s_2	0				
λ_a	0				

onde:

$$\bar{\xi} = \xi_B \, B^{-1} \, b$$

$$\xi_{s_1} = \xi_B \, B^{-1} \, e_{s_1}$$

$$\xi_{s_2} = \xi_B \, B^{-1} \, e_{s_2}$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B \, B^{-1} \, e_{\lambda_a}$$

Do problema (II.14.1), tiramos os seguintes resultados:

$$\xi_B = (c_{s_1}, \; c_{s_2}, \; c_{\lambda_a}) \quad ,$$

portanto:

$$\xi_B = (0 \;\; 0 \;\; 1)$$

$$B^{-1} = (e_{s_1}, \; e_{s_2}, e_{\lambda_a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = (5 \;\; 6 \;\; 1)^T$$

$$\xi_B \, B^{-1} = (0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \;\; 0 \;\; 1)$$

$$\xi_{s_1} = (0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_2} = (0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = (0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{\xi} = (0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix} = 1 \qquad ,$$

logo:

ξ	1	0	0	1	1
s_1	0	1	0	0	5
s_2	0	0	1	0	6
λ_a	0	0	0	1	1

(Q.II.14.1)

Do quadro (Q.II.14.1), tiramos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (0\ \ 0\ \ 1)$$

$$B^{-1} = I \quad .$$

Consideremos agora, o seguinte problema auxiliar:

$\underline{\text{maximizar}}$ $\left\{(u_1, u_o)\begin{bmatrix}Ax^j\\1\end{bmatrix} - cx^j\right\}$

sujeito à: $x^j \in X$.

$$\underline{\text{maximizar}}\ \left\{ (0\ \ 0\ \ 1)\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -1\\-1 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix} x^j \\ 1\end{bmatrix} - 0 \right\}$$

sujeito à:

$x^j \in X$.

<u>maximizar</u> $1 \ , \ \forall j$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2$.

Como o máximo do problema auxiliar é igual a 1 , $\forall j$, podemos considerar qualquer solução, por exemplo:

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T .}$$

Assim, geraremos o vetor coluna λ^1 associado a variável λ_1 , sendo dado por:

$$\lambda^1 = (z_1 - \hat{c}_1 \ ; \ B^{-1} \ [A\hat{x}^1, \ 1]^T)^T$$

onde:

$$z_1 - \hat{c}_1 = 1$$

$$[A\hat{x}^1, \ 1]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$$

e

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

logo:

$$\boxed{\lambda^1 = (1, \ 0, \ 0, \ 1)^T} . \quad \rightarrow \quad (Q.II.14.1)$$

Introduzindo o vetor λ^1 no quadro (Q.II.14.1) obtemos o seguinte quadro:

						$\downarrow \lambda^1$
ξ	1	0	0	1	1	1
s_1	0	1	0	0	5	0
s_2	0	0	1	0	6	0
$\leftarrow \lambda_a$	0	0	0	1	1	1

(Q.II.14.2)

Após o pivoteamento, temos:

						$\downarrow \lambda^1$
v	1	0	0	0	0	0
s_1	0	1	0	0	5	0
s_2	0	0	1	0	6	0
λ_1	0	0	0	1	1	1

(Q.II.14.3)

Iteração 1

Do quadro (Q.II.14.3), tiramos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (0,0,0)$$

$$B^{-1} = I .$$

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}} \left\{ (0,0,0) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} x^j \\ 1 \end{bmatrix} - (3\ -4\ 2\ -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\}$$

sujeito à:

$$x^j \in X .$$

<u>maximizar</u> $\{-3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4\}$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2$.

Assim,

$$s_p = \sum_{j=p}^{4} q_j \qquad , \quad j = 1,2,3,4 \; .$$

$$s_1 = \sum_{j=1}^{4} q_j$$

$$s_1 = q_1+q_2+q_3+q_4 = -3 +4 -2 +5 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_1 = 4}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{4} q_j$$

$$s_2 = q_2+q_3+q_4 = 4 -2 + 5 = 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_2 = 7}$$

$$s_3 = \sum_{j=3}^{4} q_j$$

$$s_3 = q_3+q_4 = -2 + 5 = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_3 = 3}$$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{4} q_j$$

$$s_4 = q_4 = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = 5} \; .$$

$$s_k = \text{máx}\{s_1,s_2,s_3,s_4\} = \text{máx}\{4,7,3,5\} = 7$$

$$\boxed{s_k = s_2 = 7 \; .}$$

A solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = 2$$

e

$$\hat{x}_1 = 0 \quad ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^2 = (0 \ \ 2 \ \ 2 \ \ 2)^T} \ .$$

Calculemos agora, o valor de $z_2 - \hat{c}_2$, isto é:

$$z_2 - \hat{c}_2 = -3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 2\hat{x}_3 + 5\hat{x}_4 = -3.0 + 4.2 - 2.2 + 5.2 = 14$$

$$\boxed{z_2 - \hat{c}_2 = 14.}$$

Como $z_2 - \hat{c}_2$ é positivo, passamos a gerar o vetor coluna λ^2 associado a variável λ_2 que entrará na base

$$\lambda^2 = (z_2 - \hat{c}_2 \ ; \ B^{-1} \ [A\hat{x}^2, \ 1]^T)^T \quad ,$$

onde

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} -1 & +3 & -1 \\ 2 & -2 & +3 \\ & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{\lambda^2 = (14, \ 1, \ 3, \ 1)^T} \ . \quad \rightarrow \quad (Q.II.14.3)$$

Introduzindo λ^2 no quadro (Q.II.14.3), obtemos:

						↓ λ^2
v	1	0	0	0	0	14
s_1	0	1	0	0	5	1
s_2	0	0	1	0	6	3
← λ_1	0	0	0	1	1	1

(Q.II,14.4)

Após o pivoteamento, temos:

						λ^2
v	1	0	0	-14	-14	0
s_1	0	1	0	-1	4	0
s_2	0	0	1	-3	3	0
λ_2	0	0	0	1	1	1

(Q.II.14.5)

Iteração 2

Do quadro (Q.II.14.5), obtemos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (0,\ 0,\ -14)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Consideremos o seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}}\ \left\{ (0,0,-14)\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ & 1 & & \end{pmatrix} x^j\right] - (3\ \ -4\ \ 2\ \ -5)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\}$$

sujeito à: $x^j \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $\{-14 - 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4\}$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2$.

Seja:

$$s_p = \sum_{j=p}^{4} q_j \qquad , \quad p = 1,2,3,4 .$$

$$s_1 = \sum_{j=1}^{4} q_j$$

$$s_1 = q_1+q_2+q_3+q_4 = -3 +4 -2 +5 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_1 = 4}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{4} q_j$$

$$s_2 = q_2+q_3+q_4 = 4 -2 +5 = 7 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_2 = 7}$$

$$s_3 = \sum_{j=3}^{4} q_j$$

$$s_3 = q_3 + q_4 = -2 + 5 = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_3 = 3}$$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{4} q_j$$

$$s_4 = q_4 = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = 5} .$$

$s_k = \text{máx}\ \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = \text{máx}\{4,7,3,5\} = 7$

$$\boxed{s_k = s_2 = 7.}$$

A solução ótima do problema auxiliar será:

$\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = 2$

e

$\hat{x}_1 = 0$,

ou

$$\boxed{\hat{x}^3 = (0,\ 2,2,\ 2,\ 2)^T}\ .$$

Calculemos o valor de $z_3 - \hat{c}_3$, isto é:

$z_3 - \hat{c}_3 = -14 - 3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 2\hat{x}_3 + 5\hat{x}_4$

$z_3 - \hat{c}_3 = -14 - 3.0 + 4.2 - 2.2 + 5.2 = -14 + 8 - 4 + 10 = -18 + 18 = 0$

$$\boxed{z_3 - \hat{c}_3 = 0}\ .$$

Como $z_3 - \hat{c}_3 = 0$, devemos parar o procedimento, e a solução ótima do problema original, será:

$$\boxed{\hat{x}^* = \hat{x}^2 = \hat{x}^3 = (0,\ 2,\ 2,\ 2)^T}\ ,$$

pois, do quadro ótimo (Q.II.14.5), temos que $\lambda_2^* = 1$.

Todas as soluções possíveis para o problema inicial, são:

$$\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0)^T \rightarrow x_o^* = 0 \rightarrow \text{solução viável}$$

$$\hat{x}^2 = (0\ 0\ 0\ 2)^T \rightarrow x_o^* = -10 \rightarrow \text{solução viável}$$

$$\hat{x}^3 = (0\ 0\ 2\ 2)^T \rightarrow x_o^* = -6 \rightarrow \text{solução viável}$$

$$\hat{x}^4 = (0\ 2\ 2\ 2)^T \rightarrow x_o^* = -14 \rightarrow \text{solução viável} \rightarrow \text{solução ótima}$$

$$\hat{x}^5 = (2\ 2\ 2\ 2)^T \rightarrow x_o^* = -8 \rightarrow \text{solução inviável}$$

Da relação das possíveis soluções, observamos que realmente o método forneceu a solução ótima, ou melhor:

$$\boxed{\hat{x}^* = (0\ 2\ 2\ 2)^T.}$$

II.15. Variáveis ordenadas por grupos

Vamos considerar agora, o problema no qual as variáveis, além de obedecerem uma ordem pré-estabelecida, esta ordenação se dará por grupos. Além disso, vamos supor também, que as variáveis assumem somente um dos valores 0 ou 1. Assim, a cada variável podemos associar a realização de um evento, portanto, se um evento ocorrer a variável correspondente assumirá o valor 1, e em caso contrário, assumirá o valor zero. Em outras palavras, teremos:

$$x_j = \begin{cases} 1 \ , \ \text{se o evento } j \text{ ocorrer} \ , \\ \\ 0 \ , \ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tal problema, poderá por exemplo, ter a seguinte representação:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx \tag{II.15.1}$$

$$\text{sujeito à:} \quad Ax \leq b \tag{II.15.2}$$

$$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_p \leq 1 \tag{II.15.3}$$

$$0 \leq x_{p+1} \leq \ldots \leq x_r \leq 1 \tag{II.15.4}$$

$$0 \leq x_{r+1} \leq \ldots \leq x_n \leq 1 \tag{II.15.5}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad , \; j = 1,\ldots,n \quad , \tag{II.15.6}$$

onde o vetor c é um vetor linha do $\mathbb{R}^n$; b um vetor coluna do $\mathbb{R}^m$; x um vetor coluna de $\mathbb{R}^n$; A uma matriz com m linhas e n colunas, cujos elementos são representados por a_{ij} . As restrições (II.15.3) - (II.15.5) são as restrições de precedência dadas em grupos.

Representaremos os índices das variáveis através do seguinte conjunto:

$$J = \{1,\ldots,n\} \quad .$$

Este conjunto pode ser particionado em P sub-conjuntos disjuntos, isto é:

$$\bigcup_{p=1}^{P} J_p = J$$

$$J_r \cap J_s = \emptyset \quad , \quad r, s \in J \text{ e } r \neq s \; ,$$

sendo que cada sub-conjunto J_p é constituído pelos índices das variáveis de cada grupo de ordenação. No problema (II.15.1) - (II.15.6), temos portanto, os seguintes conjuntos:

$J_p = \{1,\ldots,p\}$,

$J_r = \{p+1,\ldots,r\}$,

$J_n = \{r+1,\ldots,n\}$.

II.16. Problema relaxado

A dificuldade do problema (II.15.1) - (II.15.6), se resume somente na restrição (II.15.2), assim, omitindo tal restrição, podemos decompor este problema em P sub-problemas independentes, tendo o seguinte aspecto:

<u>minimizar</u> $z = cx$ (II.16.1)

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_p \leq 1 \qquad \text{(II.16.2)}$$

$$0 \leq x_{p+1} \leq \cdots \leq x_r \leq 1 \qquad \text{(II.16.3)}$$

$$0 \leq x_{r+1} \leq \cdots \leq x_n \leq 1 \qquad \text{(II.16.4)}$$

$$x_j \in \{0,1\} \ , \quad j = 1,\ldots,n \ . \qquad \text{(II.16.5)}$$

A solução ótima do problema auxiliar (II.16.1) - (II.16.5) é particularmente fácil de ser obtida, para isto, devemos considerar para cada sub-conjunto J_p , $p = 1,\ldots, P$, os seguintes valores:

$$s_t = \sum_{j=t}^{p} c_j \quad , \quad t = 1,\ldots,p \quad , \qquad \text{(II.16.6)}$$

e

$$s_k = \max_{t=1,\ldots,p} \{s_t\} \quad . \qquad \text{(II.16.7)}$$

Temos dois casos a considerar:

(i) se $s_k \leq 0$, a solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\boxed{\hat{x} = (0, \ldots, 0)^T} ,$$

isto é, atribuimos a cada variável de cada sub-conjunto J_p , o valor zero:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \ldots\ldots = \hat{x}_n = 0 .$$

(ii) se $s_k > 0$, a solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1} = \ldots\ldots = \hat{x}_n = 1$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \ldots\ldots = \hat{x}_{k-1} = 0 ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x} = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)^T} ,$$

isto é, atribuimos o valor 1 para as variáveis de x_k a x_n , e o valor zero para as variáveis restantes, para cada sub-conjunto J_p .

1.17. Nova formulação do problema

As restrições de precedência de cada sub-problema e as restrições de não-negatividade, definem um poliedro convexo. Seja X o cojunto de seus pontos extremos, logo, X será o conjunto dos pontos no $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são 0 ou 1, portanto $X \subset \{0,1\}^n$.

Explicitando o conjunto X :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_p \leq 1 \; ; \; 0 \leq x_{p+1} \leq \ldots \leq x_r \leq 1 ; 0 \leq x_{r+1} \leq \ldots \leq x_n \leq 1,$$
$$x_j \in \{0,1\}, \; j \in J = \{1,\ldots,n\}; \; J = \bigcup_{p=1}^{P} \; ; \; J_f \cap J_g = \emptyset \; ; \; f \neq g; \; f,g \in J\} \; .$$

Podemos assim, reescrever o problema (II.15.1) - (II.15.6), isto é:

<u>minimizar</u>	$z = cx$	(II.17.1)
sujeito à:	$Ax \leq b$	(II.17.2)
	$x \in X$.	(II.17.3)

Para resolvermos o problema acima, utilizaremos dualidade em programação inteira (0-1), como visto anteriormente. Este problema será denominado problema primal, onde A é uma matriz com m linhas e n colunas; c um vetor linha do $\mathbb{R}^n$; b um vetor coluna do $\mathbb{R}^m$; e x um vetor coluna do $\mathbb{R}^n$, cujas coordenadas assumirão somente um dos valores 0 ou 1, obedecendo uma ordem pré-estabelecida de acôrdo com a restrição de precedência.

II.18. <u>Exemplo numérico</u>:

Vejamos agora, um exemplo numérico para melhor visualizar as idéias aqui apresentadas:

Seja o seguinte problema de programação linear:

<u>minimizar</u> $z = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - x_6$

sujeito à:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

$$0 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad , \; j = \overline{1,6} \quad .$$

Seja o seguinte conjunto:

$$J = \{1,2,3,4,5,6\} \quad ,$$

que será particionado em 2 outros sub-conjuntos disjuntos, isto é:

$$J_1 = \{1,2,3\} \quad \text{e} \quad J_2 = \{4,5,6\} \quad ,$$

portanto:

$$J_1 \cup J_2 = J$$

$$J_1 \cap J_2 = \emptyset \quad .$$

Podemos agora, definir o seguinte conjunto:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^6 / 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1;\; 0 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1;\; x_j \in \{0,1\}, j \in J = \{1,2,3,4,5,6\}\;;\; J_1 = \{1,2,3\}\;;\; J_2 = \{4,5,6\}\;;\; \bigcup_{p=1}^{2} J_p = J;\; \bigcap_{p=1}^{2} J_p = \emptyset\}.$$

Assim, o problema primal ficará:

<u>minimizar</u> $z = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - x_6$

sujeito à:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 &\leq 2 \\
-x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 &\leq 4 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 &\leq 3 \\
x \in X \ .
\end{aligned}
$$

Seja o seguinte conjunto:

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^6 / 0 \leq x_j \leq 1 \ , \ j \in J = \{1,2,3,4,5,6\}\} \ .$$

O conjunto Y é a envoltória convexa dos pontos de X, além de ser um conjunto limitado tendo $p = 2^n$ vértices, sendo n o número de variáveis. Assim, qualquer ponto de Y pode ser escrito como uma combinação convexa de seus pontos extremos ou vértices, isto é:

$$
\forall x \in Y \ \leftrightarrow \ x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j
$$

$$
\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1
$$

$$
\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ ,
$$

onde os x^j são os vértices de Y.

Substituindo a expressão de x, dada acima, no problema anterior, temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 2\ -1\ 3\ 1\ -1)x^j]\lambda_j \leq 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 1\ -4\ -5\ 2\ 2)x^j]\lambda_j \leq 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1)x^j]\lambda_j \leq 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,p \ .$$

Introduzindo as variáveis de folga s_1, s_2, s_3 , e a variável artificial λ_a , obtemos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 2\ -1\ 3\ 1\ -1)x^j]\ \lambda_j + s_1 = 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(-1\ 1\ -4\ -5\ 2\ 2)x^j]\lambda_j + s_2 = 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1)x^j]\lambda_j + s_3 = 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \ j = 1,\ldots,p \ ,$$

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \ ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ .$$

Iniciaremos o método, com uma solução básica arti ficial, utilizando o método duas fases, isto é:

<u>1ª Fase</u>

<u>minimizar</u> $\xi = \lambda_a$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(1\ 2\ -1\ 3\ 1\ -1)x^j\right]\lambda_j + s_1 = 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(-1\ 1\ -4\ -5\ 2\ 2)x^j\right]\lambda_j + s_2 = 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1)x^j\right]\lambda_j + s_3 = 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1$$

$\lambda_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,p$,

$s_1, s_2, s_3 \geq 0$,

$\lambda_a \geq 0$.

Do problema acima, tiramos:

$$b = (2\ 4\ 3\ 1)^T$$

$$B = \left[e_{s_1}, e_{s_2}, e_{s_3}, e_{\lambda_a}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$B = B^{-1} = I_4$$

$$\xi_B = (c_{s_1}, c_{s_2}, c_{s_3}, c_{\lambda_a}) = (0\ 0\ 0\ 1)$$

$$\xi_B B^{-1} = (0\ 0\ 0\ 1)I_4 = (0\ 0\ 0\ 1)$$

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}_B \; B^{-1} \; b = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{b} = B^{-1} \; b = b = (2 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 1)^T$$

$$\xi_{s_1} = \xi_B \; B^{-1} \; e_{s_1} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_2} = \xi_B \; B^{-1} \; e_{s_2} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_3} = \xi_B \; B^{-1} \; e_{s_3} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B \; B^{-1} \; e_{\lambda_a} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \; .$$

Podemos assim, construir o seguinte quadro:

ξ	$[\overline{\xi}]$	$\left[\overline{\xi}_{s_1}\right.$	ξ_{s_2}	ξ_{s_3}	$\left.\xi_{\lambda_a}\right]$
s_1					
s_2	$\overline{b}$			B^{-1}	
s_3					
λ_a					

Explicitando:

ξ	1	0	0	0	1
s_1	2	1	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0
s_3	3	0	0	1	0
λ_a	1	0	0	0	1

(Q.II.18.1)

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \{(u_1, u_o) \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} - cx^j\}$$

sujeito à: $x^j \varepsilon X$.

Do quadro (Q.II.18.1), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$B^{-1} = I_4 \quad ,$$

portanto:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{maximizar}} \\ \text{sujeito à:}\end{array}\right\{ (0\ 0\ 0\ 1) \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \}$$

$$x \ \varepsilon \ X \ .$$

$\underline{\text{maximizar}}$ $\quad 1 \ , \ \forall j$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1 \qquad 0 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$

$x_j \ \varepsilon \ \{0,1\} \ , \ j = 1,2,3,4,5,6$.

A função objetivo do problema auxiliar independe de x , assim, podemos considerar qualquer solução. Tomemos então:

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T.}$$

Como $z_1 - \hat{c}_1 = 1 > 0$, passemos ao cálculo do vetor associado a variável que deverá entrar na base λ_1, isto é:

$$\lambda^1 = \left[(u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^1 \ ; \ B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T ,$$

onde:

$$z_1 - \hat{c}_1 = (u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^1 = 1$$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = I_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^1 = (1\ 0\ 0\ 0\ 1)^T} \ . \quad \rightarrow \qquad \text{(Q.II.18.1)}$$

Adicionando o vetor gerado λ^1 ao quadro (Q.II. 18.1), temos:

(Q.II.18.2)

						$\downarrow \lambda^1$
ξ	1	0	0	0	1	1
s_1	2	1	0	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0	0
s_3	3	0	0	1	0	0
$\leftarrow \lambda_a$	1	0	0	0	1	1

Após o pivoteamento, eliminando a linha que contem ξ, a coluna gerada λ^1, e introduzindo a linha que contem v, obtemos o seguinte quadro inicial:

v	1	0	0	0	0
s_1	2	1	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0
s_3	3	0	0	1	0
λ_1	1	0	0	0	1

(Q.II.18.3)

Do quadro (Q.II.18.3), tiramos:

$\bar{v} = 0$

$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 0\ 0)$

$B = B^{-1} = I_4$

$\bar{b} = (2\ 4\ 3\ 1)^T$.

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{maximizar}} \\ \text{sujeito à:} \end{array}\right\{ (0\ 0\ 0\ 0)\begin{bmatrix} x_1+2x_2-\ x_3+3x_4+\ x_5-\ x_6 \\ -x_1+\ x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+\ x_3+\ x_4-3x_5+\ x_6 \\ 1 \end{bmatrix} -(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$x \in X$.

<u>maximizar</u> $\{3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 + x_6\}$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$

$$0 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$$

$$x_j \in \{0,1\} \; , \; j = 1,2,3,4,5,6 \; .$$

De acordo com as expressões (II.16.6) e (II.16.7), temos para cada sub-conjunto:

- $J_1 = \{1,2,3\} \rightarrow \quad c_j = (c_1,c_2,c_3) = (3 \; -2 \; 4)$

$$s_1 = \sum_{j=1}^{3} c_j = c_1 + c_2 + c_3 = 3 - 2 + 4 = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_1 = 5}$$

$$s_2 = \sum_{j=2}^{3} c_j = c_2 + c_3 = -2 + 4 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_2 = 2}$$

$$s_3 = c_3 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_3 = 4}$$

$$s_k = \text{máx}\,\{s_1,s_2,s_3\} = \text{máx}\{5,2,4\} = 5$$

$$\boxed{s_k = s_1 = 5 > 0} \quad ,$$

portanto: $\boxed{\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = 1}$.

- $J_2 = \{4,5,6\} \rightarrow c_j = (c_4,c_5,c_6) = (-1,-5,1)$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{6} c_j = c_4+c_5+c_6 = -1 - 5 + 1 = -5 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = -5}$$

$$s_5 = \sum_{j=5}^{6} c_j = c_5 + c_6 = -5 + 1 = -4 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_5 = -4}$$

$$s_6 = c_6 = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_6 = 1}$$

$s_k = \text{máx}\{s_4, s_5, s_6\} = \text{máx}\{-5, -4, 1\} = 1$

$$\boxed{s_k = s_6 = 1 > 0},$$

portanto: $\boxed{\hat{x}_6 = 1}$

$$\boxed{\hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 0} .$$

Assim, a solução ótima do problema auxilar:

$$\boxed{\hat{x}^2 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)^T} .$$

Portanto, $z_2 - \hat{c}_2$, será:

$$z_2 - \hat{c}_2 = 3\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 4\hat{x}_3 - \hat{x}_4 - 5\hat{x}_5 + \hat{x}_6$$

$$z_2 - \hat{c}_2 = 3 - 2 + 4 + 1 = 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_2 - \hat{c}_2 = 6} .$$

Como $z_2 - \hat{c}_2$ é positivo, devemos gerar o vetor coluna λ^2 associado à variável λ_2, que deverá entrar na base:

$$\lambda^2 = \left[(u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^2 \; ; \; B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T ,$$

onde:

$$z_2 - \hat{c}_2 = (u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +2 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -4 & +2 \\ 2 & -3 & +1 & +1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix} = I_4\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix},$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^2 = (6,\ 1,\ -2,\ 1,\ 1)^T} . \quad \rightarrow \quad \text{(Q.II.18.3)}$$

Introduzindo o vetor coluna λ^2 no quadro (Q.II.18.3), obtemos:

						$\downarrow \lambda^2$
	v	1	0	0	0	0	6
	s_1	2	1	0	0	0	1
	s_2	4	0	1	0	0	-2
	s_3	3	0	0	1	0	1
$\leftarrow$	λ_1	1	0	0	0	1	1

(Q.II.18.4)

Após o pivoteamento:

v	-5	0	0	0	-6
s_1	1	1	0	0	-1
s_2	2	0	1	0	2
s_3	2	0	0	1	-1
λ_2	1	0	0	0	1

(Q.II.18.5)

Do quadro (Q.II.18.5), tiramos:

$\bar{v} = -5$

$(u_1, u_2) = (0\ 0\ 0\ -6)$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Resolvendo o seguinte problema auxiliar:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{maximizar}} \\ \text{sujeito à:} \end{array}\right\{ (0\ 0\ 0\ -6) \begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6 \\ 1 \end{bmatrix} - (-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$x \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $\{-6 + 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 + x_6\}$

sujeito à: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$

$0 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1$

$x_j \in \{0,1\}$, $j = 1,2,3,4,5,6.$

$J_1 = \{1,2,3\} \rightarrow c_j = (c_1, c_2, c_3) = (3\ -2\ 4)$

$s_1 = \sum_{j=1}^{3} c_j = c_1 + c_2 + c_3 = 3 - 2 + 4 = 5 \rightarrow \boxed{s_1 = 5}$

$s_2 = \sum_{j=2}^{3} c_j = c_2 + c_3 = -2 + 4 = 2 \rightarrow \boxed{s_2 = 2}$

$s_3 = c_3 = 4 \rightarrow \boxed{s_3 = 4}$.

$s_k = \text{máx}\{s_1\ s_2\ s_3\} = \text{máx}\{5,2,4\} = 5$

$$\boxed{s_k = s_1 = 5 > 0} ,$$

portanto:

$$\boxed{\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = 1} .$$

- $J_2 = \{4,5,6\} \rightarrow c_j = (c_4, c_5, c_6) = (-1\ -5\ 1)$

$$s_4 = \sum_{j=4}^{6} c_j = c_4 + c_5 + c_6 = -1 -5 + 1 = -5 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_4 = -5}$$

$$s_5 = \sum_{j=5}^{6} c_j = c_5 + c_6 = -5 +1 = -4 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_5 = -4}$$

$$s_6 = c_6 = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{s_6 = 1} .$$

$$s_k = \text{máx}\{s_4, s_5, s_6\} = \text{máx}\{-5, -4, 1\} = 1$$

$$\boxed{s_k = s_6 = 1 > 0} ,$$

portanto: $\boxed{\hat{x}_6 = 1}$

$$\boxed{\hat{x}_4 = \hat{x}_5 = 0} .$$

Assim, a solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\boxed{\hat{x}^3 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)^T} .$$

Calculando $z_3 - \hat{c}_3$:

$$z_3 - \hat{c}_3 = -6 + 3\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 4\hat{x}_3 - \hat{x}_4 - 5\hat{x}_5 + \hat{x}_6$$

$$z_3 - \hat{c}_3 = -6 +3 -2 +4 + 1 = -8 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_3 - \hat{c}_3 = 0} .$$

Como $z_3 - \hat{c}_3 = 0$, a solução $\hat{x}^3$ é a solução ótima do problema original, pois o quadro (Q.II.18.5) é ótimo, e $\lambda_2^* = 1$.

$$\boxed{\hat{x}^* = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)^T .}$$

Este problema possui $2^n = 2^6 = 64$ soluções possíveis, vejamos algumas delas:

$\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T \rightarrow z = 0 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^2 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T \rightarrow z = -1 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 4 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^4 = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 5 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^5 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 1 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^6 = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 3 \rightarrow$ solução inviável

$\hat{x}^7 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 0 \rightarrow$ solução inviável

$\hat{x}^8 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)^T \rightarrow z = -5 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^9 = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)^T \rightarrow z = 2 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^{10} = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)^T \rightarrow z = -1 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^{11} = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)^T \rightarrow z^* = -6 \rightarrow$ <u>solução viável e ótima</u>

$\hat{x}^{12} = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)^T \rightarrow z = -5 \rightarrow$ solução viável .

II.19. Mudança de variável

Para finalizarmos este capítulo, consideremos o seguinte problema de programação linear com variáveis ordenadas:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx \tag{II.19.1}$$

$$\text{sujeito à:} \quad Ax \leq b \tag{II.19.2}$$

$$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq d\,, \tag{II.19.3}$$

onde c^T, $x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $d > 0$ e A uma matriz com m linhas e n colunas. Além disso, c , A, b e d são dados do problema e x o vetor decisão.

Nas seções anteriores, vimos como resolver este problema pelo método do simplex, quando tinhamos $d = +\infty$. Vimos também, solução para este problema através da dualidade em programação inteira, quando $d = 1$. Apresentamos ainda, solução através do método de decomposição de Dantzig-Wolfe.

Nesta seção, apresentaremos uma outra maneira de resolvermos o problema (II.19.1) - (II.19.3), através de uma mudança de variável.

Consideraremos também dois casos:

(i) $d = +\infty$

(ii) $0 < d < +\infty$

Em primeiro lugar, estudaremos o caso (i), isto é, quando $d = +\infty$, assim, a restrição (II.19.3) terá a seguinte representação:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \ .$$

Faremos agora, algumas modificações necessárias na restrição de precedência, dada acima, isto é:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &\geq 0 . \end{aligned}$$

Consideremos:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - x_1 \\ y_3 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_n - x_{n-1} . \end{aligned}$$

Das igualdades acima, observamos que todos os y_j, são não-negativos, isto é, $y_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$. Podemos expressar, também, x_j em função dos y_j da seguinte maneira, a partir do sistema acima:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ &\vdots \\ x_n &= y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n . \end{aligned} \tag{II.19.4}$$

As expressões (II.19.4) podem ser escritas de uma maneira mais conveniente, isto é:

$$x_p = \sum_{j=1}^{p} y_j \qquad , \quad p = 1,\ldots,n \ . \tag{II.19.5}$$

O conjunto de igualdades(II.19.4) pode ainda, ser colocado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \ . \tag{II.19.6}$$

Consideremos agora, os seguintes vetores:

$$x = (x_1 \ \ldots\ldots \ x_n)^T \quad , \tag{II.19.7}$$

$$y = (y_1 \ \ldots\ldots \ y_n)^T \quad , \tag{II.19.8}$$

e a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \ . \tag{II.19.9}$$

Substituindo (II.19.7), (II.19.8) e (II.19.9) em (II.19.6), obtemos:

$$x = D\, y \ . \tag{II.19.10}$$

A matriz D é uma matriz triangular inferior, tendo todos seus elementos iguais a 1 .

Substituindo (II.19.10) em (II.19.1) e (II.19.2), obtemos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = c\,D\,y \tag{II.19.11}$$

$$\text{sujeito à:} \quad A\,D\,y \leq b \tag{II.19.12}$$

$$y \geq 0 \; . \tag{II.19.13}$$

O problema (II.19.11) - (II.19.13) é um problema de programação linear na forma canônica, denominado "problema transformado". Além disso, a restrição (II.19.12) tem o mesmo número de restrições e de variáveis que (II.19.2), no entanto, a matriz AD tem muito mais chance de ser menos esparsa do que A.

A grande vantagem desta formulação, é o fato de que em determinados problemas de grande porte, iremos obter um problema linear equivalente que terá um número de restrições expressivamente menor.

Se o problema de grande porte tiver a matriz A esparsa e $n >> m$, o ganho é significativo, uma vez que resolvendo o problema de ordenação de maneira tradicional, isto é, com as restrições de precedência explicitamente, teríamos um programa linear com $(m+n) >> m$ restrições e $n >> m$ variáveis. Neste caso, a ordem da base seria muito grande e o problema, com certeza, se tornaria numéricamente instável.

Aplicando o método de mudança de variável, teremos um programa linear com $n >> m$ variáveis e m restrições. No entanto, a inversa da base, neste caso, é significativamente menor, e terá, em tese, comportamento numérico estável, levando a soluções ótimas com menor esforço computacional.

Vejamos agora, um exemplo para melhor compreendermos e assimilarmos as idéias aqui apresentadas:

<u>maximizar</u> $z = -2x_1 + 3x_2$

sujeito à: $-2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$0 \leq x_1 \leq x_2$.

O problema acima, na forma matricial ficará:

<u>maximizar</u> $z = (-2 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

sujeito à:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$0 \leq x_1 \leq x_2$.

Realizaremos agora, as modificações necessárias:

$$y_1 = x_1 \geq 0$$

$$y_2 = x_2 - x_1 \geq 0 \quad ,$$

ou

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_1 + y_2 \quad ,$$

portanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} . \qquad \text{(II.19.14)}$$

Substituindo (II.19.14) no problema inicial , sob forma matricial, obtemos o seguinte problema transformado:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad z = (-2 \quad 3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

sujeito à:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad ,$$

ou

$$\underline{\text{maximizar}} \quad z = (1 \quad 3) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

sujeito à:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad .$$

Finalmente, o problema transformado ficará:

$$\begin{aligned} \underline{\text{maximizar}} \quad & z = y_1 + 3y_2 \\ \text{sujeito à} \quad & -y_1 + y_2 \leq 4 \\ & 3y_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga $y_3 \geq 0$ e $y_4 \geq 0$, temos:

<u>maximizar</u> $z = y_1 + 3y_2$

sujeito à:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 \quad &= 4 \\ 3y_1 + 2y_2 \quad + y_4 &= 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Podemos agora, construir o quadro inicial do simplex:

<u>Quadro (Q.II.19.1)</u>

	b	y_1	$\downarrow y_2$	y_3	y_4
z	0	-1	-3	0	0
y_3	4	-1	1	1	0
$\leftarrow y_4$	3	3	2	0	1

Após o pivoteamento, obtemos:

<u>Quadro (Q.II.19.2)</u>

	b	y_1	y_2	y_3	y_4
z	9/2	7/2	0	0	3/2
y_3	5/2	-5/2	0	1	-1/2
y_2	3/2	3/2	1	0	1/2

Do quadro (Q.II.19.2), tiramos os seguintes valores:

$y_1 = 0$

$y_2 = 3/2$

$y_3 = 5/2$

$y_4 = 0$,

dando $z = 9/2$.

Observamos que o quadro (Q.II.19.2) é um quadro ótimo, pois todos os $z_j - c_j \geq 0$ e todos $y_j \geq 0$, j=1,2,3, 4 . Assim, a solução dada acima é a solução ótima do problema transformado, isto é:

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)^T$$

ou

$$\boxed{y^* = (0\ ,\ 3/2,\ 5/2,\ 0)^T}\ .$$

Substituindo os valores ótimos $y_1^* = 0$ e $y_2^* = 3/2$ na expressão (II.19.14), iremos obter a solução ótima do problema original, isto é:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{x_1^* = 0}$$

$$\boxed{x_2^* = 3/2} \; ,$$

dando,

$$z^* = 3x_2^* = 3.\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{z^* = 9/2} \; .$$

Graficamente, temos:

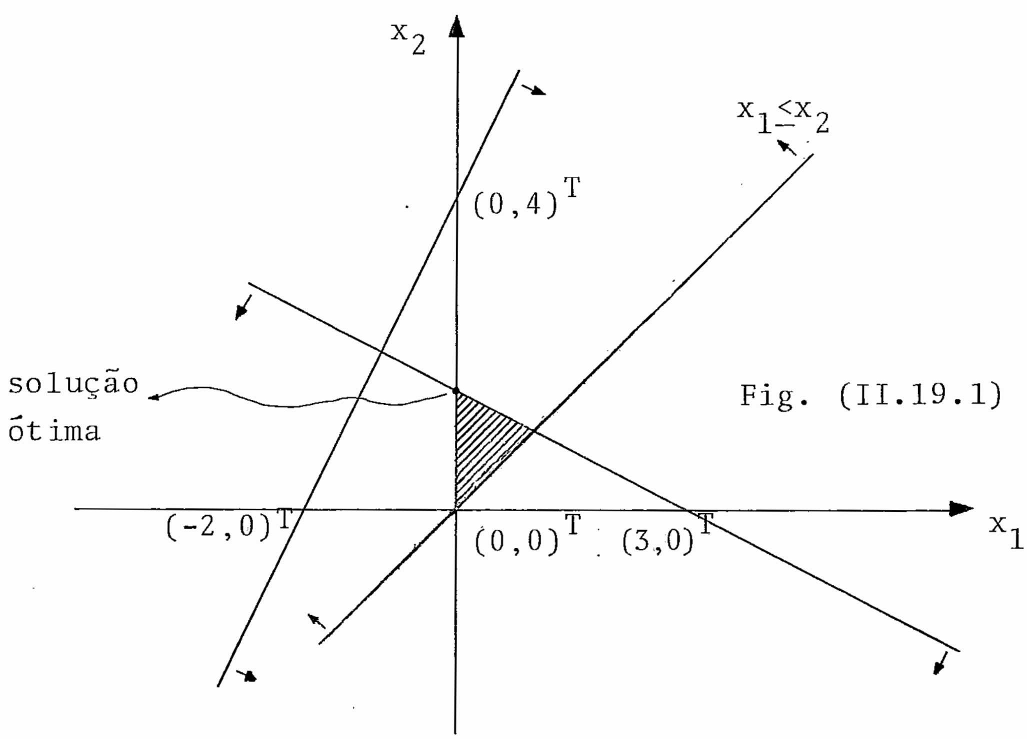


Fig. (II.19.1)

Vejamos agora, o caso em que $0 < d < +\infty$. Pela expressão (II.19.5), temos que:

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad ,$$

e da restrição de precedência, temos:

$$x_n \leq d \quad ,$$

assim,

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} y_j \leq d \quad ,$$

ou ainda,

$$\underline{1}.y \leq d \quad , \qquad \text{(II.19.15)}$$

onde:

$$\underline{1} = (1, \ldots, 1) \quad ,$$

é um vetor linha com n componentes iguais a 1 .

Desta forma, o problema transformado ficará:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = c\, D\, y \qquad \text{(II.19.16)}$$

$$\text{sujeito à:} \quad A\, D\, y \leq b \qquad \text{(II.19.17)}$$

$$\underline{1}\, y \leq d \qquad \text{(II.19.18)}$$

$$y \geq 0 \quad . \qquad \text{(II.19.19)}$$

Tomemos:

$$\lambda_j = \frac{y_j}{d} \quad , \quad j = 1, \ldots, n \quad ,$$

ou

$$y_j = d\, \lambda_j \quad , \quad j = 1, \ldots, n \quad . \qquad \text{(II.19.20)}$$

Substituindo (II.19.20) no problema transformado (II.19.16) - (II.19.19), obtemos o seguinte problema de programação linear:

<u>minimizar</u> $z = c\,D\,d\,\lambda$ (II.19.21)

sujeito à:

$$AD\underline{d}\lambda \leq b \qquad \text{(II.19.22)}$$

$$\underline{1}d\lambda \leq d \qquad \text{(II.19.23)}$$

$$d\lambda \geq 0 \quad . \qquad \text{(II.19.24)}$$

Da expressão (II.19.23), temos que:

$$\underline{1}d\lambda \leq d \quad ,$$

$$\underline{1}\lambda \leq 1 \quad , \qquad \text{(II.19.25)}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1 \quad .$$

Uma vez que $d > 0$, tiramos da expressão (II.19.24) que:

$$\lambda \geq 0 \; , \qquad \text{(II.19.26)}$$

ou

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \; .$$

Substituindo (II.19.25) e (II.19.26) em (II.19.23) e (II.19.24), respectivamente, obtemos o seguinte problema transformado:

<u>minimizar</u> $z = c\,D\,d\,\lambda$ (II.19.27)

sujeito à

$$AD\underline{d}\lambda \leq b \qquad \text{(II.19.28)}$$

$$\underline{1}\,\lambda \leq 1 \qquad \text{(II.19.29)}$$

$$\lambda \geq 0 \; . \qquad \text{(II.19.30)}$$

O problema acima, é identico ao problema (I.6.4) - (I.6.6), cuja solução se encontra no capítulo I .

A vantagem de resolvermos (I.6.4) - (I.6.6) por técnicas de geração de coluna, utilizando (II.11.13) e (II.11.14), é que em cada iteração podemos calcular uma cota inferior para o ótimo de z . Na prática, quando o valor obtido por z , naquela iteração, não diferir muito da melhor cota obtida, podemos parar.

Deveremos também, armazenar a matriz A por linhas, pois precisamos em cada iteração calcular a coluna gerada Ax^j , cujo k-ésimo componente é calculada pelo produto escalar da k-ésima linha de A com x^j .

CAPÍTULO III

VARIÁVEIS BIVALENTES 0-1

III.1. Introdução

Apresentaremos agora, um algoritmo proposto para resolver problemas inteiros, cujas variáveis podem assumir somente um dos valores 0 ou 1 . Este algoritmo inicia considerando todas as n variáveis iguais a zero, e consiste de um procedimento sistemático de sucessivas indicações do valor um para as variáveis, de modo a apresentar como resultado, depois de se tentar uma pequena parte das 2^n soluções, ou uma solução ótima ou um indício de que não existe solução viável.

Denominaremos o algoritmo que desenvolveremos neste capítulo de "Enumeração Implícita".

Daremos a seguir, algumas noções e definições necessárias para o seu desenvolvimento.

Seja o problema de programação linear inteira bivalente 0-1 :

$$\underline{\text{minimizar}} \quad x_o = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(III.1.1)}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \forall i \in M = \{1 \ldots m\} \quad , \qquad \text{(III.1.2)}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad , \forall i \in N = \{1 \ldots n\} \quad . \qquad \text{(III.1.3)}$$

Para este tipo de problema, os coeficientes c_j,

$\forall j \in N$, deverão sempre ser não-negativos, isto é, $c_j \geq 0$, $j \in N$. Entretanto, caso tenhamos em uma aplicação um coeficiente c_k negativo, isto é, $c_k < 0$, $k \in N$, devemos realizar uma mudança de variável da seguinte maneira:

$$x_k = 1 - x_k'$$

onde

$$x_k' \in \{0,1\} \quad .$$

Em vista disto, teremos:

$$c_k x_k = c_k(1 - x_k') = c_k - c_k x_k' \quad .$$

Se considerarmos $c_k' = c_k$, óbviamente teremos $c_k' > 0$, assim, a função objetivo x_o ficará:

$$x_o = c_k + c_k' \; x_k' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} c_j \; x_j \quad ,$$

ou ainda,

$$x_o - c_k = c_k' \; x_k' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} c_j \; x_j \quad .$$

Agora, considerando $y_o = x_o - c_k$, onde c_k é uma constante, podemos dizer que minimizar y_o , implica em minimizar x_o . Esse raciocínio, poderá ser feito para todos os coeficientes negativos.

Daqui para frente, todo problema inteiro (0-1) deverá ser colocado em uma forma semelhante ao problema (III.1.1) - (III.1.3), isto é, todo problema será de minimização; todas as restrições serão desigualdade do tipo $\leq$; e todos os coeficientes da função objetivo serão não-negativos, isto é, $c_j \geq 0$, $\forall j \in N$.

Através das quatro operações descritas abaixo, poderemos sempre, colocar qualquer problema inteiro na forma desejada:

(i) problemas de maximização podem ser convertidos em problemas de minimização, multiplicando a função objetivo pelo sinal negativo.

(ii) as equações serão substituídas por duas inequações.

(iii) todas as inequações da forma $\geq$, serão multiplicadas por (-1), assumindo a forma $\leq$.

(iv) se necessário, devemos realizar as seguintes substituições:

$$x_j = \begin{cases} x_j' & , \text{ se } c_j \geq 0 . \\ 1 - x_j' & , \text{ se } c_j < 0 . \end{cases}$$

Introduzindo as variáveis de folga $s_i \geq 0$, $i \in M$, ao problema (III.1.1) - (III.1.3), iremos obter o seguinte problema linear inteiro bivalente:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad x_o = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{III.1.4}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i , \forall i \in M , \tag{III.1.5}$$

$$x_j \in \{0,1\} , \forall j \in N , \tag{III.1.6}$$

$$s_i \geq 0 , i \in M . \tag{III.1.7}$$

Para facilitar nosso estudo, denominaremos este problema de "P". As variáveis do problema "P", podem assumir somente os valores 0 ou 1, assim o conjunto de todas as soluções de (III.1.5) - (III-1.7), representado por $U = (x, s)$ será finito, sendo que o número de elementos de U será igual a 2^n, com n sendo o número de variáveis x_j, $j \in N$.

Como dissemos anteriormente, o algoritmo de Enumeração Implícita, consiste no desenvolvimento de uma arborescência, garantindo a enumeração de todas as 2^n soluções.

Antes de iniciarmos a exposição do método de Enumeração Implícita, passemos a algumas definições necessárias para o seu desenvolvimento.

<u>Definição (III.1.1.)</u>:

"Denomina-se <u>solução de P</u>, todo conjunto de valores das variáveis x_j, $j \in N$, satisfazendo (III.1.6)".

<u>Definição (III.1.2)</u>:

"Denomina-se <u>solução viável de P</u>, toda solução satisfazendo (III.1.5) e (III.1.7)".

<u>Definição (III.1.3)</u>:

"Denomina-se <u>solução ótima de P</u>, toda solução satisfazendo (III.1.4), (III.1.5) e (III.1.7)".

Definição (III.1.4):

"J_t é o conjunto formado pelos índices das variáveis x_j^t iguais a 1".

Da definição (III.1.4), temos que:

$$J_t = \{j/j \in N,\ x_j^t = 1\} \quad ,$$

ou ainda:

$$x_j^t = \begin{cases} 1 \ , & \text{se } j \in J_t \ , \\ 0 \ , & \text{se } j \in N - J_t . \end{cases}$$

Podemos desta forma, calcular os valores das variáveis de folga $s_i \geq 0$, $i \in M$, através da equação (III.1.5), isto é:

$$s_i^t = b_i - \sum_{j \in J_t} a_{ij} \quad , \qquad i \in M \quad .$$

Definição (III.1.5):

"Dizemos que a (k+1)-ésima solução é uma solução descendente da k-ésima solução se:

$$J_k \subset J_{k+1} \ ."$$

Veremos agora, detalhadamente o método de Enumeração Implícita.

III.2. Enumeração Implícita

Em geral, o espaço solução de um problema inteiro possui inteiro um número finito de possíveis pontos viáveis. Um método direto de resolvermos o problema inteiro, seria enumerar exaustivamente tais pontos, e assim, a solução ótima seria determinada pelos pontos (ou ponto), que fornecessem o melhor valor da função objetivo.

O inconveniente desta técnica, é que o número de pontos solução pode, na prática, tornar-se muito grande, e a solução não seria encontrada num período de tempo razoável. O processo de Enumeração Implícita ou parcial, considera somente uma pequena parte dos possíveis pontos solução, enquanto descarta os restantes, como pontos não candidatos. Para ilustrar melhor o que foi escrito, vamos considerar o seguinte problema: determinar todas as soluções da inequação:

$$6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq -5 \qquad \text{(III.2.1)}$$

$$x_j \in \{0,1\} \ , \ j = 1,2,3 \ . \qquad \text{(III.2.2)}$$

Numa análise rápida, observamos que para qualquer solução viável, o valor da variável x_3 deve ser fixado em um ($x_3 = 1$). Isto significa que qualquer combinação binária das variáveis x_1, x_2 e x_3 , tendo $x_3 = 0$, não pode fornecer uma solução viável, assim sendo, descartaremos as quatro combinações binárias enumeradas implicitamente:

$(0,\ 0,\ 0)^T$

$(0,\ 1,\ 0)^T$

$(1,\ 0,\ 0)^T$

$(1,\ 1,\ 0)^T$.

A condição necessária para mantermos a viabilidade da desigualdade (III.2.1), considerando $x_3 = 1$, é que para qualquer valor das variáveis x_1 e x_2, o lado esquerdo de (III.2.1) não exceda 2, pois:

$$6x_1 + 3x_2 \leq -5 + 7 = 2$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 2 \quad .$$

Assim, dependendo de seus coeficientes em (III.2.1), as variáveis x_1 e x_2 assumirão os valores 0 ou 1. Uma vez que o coeficiente de x_2 é 3, seu valor será fixado em zero ($x_2 = 0$), portanto, as soluções $(0,1,1)^T$ e $(1,1,1)^T$ são enumeradas implicitamente como não candidatas, e obviamente descartadas. Agora, dado que $x_3 = 1$ e $x_2 = 0$, a desigualdade acima ficará:

$$6x_1 \leq 2 \quad ,$$

desta forma, a combinação $(1,0,1)^T$ será também descartada, pois o coeficiente de x_1 é 6, maior do que 2. Logo, a combinação restante $(0,0,1)^T$ será a única solução viável para a desigualdade (III.2.1). O processo termina, uma vez que consideramos todas as 2^3 combinações possíveis.

Na fig.(III.2.1), temos uma representação gráfica do raciocínio feito no exemplo acima.

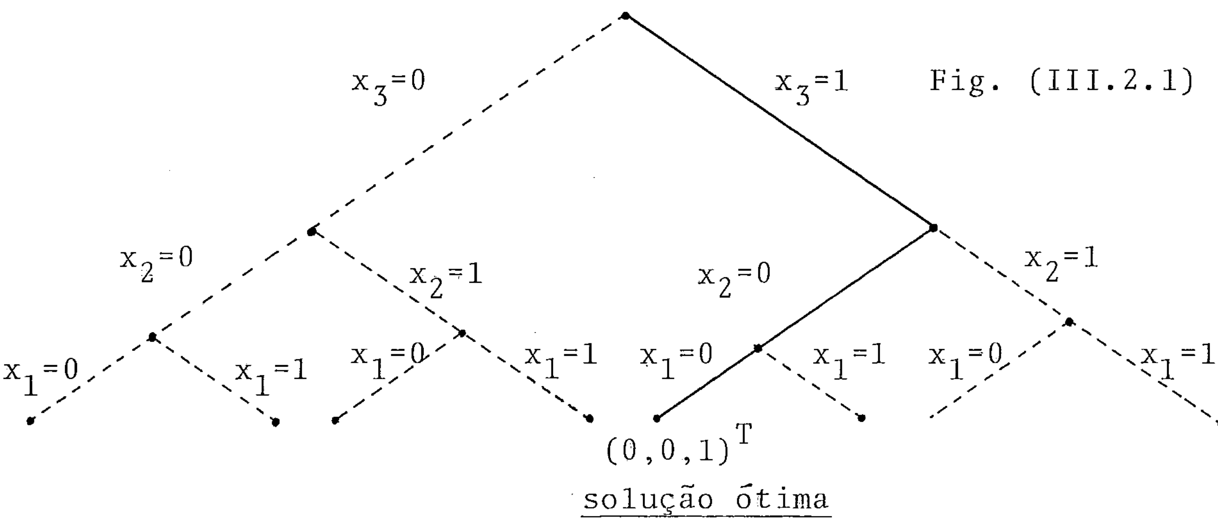


Fig. (III.2.1)

Da exposição feita até o momento, podemos tirar duas conclusões importantes para o sucesso da implementação do método de Enumeração Implícita:

(i) existe uma condição para o processo de enumeração, que garante que todos os pontos são enumerados implícita ou explicitamente, numa região não redundante.

(ii) existe um número de testes de parada, que exclui, tanto quanto possível, as soluções não candidatas.

No exemplo dado, foi fácil determinarmos o caminho das soluções enumeradas implicitamente, porque existem somente 8 soluções. Mas, de um modo geral, é necessário um método eficiente para determinarmos o caminho de todas as soluções enumeradas explícita ou implicitamente. É o que veremos a seguir.

III.3. Esquema de Enumeração

Para facilitar a apresentação do método, introduziremos primeiramente, algumas definições.

Definição (III.3.1):

"Solução parcial: é uma atribuição de valores binários a um subconjunto das n variáveis. Será designada por $\mathbb{S}$ e caracterizada por J , conjunto dos índices das variáveis que compõem a solução parcial, de forma que, se $j \in J$, $x_j = 1$ e se $-j \in J$, $x_j = 0$."

No exemplo visto anteriormente, $J = \{+3, -2\}$ é uma solução parcial, pois, $x_3 = 1$ e $x_2 = 0$.

O conjunto J é um conjunto ordenado, no sentido de que a ordem de seus elementos reflete a ordem em que as variáveis foram geradas.

Definição (III.3.2):

"Variável livre: é uma variável à qual não se atribuiu valor algum, portanto, é uma variável que pode assumir um dos valores 0 ou 1."

No exemplo acima, a variável livre é x_1, sendo que cada valor por ela assumido gera um vetor livre. Assim, temos (0) e (1) como sendo os vetores livres, ou ainda, {-1} e {+1}.

<u>Definição (III.3.3)</u>: "<u>Complemento de uma solução parcial</u>: é uma solução parcial definida pelos índices das variáveis que estão em J , juntamente com os índices especificados num dos vetores livres."

Assim, para n = 3 e J = {+3, -2} os seus complementos serão: {+3, -2, -1} e {+3, -2, +1}.

O complemento nulo de uma solução parcial, é uma solução parcial formada pelo vetor livre, que tem todos os seus elementos iguais a zero. O número de complementos de uma solução parcial, é naturalmente, igual ao número de vetores livres.

Podemos eventualmente, nos referir ao valor "um", como complemento lógico do "zero", e vice-versa, o que naturalmente, não será confundido com o complemento de uma solução parcial.

Além disso, dizemos que uma solução parcial será uma indicação binária completa, se esta solução for constituída exatamente por todas as variáveis do problema. Assim, J = {+3, -2, -1} é uma indicação binária completa, pois, possui 3 elementos num problema com 3 variáveis.

<u>Definição(III.3.4)</u>:

"<u>Solução parcial descartada</u>: uma solução parcial será descartada se:

(i) todos os seus complementos forem inviáveis;

(ii) for uma indicação binária completa."

Definição III.3.5:

"Solução parcial abandonada: uma solução parcial será abandonada se:

(i) todos os seus complementos forem inviáveis;

(ii) não for uma indicação binária completa. "

Definição III.3.6:

"Solução parcial armazenada: uma solução parcial será armazenada se:

(i) for uma solução viável;

(ii) for uma indicação binária completa. "

Assim, para o exemplo dado, as soluções parciais $J = \{-3\}$ e $J = \{+3, +2\}$ são abandonadas; $J = \{+3,-2,+1\}$ descartada e $J = \{+3, -2, -1\}$ armazenada.

Na fig.(III.3.1), apresentamos o fluxograma do esquema do método de enumeração.

Consideremos o mesmo exemplo visto na seção III.2, e suponhamos que a solução parcial inicial seja vazia, assim, $J_o = \emptyset$ e as variáveis x_1, x_2 e x_3 são variáveis livres. O próximo passo para obtermos a viabilidade, será considerarmos $x_3 = 1$ ou $J_1 = \{+3\}$. Desta forma, dizemos que o processo realizou um avanço de J_o à J_1, e criou um descendente de J_o, pois $J_o \subset J_1$. Agora, para mantermos a viabilidade, as variáveis x_1 e x_2 assumirão o valor zero, ou $J_2 = \{+3,-2,-1\}$, e novamente, o processo avançou de J_1 à J_2, criando um descendente de J_1, pois, $J_1 \subset J_2$. Como J_2 é uma indicação

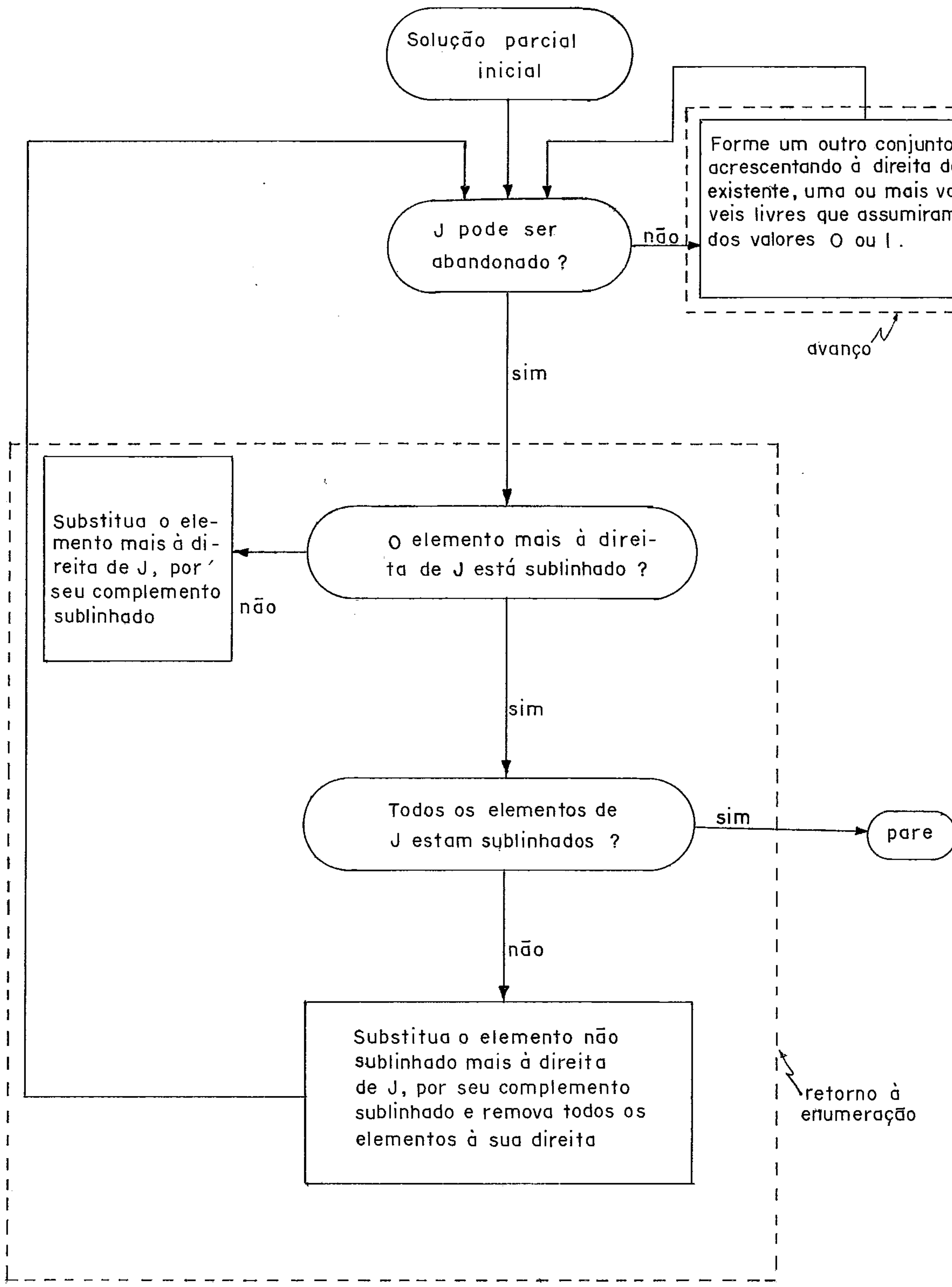


Figura (III.3.1) - Fluxograma para o esquema de enumeração binária contendo todas as variáveis, ela é uma indicação binária completa, e sendo também uma solução viável, será, portanto, armazenada. De acordo com a fig.(III.3.1), um retorno à enumeração fornecerá uma solução representada pelo conjunto $J_3 = \{+3, -2, +1\}$, que será descartada, pois é uma solução inviável. Pela fig.(III.3.2) J_3 é obtido trançando o ramo ascendente $x_1 = 0$ e o ramo descendente $x_1 = 1$. O elemento 1 de J_3 está sublinhado para indicar que o ramo $x_1 = 0$ já foi considerado em J_2. Novamente, retornando à enumeração teremos: $J_4 = \{+3, +\underline{2}\}$. Como J_4 não tem complemento viável, e é uma indicação binária incompleta, será portanto, abandonada. Finalmente, fazendo um último retorno à enumeração, teremos $J_5 = \{-\underline{3}\}$ que será abandonada, uma vez que a condição necessária para a viabilidade do problema era considerarmos $x_3 = 1$. Desta forma, o processo de enumeração termina, pois todos os elementos de J_5 estão sublinhados.

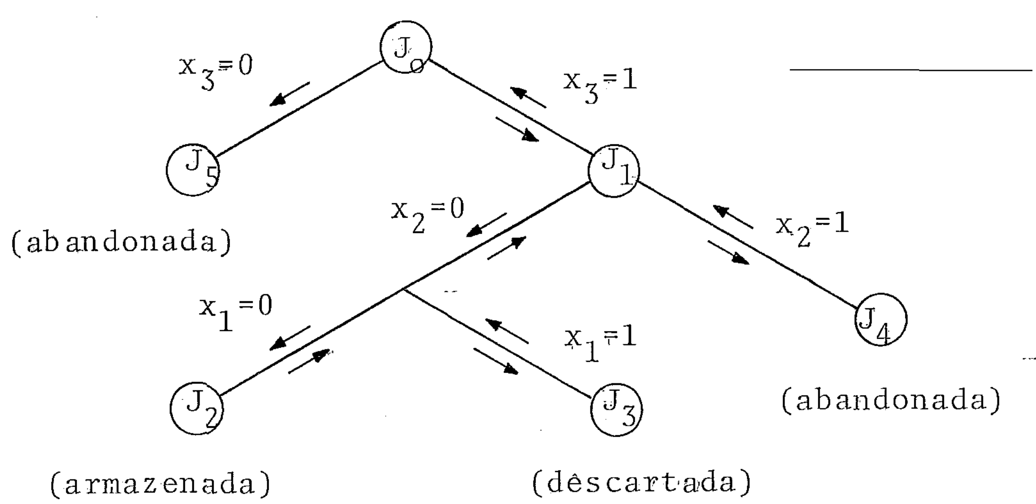


Fig. (III.3.2)

Vejamos agora, a descrição do método de enumeração, de uma maneira mais genérica.

III.4. Descrição do método:

A solução ótima do problema P , se existir, poderá ser encontrada por um processo exaustivo de enumeração, uma vez que o número de todos os vetores binários é igual a 2^n . Entretanto, qualquer busca neste sentido seria por demais dispendiosa, principalmente em termos de tempo. Assim, a idéia da enumeração implícita, surgiu no sentido de estabelecer um algoritmo munido de critérios que permitissem abandonar determinadas soluções parciais, sem percorrer a árvore gerada por elas. Esses critérios dão origem a um mecanismo dinâmico de avanço e retorno sobre os ramos da árvore, em cujos nós estão representadas as soluções parciais.

A ordem em que as soluções parciais são geradas, reflete a sequência natural definida pelos mecanismos de avanço e retorno ao processo enumerativo.

Quando uma solução parcial for obtida, o algoritmo verifica se ela é viável. Se for, verifica ainda, se seu melhor complemento viável fornece um valor para a função objetivo, melhor do que aquele conhecido até o momento. Se isto ocorrer, a solução parcial é armazenada, seus complementos são excluídos de futuras considerações, excessão feita para o seu melhor complemento viável, que é armazenado para futuras comparações, bem como o correspondente valor da função objetivo. Se o valor da função objetivo não for melhor do que o existente, o algoritmo simplesmente descarta a solução parcial em questão. Se a solução parcial não for viável, o algoritmo tenta vencer a inviabilidade, buscando uma solução parcial descendente desta, da seguinte maneira: coleciona as variáveis livres que ao assumirem um dos valores 0 ou 1, ajudariam na obtenção de um valor da função objetivo melhor que o existente, e além disso, cooperariam para vencer a inviabilidade. Se não existir variáveis livres com tais características, o algoritmo abandona a solução parcial. Caso contrário, ele elege dentre as variáveis com as características acima, aquela que minimiza a quantidade total de inviabilidade existente. O índice desta variável é acrescentado àqueles da solução parcial considerada, formando com eles uma nova solução parcial, descendente daquela.

Representaremos por (J_k) a sequência das soluções parciais. O algoritmo inicia o processo de enumeração com $J_o = \emptyset$. O processo terminaria nesse ponto, se o algoritmo abandonasse J_o, pois card.$(J_o) = 0$, e os complementos de J_o, em número de 2^n, seriam implicitamente enumerados. Caso contrário, o algoritmo obtem J_1, como descendente de J_o, pelo aumento deste com o índice de uma variável livre, que passará a assumir um dos valores binários. Prosseguiremos assim, até que na p-ésima solução parcial, J_p é armazenada. O melhor complemento de J_p, se este produzir um valor da função objetivo melhor do que o valor conhecido até então, é guardado como uma solução candidata.

Dois membros sucessivos, J_p e J_{p+1}, da sequência (J_k) são distintos ou porque $J_p \subset J_{p+1}$, que ocorre quando J_{p+1} é descendente de J_p , ou porque possuem elementos logicamente complementares. Este fato, faz da sequência (J_k) , uma sequência não redundante, no sentido de que ela não duplica nenhuma solução parcial previamente descartada ou armazenada.

Assim, na fig.(III.3.2), estão representados 6 elementos da sequência (J_k). Através destes elementos, podemos observar a lei que rege a formação da sequência das soluções parciais. Passamos de um elemento para outro na sequência, seja pela complementação lógica do último elemento ainda não complementado, seja pelo acréscimo de mais um elemento. No primeiro caso, abandonamos todos os elementos imediatamente à direita do último elemento complementado. Este fato corresponde a um retorno nos ramos da árvore. Quando a passagem para o próximo membro da sequência, se faz através do acréscimo de mais um elemento, o algoritmo está provocando um avanço nos ramos da árvore, criando um descendente. Observamos que a diferença entre J_1 e J_2 , está no elemento a mais que J_2 possui, pois J_2 é descendente de J_1 , e a diferença entre J_2 e J_3 , está no elemento logicamente complementado que J_3 possui.

III.5. O Algoritmo

As restrições do nosso problema, têm a seguinte forma:

$$\sum_{j\varepsilon N} a_{ij}\, x_j \le b_i \qquad , \qquad \forall i \;\varepsilon\; M \;.$$

Introduzindo as variáveis de folga $s_i \geq 0$, $i \in M$, as restrições assumem o seguinte aspecto:

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad , \quad i \in M \quad ,$$

ou ainda:

$$s_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \quad , \quad i \in M \ .$$

Uma solução parcial J , será viável se:

$$s_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 0 \ , \quad i \in M \ .$$

Quando J não for viável, o algoritmo cria os seguintes conjuntos dos índices das variáveis x_j , $j \in N$, para os testes de parada. Aqui os índices t indicam a t-ésima iteração.

Teste 1

$A_t \rightarrow$ conjunto dos índices das variáveis livres que ao assumirem o valor um, aumentam a inviabilidade do problema. Assim, estas variáveis são excluídas como não candidatas, em outras palavras:

$$A_t = \{j \in N - J_t \ / \ a_{ij} \geq 0 \ \text{ para todo } \ i \ \text{ tal que } \ s_i^t < 0\} \ .$$

Teste 2

$N_t^1 \rightarrow$ conjunto dos índices das variáveis livres que poderão assumir o valor um e diminuir a inviabilidade.

$$N_t^1 = N - J_t - A_t \quad .$$

Se $N_t^1 = \emptyset$, nenhuma variável livre pode assumir o valor um, significando que J_t é descartada, e o algoritmo solicita um retorno à enumeração.

Se $N_t^1 \neq \emptyset$, devemos definir um outro conjunto B_t , que identifica aquelas variáveis livres, que, embora possam diminuir a inviabilidade, não podem fornecer um valor melhor da função objetivo quando comparado com $\bar{x}_o^t$. Assim, as variáveis x_j , $j \in B_t$, devem ser excluídas como não candidatas:

$$B_t = \{j \in N_t^1 \ / \ x_o^t + c_j \geq \bar{x}_o^t\} \quad .$$

Teste 3

$N_t^2 \rightarrow$ conjunto dos índices das variáveis livres que ao assumirem o valor um, diminuirão a inviabilidade e o valor da função objetivo. Assim,

$$N_t^2 = N_t^1 - B_t \quad .$$

Se $N_t^2 = \emptyset$, retornamos à enumeração.

Se $N_t^2 \neq \emptyset$, definimos o conjunto C_t :

$$C_t = \{i \in M \ / \ s_i^t < 0 \ , \ \sum_{j \in N_t^2} \min(0, a_{ij}) > s_i^t\} \quad .$$

Se $C_t \neq \emptyset$, significa que utilizando todas as variáveis x_j , $j \in N_t^2$, ao menos uma folga inviável $(s_i^t < 0)$ continuará a ser inviável. Assim, J_t é abandonada, pois não tem complemento viável, e portanto, devemos retornar à enumeração.

Se $C_t = \emptyset$, J_t não pode ser abandonada nem descartada. Então, seguimos para o teste 4, para determinar qual variável livre deverá assumir o valor um

Teste 4

Seja x_{j^*} , $j^* \in N_t^2$, a variável livre escolhida para assumir o valor um, de forma que:

$$v_{j^*} = \max_{j \in N_t^2} \{v_j\} \quad ,$$

onde

$$v_j = \sum_{i \in M} \min(0, s_i^t - a_{ij}) \quad , \quad j \in N_t^2 \quad ,$$

com v_j sendo uma medida empírica da viabilidade. No caso de empate, devemos escolher j^* , de forma que, c_{j^*} seja o menor dos c_j . Concluindo, temos que:

$$J_{t+1} = J_t \cup \{j^*\} \quad ,$$

isto é, J_{t+1} é uma solução descendente de J_t . Se $v_{j^*} = 0$, temos que J_{t+1} é viável. Pelo teste 2, a solução em questão, deve produzir um valor de $\bar{x}_0^t$. Assim sendo, temos que:

$$\bar{x}_o^t = x_o^t + c_{j*} \ .$$

Como todos os coeficientes são não-negativos, isto é, $c_j \geq 0$, $\forall j$, é evidente que nenhum outro complemento de J_{t+1} , pode produzir um valor melhor que $\bar{x}_o^t$. Isto significa de J_{t+1} é armazenada, e retornamos à enumeração. Agora, por outro lado, se $v_{j*} < 0$, J_{t+1} deve ser abandonada e retornamos ao teste 1.

Vejamos então, os passos do algoritmo:

Passo 1:

Faça $t = 0$ e $J_t = \emptyset$.

Passo 2:

Se J_t não puder ser abandonada, vá para o passo 3 . Caso contrário, vá para o passo 4 .

Passo 3:

Se existe um índice j das variáveis livres, que produz um valor melhor que $\bar{x}_o^t$ e diminui a inviabilidade, aumente J_t acrescentando j à sua direita. Faça $t = t + 1$ e volte para o passo 2 . Caso contrário, vá para o passo 5 .

Passo 4:

Se o melhor complemento viável de J_t foi encontrado, e se ele produz um valor de $\bar{x}_o^t$ melhor do que aquele produzido pela última solução candidata, armazene este complemento viável, como também a atual solução candidata.

Passo 5:

Encontre o elemento de J_t , mais à sua direita, ainda não logicamente complementado. Senão existir nenhum, pare. Caso contrário, troque-o pelo seu complemento lógico sublinhado e abandone todos os elementos imediatamente à sua direita. Faça $t = t+1$ e volte ao passo 2 .

Vejamos agora, o enunciado do teorema de Glover e Geoffrion:

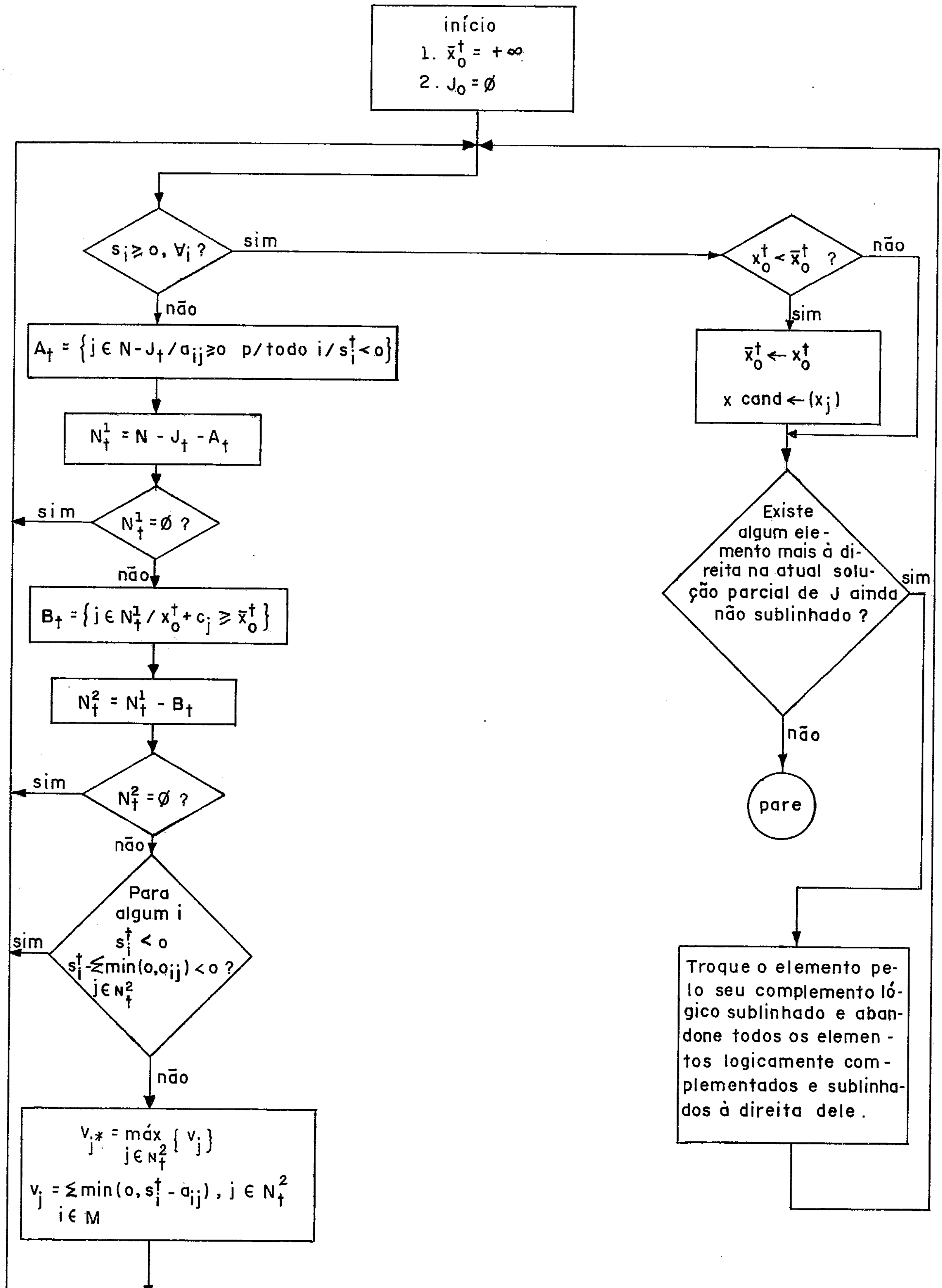
Teorema (III.5.1):

"A sequência de soluções parciais gerada pelo algoritmo, é não redundante e termina somente quando todas as 2^n soluções parciais foram explícita e/ou implicitamente enumeradas."

Ver demonstração em |22|.

As 2^n soluções parciais são implicitamente enumeradas, somente depois que a solução parcial, onde todos os elementos foram logicamente complementados, for implícita ou explicitamente enumerada. A sua enumeração é garantida pelas regras de fixar e liberar as variáveis.

A fig.(III.5.1) nos fornece o fluxograma para o algoritmo de Enumeração Implícita das soluções parciais de um problema de programação linear inteira.



Fluxograma
Figura (III.5.1)

III.6. Exercício resolvido:

Vejamos agora, um exercício resolvido, para melhor ilustrar o procedimento.

Seja o seguinte problema de programação linear inteira:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\text{minimizar}} & x_o = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5 \\
\text{sujeito à:} & -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 \leq -2 \\
 & 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 0 \\
 & x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -1 \\
 & x_j \in \{0,1\} \quad , \; j = 1,2,3,4,5 \quad .
\end{array}
$$

Observamos que o problema já se encontra na forma desejada, assim sendo, podemos iniciar imediatamente o método de Enumeração Implícita:

$\boxed{\text{Iteração } 0}$

$$J_o = \emptyset \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$s^o = (s_1^o, s_2^o, s_3^o)^T = (-2,0,-1)^T$$

$$\overline{x}_o^o = +\infty$$

e

$$x_o^o = 0 \quad .$$

Teste 1

$$A_o = \{j \in N - J_o / a_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ tal que } s_i^o < 0\} \quad .$$

$$N - J_o = N - \emptyset = N = \{1,2,3,4,5\} \quad .$$

Como

$$s_1^o = -2 < 0 \rightarrow a_{12} = 3 > 0 \quad e \quad a_{32} = 1 > 0$$

$$s_3^o = -1 < 0 \rightarrow a_{15} = 4 > 0 \quad e \quad a_{35} = 1 > 0 \quad ,$$

temos:

$$A_o = \{2,5\} \quad ,$$

assim, as variáveis x_2 e x_5 são excluídas como não candidatas.

<u>Teste 2</u>

$$N_0^1 = N - J_o - A_o = \{1,2,3,4,5\} - \{2,5\} = \{1,3,4\} \neq \emptyset .$$

Agora, calcularemos o conjunto B_o que identifica as variáveis livres que podem diminuir a inviabilidade, mas não podem fornecer um valor melhor da função objetivo, quando comparada com $\bar{x}_o^o = +\infty$.

$$B_o = \{j \in \{1,3,4\} \ / \ x_o^o + c_j \geq \bar{x}_o^o\}$$

$$B_o = \{j \in \{1,3,4\} / \ 0 + c_j \geq +\infty\}$$

$$B_o = \emptyset \ .$$

Teste 3

$N_o^2 = N_o^1 - B_o = N_o^1 = \{1,3,5\} \neq \emptyset$.

$C_o = \{i \in M \;/\; s_i^o < 0 \;,\; \sum_{j \in N_o^2} \min(0, a_{ij}) > s_i^o\}$.

Para $s_1^o = -2 < 0$, devemos ter: $\sum_{j \in N_o^2} \min(0, a_{ij}) > -2$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\{1,3,4\}} \min(0,a_{ij}) &= \min(0,a_{11}) + \min(0,a_{13}) + \min(0,a_{14}) = \\ &= \min(0,-1) + \min(0,-5) + \min(0,-1) = \\ &= -1 -5 -1 = \underline{\underline{-7 < -2}} \;.\end{aligned}$$

Para $s_3^o = -1 < 0$, devemos ter: $\sum_{j \in N_o^2} \min(0, a_{3j}) > -1$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\{1,3,4\}} \min(0,a_{3j}) &= \min(0,a_{31}) + \min(0,a_{33}) + \min(0,a_{34}) = \\ &= \min(0,0) + \min(0,-2) + \min(0,1) = \\ &= 0 -2 +0 = \underline{\underline{-2 < -1}} \;,\end{aligned}$$

logo $C_o = \emptyset$, assim, passamos à criação do descendente de J_o .

Teste 4

$$v_j = \sum_{i \in M} \min(0, s_i^o - a_{ij}) \quad , \quad j \in N_o^2 = \{1,3,4\}$$

$v_1 = \min(0, s_1^o - a_{11}) + \min(0, s_2^o - a_{21}) + \min(0, s_3^o - a_{31}) =$

$v_1 = \min(0, -2 +1) + \min(0, 0 -2) + \min(0, -1 -0) =$

$v_1 = -1 -2 -1 = -4 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1 = -4}$

$$v_3 = \min(0, s_1^o - a_{13}) + \min(0, s_2^o - a_{23}) + \min(0, s_3^o - a_{33}) =$$

$$v_3 = \min(0, -2+5) + \min(0, 0-3) + \min(0, -1+2) =$$

$$v_3 = 0 - 3 + 0 = -3 \rightarrow \boxed{v_3 = -3}$$

$$v_4 = \min(0, s_1^o - a_{14}) + \min(0, s_2^o - a_{24}) + \min(0, s_3^o - a_{34}) =$$

$$v_4 = \min(0, -2+1) + \min(0, 0-2) + \min(0, -1-1) =$$

$$v_4 = -1 - 2 - 2 = -5 \rightarrow \boxed{v_4 = -5}$$

$$v_{j^*} = \text{máx} \{v_1, v_3, v_4\}$$

$$v_{j^*} = \text{máx} \{-4, -3, -5\} = -3 \quad ,$$

portanto,

$$v_{j^*} = v_3 = -3 \rightarrow j^* = 3 \rightarrow J_1 = J_o \cup \{+3\} = \{+3\}$$

$$\boxed{J_1 = \{+3\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x_3 = 1\ .}$$

Iteração 1

$$J_1 = \{+3\} \rightarrow x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$$
$$x_3 = 1$$

$$s^1 \rightarrow s_1^1 = -2 + 5 = 3$$
$$s_2^1 = 0 - 3 = -3 \rightarrow \boxed{s^1 = (3, -3, 1)^T\ .}$$
$$s_3^1 = -1 + 2 = 1$$

$$x_o^1 = 5$$

$$x_o^o = \bar{x}_o^1 = +\infty \quad .$$

Teste 1

$A_1 = \{j \in N - J_1 \ / \ a_{ij} \geq 0$ para todo i tal que $s_i^1 < 0\}$

$A_1 = \{1,4\}$.

Teste 2

$N_1^1 = N - J_1 - A_1 = \{1,2,3,4,5\}-\{3\}-\{1,4\}=\{2,5\} \neq \emptyset \rightarrow N_1^1 \neq \emptyset$

$B_1 = \{j \in \{2,5\} \ / \ 5 + c_j \geq +\infty\} = \emptyset \quad \rightarrow B_1 = \emptyset$.

Teste 3

$N_1^2 = N_1^1 - B_1 = \{2,5\} \neq \emptyset$

$C_1 = \{i \in M \ / \ s_i^1 < 0, \ \sum_{j \in N_1^2} \min(0, a_{ij}) > s_i^1\}$.

Para $\underline{s_2^1 = -3 < 0}$, devemos ter: $\sum_{j \in \{2,5\}} \min(0, a_{2j}) > -3$

$$\sum_{j \in \{2,5\}} \min(0, a_{2j}) = \min(0, a_{22}) + \min(0, a_{25}) =$$
$$= \min(0,-6) + \min(0,-2) =$$
$$= -6 -2 = \underline{\underline{-8 < -3}} \ ,$$

portanto, $C_1 = \emptyset$, assim passamos à criação do descendente de J_1 .

Teste 4

$$v_j = \sum_{i \varepsilon M} \min(0, s_i^1 - a_{ij}) \qquad , \qquad j \ \varepsilon \ N_1^2 = \{2,5\}$$

$$v_2 = \min(0, s_1^1 - a_{12}) + \min(0, s_2^1 - a_{22}) + \min(0, s_3^1 - a_{32}) =$$

$$v_2 = \min(0, 3-3) + \min(0, -3+6) + \min(0, 1-1) =$$

$$v_2 = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_2 = 0}$$

$$v_5 = \min(0, s_1^1 - a_{15}) + \min(0, s_2^1 - a_{25}) + \min(0, s_3^1 - a_{35}) =$$

$$v_5 = \min(0, 3-4) + \min(0, -3+2) + \min(0, 1-1) =$$

$$v_5 = -1 -1 + 0 = -2 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_5 = -2}$$

$$v_{j*} = \text{máx}\{v_2, v_5\}$$

$$v_{j*} = \text{máx}\{0, -2\} = 0 \ ,$$

portanto,

$$v_{j*} = v_2 = 0 \ \rightarrow \ j^* = 2 \ \rightarrow \ J_2 = J_1 \cup \{j^*\} = \{+3\} \cup \{+2\}$$

$$\boxed{J_2 = \{+3, \ +2\}} \ .$$

Iteração 2

$$J_2 = \{+3, \ +2\} \rightarrow x_1 = x_4 = x_5 = 0$$

$$x_2 = x_3 = 1$$

$$s^2 \rightarrow \begin{array}{l} s_1^2 = -2 + 5 - 3 = 0 \\ s_2^2 = 0 - 3 + 6 = 3 \\ s_3^2 = -1 + 2 - 1 = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{s^2 = (0,\ 3,\ 0)^T\ .}$$

Logo, J_2 é viável, portanto teremos:

$$\bar{x}_o^2 = c_3\ x_3 + c_2\ x_2 = 10 + 7 = 17\ .$$

Como $17 < \bar{x}_o^o = +\infty$, adotamos $\bar{x}_o^2 = 17$ e o vetor

$$\boxed{x = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)^T}\ ,$$

será uma solução candidata.

O algoritmo acaba de estudar a solução parcial J_2 . O seu melhor complemento viável será enumerado explicitamente e os outros implicitamente. A solução parcial J_2 será armazenada e retornamos à enumeração, logo,

$$\boxed{J_3 = \{+3,\ \underline{-2}\}}\ .$$

Iteração 3

$$J_3 = \{+3\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$$s^3 \to s_1^3 = -2 + 5 = 3$$
$$s_2^3 = 0 - 3 = -3 \quad \to \quad \boxed{s^3 = (3,\ -3,\ 1)^T} \ .$$
$$s_3^3 = -1 + 2 = 1$$

$$x_o^3 = c_3\ x_3 = 10 \ .$$

<u>Teste 1</u>

$$A_3 = \{j \in \{1,4,5\} \ / \ a_{ij} \geq 0 \ \text{ para todo } \ i \ \text{ tal que } \ s_i^3 < 0\} \cdot$$

$$A_3 = \{1,4\} \ .$$

<u>Teste 2</u>

$$N_3^1 = N - J_3 - A_3 = \{1,2,3,4,5\}-\{3,2\}-\{1,4\} = \{5\} \neq \emptyset$$

$$B_3 = \{j \in \{5\} \ / \ 10 + c_5 \geq 17\} = \emptyset \ .$$

<u>Teste 3</u>

$$N_3^2 = N_3^1 - B_3 = \{5\} \neq \emptyset$$

Para $\underline{s_2^3 = -3 < 0}$, devemos ter: $\sum_{j \in \{5\}} \min(0, a_{2j}) > -3$

$$\sum_{j \in \{5\}} \min(0, a_{2j}) = \min(0, a_{25}) = \min(0,-2) = \underline{\underline{-2 > -3}} \ ,$$

portanto,

$$C_2 = \{2\} \neq \emptyset \ ,$$

assim, retornamos à enumeração, isto é, consideremos o seguinte conjunto:

$$\boxed{J_4 = \{-\underline{3}\}} \; .$$

$\boxed{\text{Iteração 4}}$

$J_4 = \{-\underline{3}\} \rightarrow \; x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$x_o^4 = 0$

$\bar{x}_o^4 = \bar{x}_o^2 = 17$

$$s^4 \rightarrow \begin{array}{l} s_1^4 = 3 - 5 = -2 \\ s_2^4 = -3 + 3 = 0 \\ s_3^4 = 1 - 2 = -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \boxed{s^4 = (-2, 0, -1)^T \; .}$$

<u>Teste 1</u>

$A_4 = \{j \; \varepsilon \; N - J_4 \; / \; a_{ij} \geq 0$ para todo i tal que $s_i^4 < 0\}$

$$A_4 = \{2, 5\} \quad .$$

<u>Teste 2</u>

$N_4^1 = \{1, 4\} \neq \emptyset$

$B_4 = \emptyset$.

Teste 3

$$N_4^2 = \{1,4\} \neq \emptyset$$

$$C_4 = \{i \in M \;/\; s_i^4 < 0 \;,\; \sum_{j\in\{1,4\}} \min(0,a_{ij}) > s_i^4\}$$

Para $\underline{s_1^4 = -2 < 0}$, devemos ter: $\sum_{j\in\{1,4\}} \min(0,a_{1j}) > -2$

$$\sum_{j\in\{1,4\}} \min(0,a_{1j}) = \min(0,a_{11})+\min(0,a_{14}) =$$
$$= \min(0,1)+\min(0,1) = 0 + 0 = \underline{\underline{0 > -2}}$$

Para $\underline{s_3^4 = -1 < 0}$, devemos ter: $\sum_{j\in\{1,4\}} \min(0,a_{3j}) > -1$

$$\sum_{j\in\{1,4\}} \min(0,a_{3j}) = \min(0,a_{31})+\min(0,a_{34}) =$$
$$= \min(0,0)+\min(0,-1) = 0 -1 = \underline{\underline{-1 \not> -1}} \,,$$

portanto,

$$C_4 = \{1\} \neq \emptyset \;,$$

assim, a solução J_4 é abandonada e retornamos à enumeração. Acontece que todos os elementos de J_4 já foram logicamente complementados, assim, o algoritmo termina o processo enumerativo. A solução ótima é a última solução que foi guardada como solução candidata, isto é:

$$\boxed{x_{\text{ótimo}} = (0,1,1,0,0)^T}$$

e

$$\boxed{\overline{x}_{\text{ót.}} = 17} \,.$$

A árvore gerada pelas soluções parciais enumeradas, está representada na fig.(III.6.1), tendo 5 nós, ou 5 soluções enumeradas explícitamente, sendo que as outras $2^5-5 = 32 - 5 = 27$, são enumeradas implicitamente.

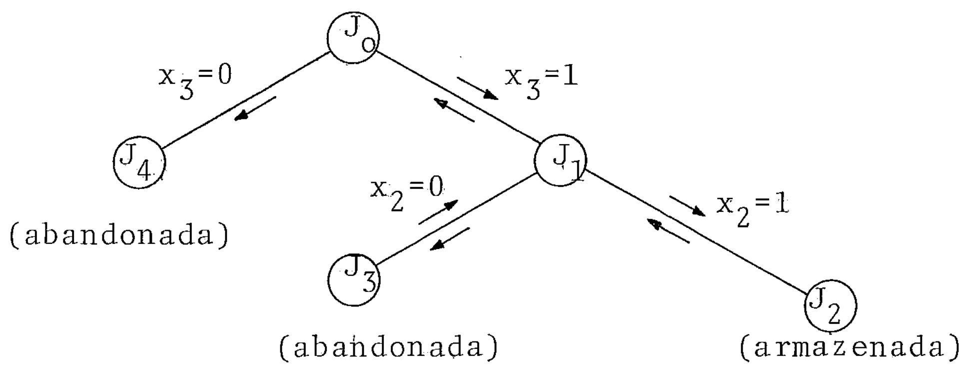


Fig. (III.6.1): Árvore das soluções parciais

III.7. Método de Decomposição

Apresentaremos agora, a solução de problemas de programação inteira bivalente (0-1), através do método de decomposição de Dantzig e Wolfe e da dualidade em programação inteira.

Consideremos o seguinte problema de programação inteira bivalente (0-1):

<u>minimizar</u> $x_o = cx$ (III.7.1)

sujeito à:

$$Ax \leq b \qquad \text{(III.7.2)}$$

$$x \in \{0,1\}^n \ , \qquad \text{(III.7.3)}$$

onde c é um vetor linha com n componentes; x um vetor coluna com n componentes; b um vetor coluna com m componentes e A uma matriz com m linhas e n colunas. Além disso, as componentes do vetor x poderão assumir somente um dos valores 0 ou 1.

Seja o seguinte conjunto:

$$X = \{x \ / \ x \in \mathbb{R}^n \ \text{e} \ x_j \in \{0,1\} \ , \ j = 1,\ldots,n\} \quad .$$

Desta forma, o problema (III.7.1) - (III.7.3) ficará com o seguinte aspecto:

<u>minimizar</u> $x_o = cx$ (III.7.4)

sujeito à:

$$Ax \leq b \qquad \text{(III.7.5)}$$

$$x \in X \ . \qquad \text{(III.7.6)}$$

O problema (III.7.4) - (III.7.6) é denominado <u>problema primal P</u> .

Consideremos agora, um outro conjunto Y:

$$Y = \{x \ / \ x \in \mathbb{R}^n \ \text{e} \ 0 \leq x_j \leq 1 \ , \ j = 1,\ldots,n\} \quad .$$

O conjunto Y é a envoltória convexa do conjunto X, além de ser um conjunto compacto, denso e possuir $p = 2^n$ vértices, sendo n o número de variáveis do problema P .

Para visualizarmos melhor os conjuntos Y e X, tomemos um exemplo com duas variáveis, isto é, no $\mathbb{R}^2$. Assim, o conjunto Y terá $p = 2^2 = 4$ vértices e será definido da seguinte maneira:

$$Y = \{x \;/\; x \in \mathbb{R}^2 \;,\; 0 \le x_1 \le 1 \;\text{ e }\; 0 \le x_2 \le 1\} \quad .$$

O conjunto X será:

$$X = \{x \;/\; x \in \mathbb{R}^2 \;,\; x_1 \in \{0,1\} \text{ e } x_2 \in \{0,1\}\} \quad .$$

Observamos que o conjunto X é formado por quatro pontos, isto é: $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(0,1)^T$ e $(1,1)^T$. Graficamente podemos representá-los:

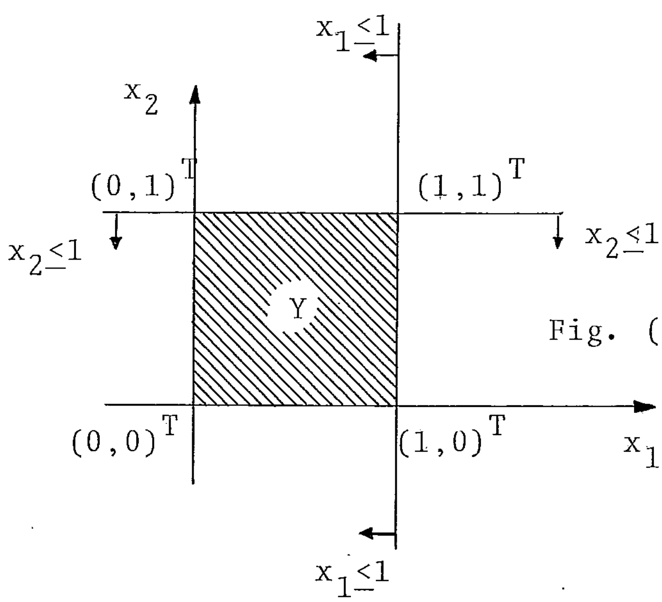


Fig. (III.7.1)

Da fig.(III.7.1), observamos que os pontos de X são os vértices de Y, em outras palavras, todo vértice de Y é um ponto de X. Assim, sem perda de generalidade, podemos representar o conjunto X da seguinte maneira:

$$X = \{0,1\}^n \quad ,$$

onde $\{0,1\}^n$ é o conjunto dos vértices de Y.

O problema primal P, (III.7.4) - (III.7.6), será resolvido através da dualidade em Programação inteira. Este método foi apresentado no capítulo II seção 9, assim, com as devidas substituições, verificamos que iremos obter o seguinte problema:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{k=1}^{p} (cx^k)\ \lambda_k \tag{III.7.7}$$

sujeito à:

$$\sum_{k=1}^{p} (Ax^k)\lambda_k + s = b \tag{III.7.8}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \tag{III.7.9}$$

$$\lambda_k \geq 0 \ , \ k = 1,\ldots,p \ , \tag{III.7.10}$$

$$s \geq 0 \ , \tag{III.7.11}$$

onde λ_k são as variáveis primais; s o vetor cujas componentes são as variáveis de folga; e x^k, $k = 1,\ldots,p$, os vértices ou pontos extremos de Y.

A solução do problema (III.7.7) - (III.7.11) é quase identica àquela apresentada no capítulo II, sendo que a única diferença está na resolução do problema auxiliar. Assim, consideremos o seguinte problema de programação linear:

$$\underline{\text{maximizar}} \ \{u_o + (u_1 A - c)x\}$$

sujeito à: (III.7.12)

$$x \in X \ .$$

Podemos escrever este problema, de uma maneira mais conveniente, isto é:

$$\underline{\text{maximizar}} \ \{qx\}$$
$$\text{sujeito à:} \quad x \in X \ , \qquad \text{(III.7.13)}$$

onde $q = (q_1,\ldots,q_n)$ é um vetor linha dado.

A solução ótima deste problema auxiliar é imediata. Suponhamos que $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ e $x_j = 1$ se o coeficiente de x_j na função objetivo de (III.7.13) for positivo, e $x_j = 0$, caso seu coeficiente na função objetivo seja negativo. Quando o coeficiente de x_j for nulo, a variável x_j poderá assumir um dos valores 0 ou 1. Em outras palavras, temos:

$$x_j = \begin{cases} 1 & , \text{ se } q_j > 0 \\ 0 & , \text{ se } q_j < 0 \\ 1 \text{ ou } 0 & , \text{ se } q_j = 0 \end{cases} \quad , \quad j = 1,\ldots,n \ .$$

Assim, supondo que $\hat{x}$ seja a solução ótima do problema auxiliar, consideremos dois casos:

(i) se $\{u_o + (u_1A-c)\hat{x}\} > 0$, então devemos gerar o vetor λ^o associado a variável λ_o que entrará na base, isto é:

$$\lambda^o = \left[u_o + (u_1A-c)\hat{x} \ ; \ B^{-1}\ [A\hat{x},1]^T\right]^T \ ,$$

(ii) caso contrário, isto é, se $\{u_o + (u_1A-c)\hat{x}\} \leq 0$, o quadro é ótimo.

III.8. Exercício Resolvido:

Vejamos agora, um exemplo: seja o problema primal:

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{maximizar}} \quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3\\
&\text{sujeito à:}\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\\
&\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2\\
&\qquad x_1 \in \{0,1\} \quad ,\\
&\qquad x_2 \in \{0,1\} \quad ,\\
&\qquad x_3 \in \{0,1\} \quad .
\end{aligned}$$

Seja o seguinte conjunto:

$$X = \{x \;/\; x \in \mathbb{R}^3 \;;\; x_1 \in \{0,1\},\; x_2 \in \{0,1\} \text{ e } x_3 \in \{0,1\}\} \quad ,$$

desta forma, o problema inicial ficará:

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{maximizar}} \quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3\\
&\text{sujeito à:}\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\\
&\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2\\
&\qquad\quad x \in X \; .
\end{aligned}$$

Consideremos agora, o seguinte conjunto:

$$Y = \{x \;/\; x \in \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; 0 \leq x_j \leq 1 \;,\; j=1,2,3\} \; .$$

O conjunto Y é a envoltória convexa de X, além de ser compacto e denso, e como os vértices de Y são os pontos de X, podemos reescrever o problema acima:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \tag{III.8.1}$$

sujeito à.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \tag{III.8.2}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \tag{III.8.3}$$

$$x \in Y . \tag{III.8.4}$$

Como o conjunto Y é um poliedro limitado, podemos escrever qualquer ponto de Y como uma combinação convexa de seus pontos extremos, isto é:

$$\forall x \in Y \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \ge 0 = j=1,\dots,p \ ,$$

onde $p = 2^n$, sendo n o número de variáveis.

Substituindo a expressão de x dada acima, no problema (III.8.1) - (III.8.4), obtemos o seguinte problema:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ 2\ -3)x^j]\lambda_j \tag{III.8.1}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 1\ 1)x^j]\lambda_j \le 2 \tag{III.8.2}$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ 1\ -1)x^j]\lambda_j \le 2 \tag{III.8.3}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{III.8.4}$$

$$\lambda_j \ge 0 \ , \ j=1,\dots,p \ . \tag{III.8.5}$$

Introduzindo as variáveis de folga não-negativas

s_1 e s_2 e a variável artificial λ_a, ao problema acima, obtemos o seguinte problema:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ 2\ {-3})x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} [(1\ 1\ 1)x^j]\lambda_j + s_1 && = 2 \\
&\sum_{j=1}^{p} [(2\ 1\ {-1})x^j]\lambda_j \quad + s_2 && = 2 \\
&\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad\qquad + \lambda_a && = 1 \\
&\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ , \\
&\lambda_a \geq 0 \ , \\
&s_1,\ s_2 \geq 0 \ .
\end{aligned}$$

Utilizaremos o método duas fases para obtermos uma solução básica viável inicial:

<u>1.ª Fase</u>:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad \xi = \lambda_a \qquad \text{(III.8.6)}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(1\ 1\ 1)x^j]\lambda_j + s_1 \qquad \text{(III.8.7)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} [(2\ 1\ {-1})x^j]\lambda_j \quad + s_2 \qquad \text{(III.8.8)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad + \lambda_a = 1 \qquad \text{(III.8.9)}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ , \qquad \text{(III.8.10)}$$

$$\lambda_a \geq 0 \ , \ s_1 \geq 0, \ s_2 \geq 0 \ . \qquad \text{(III.8.11)}$$

Passemos portanto, a construção do seguinte quadro:

ξ	1	$\left[\xi_{s_1}\right.$	ξ_{s_2}	$\left.\xi_{\lambda_a}\right]$	$[\bar{\xi}]$
s_1	0				
s_2	0		B^{-1}		$\bar{b}$
λ_a	0				

onde:

$$\bar{\xi} = \xi_B \ B^{-1} \ b$$

$$\xi_{s_1} = \xi_B \ B^{-1} \ e_{s_1}$$

$$\xi_{s_2} = \xi_B \ B^{-1} \ e_{s_2}$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B \ B^{-1} \ e_{\lambda_a} \ .$$

Do problema (III.8.6) - (III.8.11), tiramos os seguintes resultados:

$$\xi_B = (c_{s_1}, c_{s_2}, c_{\lambda_a}) = (0,0,1)$$

$$B = B^{-1} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = (2,2,1)^T \ .$$

Efetuando os devidos cálculos, obtemos:

$$\xi_B\ B^{-1} = (0,0,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,1)$$

$$\xi_{s_1} = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_2} = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{\xi} = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{b} = B^{-1}\ b = b = (2,\ 2,1)^T$$

ξ	1	0	0	1	1
s_1	0	1	0	0	2
s_2	0	0	1	0	2
λ_a	0	0	0	1	1

(Q.III.8.1)

Do quadro (Q.III.8.1), tiramos:

$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 1)$

$B^{-1} = I_3$.

Consideremos agora, o seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad (u_1, u_o) \begin{pmatrix} Ax \\ 1 \end{pmatrix} - cx$$

sujeito à:

$$x \in Y .$$

$$\underline{\text{maximizar}} \quad (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$$x \in Y .$$

$$\underline{\text{maximizar}} \quad 1$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_2 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_3 \leq 1 \ .$$

Como o máximo do problema auxiliar é igual a 1, $\forall j$, podemos então, considerar como solução qualquer valor de x, assim sendo, iniciaremos com a seguinte solução:

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0 \ \ 0 \ \ 0)^T .}$$

Nosso objetivo é obter $\lambda_a = 0$, para isto, devemos gerar um vetor coluna λ^1, associado à variável λ_1 que entrará na base no lugar de λ_a. Desta forma, temos:

$$[A\hat{x}^1, 1]^T = (0 \ \ 0 \ \ 1)^T$$

$$y_1 = B^{-1} \begin{pmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\boxed{z_1 - \hat{c}_1 = 1 \ .}$$

O vetor coluna λ^1, é definido por:

$$\lambda^1 = (z_1 - \hat{c}_1 \; ; \; B^{-1} [A\hat{x}^1, 1]^T)^T \; ,$$

portanto,

$$\boxed{\lambda^1 = (1,\ 0,\ 0,\ 1)^T \; .} \quad \rightarrow \qquad (Q.III.8.1)$$

Introduzindo λ^1 no quadro (Q.III.8.1) obtemos o quadro (Q.III.8.2):

						$\downarrow \lambda^1$
ξ	1	0	0	1	1	1
s_1	0	1	0	0	2	0
s_2	0	0	1	0	2	0
$\leftarrow \lambda_a$	0	0	0	1	1	1

(Q.III.8.2)

Após o pivoteamento, temos:

						λ^1
v	1	0	0	0	0	0
s_1	0	1	0	0	2	0
s_2	0	0	1	0	2	0
λ_1	0	0	0	1	1	1

(Q.III.8.3)

Eliminando a coluna λ^1 do quadro (Q.III.8.3), obtemos finalmente, o quadro inicial, podendo então, aplicar o método dual de decomposição.

Iteração 1

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad (u_1, u_o) \begin{pmatrix} Ax \\ 1 \end{pmatrix} - cx$$

sujeito à:

$$x \in Y \;.$$

Do quadro (Q.III.8.3), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (0, 0, 0)$$

$$B^{-1} = I_3$$

$$\overline{b} = (2,\ 2, 1)^T \;.$$

Substituindo esses valores no problema auxiliar, obtemos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad (0, 0, 0) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 \end{pmatrix} - (3\ 2\ -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 1$$
$$0 \leq x_2 \leq 1$$
$$0 \leq x_3 \leq 1 \;.$$

$$\underline{\text{minimizar}}: \quad -3x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 1$$
$$0 \leq x_2 \leq 1$$
$$0 \leq x_3 \leq 1 \;.$$

A solução ótima do problema acima, será:

$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$

$\hat{x}_3 = 0$

ou

$$\boxed{\hat{x}^2 = (1,\ 1,\ 0)^T}\ .$$

Calculemos agora, $z_2 - \hat{c}_2$, isto é:

$z_2 - \hat{c}_2 = -3\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3$

$z_2 - \hat{c}_2 = -3 -2 = -5 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_2 - \hat{c}_2 = -5\ .}$

Como $z_2 - \hat{c}_2$ é negativo, devemos gerar um vetor coluna λ^2 , associado à variável λ_2 :

$$\lambda^2 = (z_2 - \hat{c}_2\ ,\ y_2)^T\ ,$$

onde:

$$z_2 - \hat{c}_2 = -5$$

e

$$y_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

portanto,

$$\boxed{\lambda^2 = (-5,\ 2,\ 3,\ 1)^T\ .} \quad \rightarrow \quad \text{(Q.III.8.3)}$$

Introduzindo o vetor λ^2 no quadro (Q.III.8.3), obtemos:

						$\downarrow \lambda^2$
v	1	0	0	0	0	-5
s_1	0	1	0	0	2	2
$\leftarrow s_2$	0	0	1	0	2	3
λ_1	0	0	0	1	1	1

(Q.III.8.4)

Após o pivoteamento, teremos:

						λ^2
v	1	0	5/3	0	10/3	0
s_1	0	1	-2/3	0	2/3	0
λ_2	0	0	1/3	0	2/3	1
λ_1	0	0	-1/3	1	1/3	0

(Q.III.8.5)

Iteração 2

Como o mesmo procedimento anterior, temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad (0,5/3,0)\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 \end{pmatrix} - (3,2,-3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_2 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_3 \leq 1 \quad .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{3}\, x_1 - \frac{1}{3}\, x_2 + \frac{4}{3}\, x_3$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \ , \ 0 \leq x_2 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_3 \leq 1 \quad .$$

A solução ótima do problema auxiliar será:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_3 = 0 \quad e \quad \hat{x}_2 = 1$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^3 = (0,1,0)^T} .$$

Calcularemos agora, $z_3 - \hat{c}_3$, isto é:

$$z_3 - \hat{c}_3 = 1/3\ \hat{x}_1 - 1/3\ \hat{x}_2 + 4/3\ \hat{x}_3 = -1/3 \rightarrow \boxed{z_3 - \hat{c}_3 = -1/3}$$

Como $z_3 - \hat{c}_3$ é negativo, devemos gerar o vetor coluna λ^3, associado à variável λ_3:

$$\lambda^3 = (z_3 - \hat{c}_3\ ,\ B^{-1}\ [A\hat{x}^3, 1]^T)^T \quad ,$$

portanto,

$$[A\hat{x}^3, 1]^T = [1,\ 1,\ 1]^T$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad ,$$

logo,

$$\boxed{\lambda^3 = (-1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 2/3)^T .} \rightarrow \quad (Q.III.8.5)$$

Introduzindo λ^3 no quadro (Q.III.8.5), obtemos o seguinte:

						$\downarrow \lambda^3$
v	1	0	5/3	0	10/7	-1/3
s_1	0	1	-2/3	0	2/3	1/3
λ_2	0	0	1/3	0	2/3	1/3
$\leftarrow \lambda_1$	0	0	-1/3	1	1/3	2/3

(Q.III.8.6)

Após o pivoteamento, temos:

						$\downarrow \lambda^3$
v	1	0	3/2	1/2	7/2	0
s_1	0	1	-1/2	-1/2	1/2	0
λ_2	0	0	1/2	-1/2	1/2	0
λ_3	0	0	-1/2	3/2	1/2	1

(Q.III.8.7)

Iteração 3

Do quadro (Q.III.8.7), tiramos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (0,\ 3/2,\ 1/2)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Como o mesmo procedimento anterior, temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad (0 \;\; 3/2 \;\; 1/2) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 \end{pmatrix} - (3 \;\; 2 \;\; -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$$0 \le x_1 \le 1 \;;\quad 0 \le x_2 \le 1 \;;\; 0 \le x_3 \le 1 \;.$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad 0\, x_1 - 1/2\, x_2 + 3/2\, x_3 + 1/2$$

sujeito à:

$$0 \le x_1 \le 1 \;;\; 0 \le x_2 \le 1 \;;\; 0 \le x_3 \le 1 \;.$$

Este problema auxiliar apresenta duas soluções:

1. $\hat{x}_1 = \hat{x}_3 = 0$
   $\hat{x}_2 = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\hat{x}^4 = (0,\ 1,\ 0)^T.}$

2. $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$
   $\hat{x}_3 = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\hat{x}^5 = (1,\ 1,\ 0)^T.}$

Calcularemos agora, $z_4 - \hat{c}_4$ e $z_5 - \hat{c}_5$, isto é:

$$z_4 - \hat{c}_4 = 0\ \hat{x}_1 - 1/2\ \hat{x}_2 + 3/2\ \hat{x}_3 + 1/2 = -1/2 + 1/2 = 0 \;,$$

e

$$z_5 - \hat{c}_5 = 0\ \hat{x}_1 - 1/2\ \hat{x}_2 + 3/2\ \hat{x}_3 + 1/2 = 0.1 - 1/2 + 1/2 = 0 \;.$$

Em vista disto, o algoritmo para, e as soluções ó timas para o problema auxiliar serão:

$$\boxed{\hat{x}^4 = (0,1,0)^T}$$

e

$$\boxed{\hat{x}^5 = (1,1,0)^T} \;.$$

Além disso, observamos que:

$$\hat{x}^4 = \hat{x}^3$$

e

$$\hat{x}^5 = \hat{x}^2 \quad .$$

As soluções obtidas pelo método são:

$\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0)^T \rightarrow x_o^* = 0 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^2 = (1,1,0)^T \rightarrow x_o^* = 5 \rightarrow$ solução inviável

$\hat{x}^3 = (0,1,0)^T \rightarrow x_o^* = 2 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^4 = \hat{x}^3 = (0,1,0)^T$ e $\hat{x}^5 = \hat{x}^2 = (1,1,0)^T$.

Das soluções obtidas, observamos que a solução $\hat{x}^5$ é igual à solução $\hat{x}^2$, e ambas são inviáveis. Já a solução $\hat{x}^4$, que por sua vez é igual à $\hat{x}^3$, é uma solução viável.

Além dessas soluções, o problema apresenta outras, como por exemplo:

$\hat{x}^6 = (1,1,1)^T \rightarrow x_o^* = 2 \rightarrow$ solução inviável

$\hat{x}^7 = (0,1,1)^T \rightarrow x_o^* = -1 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^8 = (0,0,1)^T \rightarrow x_o^* = -3 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^9 = (1,0,1)^T \rightarrow x_o^* = 0 \rightarrow$ solução viável

$\hat{x}^{10} = (1,0,0)^T \rightarrow x_o^* = 3 \rightarrow$ solução viável .

Da relação das soluções restantes, verificamos que a solução $\hat{x}^{10}$ é a solução ótima para o problema auxiliar, dando $x_o^* = 3$.

Como $z_4 - \hat{c}_4 = z_5 - \hat{c}_5 = 0$, o algoritmo pára, e o quadro (Q.III.8.7) é o quadro ótimo. Deste quadro, tiramos os valores ótimos das variáveis primais: λ_1^*, λ_2^*, λ_3^*, isto é, a solução ótima em termos das variáveis primais λ_j, será:

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)^T$$

ou

$$\boxed{\lambda^* = (0,\ 1/2,\ 1/2)^T}\ .$$

A variável primal λ_2^* está associada à solução $\hat{x}^2 = (1,1,0)^T$, e a variável λ_3^* à solução $\hat{x}^3 = (0,1,0)^T$.

Assim, a solução ótima do problema original será obtida através da combinação convexa dos pontos extremos $\hat{x}^2$ e $\hat{x}^3$, isto é:

$$\boxed{x^* = \lambda_2^* \hat{x}^2 + \lambda_3^* \hat{x}^3}\ ,$$

onde:

$$\boxed{\lambda_2^* + \lambda_3^* = 1}\ ,$$

portanto:

$$x^* = \frac{1}{2}(1,1,0)^T + \frac{1}{2}(0,1,0)^T$$

$$x^* = (1/2,\ 1/2,\ 0)^T + (0,\ 1/2,\ 0)^T$$

$$\boxed{x^* = (1/2,\ 1,\ 0)^T}\ .$$

CAPÍTULO IV

VARIÁVEIS LIMITADAS

IV.1. Introdução

Em muitos problemas práticos, as variáveis decisão são limitadas pela própria imposição das condições reais dos problemas, assim, um vetor variável decisão x, poderá apresentar dois limites, um inferior ℓ e outro superior u. As restrições do tipo

$$\ell \leq x \leq u \quad ,$$

explicitam tais limites.

Apresentaremos neste capítulo, a resolução de problemas de programação linear com variáveis limitadas, através de dois métodos. O primeiro é o método do simplex com algumas adaptações para este tipo de problema, e o segundo é o método de decomposição de Dantzig e Wolfe.

Um problema de programação linear com variáveis limitadas, poderá ser representado da seguinte maneira:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx \tag{IV.1.1}$$

$$\text{sujeito à:} \quad Ax = b \tag{IV.1.2}$$

$$\ell \leq x \leq u \quad , \tag{IV.1.3}$$

onde c^T, x, ℓ, $u \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $u > \ell$.

A matriz A é uma matriz com m linhas e n colunas, cujas colunas são representadas pelos vetores

$a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$, e além disso, a característica de A é m , isto é, $\rho(A) = m$.

Uma observação importante, é que o problema (IV.1.1) - (IV.1.3) apresenta m restrições de igualdade e n variáveis.

Muitas vezes as variáveis são limitadas superiormente de maneira explícita isto é:

$$0 \leq x \leq d \quad , \qquad \text{(IV.1.4)}$$

onde $d > 0$. Desta forma, podemos ter o seguinte problema de programação linear:

$\underline{\text{minimizar}}$ $z = cx$ (IV.1.5)

sujeito à:

$$Ax = b \qquad \text{(IV.1.6)}$$

$$0 \leq x \leq d \quad , \qquad \text{(IV.1.7)}$$

onde c^T, $x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $d \in \mathbb{R}^n$; $d > 0$ e A uma matriz com m linhas e n colunas, e além disso, tendo característica m , $\rho(A) = m$.

Para resolver o problema (IV.1.5) - (IV.1.7), devemos introduzir as variáveis de folga s_j , $j = 1,\ldots,n$,nas restrições (IV.1.7), onde $s = (s_1,\ldots,s_n)^T$, e de forma que teremos:

$$x \leq d$$

$$x + s = d \quad , \qquad \text{(IV.1.8)}$$

e $$s \geq 0 \quad . \qquad \text{(IV.1.9)}$$

Substituindo (IV.1.8) - (IV.1.9) no problema (IV.1.5) - (IV.1.7), obtemos:

<u>minimizar</u> $z = cx$ (IV.1.10)

sujeito à:

$$Ax = b \qquad \text{(IV.1.11)}$$

$$x + s = d \qquad \text{(IV.1.12)}$$

$$s \geq 0 \,, \qquad \text{(IV.1.13)}$$

onde $c^T, x, d, s \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $s \geq 0$; $d > 0$ e A uma matriz com m linhas e n colunas. As colunas da matriz A podem ser representadas por $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$, assim, o problema (IV.1.10) - (IV.1.13) ficará:

<u>minimizar</u> $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeito à:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1x_1 & + a_2x_2 & + \ldots & + a_nx_n & & & = b \\
x_1 & & & & + s_1 & & = d_1 \\
& x_2 & & & & + s_2 & = d_2 \\
& & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
& & & x_n & & + s_n & = d_n
\end{array}$$

(IV.1.14)

Observamos que o sistema (IV.1.14) possui $(m+n)$ linhas e $2n$ colunas. Para resolvermos o problema acima, devemos considerar o seguinte teorema, cuja demonstração se encontra em |6|.

Teorema IV.1.1:

"Um ponto $\bar{x} \in X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax=b \text{ e } 0 \leq x \leq d\}$ é um vértice de X, se e somente se $(n-m)$ componentes de $\bar{x}$ são iguais a zero ou iguais a d_j, enquanto que as m componentes restantes estão entre zero e d_j $(\bar{x}_j \in [0, d_j])$ e estando associadas a uma solução básica de $Ax = b$."

Existe uma equivalência entre os dois problemas, isto é, entre os problemas (IV.1.1) - (IV.1.3) e (IV.1.5) - (IV.1.7).

O problema (IV.1.1) - (IV.1.3) pode ser escrito da seguinte maneira:

minimizar $z = cx$

sujeito à:

$$Ax = b$$

$$0 \leq x - \ell \leq u - \ell \quad .$$

Consideremos:

$$y = x - \ell \tag{IV.1.15}$$

ou

$$x = y + \ell \tag{IV.1.16}$$

e

$$d = u - \ell \quad , \tag{IV.1.17}$$

sendo $d > 0$, pois $u > \ell$.

Substituindo (IV.1.16) e (IV.1.17) no problema acima, obtemos:

<u>minimizar</u> $z = c(y + \ell)$

sujeito à:

$$A(y + \ell) = b$$

$$0 \leq y \leq d \quad ,$$

ou

<u>minimizar</u> $z = c' + cy$ (IV.1.18)

sujeito à:

$$A'y = b' \qquad \text{(IV.1.19)}$$

$$0 \leq y \leq d \quad , \qquad \text{(IV.1.20)}$$

onde c^T, y, $d \in \mathbb{R}^n$; $b' \in \mathbb{R}^m$; $d \geq 0$ e A' uma matriz com m linhas e n colunas.

O método que nos parece mais correto e eficiente de resolver as restrições que limitam as variáveis, isto é, restrições do tipo (IV.1.3), consiste em decompor cada uma delas, em outras duas, e então introduzir variáveis de folga, para cada uma das restrições. Ou seja, a restrição explicitando os limites das variáveis,

$$\ell \leq x \leq u \quad ,$$

será decomposta em outras duas, isto é:

$$x \geq \ell$$

e

$$x \leq u \quad .$$

Finalmente, introduzindo os vetores de folga x_1 e x_2 , obtemos:

$$x - x_1 = \ell$$

$$x + x_2 = u \quad ,$$

onde x_1 , x_2 ε $\mathbb{R}^n$; $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Desta forma, o problema inicial ficará:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx \tag{IV.1.21}$$

sujeito à:

$$Ax = b \tag{IV.1.22}$$

$$x - x_1 = \ell \tag{IV.1.23}$$

$$x + x_2 = u \;, \tag{IV.1.24}$$

onde c^T, x, ℓ, u, x_1, x_2 ε $\mathbb{R}^n$; b ε $\mathbb{R}^m$; $u > \ell$ e A uma matriz com m linhas e n colunas.

Este procedimento, requer um esforço computacional muito grande, pois ,aumenta o número de restrições de igualdade de m para $m+2n$, e o número de variáveis de n para $3n$. Este método, não é portanto, o mais indicado, assim devemos procurar um método que nos facilite a resolução de tal problema, sem acarretar um esforço computacional tão grande.

O método do simplex com variáveis limitadas, resolve essas restrições implicitamente, de uma maneira semelhante àquela usada pelo método usual do simplex para resolver as restrições do tipo $x \geq 0$. O algoritmo descrito neste capítulo, parte de uma solução "básica" viável do sistema $Ax = b$ e $\ell \leq x \leq u$, para uma outra solução "básica" viável, porém, outra solução que forneça um valor da função objetivo melhor que a anterior. Este procedimento se repete até o método encontrar uma solução ótima ou verificar que o problema é ilimitado.

IV.2. Solução básica viável:

Consideremos o problema inicial, isto é:

$$\text{minimizar} \quad z = cx \tag{IV.2.1}$$

sujeito à:

$$Ax = b \tag{IV.2.2}$$

$$\ell \leq x \leq u , \tag{IV.2.3}$$

onde c^T, x, ℓ, $u \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $u > \ell$ e A uma matriz com m linhas e n colunas, de posto m, $\rho(A) = m$, e cujas colunas são representadas pelos vetores $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$.

Tomemos uma partição da matriz A da seguinte maneira:

$$A = [B, N_1, N_2] \quad , \tag{IV.2.4}$$

onde B é uma matriz quadrada, não-singular, formada por m colunas linearmente independentes de A, admitindo inversa, pois, $\det(B) \neq 0$. Essa matriz será denominada matriz básica. As matrizes N_1 e N_2 serão as matrizes não-básicas, além disso, N_1, será a matriz formada pelas colunas não-basicas, cujas variáveis correspondentes, assumirão os valores dos seus limites inferiores, isto é, $x_{N_1} = \ell_{N_1}$. Já a matriz N_2, é a matriz formada pelas colunas não-básicas, cujas variáveis correspondentes assumirão os valores dos seus limites superiores, isto é: $x_{N_2} = u_{N_2}$.

Sejam x_B e c_B as partições de x e c associadas à B , x_{N_1} , x_{N_2} e c_{N_1} , c_{N_2} as partições associadas às matrizes N_1 e N_2 , respectivamente. Logo,

$$x = (x_B,\ x_{N_1}, x_{N_2})^T \tag{IV.2.5}$$

e

$$c = (c_B,\ c_{N_1},\ c_{N_2})\ . \tag{IV.2.6}$$

Substituindo (IV.2.4) e (IV.2.5) em (IV.2.2), temos:

$$\begin{bmatrix} B, & N_1, & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = b \quad ,$$

ou

$$B x_B + N_1\ x_{N_1} + N_2\ x_{N_2} = b \quad ,$$

$$B x_B = b - N_1 x_{N_1} - N_2\ x_{N_2} \quad .$$

Como a matriz B admite inversa, temos:

$$\boxed{x_B = B^{-1}\ b - B^{-1}\ N_1\ x_{N_1} - B^{-1}\ N_2\ x_{N_2}}\ . \tag{IV.2.7}$$

<u>Solução básiva viável</u>:

"$x_B = \overline{x}_B$ é uma solução básica viável do problema (IV.2.1) - (IV.2.3), se:

$$x_{N_1} = \ell_{N_1} \quad ,$$

$$x_{N_2} = u_{N_2} \quad ,$$

$$\overline{x}_B = B^{-1}\ b - B^{-1}\ N_1\ \ell_{N_1} - B^{-1}\ N_2\ u_{N_2} \quad ,$$

e além disso,

$$\ell_B \leq \bar{x}_B \leq u_B \; . \text{"}$$

Para uniformizar nosso estudo com a notação dos capítulos anteriores, passemos a definir alguns conjuntos:

I_B = {i/x_i é uma solução básica viável de $Ax = b$ para $A = [B, N_1, N_2]$}

$I_N \rightarrow$ complemento de I_B ,

logo,

$$I_B \cup I_N = \{1,2,\ldots,n\} \quad \text{e} \quad I_B \cap I_N = \emptyset \; .$$

Sejam I_{N_1} e I_{N_2} as partições de I_N , tal que:

$$I_{N_1} = \{j \;/\; x_j = \ell_j \;,\; j \in I_N\}$$

e

$$I_{N_2} = \{j \;/\; x_j = u_j \;,\; j \in I_N\} \;,$$

assim,

$$I_{N_1} \cup I_{N_2} = I_N \quad \text{e} \quad I_{N_1} \cap I_{N_2} = \emptyset \; .$$

Os conjuntos I_{N_1} e I_{N_2} caracterizam perfeitamente as matrizes N_1 e N_2, desta forma, podemos representá-las de uma maneira mais conveniente, isto é:

$$N_1 = \{a_j \;/\; a_j \in \mathbb{R}^m \;\text{ e }\; j \in I_{N_1}\}$$

$$N_2 = \{a_j \;/\; a_j \in \mathbb{R}^m \;\text{ e }\; j \in I_{N_2}\} \; ..$$

Da relação (IV.2.7), temos:

$$B^{-1} N_1 = Y = (y_j) = (y_{ij}) \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} \qquad \text{(IV.2.8)}$$

$$B^{-1} N_2 = Y = (y_j) = (y_{ij}) \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} \qquad \text{(IV.2.9)}$$

e

$$\hat{x} = B^{-1} b \ . \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Podemos assim, reescrever a equação (IV.2.7):

$$x_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij} x_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij} x_j \quad , \quad \forall i \in I_B \ . \qquad \text{(IV.2.11)}$$

Em vista disto, podemos dizer que $x_i = \bar{x}_i$, $\forall i \in I_B$, será uma solução básica viável do problema (IV.2.1) - (IV.2.3), se:

$$x_j = \ell_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} \ ,$$

$$x_j = u_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} \ ,$$

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij} \ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij} u_j \quad , \quad i \in I_B \ ,$$

e se, além disso, tivermos:

$$\ell_i \leq \bar{x}_i \leq u_i \quad , \quad \forall i \in I_B \ .$$

A solução básica viável será não-degenerada, se tivermos:

$$\ell_i < \bar{x}_i < u_i \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

e em caso contrário, será degenerada.

É importante frizarmos, que neste método as (n-m) variáveis não-básicas, assumirão sempre, um dos seus limites, inferior ou superior, e só então, poderemos calcular o vetor básico x_i , $\forall i \in I_B$, de modo que, $\bar{x}_i$ esteja dentro de seus limites, isto é:

$$\ell_i \leq \bar{x}_i \leq u_i \quad , \quad \forall i \in I_B \ .$$

IV.3. Solução básica viável melhorada:

Em um problema de programação linear, o número de soluções básicas viáveis, geralmente é muito grande, sendo limitado superiormente por $\binom{m}{n} 2^{n-m}$. Neste método, para cada base existem 2^{n-m} maneiras de se fixar os valores dos limites de cada variável não-básica, portanto, existe uma infinidade de maneiras de passarmos de uma solução para outra. Precisamos portanto, de um procedimento sistemático, para passarmos de uma solução básica viável para uma outra solução viável, e que além disso, nos forneça um valor da função objetivo melhor que o anterior.

Repetiremos agora, como caracterizar uma solução básica viável, e veremos também,quando existe uma solução básica viável ótima, desde que a região viável não seja vazia e o ótimo finito.

Vamos considerar o seguinte problema:

<u>minimizar</u> $z = cx$ (IV.3.1)

sujeito à:

$$Ax = b \tag{IV.3.2}$$

$$\ell \leq x \leq u \ , \tag{IV.3.3}$$

onde c^T, x, ℓ, $u \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $u > \ell$. A matriz A é uma matriz com m linhas e n colunas, $\rho(A) = m$, e os vetores $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$, representado suas colunas.

Vamos supor, que B seja a matriz básica, quadrada, não-sinular, característica m , isto é $\rho(B) = m$, e além disso, que a matriz não-básica N , seja decomposta em outras duas matrizes N_1, N_2 , portanto temos:

$$A = [B, N_1, N_2] \ , \tag{IV.3.4}$$

onde

$$N_1 = \{a_j \ / \ a_j \in \mathbb{R}^m \ \text{e} \ x_j = \ell_j \ , \ j \in \{1,\ldots,n\}\}$$

$$N_2 = \{a_j \ / \ a_j \in \mathbb{R}^m \ \text{e} \ x_j = u_j \ , \ j \in \{1,\ldots,n\}\} \ .$$

Sejam os seguintes conjuntos:

$I_B = \{ i \ / \ x_i$ é uma solução básica viável de $Ax = b$ para $A = [B, N_1, N_2]\}$

$I_N \rightarrow$ complemento de I_B ,

tal que:

$$I_B \cup I_N = \{1,\ldots,n\} \quad \text{e} \quad I_B \cap I_N = \emptyset \ .$$

Sejam I_{N_1} e I_{N_2} as partições de I_N , tais que:

$$I_{N_1} \cap I_{N_2} = \emptyset \quad \text{e} \quad I_{N_1} \cup I_{N_2} = I_N \ ,$$

onde:

$$I_{N_1} = \{j \;/\; x_j = \ell_j \quad , \quad j \in I_N\}$$

$$I_{N_2} = \{j \;/\; x_j = u_j \quad , \quad j \in I_N\} \quad .$$

Da mesma forma, os vetores x e c serão decompostos na parte básica (x_B e c_B) e em duas outras partes não-básicas (x_{N_1} e c_{N_1}) e (x_{N_2} e c_{N_2}), logo:

$$x = (x_B, x_{N_1}, x_{N_2})^T \tag{IV.3.5}$$

e

$$c = (c_B, c_{N_1}, c_{N_2}) \quad . \tag{IV.3.6}$$

Substituindo (IV.3.4) e (IV.3.5) em (IV.3.2), obtemos:

$$[B, N_1, N_2] \begin{bmatrix} x_B \\ x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = b$$

ou

$$B\, x_B + N_1\, x_{N_1} + N_2\, x_{N_2} = b$$

$$B\, x_B = b - N_1\, x_{N_1} - N_2\, x_{N_2} \quad .$$

Como a matriz básica B admite inversa, B^{-1}, temos:

$$\boxed{x_B = B^{-1}\, b - B^{-1}\, N_1\, x_{N_1} - B^{-1}\, N_2\, x_{N_2}} \; . \tag{IV.3.7}$$

Denominemos:

$$\hat{x} = B^{-1} b$$

$$B^{-1} N_1 = Y = (y_j) = (y_{ij}) \quad , \quad \forall j \in I_{N_1}$$

$$B^{-1} N_2 = Y = (y_j) = (y_{ij}) \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} \; ,$$

assim, reescreveremos (IV.3.7):

$$\boxed{x_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij} \, x_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij} \, x_j} \quad , \; \forall i \in I_B \; . \tag{IV.3.8}$$

Consideremos agora, a função objetivo z :

$$z = cx$$

ou

$$z = (c_B, \; c_{N_1}, \; c_{N_2}) \begin{bmatrix} x_B \\ x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix}$$

$$z = c_B x_B + c_{N_1} x_{N_1} + c_{N_2} x_{N_2}$$

Substituindo o valor de x_B obtido em (IV.3.7), na equação acima, temos:

$$z = c_B(B^{-1}b - B^{-1}N_1 x_{N_1} - B^{-1}N_2 x_{N_2}) + c_{N_1} x_{N_1} + c_{N_2} x_{N_2}$$

$$z = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N_1 - c_{N_1}) x_{N_1} - (c_B B^{-1}N_2 - c_{N_2}) x_{N_2} \tag{IV.3.9}$$

Considerando:

$$\hat{z} = c_B\, B^{-1}\, b$$

e

$$z_j = c_B B^{-1} a_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_1}$$

$$z_j = c_B B^{-1} a_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} \quad ,$$

sendo $a_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1,\ldots,n$, as colunas de A , assim, a equação (IV.3.9) ficará:

$$\boxed{z = \hat{z} - \sum_{j\in I_{N_1}} (z_j - c_j)x_j - \sum_{j\in I_{N_2}} (z_j - c_j)x_j} \quad . \qquad \text{(IV.3.10)}$$

Vamos supor agora, que tenhamos uma solução básica viável, isto é:

$$x_j = \ell_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} \quad ,$$

$$x_j = u_j \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} \quad ,$$

e

$$\ell_i \leq \bar{x}_i \leq u_i \quad , \quad \forall \in I_B \quad ,$$

onde:

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j\in I_{N_1}} y_{ij}\, \ell_j - \sum_{j\in I_{N_2}} y_{ij}\, u_j \quad , \quad \forall i \in I_B \; .$$

As equações (IV.3.8) e (IV.3.10) podem ser colocadas em um quadro, representando esta solução básica viável:

(Quadro Q.IV.3.1)

	z	x_i	$x_j,\ j \in I_{N_1}$	$x_j,\ j \in I_{N_2}$	termo independente
z	1	0	$z_j - c_j$	$z_j - c_j$	$\bar{z}$
x_i	0	I	y_{ij}	y_{ij}	$\bar{x}_i$

A coluna do termo independente fornece os valores das variáveis básicas $x_i = \bar{x}_i$, $\forall i \in I_B$, e o valor da função objetivo $z = \bar{z}$. Esses valores são obtidos substituindo $x_j = \ell_j$, $\forall j \in I_{N_1}$ e $x_j = u_j$, $\forall j \in I_{N_2}$, nas equações (IV.3.8) e (IV.3.10), isto é:

$$x_i = \bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij}\, \ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij}\, u_j \quad , \forall i \in I_B \ , \tag{IV.3.11}$$

e

$$z = \bar{z} = \hat{z} - \sum_{j \in I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} (z_j - c_j) u_j \, . \tag{IV.3.12}$$

Podemos também, construir um quadro representando esta solução básica viável, através das equações (IV.3.7) e (IV.3.9), isto é:

Quadro (Q.IV.3.2)

	z	x_B	x_{N_1}	x_{N_2}	termo independente
z	1	0	$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1}$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	$\bar{z}$
x_B	0	I	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$	$\bar{x}_B$

Analogamente, a coluna do termo independente do quadro acima, fornece os valores das variáveis básicas $x_B = \bar{x}_B$ e o valor da função objetivo $z = \bar{z}$. Esses valores são obtidos substituindo $x_{N_1} = \ell_{N_1}$ e $x_{N_2} = u_{N_2}$ nas equações (IV.3.7) e (IV.3.9), isto é:

$$x_B = \bar{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1\ell_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2} \quad , \qquad \text{(IV.3.13)}$$

e

$$z = \bar{z} = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N_1 - c_{N_1})\ell_{N_1} - (c_B B^{-1}N_2 - c_{N_2})u_{N_2} \quad . \qquad \text{(IV.3.14)}$$

Os quadros (Q.IV.3.1) e (Q.IV.3.2) são equivalentes, pois, $c_B B^{-1}N_1 - c_{N_1}$ e $c_B B^{-1}N_2 - c_{N_2}$ são os valores dos $z_j - c_j$ das variáveis não-básicas, quando elas assumem os valores dos seus limites inferiores e superiores, respectivamente.

Uma importante observação, é que a coluna do termo independente, em ambos quadros, não fornecem os valores habituais das variáveis básicas e da função objetivo, isto é, os valores $\bar{x}_B = B^{-1}\, b$ e $\bar{z} = c_B\, B^{-1}\, b$, mas sim, os valores dados pelas equações (IV.3.13) e (IV.3.14), ou pelas equações (IV.3.11) e (IV.3.12).

IV.4. Condições de otimalidade

Passemos agora, a estudar a possibilidade de modificar as variáveis não-básicas, visando melhorar, tanto quanto possível, o valor da função objetivo z.

Analisando a equação (IV.3.10), isto é:

$$z = \hat{z} - \sum_{j \in I_{N_1}} (z_j - c_j) x_j - \sum_{j \in I_{N_2}} (z_j - c_j) x_j , \qquad \text{(IV.4.1)}$$

observamos que, se tivermos $z_j - c_j > 0$, $\forall j \in I_{N_1}$, o segundo termo da equação (IV.4.1) será negativo:

$$-\sum_{j \in I_{N_1}} (z_j - c_j) x_j < 0 \quad .$$

Como $j \in I_{N_1}$, o valor de uma variável não-básica qualquer, x_j, será igual ao seu limite inferior, isto é, $x_j = \ell_j$, portanto, podemos aumentar o valor de tal variável de ℓ_j para um outro valor, que deverá ser menor ou igual ao seu limite superior.

Agora, se tivermos $z_j - c_j \leq 0$, $\forall j \in I_{N_2}$, o terceiro termo da equação (IV.4.1) será positivo, isto é:

$$-\sum_{j \in I_{N_2}} (z_j - c_j) x_j > 0 \quad .$$

Analogamente, como $j \in I_{N_2}$, o valor de uma variável não-básica qualquer, x_j , será igual ao seu limite superior, isto é, $x_j = u_j$, assim, podemos diminuir o seu valor de u_j para um outro valor, que deverá ser maior ou igual ao seu limite inferior. Faremos como no método do simplex, modificaremos somente uma variável não-básica de cada vez, enquanto que todas as outras permanecerão fixas em um dos seus limites.

Pelo que foi visto até o momento, podemos concluir facilmente, que as <u>condições de otimalidade</u> para o problema de minimização, serão:

(i) $z_j - c_j \leq 0 \ , \ \forall j \in I_{N_1}$,

(ii) $z_j - c_j \geq 0 \ , \ \forall j \in I_{N_2}$.

Já para o problema de maximização, teremos:

(i) $z_j - c_j \geq 0 \ , \ \forall j \in I_{N_1}$,

(ii) $z_j - c_j \leq 0 \ , \ \forall j \in I_{N_2}$.

Resumindo, dada uma solução básica viável para o conjunto de restrições $Ax = b$ e $\ell \leq x \leq u$, se, para todas as variáveis não-básicas que assumiram os seus limites inferiores, tivermos $z_j - c_j \leq 0$, e se, para todas as variáveis não-básicas que assumiram seus limites superiores, tivermos $z_j - c_j \geq 0$, devemos parar o procedimento, pois, obtemos a solução ótima. Caso contrário, isto é, se uma das condições acima for violada, devemos escolher uma variável não-básica, por exemplo x_k , de acordo com a regra que veremos mais adiante. Se o valor de x_k for igual ao seu limite inferior, então a variável x_k aumentará de valor, entretanto, se o valor de x_k for igual ao seu limite superior, esta variável diminuirá de valor. Assim, as variáveis não-básicas assumirão, sempre um dos seus limites e as variáveis básicas, um valor entre os seus.

IV.5. Determinação da variável que entrará na base

Vamos supor agora, que para uma variável não-básica x_k , tenhamos uma das duas possibilidades.

$$z_k - c_k > 0 \quad , \quad k \in I_{N_1} \quad ,$$

ou

$$z_k - c_k < 0 \quad , \quad k \in I_{N_2} \quad .$$

Assim, devemos analisar esses dois casos:

1) Para $k \in I_{N_1}$, o valor da variável não-básica x_k será igual ao seu limite inferior, isto é:

$$\bar{x}_k = \ell_k \quad .$$

Como $z_k - c_k > 0$, a variável x_k aumentará seu valor, logo,

$$\bar{x}_k > \ell_k \quad .$$

2) Para $k \in I_{N_2}$, o valor da variável não-básica x_k será igual ao seu limite superior, isto é:

$$\bar{x}_k = u_k \quad .$$

Como $z_k - c_k < 0$, a variável x_k diminuirá seu valor, logo,

$$\bar{x}_k < u_k \quad .$$

Antes de estudarmos detalhadamente esses dois casos, passemos a determinação do índice k da variável não-básica x_k , que terá seu valor modificado, isto é, que entrará na base.

Em primeiro lugar, definamos os seguintes conjuntos:

$$P = \max_{j \in I_{N_1}} \{z_j - c_j / z_j - c_j > 0\} \quad ,$$

e

$$Q = \min_{j \in I_{N_2}} \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\} \quad .$$

Temos que considerar dois casos:

(a) Se $P = \emptyset$, isto é, não existe nenhum $z_j - c_j > 0$, $j \in I_{N_1}$, portanto teremos:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} \quad .$$

Se $Q = \emptyset$, isto é, não existe nenhum $z_j - c_j < 0$,

$j \varepsilon I_{N_2}$, portanto teremos:

$$z_j - c_j \geq 0 \ , \ \forall j \ \varepsilon \ I_{N_2} \quad .$$

Assim, neste caso, obtemos a <u>solução ótima</u> .

(b) Caso contrário, isto é, se ao menos um dos conjuntos P ou Q, ou ambos, forem diferentes do conjunto vazio. Teremos três casos possíveis, vejamos cada um separadamente.

(i) <u>$P \neq \emptyset$ e $Q = \emptyset$</u>

- Se $Q = \emptyset$, não existe nenhum $z_j - c_j < 0$, $j \ \varepsilon \ I_{N_2}$, assim, a segunda condição de otimalidade é satisfeita, isto é:

$$z_j - c_j \geq 0 \ , \ \forall j \ \varepsilon \ I_{N_2} \quad .$$

- Se $P \neq \emptyset$, então existe ao menos um $z_j - c_j > 0$, $j \ \varepsilon \ I_{N_1}$, deste forma, devemos calcular o índice k correspondente a:

$$z_k - c_k = \max_{j \varepsilon I_{N_1}} \{z_j - c_j / z_j - c_j > 0\} \quad . \tag{IV.5.2}$$

Assim, a variável não-básica x_k associada ao índice k , cujo valor é o seu limite inferior, $\bar{x}_k = \ell_k$, pois, $k \ \varepsilon \ I_{N_1}$, deverá aumentar de valor, isto é:

$$\bar{x}_k > \ell_k$$

$$\bar{x}_k = \ell_k + \Delta_k$$

ou

$$\boxed{\Delta_k = \bar{x}_k - \ell_k} \ ,$$

sendo $\Delta_k > 0$, o aumento sofrido pela variável x_k , que por sua vez, entrará na base.

(ii) <u>$P = \emptyset$ e $Q \neq \emptyset$</u>

- Se $P = \emptyset$, não existe nenhum $z_j - c_j > 0$, $j \in I_{N_1}$, assim, a primeira condição de otimalidade é satisfeita, isto é:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} \quad .$$

- Se $Q \neq \emptyset$, então existe ao menos um $z_j - c_j < 0$, $j \in I_{N_2}$. Desta forma, calcularemos o índice k correspondente a:

$$z_k - c_k = \min_{j \in I_{N_2}} \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\} \quad . \qquad \text{(IV.5.3)}$$

Assim, a variável não-básica x_k associada ao índice k , cujo valor é o seu limite superior, $\bar{x}_k = u_k$, pois, $k \in I_{N_2}$, deverá diminuir de valor, isto é:

$$\bar{x}_k < u_k$$

$$\bar{x}_k + \Delta_k = u_k$$

ou

$$\Delta_k = u_k - \bar{x}_k \quad ,$$

sendo $\Delta_k > 0$, o decréscimo sofrido pela variável não-básica x_k , que por sua vez, entrará na base.

(iii) <u>$P \neq \emptyset$ e $Q \neq \emptyset$</u>

- Se $P \neq \emptyset$, existe ao menos um $z_j - c_j > 0$, $j \in I_{N_1}$.

- Se $Q \neq \emptyset$, existe ao menos um $z_j - c_j < 0$, $j \in I_{N_2}$.

Assim, para determinarmos o índice k associado a variável x_k que entrará na base, devemos calcular:

$$z_k - c_k = \max_{j \in I_{N_1} \cup I_{N_2}} \{|z_j - c_j|\} \quad . \qquad \text{(IV.5.4)}$$

Se $k \in I_{N_1}$, caímos no caso (i), e se $k \in I_{N_2}$ no caso (ii).

Faremos agora, um estudo mais detalhado dos referidos casos (i) e (ii).

IV.6. <u>Aumento do valor da variável x_k</u>

Vamos supor agora, que tenhamos $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_{N_2}$ e que ao menos um $z_j - c_j > 0$, $j \in I_{N_1}$. Assim, a variável não-básica x_k , cujo índice k é determinado por (IV.5.2), aumentará seu valor de $\bar{x}_k = \ell_k$ para outro, isto é, devemos ter:

$$\bar{x}_k > \ell_k$$

$$\bar{x}_k = \ell_k + \Delta_k$$

$$\Delta_k = \bar{x}_k - \ell_k \quad ,$$

sendo $\Delta_k > 0$, o aumento sofrido por x_k ..

Todas as outras variáveis não-básicas permanecerão fixas em um dos seus limites, mas devido ao aumento sofrido por x_k , os novos valores das variáveis básicas e da função objetivo, serão obtidos substituindo o novo valor de x_k , isto é, $\bar{x}_k = \ell_k + \Delta_k$, nas equações (IV.3.11) e (IV.3.12), respectivamente:

$$x_i = \hat{x}_i - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} y_{ij}\, \ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} y_{ij} u_j - y_{ik}\, \Delta_k \qquad , \forall i \; \varepsilon \; I_B .$$

Como

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} y_{ij}\, \ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} y_{ij}\, u_j \qquad , \forall i \; \varepsilon \; I_B ,$$

temos:

$$\boxed{x_i = \bar{x}_i - y_{ik}\, \Delta_k} \qquad , \forall i \; \varepsilon \; I_B \quad , \qquad \text{(IV.6.1)}$$

e

$$z = \hat{z} - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} (z_j - c_j) u_j - (z_k - c_k)\Delta_k \quad ,$$

como

$$\bar{z} = \hat{z} - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} (z_j - c_j) u_j \quad ,$$

temos:

$$\boxed{z = \bar{z} - (z_k - c_k)\Delta_k} . \qquad \text{(IV.6.2)}$$

Sabemos que $z_k - c_k > 0$, $k \in I_{N_1}$, e que além disso, o valor da variável x_k passará de ℓ_k para $\ell_k + \Delta_k$, assim, analisando a equação (IV.6.2), concluímos que podemos aumentar indefinidamente o valor de Δ_k , pois, nosso objetivo é minimizar a função z . No entanto, ao aumentarmos o valor de Δ_k , verificamos pela equação (IV.6.1), que as variáveis básicas também sofrerão uma alteração. Em vista disto, a variável x_k aumentará seu valor, mas, de tal forma que não torne inviável nenhuma variável básica. Portanto, Δ_k não poderá crescer indefinidamente, sendo necessário limitarmos seu valor. Existem três maneiras possíveis de se limitar a variação da variável x_k :

6a. Uma variável básica diminui de valor até atingir seu limite inferior.

6b. Uma variável básica aumenta de valor até atingir seu limite superior.

6c. A própria variável não-básica x_k atinge seu limite superior.

Vejamos então, cada um desses casos separadamente.

6a. Uma variável básica diminui de valor até atingir seu limite inferior:

Da equação (IV.6.1), temos:

$$x_i = \overline{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \qquad \forall i \in I_B \; .$$

Vamos supor agora, que uma variável básica qualquer atinja seu limite inferior. Sabemos que:

$$\ell_i \leq x_i \leq u_i \qquad , \qquad \forall i \in I_B \; ,$$

portanto teremos:

$$\ell_i \leq x_i = \overline{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \qquad \forall i \in I_B$$

$$\ell_i \leq \overline{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \qquad \forall i \in I_B$$

$$- y_{ik}\,\Delta_k \geq \ell_i - \overline{x}_i \qquad , \qquad \forall i \in I_B \; ,$$

logo,

$$\boxed{y_{ik}\,\Delta_k \leq \overline{x}_i - \ell_i} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \; . \qquad \text{(IV.6.3)}$$

Analisando a desigualdade (IV.6.3), verificamos que existem dois casos a considerar:

1) Se $y_{ik} > 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.6.3) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \leq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}}} \quad , \forall i \in I_B \ , \qquad \text{(IV.6.4)}$$

ou

$$\bar{x}_k - \ell_k \leq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \ ,$$

$$\boxed{\bar{x}_k \leq \ell_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}}} \quad , \forall i \in I_B \ . \qquad \text{(IV.6.5)}$$

Como a variável não-básica x_k aumenta de valor, $\bar{x}_k > \ell_k$, e pela desigualdade (IV.6.5), observamos que ela não pode ultrapassar um certo valor, sem que, alguma variável básica se torne inviável. Em outras palavras, o valor da variável x_k deverá pertencer ao seguinte intervalo:

$$\ell_k < \bar{x}_k \leq \ell_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \ .$$

Em vista disto, podemos definir:

$$\boxed{\gamma_1 = \min_{\substack{i \in I_B \\ y_{ik} > 0}} \left\{ \ell_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \right\} = \frac{(\bar{x}_r - \ell_r)}{y_{rk}} + \ell_k} \ . \qquad \text{(IV.6.6)}$$

A variável x_r será a primeira variável básica a atingir seu limite inferior, devendo portanto, sair da base, entrando em seu lugar a variável não-básica x_k .

2) Se $y_{ik} < 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.6.3) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \geq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}}} \quad , \forall i \in I_B \quad , \qquad \text{(IV.6.7)}$$

ou

$$\bar{x}_k - \ell_k \geq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \quad ,$$

$$\bar{x}_k \geq \ell_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \; . \qquad \text{(IV.6.8)}$$

Assim, a variável não-básica x_k pode crescer indefinidamente, sem que nenhuma variável básica diminua seu valor até seu limite inferior. Neste caso, consideramos.

$$\boxed{\gamma_1 = \infty} \; . \qquad \text{(IV.6.9)}$$

Resumindo as duas condições, temos:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \ell_k + \min\limits_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \right\} = \dfrac{\bar{x}_r - \ell_r}{y_{rk}} + \ell_k & , \text{ se } y_{ik} > 0 \\ & \text{(IV.6.10)} \\ \infty \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \text{ se } y_{ik} < 0 \; . \end{cases}$$

6b. <u>Uma variável básica aumenta de valor até atingir seu limite superior</u>:

Da equação (IV.6.1), temos:

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \; .$$

Suponhamos que aumentando o valor da variável não básica x_k, uma variável básica aumente de valor até seu limite superior. Sabemos que:

$$\ell_i \leq x_i \leq u_i \qquad , \quad \forall i \in I_B \; ,$$

logo,

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \leq u_i \qquad , \quad \forall i \in I_B \; ,$$

$$\bar{x}_i - y_{ik}\,\Delta_k \leq u_i \qquad , \quad \forall i \in I_B \; ,$$

ou

$$\boxed{- y_{ik}\,\Delta_k \leq u_i - \bar{x}_i} \qquad , \quad \forall i \in I_B \; . \qquad \text{(IV.6.11)}$$

Analisando a desigualdade (IV.6.11), verificamos novamente, que temos que considerar dois casos:

1) Se $y_{ik} < 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.6.11) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \leq \frac{u_i - \bar{x}_i}{- y_{ik}}} \qquad , \quad \forall i \in I_B \; , \qquad \text{(IV.6.12)}$$

ou

$$\bar{x}_k - \ell_k \leq \frac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \; ,$$

$$\boxed{\bar{x}_k \leq \ell_k + \frac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{ik}}} \quad , \forall i \in I_B \; . \qquad \text{(IV.6.13)}$$

Assim, o valor da variável não-básica x_k deverá pertencer ao seguinte intervalo:

$$\boxed{\ell_k < \bar{x}_k \leq \ell_k + \frac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{ik}}} \quad , \forall i \in I_B \; . \qquad \text{(IV.6.14)}$$

Em vista disto, podemos definir:

$$\boxed{\gamma_2 = \ell_k + \min_{\substack{i \in I_B \\ y_{ik} < 0}} \left\{ \frac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{ik}} \right\} = \frac{u_p - \bar{x}_p}{-y_{pk}} + \ell_k} \; . \qquad \text{(IV.6.15)}$$

A variável x_k não pode ultrapassar o valor γ_2 , sem que alguma variável básica se torne inviável. Assim sendo, a variável x_p será a primeira variável básica a atingir seu limite superior, devendo portanto, sair da base, entrando em seu lugar a variável não-básica x_k .

2) Se $y_{ik} > 0$, a desigualdade (IV.6.11) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \geq \frac{u_i - \bar{x}_i}{-\, y_{ik}}} \quad , \ \forall i \in I_B \ , \qquad \text{(IV.6.16)}$$

ou

$$\bar{x}_k - \ell_k \geq \frac{u_i - \bar{x}_i}{-\, y_{ik}} \quad , \ \forall i \in I_B \ ,$$

$$\bar{x}_k \geq \ell_k + \frac{u_i - \bar{x}_i}{-\, y_{ik}} \quad , \forall i \in I_B \ . \qquad \text{(IV.6.17)}$$

Verificamos que a variável não-básica x_k pode crescer indefinidamente, sem que, nenhuma variável básica atinja seu limite superior. Neste caso, consideramos:

$$\boxed{\gamma_2 = \infty} \ . \qquad \text{(IV.6.18)}$$

Resumindo as duas condições, temos:

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{ik}} + \ell_k \right\} = \dfrac{u_p - \bar{x}_p}{-y_{pk}} + \ell_k \ , & \text{se } y_{ik} < 0, \\ \\ \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , & \text{se } y_{ik} > 0. \end{cases} \qquad \text{(IV.6.19)}$$

6.c. A própria variável não-básica x_k atinge seu limite superior:

Finalmente, vamos supor que a própria variável não-básica x_k, atinja seu limite superior, isto é:

$$\overline{x}_k = \ell_k + \Delta_k \quad ,$$

e

$$\overline{x}_k = u_k \quad ,$$

portanto,

$$\ell_k + \Delta_k = u_k$$

ou

$$\boxed{\Delta_k = u_k - \ell_k} \quad . \tag{IV.6.20}$$

Os casos vistos até o momento, fornecem o maior aumento que Δ_k poderá ter, sendo, no entanto, limitado ou por uma variável básica ou pela própria variável não-básica x_k. Desta forma, é óbvio que Δ_k será obtido por:

$$\Delta_k = \underline{\min}(\gamma_1, \gamma_2, u_k - \ell_k) \quad . \tag{IV.6.21}$$

Dos itens 6a. e 6b., verificamos que, tanto γ_1 como γ_2 podem assumir dois valores, portanto, podemos também, considerar dois valores para Δ_k, isto é:

(i) se $\Delta_k = \infty$, então o aumento Δ_k não é limitado, e pela equação (IV.6.2):

$$z = \bar{z} - (z_k - c_k)\ \Delta_k \quad ,$$

podemos concluir que a solução ótima é ilimitada, pois, $z_k - c_k > 0$ e $\Delta_k = \infty$.

(ii) se, por outro lado, $\Delta_k < \infty$, obtemos uma nova solução básica viável, onde

$$\bar{x}_k = \ell_k + \Delta_k \quad ,$$

e as variáveis básicas serão modificadas de acordo com a equação:

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik}\ \Delta_k \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

ou

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik}\ (\bar{x}_k - \ell_k) \quad , \quad \forall i \in I_B \ .$$

IV.7. Atualização do quadro do simplex quando $\bar{x}_k > \ell_k$

Ao obtermos uma nova solução básica viável, devemos sempre, atualizar o quadro do simplex que representará esta solução.

Faremos portanto, uma análise dos valores que Δ_k pode assumir.

(i) Se $\boxed{\Delta_k = u_k - \ell_k}$, não realizaremos nenhuma mudança de base, e a variável x_k continuará sendo não-básica, só que agora, seu valor será igual ao seu limite superior. Em outras palavras, a variável x_k passará de um limite a outro. Modificaremos somente a coluna correspondente ao termo independente, para, desta forma, obtermos os novos valores da função objetivo e das variáveis básicas. Pelas equações (IV.6.2) e (IV.6.1), tiramos esses novos valores, que serão obtidos substituindo $\bar{z}$ por $\bar{z} - (z_k - c_k)(\bar{x}_k - \ell_k)$ e $\bar{x}_i$ por $\bar{x}_i - y_{ik}(\bar{x}_k - \ell_k)$, $\forall i \in I_B$, respectivamente. O novo quadro do simplex, ficará então:

Quadro (Q.IV.7.1)

	z	x_i	$x_j,\ j \in I_{N_1}$	$x_j,\ j \in I_{N_2}$	termo independente
z	1	0	$z_j - c_j$	$z_j - c_j$	$\bar{z}-(z_k-c_k)(\bar{x}_k-\ell_k)$
x_i	0	I	y_{ij}	y_{ij}	$\bar{x}_i-y_{ik}(\bar{x}_k-\ell_k)$

(ii) Se $\boxed{\Delta_k = \gamma_1}$, a variável não-básica x_k entrará na base, e a variável básica x_r deixará a base, onde o índice r será determinado de acordo com a equação (IV.6.10), isto é:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \ell_k + \min\limits_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{ik}} \right\} = \dfrac{\bar{x}_r - \ell_r}{y_{rk}} + \ell_k \text{ , se } y_{ik} > 0 \text{ ,} \\ \\ \infty \text{..................................., se } y_{ik} < 0 \text{ .} \end{cases}$$

(iii) Se $\boxed{\Delta_k = \gamma_2}$, a variável não-básica x_k entrará na base, e a variável básica x_p deixará a base, onde o índice p é determinado de acordo com a equação (IV. 6.19), isto é:

$$\gamma_2 = \begin{cases} \ell_k + \min\limits_{i \varepsilon I_B} \left\{ \dfrac{u_i - \bar{x}_i}{- y_{ik}} \right\} = \dfrac{u_p - \bar{x}_p}{-y_{pk}} + \ell_k & , \text{se } y_{ik} < 0 , \\ \\ \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \text{se } y_{ik} > 0 . \end{cases}$$

Em ambos casos, (ii) e (iii), o quadro do simplex é atualizado pivoteando ao redor dos respectivos elementos pivô, y_{rk} e y_{pk} . Observamos que tais elementos, podem ser positivos ou negativos. A coluna correspondente ao termo independente é atualizada separadamente do restante do quadro, de acordo com as equações (IV.6.2) e (IV.6.1), isto é:

$$z = \bar{z} - (z_k - c_k)(\bar{x}_k - \ell_k) \quad ,$$

e

$$x_i = \bar{x}_i - y_{ik} (\bar{x}_k - \ell_k) \qquad , \qquad \forall i \ \varepsilon \ I_B \ .$$

O novo vetor básico será determinado pela equação acima, exceto sua r-ésima ou p-ésima componente, que terão seus valores alterados para $\ell_k + \Delta_k$, pois, a variável não-básica x_k , tornou-se para esta solução, variável básica.

IV.8. Diminuição do valor de x_k

Este caso é semelhante ao visto anteriormente, isto é, ao aumento do valor da variável não-básica x_k. Vamos supor, que tenhamos $z_j - c_j \leq 0$, $\forall j \in I_{N_1}$, e que além disso, ao menos um $z_j - c_j < 0$, para $j \in I_{N_2}$, assim, a variável não-básica x_k, cujo índice k é determinado por (IV.5.3), diminuirá seu valor de $\bar{x}_k = u_k$ para um outro valor, sendo que $\bar{x}_k \in [\ell_k, u_k]$. Em outras palavras, devemos ter:

$$\bar{\bar{x}}_k < u_k$$

$$\bar{\bar{x}}_k + \Delta_k = u_k$$

e

$$\boxed{\Delta_k = u_k - \bar{\bar{x}}_k} \; ,$$

sendo $\Delta_k > 0$, o decréscimo sofrido por x_k. Quando a variável não-básica x_k diminui de valor, todas as outras variáveis não-básicas permanecerão fixas em seus respectivos limites, mas devido a modificação sofrida pela variável x_k, os novos valores das variáveis básicas e da função objetivo, serão obtidos substituindo o novo valor de x_k, $\bar{\bar{x}}_k = u_k - \Delta_k$, nas equações (IV.3.11) e (IV.3.12), respectivamente:

$$x_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij} \ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij} u_j - y_{ik}(-\Delta_k) , \quad \forall i \in I_B \; .$$

Sabemos que:

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} y_{ij}\, \ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} y_{ij}\, u_j \quad , \quad \forall i \;\varepsilon\; I_B \; ,$$

portanto temos:

$$\boxed{x_i = \bar{x}_i + y_{ik}\, \Delta_k} \qquad , \quad \forall i \;\varepsilon\; I_B \; , \qquad \text{(IV.8.1)}$$

e

$$z = \hat{z} - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} (z_j - c_j) u_j - (z_k - c_k)(-\Delta_k) \; .$$

Como

$$\bar{z} = \hat{z} - \sum_{j \varepsilon I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \varepsilon I_{N_2}} (z_j - c_j) u_j \quad ,$$

temos:

$$\boxed{z = \bar{z} + (z_k - c_k)\, \Delta_k} \; . \qquad \text{(IV.8.2)}$$

Por hipótese, tínhamos que $z_k - c_k < 0$, $k \;\varepsilon\; I_{N_2}$, e que a variável não-básica x_k diminui de u_k para $u_k - \Delta_k$. Analisando a equação (IV.8.2), concluimos que podemos aumentar indefinidamente o valor de Δ_k, pois, nosso objetivo é minimizar a função z. Entretanto, ao aumentarmos Δ_k, verificamos pela equação (IV.8.1), que as variáveis básicas também sofrerão uma alteração. Assim, a variável não-básica x_k , poderá diminuir até um certo valor, de maneira que nenhuma variável básica se torne inviável. Desta forma, $\Delta_k = u_k - \bar{x}_k$, não poderá aumentar indefinidamente, sendo portanto, necessário limitarmos seu valor.

Apresentaremos três maneiras de limitarmos esse decréscimo.

8a. Uma variável básica diminui de valor até atingir seu limite inferior;

8b. Uma variável básica aumenta de valor até atingir seu limite superior;

8c. A própria variável não-básica x_k atinge seu limite inferior.

Veremos cada um desses casos detalhadamente:

8a. <u>Uma variável básica diminui seu valor até atingir seu limite inferior</u>:

Da equação (IV.8.1), temos:

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik} \Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \quad .$$

Vamos supor, que uma variável básica atinja seu limite inferior, e além disso, sabemos que:

$$\ell_i \leq x_i \leq u_i \qquad , \quad \forall i \in I_B \quad ,$$

portanto:

$$\ell_i \leq x_i = \bar{x}_i + y_{ik} \Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \quad ,$$

ou

$$\ell_i \leq \bar{x}_i + y_{ik}\,\Delta_k \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

$$y_{ik}\,\Delta_k \geq \ell_i - \bar{x}_i \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

$$\boxed{-y_{ik}\,\Delta_k \leq \bar{x}_i - \ell_i} \quad , \quad \forall i \in I_B \ . \qquad (IV.8.3)$$

Analisando a desigualdade (IV.8.3), verificamos que temos que considerar dois casos:

1) Se $y_{ik} < 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.8.3) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \leq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}}} \quad , \quad \forall i \in I_B \ , \qquad (IV.8.4)$$

ou

$$u_k - \bar{x}_k \leq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

$$-\bar{x}_k \leq - u_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

$$\bar{x}_k \geq u_k - \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \ .$$

Concluimos então, que a variável não-básica x_k deverá pertencer ao seguinte intervalo:

$$u_k - \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \leq \bar{x}_k < u_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \; .$$

Em vista disto, podemos definir:

$$\boxed{\gamma_1 = u_k + \min_{\substack{i \in I_B \\ y_{ik} < 0}} \left\{ - \frac{(\bar{x}_i - \ell_i)}{-y_{ik}} \right\} = \frac{-(\bar{x}_r - \ell_r)}{-y_{rk}} + u_k} \; . \qquad \text{(IV.8.5)}$$

Assim, a variável não-básica x_k diminui de valor, mas de maneira que nenhuma variável básica se torne inviável, em outras palavras, x_k não pode ultrapassar γ_1. Desta forma, a variável x_r será a primeira variável básica a atingir seu limite inferior, devendo portanto, sair da base, entrando em seu lugar, a variável não-básica x_k.

2) Se $y_{ik} > 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.8.3) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \geq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}}} \qquad , \quad \forall i \in I_B \; , \qquad \text{(IV.8.6)}$$

ou

$$u_k - \bar{x}_k \geq \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \qquad , \quad \forall i \in I_B \; ,$$

$$-\bar{x}_k \geq -u_k + \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \qquad , \quad \forall i \in I_B ,$$

$$\bar{x}_k \leq u_k - \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{-y_{ik}} \qquad , \quad \forall i \in I_B .$$

Assim, a variável não-básica x_k diminui de valor, sem que nenhuma variável básica atinja seu limite inferior. Neste caso, teremos:

$$\boxed{\gamma_1 = \infty} \; . \tag{IV.8.7}$$

Resumindo as duas condições, temos:

$$\gamma_1 = \begin{cases} u_k + \min\limits_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{-(\bar{x}_i - \ell_i)}{-y_{ik}} \right\} = \dfrac{-(\bar{x}_r - \ell_r)}{-y_{rk}} + u_k \; , \text{ se } \; y_{ik} < 0 \; , \\ \\ \infty \text{ -, se } \; y_{ik} > 0 \; . \end{cases} \tag{IV.8.8}$$

8b. <u>Uma variável básica aumenta seu valor até atingir seu limite superior</u>:

Da equação (IV.8.1), temos:

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \; .$$

Vamos supor, que diminuindo o valor da variável não-básica x_k , uma variável básica aumenta seu valor até atingir seu limite superior. Sabemos que:

$$\ell_i \leq x_i \leq u_i \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ ,$$

portanto:

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}\,\Delta_k \leq u_i \ , \qquad \forall i \in I_B \ ,$$

$$\boxed{y_{ik}\,\Delta_k \leq u_i - \bar{x}_i} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ . \qquad \text{(IV.8.9)}$$

Analisando a desigualdade (IV.8.9), verificamos que temos dois casos a considerar:

1) Se $y_{ik} > 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.8.9) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \leq \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}}} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ , \qquad \text{(IV.8.10)}$$

ou

$$u_k - \bar{x}_k \leq \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ ,$$

$$-\bar{x}_k \leq -u_k + \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ ,$$

$$\bar{x}_k \geq u_k - \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \qquad , \qquad \forall i \in I_B \ .$$

Concluimos então, que a variável não-básica x_k deverá pertencer ao intervalo:

$$u_k - \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \leq \bar{x}_k < u_k \quad , \quad y_{ik} > 0 \quad , \quad \forall i \in I_B .$$

Considerando:

$$\boxed{\gamma_2 = u_k + \min_{\substack{i \in I_B \\ y_{ik} > 0}} \left\{ \frac{-(u_i - \bar{x}_i)}{y_{ik}} \right\} = \frac{-(u_p - \bar{x}_p)}{y_{pk}} + u_k} , \qquad \text{(IV.8.11)}$$

verificamos que a variável não-básica x_k pode diminuir de valor, sem no entanto, ultrapassar γ_2 , pois, a partir deste valor, alguma variável básica se tornará inviável. Assim sendo, a variável x_p será a primeira variável básica a atingir seu limite superior, devendo sair da base, entrando em seu lugar a variável não-básica x_k .

2) Se $y_{ik} < 0$, $\forall i \in I_B$, a desigualdade (IV.8.9) ficará:

$$\boxed{\Delta_k \geq \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}}} \quad , \quad \forall i \in I_B \quad , \qquad \text{(IV.8.12)}$$

$$u_k - \bar{x}_k \geq \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \quad ,$$

$$-\bar{x}_k \geq -u_k + \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \quad ,$$

$$\bar{x}_k \leq u_k - \frac{u_i - \bar{x}_i}{y_{ik}} \quad , \quad \forall i \in I_B \quad .$$

Assim, a variável não-básica x_k diminui de valor, sem que nenhuma variável básica atinja seu limite superior. Neste caso, consideramos:

$$\boxed{\gamma_2 = \infty} \quad . \qquad \text{(IV.8.13)}$$

Resumindo as duas condições, temos:

$$\gamma_2 = \begin{cases} u_k + \min\limits_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{-(u_i - \bar{x}_i)}{y_{ik}} \right\} = \dfrac{-(u_p - \bar{x}_p)}{y_{pk}} + u_k \text{ , se } y_{ik} > 0 \text{ ,} \\ \\ \infty \text{ -, se } y_{ik} < 0 \text{ .} \end{cases} \qquad \text{(IV.8.14)}$$

8c. A própria variável x_k atinge seu limite inferior

Finalmente, vamos supor que a própria variável não-básica x_k atinge seu limite inferior, isto é:

$$\bar{x}_k = u_k - \Delta_k \quad ,$$

e

$$\bar{x}_k = \ell_k \quad ,$$

portanto:

$$\ell_k = u_k - \Delta_k \quad ,$$

ou

$$\boxed{\Delta_k = u_k - \ell_k} \quad . \qquad \text{(IV.8.15)}$$

Os casos vistos até o momento, fornecem o maior aumento que Δ_k pode ter, sendo, no entanto, limitado ou por uma variável básica ou pela própria variável x_k. Desta forma, é óbvio que Δ_k será obtido por:

$$\Delta_k = \underline{\min} \ (\gamma_1, \gamma_2, u_k - \ell_k) \quad . \qquad \text{(IV.8.16)}$$

Dos itens 8a. e 8b., verificamos que tanto γ_1 como γ_2 podem assumir dois valores, portanto, podemos considerar também, dois valores para Δ_k, isto é:

(i) se $\Delta_k = \infty$, o decréscimo de x_k não é limitado e pela equação (IV.8.2):

$$z = \bar{z} + (z_k - c_k) \Delta_k \ ,$$

concluimos que a solução ótima é ilimitada, pois, $z_k - c_k < 0$.

(ii) se, por outro lado, $\Delta_k < \infty$, obtemos uma nova solução básica viável, onde:

$$\bar{x}_k = u_k - \Delta_k \ ,$$

e as variáveis básicas serão modificadas de acordo com a equação:

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \;,$$

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}(u_k - \bar{x}_k) \qquad , \quad \forall i \in I_B \;.$$

IV.9. Atualização do quadro do simplex quando $\bar{x}_k < u_k$

Ao obtermos uma nova solução básica viável, devemos sempre, atualizar o quadro do simplex que representará essa solução.

(i) Se $\boxed{\Delta_k = u_k - \ell_k}$, não realizaremos nenhuma mundança de base, e a variável x_k continuará sendo não-básica, só que agora, seu valor será igual ao seu limite inferior. Em outras palavras, a variável x_k passará de um limite a outro, isto é, do superior ao inferior. Somente a coluna correspondente ao termo independente será atualizada, para desta forma, obtermos os novos valores da função objetivo e das variáveis básicas. O novo valor da função objetivo será obtido substituindo $\bar{z}$ por $\bar{z} + (z_k - c_k)(u_k - \bar{x}_k)$, e os novos valores das variáveis básicas serão obtidos substituindo $\bar{x}_i$ por $\bar{x}_i + y_{ik}(u_k - \bar{x}_k)$. O quadro do simplex representando essa solução será:

Quadro (Q.IV.9.1)

	z	x_i	$x_j,\ j \in I_{N_1}$	$x_j,\ j \in I_{N_2}$	termo independente
z	1	0	$z_j - c_j$	$z_j - c_j$	$\bar{z} + (z_k - c_k)(u_k - \bar{x}_k)$
x_i	0	I	y_{ij}	y_{ij}	$\bar{x}_i + y_{ik}(u_k - \bar{x}_k)$

(ii) Se $\boxed{\Delta_k = \gamma_1}$, a variável não-básica x_k entrará na base no lugar da variável básica x_r, onde o índice r é determinado de acordo com a equação (IV.8.8), isto é:

$$\gamma_1 = \begin{cases} u_k + \min\limits_{i \varepsilon I_B} \left\{ \dfrac{-(\overline{x}_i - \ell_i)}{-y_{ik}} \right\} = \dfrac{-(\overline{x}_r - \ell_r)}{-y_{rk}} + u_k & , \text{ se } y_{ik} < 0 , \\ \infty \dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \text{ se } y_{ik} > 0 . \end{cases}$$

(iii) Se $\boxed{\Delta_k = \gamma_2}$, a variável básica x_k entrará na base no lugar da variável básica x_p, onde o índice p é determinado de acordo com a equação (IV.8.14), isto é:

$$\gamma_2 = \begin{cases} u_k + \min\limits_{i \varepsilon I_B} \left\{ \dfrac{-(u_i - \overline{x}_i)}{y_{ik}} \right\} = \dfrac{-(u_p - \overline{x}_p)}{y_{pk}} + u_k & , \text{ se } y_{ik} > 0 , \\ \infty \dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \text{ se } y_{ik} < 0 . \end{cases}$$

O quadro do simplex, é atualizado pivoteando ao redor dos respectivos elementos pivô y_{rk} ou y_{pk}, sendo que, tais elementos podem ser positivos ou negativos. A coluna correspondente ao termo independente é atualizada separadamente do restante do quadro, de acordo com as equações (IV.8.2) e (IV.8.1), isto é:

$$z = \overline{z} + (z_k - c_k)\, \Delta_k \quad ,$$

$$z = \overline{z} + (z_k - c_k)(u_k - \overline{x}_k) \; ,$$

e

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}\,\Delta_k \qquad , \quad \forall i \in I_B \ ,$$

$$x_i = \bar{x}_i + y_{ik}(u_k - \bar{x}_k) \qquad , \quad \forall i \in I_B \ .$$

O novo vetor básico será determinado pela equação acima, com exceção da r-ésima ou p-ésima componente, que terão seus valores alterados para $u_k - \Delta_k$, pois, a variável não-básica x_k torna-se básica para esta solução.

IV.10. Solução inicial:

Se, inicialmente, não tivermos nenhuma solução básica viável, devemos começar o método do simplex com variáveis limitadas, utilizando as variáveis artificiais. Além disso, devemos realizar as seguintes operações:

1. fixar todas as variáveis originais em um dos seus limites;

2. ajustar, de acordo com o item 1., os valores do termo independente;

3. multiplicar as linhas, quando necessário, por -1 , para obter $\bar{x}_i \geq 0$, e

4. adicionar colunas artificiais.

Devemos utilizar o método duas fases ou o big M, para tirar as variáveis artificiais da base. Desta forma, temos todos os ingredientes do método do simplex adaptado para as variáveis limitadas. Na ausência de degenerescência, o procedimento descrito anteriormente, passa de uma solução básica viável para outra solução básica viável melhorada, sendo que tal procedimento deve parar em um número finito de iterações.

IV.11. Passos de Algoritmo:

Passo inicial

Encontre uma solução básica viável inicial, podendo utilizar variáveis artificiais, se necessário. Seja x_i, $\forall i \in I_B$, as variáveis básicas e x_j, $j \in I_{N_1}$ e $j \in I_{N_2}$, as variáveis não-básicas que assumirão os valores dos seus limites inferiores e superiores, respectivamente. Forme o seguinte quadro:

	z	x_i	$x_j,\ j \in I_{N_1}$	$x_j,\ j \in I_{N_2}$	termo independente
z	1	0	$z_j - c_j$	$z_j - c_j$	$\bar{z}$
x_i	0	I	y_{ij}	y_{ij}	$\bar{x}_i$

onde,

$$\bar{z} = \hat{z} - \sum_{j \in I_{N_1}} (z_j - c_j)\ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} (z_j - c_j)u_j \quad ,$$

e

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - \sum_{j \in I_{N_1}} y_{ij}\,\ell_j - \sum_{j \in I_{N_2}} y_{ij}\,u_j \quad , \quad \forall i \in I_B \, .$$

Passo principal:

Passo 1

Se, para a solução obtida no quadro acima, tivermos $z_j - c_j \leq 0$, $\forall j \in I_{N_1}$ e $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_{N_2}$, então, esta solução é a solução ótima. Caso contrário, isto é, se uma dessas condições não for satisfeita para uma variável não-básica x_k , então vá para o passo 2 se $k \in I_{N_1}$, e para o passo 3 se $k \in I_{N_2}$.

Passo 2

O valor da variável x_k aumenta de ℓ_k para $\ell_k + \Delta_k$. O valor de Δ_k é dado pela equação (IV.6.21), onde γ_1 e γ_2 são obtidos das equações (IV.6.10) e (IV.6.19), respectivamente. Se $\Delta_k = \infty$, pare a solução é ilimitada. Caso contrário, o quadro é atualizado, como descrito anteriormente. Repita o passo 1 .

Passo 3

O valor da variável x_k diminui de u_k para $u_k - \Delta_k$. O valor de Δ_k é dado pela equação (IV.8.16), onde γ_1 e γ_2 são obtidos das equações (IV.8.8) e (IV.8.14). Se $\Delta_k = \infty$, pare, a solução é ilimitada. Caso contrário, atualize o quadro como descrito anteriormente. Repita o passo 1 .

Na resolução de um problema com variáveis limitadas, é importante durante as iterações do simplex, distinguir entre as variáveis não-básicas que assumem seus limites inferiores e as que assumem seus limites superiores. Portanto, no quadro do simplex devemos marcar as correspondentes colunas por ℓ e u, respectivamente.

IV.12. Exercício resolvido:

Para que a compreensão e a assimilação do método possam ser feitas, daremos um exemplo completo:

minimizar $z = -2x_1 - 4x_2 - x_3$

sujeito à:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 \\ 0 \leq x_1 &\leq 4 \\ 0 \leq x_2 &\leq 6 \\ 1 \leq x_3 &\leq 4 \ . \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$, obtemos:

minimizar $z = -2x_1 - 4x_2 - x_3$

sujeito à:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq 4 \\ 0 \leq x_2 &\leq 6 \\ 1 \leq x_3 &\leq 4 \ . \end{aligned}$$

Os limites das variáveis de folga, serão:

$$0 \leq x_4 \leq u_4$$
$$0 \leq x_5 \leq u_5 \quad .$$

Inicialmente, as variáveis de folga são as variáveis básicas, assim, passemos ao cálculo de seus limites superiores. Em primeiro lugar, devemos colocar tais variáveis em função das variáveis não-básicas x_1, x_2 e x_3 , isto é:

$$x_4 = 10 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_5 = 4 - x_1 - x_2 + x_3 \quad .$$

Vamos agora, designar para as variáveis não-básicas, os valores dos seus limites inferiores ou superiores, conforme as exigências, pois, desta forma, obtemos os limites superiores das variáveis básicas.

$$x_4 = u_4 = 10 - 2\ell_1 - \ell_2 - \ell_3$$
$$u_4 = 10 - 2.0 - 0 - 1 = 9$$
$$\boxed{u_4 = 9} \; ,$$

e

$$x_5 = u_5 = 4 - \ell_1 - \ell_2 + u_3$$
$$u_5 = 4 - 0 - 0 + 4 = 8$$
$$\boxed{u_5 = 8} \; .$$

Assim, os intervalos das variáveis básicas x_4 e x_5 , serão:

$$0 \leq x_4 \leq 9$$

$0 \leq x_5 \leq 8$.

A solução básica viável inicial, será obtida considerando que as variáveis não-básicas assumirão os valores dos seus limites inferiores, isto é:

$$x_1 = \bar{x}_1 = \ell_1 = 0 \quad ,$$

$$x_2 = \bar{x}_2 = \ell_2 = 0 \quad ,$$

$$x_3 = \bar{x}_3 = \ell_3 = 1 \quad .$$

Em função disto, podemos tirar os valores das variáveis básicas:

$$x_4 = \bar{x}_4 = 10 - 2\ell_1 - \ell_2 - \ell_3$$

$$\bar{x}_4 = 10 - 2.0 - 0 - 1 = 9$$

$$\boxed{\bar{x}_4 = 9} \quad ,$$

e

$$x_5 = \bar{x}_5 = 4 - \ell_1 - \ell_2 + \ell_3$$

$$\bar{x}_5 = 4 - 0 - 0 + 1 = 5$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{x}_5 = 5} \quad ,$$

Assim, o vetor básico $\bar{x} = (\bar{x}_4, \bar{x}_5)^T = (9,5)^T$ constitui uma solução básica viável, pois, seus valores pertencem aos seus respectivos intervalos.

O valor da função objetivo, neste caso, será:

$$z = \bar{z} - 2\ell_1 - 4\ell_2 - \ell_3$$

$$\bar{z} = - 2.0 - 4.0 - 1 = -1$$

$$\boxed{\bar{z} = -1}\,.$$

Iteração 1

Desta forma, podemos construir o quadro do simplex associado à solução básica viável inicial:

(Q.IV.12.1)

	z	ℓ x_1	ℓ ↓ x_2	ℓ x_3	x_4	x_5	termo independente
z	1	2	4	1	0	0	-1
x_4	0	2	1	1	1	0	9
← x_5	0	1	1	-1	0	1	5

Do quadro (Q.IV.12.1), tiramos:

$$I_B = \{4,5\}$$

$$I_{N_1} = \{1,2,3\}$$

$$I_{N_2} = \emptyset\ ,$$

além disso, temos:

$$z_1 - c_1 = 2 \quad e \quad 1 \in I_{N_1}$$

$$z_2 - c_2 = 4 \quad e \quad 2 \in I_{N_1}$$

$$z_3 - c_3 = 1 \quad e \quad 3 \in I_{N_1} .$$

Como $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_{N_1}$, devemos escolher a variável não-básica x_k , cujo índice k está associado a:

$$z_k - c_k = \underset{j \in I_{N_1}}{\underline{\text{máx}}} \{z_j - c_j / z_j - c_j \geq 0\}$$

$$z_k - c_k = \underline{\text{máx}} \{z_1 - c_1 ;\ z_2 - c_2 ;\ z_3 - c_3\}$$

$$z_k - c_k = \underline{\text{máx}} \{2,4,1\} = 4 ,$$

portanto:

$$\boxed{z_k - c_k = z_2 - c_2 = 4} ,$$

logo, a variável não-básica x_2 entrará na base. Como $2 \in I_{N_1}$ e $z_2 - c_2 = 4 > 0$, o valor da variável x_2 é igual ao seu limite inferior, isto é:

$$\overline{x}_2 = \ell_2 = 0 ,$$

portanto, para x_2 se tornar uma variável básica, deverá aumentar de valor, isto é:

$$\overline{x}_2 > \ell_2$$

$$\overline{x}_2 = \ell_2 + \Delta_2 ,$$

onde Δ_2 será determinado por:

$$\Delta_2 = \underline{\min}\,(\gamma_1, \gamma_2, u_2 - \ell_2)$$

$$\Delta_2 = \underline{\min}\,(\gamma_1, \gamma_2, 6 - 0)$$

$$\Delta_2 = \underline{\min}\,(\gamma_1, \gamma_2, 6) \quad .$$

Os valores de γ_1 e γ_2 serão obtidos de acordo com as equações (IV.6.10) e (IV.6.19), respectivamente. Em outras palavras, do quadro (Q.IV.12.1), temos:

$$y_2 = (y_{42}, y_{52})^T = (1,1)^T \quad .$$

Como $y_{42} = 1 > 0$ e $y_{52} = 1 > 0$, calculamos γ_1 e γ_2 da seguinte maneira:

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{\bar{x}_i - \ell_i}{y_{i2}} \right\} + \ell_2 \quad , \quad i \varepsilon I_B = \{4,5\}$$

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{\bar{x}_4 - \ell_4}{y_{42}} \; , \; \frac{\bar{x}_5 - \ell_5}{y_{52}} \right\} + \ell_2$$

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{9-0}{1} \; ; \; \frac{5-0}{1} \right\} = \min \{9,5\} = 5 \quad ,$$

portanto:

$$\gamma_1 = \frac{\bar{x}_5 - \ell_5}{y_{52}} = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma_1 = 5} \; .$$

Assim, $\gamma_1 = 5$, isto significa que a variável não-básica x_2 , entrará na base, aumentando seu valor de $\bar{x}_2 = \ell_2 = 0$ para $\bar{x}_2 = \ell_2 + \Delta_2 = 0 + 5 = 5$, sem que nenhuma variável básica se torne inviável, isto é, sem que nenhuma variável básica assuma um valor menor que seu limite inferior. Como

$$\gamma_1 = \frac{\overline{x}_5 - \ell_5}{y_{52}} = 5 \quad ,$$

temos que, a variável x_5 será a primeira variável básica a atingir seu limite inferior, devendo portanto, sair da base.

Da equação (IV.6.19), temos que:

$$\boxed{\gamma_2 = \infty} \quad ,$$

pois, $y_{52} = 1 > 0$. Assim, $\gamma_2 = \infty$, significa que o valor de Δ_2 pode aumentar indefinidamente, sem que nenhuma variável básica ultrapasse seu limite superior.

Desta forma, temos:

$$\Delta_2 = \underline{\min} \; (\gamma_1, \gamma_2, 6)$$

$$\Delta_2 = \underline{\min} \; (5, \infty , 6) = 5$$

$$\boxed{\Delta_2 = 5} \quad .$$

Resumindo, temos que a variável básica x_5 sairá da base, isto é, assumirá o valor do seu limite inferior, $\overline{x}_5 = \ell_5 = 0$, e a variável não-básica x_2 , entrará na base em seu lugar, cujo valor passará de $\overline{x}_2 = \ell_2 = 0$ para $\overline{x}_2 = \ell_2 + \Delta_2 = 0 + 5 = 5$.

Podemos agora, calcular os novos valores básicos através da seguinte equação:

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - y_{i2}\ \Delta_2 \qquad , \qquad \forall i \in I_B = \{4,5\}$$

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - y_{i2}\ (\bar{x}_2 - \ell_2), \qquad \forall i \in I_B = \{4,5\} ,$$

portanto:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{42} \\ y_{52} \end{bmatrix} (\bar{x}_2 - \ell_2)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{(\bar{x}_4,\ \bar{x}_5) = (4,\ 0)^T} .$$

Pelo resultado acima, verificamos realmente que a variável x_5 sai da base, pois, atingiu seu limite inferior, isto é, $\bar{x}_5 = \ell_5 = 0$. A variável x_2 entrará em seu lugar, sendo que, seu valor passará de seu limite inferior, $\bar{x}_2 = \ell_2 = 0$, para um outro valor, $\bar{x}_2 = \ell_2 + \Delta_2 = 0 + 5 = 5$. Assim, o novo vetor básico, será:

$$(\bar{x}_4,\ \bar{x}_2)^T = (4,5)^T \quad .$$

O valor da função objetivo atualizado, será:

$$\bar{z} = \hat{z} - (z_2 - c_2)\ \Delta_2$$

$$\bar{z} = -1 - (4)\ 5$$

$$\bar{z} = -1 - 20 = -21 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\bar{z} = -21} .$$

Portanto, a coluna correspondente ao termo independente é atualizada separadamente do restante do quadro, e é dada por:

$$(-21,\ 4,\ 5)^T \quad .$$

Para atualizarmos o quadro (Q.IV.12.1), devemos realizar o pivoteamento ao redor do elemento $y_{52} = 1$, e obter o seguinte quadro:

(Q.IV.12.2)

	z	ℓ x_1	x_2	ℓ x_3	x_4	ℓ x_5
z	1	-2	0	5	0	-4
x_4	0	1	0	2	1	-1
x_2	0	1	1	-1	0	1

Acrescentando ao quadro (Q.IV.12.2), a coluna correspondente ao termo independente, obtemos:

(Q.IV.12.3)

	z	ℓ x_1	x_2	↓ ℓ x_3	x_4	ℓ x_5	termo independente
z	1	-2	0	5	0	-4	-21
x_4	0	1	0	2	1	-1	4
← x_2	0	1	1	-1	0	1	5

Iteração 2

Do quadro (Q.IV.12.3), temos:

$$I_B = \{4,2\}$$

$$I_{N_1} = \{1,3,5\}$$

$$I_{N_2} = \emptyset \quad ,$$

pois, todas variáveis não-básicas x_1 , x_3 e x_5 , assumem seus limites inferiores. Além disso, do quadro acima, temos:

$$z_1 - c_1 = -2 < 0 \quad , \quad 1 \varepsilon I_{N_1} ,$$

$$z_3 - c_3 = 5 > 0 \quad , \quad 3 \varepsilon I_{N_1} ,$$

$$z_5 - c_5 = -4 < 0 \quad , \quad 5 \varepsilon I_{N_1} .$$

Portanto,

$$z_k - c_k = \underset{j \varepsilon I_{N_1}}{\underline{\text{máx}}} \{z_j - c_j / z_j - c_j > 0\}$$

$$z_k - c_k = \underline{\text{máx}} \{z_3 - c_3\} = \underline{\text{máx}} \{5\} = 5$$

$$\boxed{z_k - c_k = z_3 - c_3 = 5} \quad ,$$

assim, a variável não-básica x_3 entrará na base, sendo que, seu valor passará de $\bar{x}_3 = \ell_3 = 1$ para um outro valor, isto é:

$$\bar{x}_3 > \ell_3$$

$$\bar{x}_3 = \ell_3 + \Delta_3 = 1 + \Delta_3 \ ,$$

sendo que Δ_3 será dado por:

$$\Delta_3 = \underline{\min} \ (\gamma_1, \gamma_2, u_3 - \ell_3)$$

$$\Delta_3 = \underline{\min} \ (\gamma_1, \gamma_2, 3) \ .$$

Do quadro (Q.IV.12.3), temos:

$$y_3 = (y_{43}, y_{23})^T = (2 \ , \ -1)^T \ .$$

Como $y_{43} = 2 > 0$, o valor de γ_1, será:

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{\overline{x}_i - \ell_i}{y_{i3}} \right\} \ , \qquad i \in I_B = \{4,2\}$$

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{\overline{x}_4 - \ell_4}{y_{43}} \right\} = \frac{\overline{x}_4 - \ell_4}{y_{43}} = \frac{4-0}{2} = 2$$

$$\boxed{\gamma_1 = 2} \ .$$

Para $y_{43} > 0$ e $\gamma_1 = 2$, temos que o valor da variável básica x_4 passará de $\overline{x}_4 = 4$ para $\overline{x}_4 = \ell_4 = 0$, quando x_3 aumentar de $\overline{x}_3 = \ell_3 = 1$ para $\overline{x}_3 = 1 + \Delta_3$.

Como $y_{23} = -1 < 0$, temos:

$$\gamma_2 = \underline{\min} \left\{ \frac{u_i - \overline{x}_i}{-y_{i3}} \right\} \ , \qquad i \in I_B = \{4,2\}$$

$$\gamma_2 = \underline{\min} \left\{ \frac{u_2 - \overline{x}_2}{-y_{23}} \right\} = \frac{u_2 - \overline{x}_2}{-y_{23}} = \frac{6-5}{-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\gamma_2 = 1} \ .$$

Assim, para $y_{23} = -1 < 0$ e $\gamma_2 = 1$, temos que o valor da variável básica x_2 , passará de $\bar{x}_2 = 5$ para $\bar{x}_2 = u_2 = 6$, quando a variável x_3 aumentar de valor.

Podemos agora, calcular Δ_3 , isto é:

$$\Delta_3 = \min (2,1,3) = 1 ,$$

portanto,

$$\boxed{\Delta_3 = \gamma_2 = 1} .$$

Assim, a variável não-básica x_3 aumentará de $\bar{x}_3 = \ell_3 = 1$ para $\bar{x}_3 = \ell_3 + \Delta_3 = 1 + 1 = 2$.

O vetor básico ficará:

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i - y_{i3}\,\Delta_3 \qquad , \quad i \in I_B = \{4,2\}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{43} \\ y_{23} \end{bmatrix} 1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} .$$

Como a variável x_2 assumiu seu limite superior, $\bar{x}_2 = u_2 = 6$, tornou-se portanto, não-básica e deverá sair da base, entrando em seu lugar, a variável x_3 , cujo valor passou de $\bar{x}_3 = \ell_3 = 1$ para $\bar{x}_3 = \ell_3 + \Delta_3 = 1 + 1 = 2$. Assim, o novo vetor básico será:

$$\boxed{(\bar{x}_4, \bar{x}_3)^T = (2, 2)^T} .$$

O novo valor da função objetivo, será:

$$\bar{z} = \hat{z} - (z_3 - c_3)\ \Delta_3$$

$$\bar{z} = -\ 21 - (5).1 = -21 -5 = -26 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = 26},$$

assim, a coluna correspondente ao termo independente será:

$$(-26, 2, 2)^T .$$

É importante frizarmos que tal coluna foi atualizada separadamente do quadro (Q.IV.12.3). O restante do quadro será atualizado pivoteando ao redor do elemento $y_{23} = -1$, obtendo o seguinte quadro:

(Q.IV.12.4)

	z	ℓ x_1	u x_2	x_3	x_4	ℓ x_5
z	1	3	5	0	0	1
x_4	0	3	2	0	1	1
x_3	0	-1	-1	1	0	-1

Acrescentando ao quadro (Q.IV.12.4), a coluna atualizada do termo independente, temos:

(Q.IV.12.5)

	z	$\overset{\downarrow}{\ell}$ x_1	u x_2	x_3	x_4	ℓ x_5	termo independente
z	1	3	5	0	0	1	-26
← x_4	0	3	2	0	1	1	2
x_3	0	1	-1	1	0	-1	2

Iteração 3

Do quadro (Q.IV.12.5), obtemos:

$$I_B = \{4,3\}$$

$$I_{N_1} = \{1,5\}$$

$$I_{N_2} = \{2\} \quad ,$$

além disso,

$$z_1 - c_1 = 3 > 0 \quad , \quad 1 \in I_{N_1} \quad ,$$

$$z_5 - c_5 = 1 > 0 \quad , \quad 5 \in I_{N_1} \quad ,$$

e

$$z_2 - c_2 = 5 > 0 \quad , \quad 2 \in I_{N_2} \quad .$$

Como $z_j - c_j \geq 0$, $j \in I_{N_2}$, obtemos a segunda condição de otimalidade. No entanto, como $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_{N_1}$, temos que:

$$z_k - c_k = \underset{j \in I_{N_1} = \{1,5\}}{\underline{\text{máx}}} \{z_j - c_j / z_j - c_j > 0\}$$

$$z_k - c_k = \underline{\text{máx}} \{z_1 - c_1;\ z_5 - c_5\} = \text{máx}\{3,1\} = 3$$

$$\boxed{z_k - c_k = z_1 - c_1 = 3} \,.$$

Assim, a variável não-básica x_1, cujo valor é igual ao seu limite inferior, $\overline{x}_1 = \ell_1 = 0$, entrará na base, sofrendo portanto, um aumento, isto é:

$$\overline{x}_1 > \ell_1$$

$$\overline{x}_1 = \ell_1 + \Delta_1 = 0 + \Delta_1 = \Delta_1$$

$$\overline{x}_1 = \Delta_1 \,,$$

onde Δ_1 será determinado por:

$$\Delta_1 = \underline{\min} \, (\gamma_1, \gamma_2, u_1 - \ell_1)$$

$$\Delta_1 = \underline{\min} \, (\gamma_1, \gamma_2, 4) \,.$$

Do quadro (Q.IV.12.5), temos:

$$y_1 = (y_{41}, y_{31})^T = (3, -1)^T$$

Como $y_{41} = 3 > 0$, γ_1 será:

$$\gamma_1 = \underline{\min} \left\{ \frac{\overline{x}_i - \ell_i}{y_{i1}} \right\} \quad , \quad i \in I_B = \{4,3\}$$

$$\gamma_1 = \min \left\{ \frac{\overline{x}_4 - \ell_4}{y_{41}} \right\} = \frac{\overline{x}_4 - \ell_4}{y_{41}} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\gamma_1 = 2/3}\ .$$

Assim, para $y_{41} = 3 > 0$ e $\gamma_1 = 2/3$, a variável básica x_4 assumirá seu limite inferior e sairá da base, quando Δ_1 aumentar até 2/3.

Agora, como $y_{31} = -1 < 0$, γ_2 será:

$$\gamma_2 = \underset{i \in \bar{I_B} = \{4,3\}}{\underline{\min}} \left\{ \frac{u_i - \bar{x}_i}{-y_{i1}} \right\} = \underline{\min} \left\{ \frac{u_3 - \bar{x}_3}{-y_{31}} \right\} = \frac{u_3 - \bar{x}_3}{-y_{31}} = \frac{4-2}{1} = 2$$

$$\boxed{\gamma_2 = 2}\ .$$

Para $y_{31} = -1 < 0$ e $\gamma_2 = 2$, temos que, quando Δ_1, aumentar até 2, a variável básica x_3 assumirá seu limite superior, e sairá da base.

$$\Delta_1 = \underline{\min}\ (2/3,\ 2,\ 4) = 2/3$$

$$\boxed{\Delta_1 = \gamma_1 = 2/3}\ ,$$

assim, a variável x_1 entrará na base no lugar de x_4. O vetor termo independente será:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{41} \\ y_{31} \end{bmatrix} \Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} 2/3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{x}_4,\ \bar{x}_3]^T = [0,\ 8/3]^T\ .$$

Como a variável x_4 deixa a base, entrando em seu lugar a variável x_1, obtemos o vetor básico atualizado, isto é:

$$\boxed{[\bar{x}_1,\ \bar{x}_3]^T = [2/3,\ 8/3]^T}\ .$$

O novo valor da função objetivo, será:

$$\bar{z} = -\ 26 - (z_1 - c_1)\ \Delta_1$$

$$\bar{z} = -\ 26 - (3)2/3 = -28 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = 28}.$$

Desta forma, o vetor termo independente atualizado, será:

$$(-28,\ 2/3,\ 8/3)^T\ .$$

Para atualizarmos o restante do quadro (Q.IV.12.5), devemos efetuar um pivoteamento ao redor do elemento $y_{41} = 3$, obtendo assim, o seguinte quadro:

<u>(Q.IV.12.6)</u>

	z	x_1	$\overset{u}{x_2}$	x_3	$\overset{\ell}{x_4}$	$\overset{\ell}{x_5}$
z	1	0	3	0	-1	0
x_1	0	1	2/3	0	1/3	1/3
x_3	0	0	-1/3	1	1/3	-2/3

Acrescentando o vetor termo independente atualizado, no quadro (Q.IV.12.6), temos:

(Q.IV.12.7)

	z	x_1	$\overset{u}{x_2}$	x_3	$\overset{\ell}{x_4}$	$\overset{\ell}{x_5}$	termo independente
z	1	0	3	0	-1	0	-28
x_1	0	1	2/3	0	1/3	1/3	2/3
x_3	0	0	-1/3	1	1/3	-2/3	8/3

Iteração 4

Do quadro (Q.IV.12.7), temos:

$$I_B = \{1,3\}$$

$$I_{N_1} = \{4,5\}$$

$$I_{N_2} = \{2\} \quad ,$$

além disso,

$$z_4 - c_4 = -1 < 0 \quad , \quad 4 \in I_{N_1} \; ,$$

$$z_5 - c_5 = 0 \quad , \quad 5 \in I_{N_1} \; ,$$

e

$$z_2 - c_2 = 3 > 0 \quad , \quad 2 \in I_{N_2} \; .$$

Como as condições de otimalidade são satisfeitas, isto é:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad , \quad \forall j \in I_{N_1} = \{4,5\}$$

e

$$z_j - c_j \geq 0 \quad , \quad \forall j \in I_{N_2} = \{2\} \ ,$$

temos que a solução:

$$\boxed{x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (2/3, 6, 8/3, 0, 0)^T} \ ,$$

é a solução ótima, sendo que o valor objetivo ótimo é $z^* = 28$.

Do quadro (Q.IV.12.7), verificamos também, que esta solução ótima não é única, pois, $z_5 - c_5 = 0$.

IV.13. Algoritmo de Decomposição:

Vamos apresentar agora, a resolução do problema com variáveis limitadas através do método de decomposição de Dantzig e Wolfe.

Consideremos então, o seguinte problema de programação linear com variáveis limitadas:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx \qquad \text{(IV.13.1)}$$

$$\text{sujeito à:} \quad Ax = b \qquad \text{(IV.13.2)}$$

$$\ell \leq x \leq u \ , \qquad \text{(IV.13.3)}$$

onde c é um vetor linha com n componentes; x um vetor coluna com n componentes; ℓ um vetor coluna com n componentes; u um vetor coluna com n componentes; b um vetor coluna com m componentes, e além disso, $u > \ell$.

A matriz A é uma matriz com m linhas e n colunas, cujas colunas são representadas pelos vetores $a_j \varepsilon \mathbb{R}^m$, $j=1,\ldots,n$, sendo que a característica de A é m , isto é,

$\rho(A) = m$.

Seja o seguinte conjunto:

$$X = \{x / x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \ell \leq x \leq u \; ; \; u > \ell\} \quad .$$

Desta forma, o problema (IV.13.1) - (IV.13.3) ficarã:

<u>minimizar</u> $z = cx$ (IV.13.4)

sujeito ã: $Ax = b$ (IV.13.5)

$x \in X$. (IV.13.6)

O conjunto X ẽ um conjunto poliẽdrico, representando as restrições de estruturas especiais, alẽm disso, ẽ um conjunto limitado, logo, serã um conjunto poliẽdrico limitado, portanto, qualquer ponto de X pode ser representado por uma combinação convexa do nũmero finito dos seus pontos extremos, isto ẽ:

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j \qquad \text{(IV.13.7)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \qquad \text{(IV.13.8)}$$

$$\lambda_j \geq 0 \;, \; j=1,\ldots,p \;, \qquad \text{(IV.13.9)}$$

onde os x^j são os pontos extremos de X , e $p = 2^n$, sendo n o nũmero das variãveis.

Substituindo as expressões (IV.13.7) - (IV.13.9) no problema (IV.13.4) - (IV.13.6), temos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} (cx^j)\, \lambda_j \tag{IV.13.10}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} (Ax^j)\, \lambda_j = b \tag{IV.13.11}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{IV.13.12}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p=2^n \ . \tag{IV.13.13}$$

Como o número de pontos extremos de X é geralmente, muito grande, não nos interessa resolver o problema acima, enumerando cada um desses pontos. Assim, vamos resolver tal problema por um método alternativo. Do problema (IV.13.10) - (IV.13.13), observamos que caímos num problema igual ao descrito no capítulo II, assim, a sua solução será feita através do método de decomposição de Dantzig e Wolfe. O problema auxiliar para esta caso, será:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \{qx\} \tag{IV.13.14}$$

$$\text{sujeito à:} \quad x \in X \ , \tag{IV.13.15}$$

onde $q = (q_1,\ldots,q_n)$ é um vetor linha dado.

Como o conjunto X é um conjunto poliédrico limitado, a solução ótima do problema (IV.13.14) - (IV.13.15), será um dos pontos extremos de X. Assim, se $q_j \geq 0$, a variável x_j assumirá o seu limite superior, isto é, $x_j = u_j$. Entretanto, se $q_j < 0$, a variável x_j assumirá o seu limite inferior, isto é, $x_j = \ell_j$. Em outras palavras:

$$x_j = \begin{cases} u_j & , \quad \text{se} \quad q_j \geq 0 \ , \\ \ell_j & , \quad \text{se} \quad q_j < 0 \ . \end{cases}$$

Observamos que neste caso, as variáveis poderão assumir somente um dos seus limites, superior ou inferior.

Vamos supor que $\hat{x}$ seja a solução ótima do problema auxiliar, sendo que $z_k - \hat{c}_k$ o valor correspondente da função objetivo. Assim:

(i) se $z_k - \hat{c}_k = 0$, então a solução básica viável λ_k é a solução ótima do problema (IV.13.10)-(IV.13.13).

(ii) caso contrário, isto é, se $z_k - \hat{c}_k > 0$, então a variável λ_k deverá entrar na base.

A coluna correspondente a matriz A, $[A\hat{x},1]^T$, deve ser atualizada, isto é, devemos premultiplicá-la pela inversa B^{-1} , ou seja:

$$y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x} \\ 1 \end{bmatrix} .$$

O vetor coluna gerado λ^k , dado por:

$$\lambda^k = (z_k - \hat{c}_k \ , \ y_k)^T \ ,$$

deverá ser adicionado ao último quadro ótimo. A variável λ_{B_r} deixará a base, e após realizarmos o pivoteamento ao redor do elemento pivô y_{rk} , repetiremos o procedimento.

IV.14. Exercício resolvido:

Para que a compreensão e a assimilação do método possam ser feitas, daremos um exemplo completo.

Consideremos o seguinte problema de programação linear com variáveis limitadas:

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{maximizar}} & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito à:} & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \quad . \end{array}$$

Graficamente, temos:

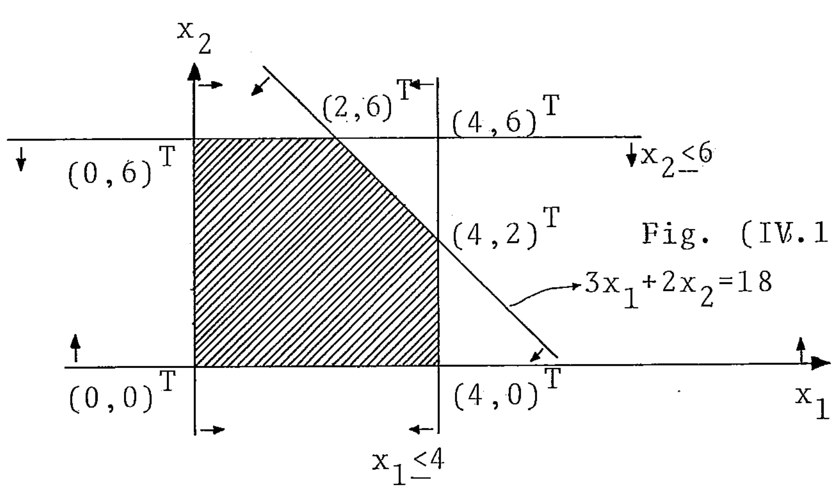


Fig. (IV.14.1)

Seja o conjunto:

$$X = \{x / x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x_1 \leq 4 \ ; \ 0 \leq x_2 \leq 6\} \quad .$$

A representação gráfica deste conjunto, será:

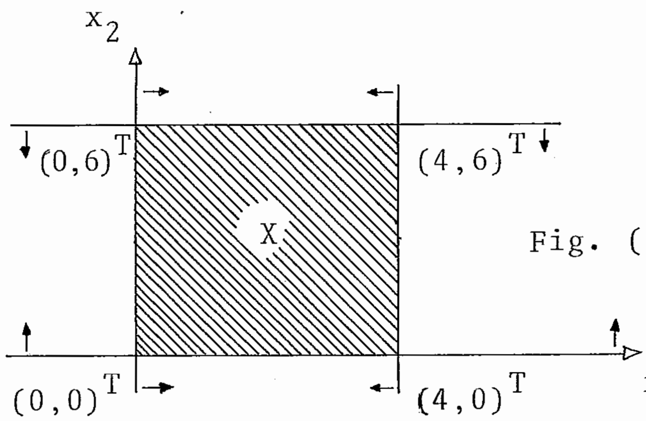


Fig. (IV.14.2)

Como o conjunto X é um conjunto poliédrico limitado, logo,qualquer ponto de X pode ser escrito como uma combinação convexa de seus pontos extremos, isto é:

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,p \quad ,$$

onde x^j são os pontos extremos de X e $p = 2^n = 4$, sendo n o número de variáveis do problema inicial.

Substituindo a expressão de x , dada acima, no problema inicial, obtemos:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ \ 5)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(3\ \ 2)x^j]\lambda_j \leq 18$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,p \quad .$$

Introduzindo a variável de folga $s \geq 0$, e a variável artificial λ_a , ao problema acima, teremos:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} [(3\ \ 5)x^j]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(3\ \ 2)x^j]\lambda_j + s = 18$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ ,$$

$$s \geq 0 \ ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ .$$

Resolveremos este problema, aplicando o método duas fases:

<u>1ª Fase</u>:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad \xi = \lambda_a$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} [(3\ \ 2)x^j]\lambda_j + s = 18$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ ,$$

$$s \geq 0 \ ,$$

$$\lambda_a \geq 0 \ .$$

Do problema acima, tiramos:

$$\xi_B = (c_s, c_{\lambda_a}) = (0,1)$$

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (e_s, e_{\lambda_a})$$

$$\xi_B B^{-1} = (0,1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 1)$$

$$\bar{\xi} = \xi_B B^{-1} b = (0,1) \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = b = (18, 1)^T$$

$$\xi_s = \xi_B B^{-1} e_s = (0, 1)\binom{1}{0} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B B^{-1} e_{\lambda_a} = (0, 1)\binom{0}{1} = 1 .$$

Podemos assim, construir o seguinte problema:

ξ	1	[0	1]	[1]
s	0	1	0	18
λ_a	0	0	1	1

(Q.IV.14.1)

Passemos agora, a resolução do seguinte problema auxiliar.

<u>maximizar</u> $\xi_j - \hat{c}_j = \xi_B B^{-1} a_j - cx^j$

sujeito à:

$x \in X$.

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \xi_j - \hat{c}_j = (0,1) \begin{bmatrix} (3\ \ 2)x^j \\ 1 \end{bmatrix} - (0\ \ 0)x^j$$

sujeito à:

$$x \in X ,$$

ou ainda,

$$\underline{\text{maximizar}} \quad \xi_j - \hat{c}_j = (0,\ 1) \begin{bmatrix} (3,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 1 \end{bmatrix} - (0\ \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 6 .$$

$$\underline{\text{maximizar}} \quad 1 , \quad \forall j$$

sujeito à:

$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 6 .$$

Observamos que qualquer x é solução do problema acima, portanto, tomemos a seguinte:

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0,\ 0)^T} .$$

Como $\xi_j - \hat{c}_j = 1 > 0$, geraremos o vetor coluna λ^1 associado à variável que entrará na base λ_1 :

$$\lambda^1 = \left[\xi_j - \hat{c}_j \ ;\ B^{-1}\ [A\hat{x}^1, 1]^T\right]^T ,$$

onde

$$\xi_j - \hat{c}_j = 1$$

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \;\; 2)\binom{0}{0} \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

logo,

$$\boxed{\lambda^1 = (1,\; 0,\; 1)^T} \quad \rightarrow \quad (Q.IV.14.1) \quad .$$

Introduzindo o vetor λ^1 no quadro (Q.IV.14.1), teremos:

					λ^1 ↓
ξ	1	0	1	1	1
s	0	1	0	18	0
← λ_a	0	0	1	1	1

(Q.IV.14.2)

Após o pivoteamento e omitindo a última coluna, obtemos o seguinte quadro:

v	1	0	0	0
s	0	1	0	18
λ_1	0	0	1	1

(Q.IV.14.3)

Iteração 1

Do quadro (Q.IV.14.3), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (0,0)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Uma vez que a variável λ_a saiu da base, o quadro (Q.IV.14.3) nos fornece o quadro inicial, assim sendo, passaremos a resolver o seguinte problema auxiliar:

minimizar $\quad z_j - \hat{c}_j = (u_1, u_o) \begin{bmatrix} (3 \ \ 2) x^j \\ 1 \end{bmatrix} - (3 \ \ 5) x^j$

sujeito à:

$x \in X.$

minimizar $\quad z_j - \hat{c}_j = (0,0) \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix} - (3x_1 + 5x_2)$

sujeito à:

$0 \leq x_1 \leq 4$

$0 \leq x_2 \leq 6 .$

minimizar $\quad z_j - \hat{c}_j = -3x_1 - 5x_2$

sujeito à:

$0 \leq x_1 \leq 4$

$0 \leq x_2 \leq 6 .$

A solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\hat{x}_1 = 4 \quad e \quad \hat{x}_2 = 6$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^2 = (4,\ 6)^T} \quad ,$$

portanto,

$$z_2 - \hat{c}_2 = -3\hat{x}_1 - 5\hat{x}_2 = -3.4 - 5.6 = -12 - 30 = -42$$

$$\boxed{z_2 - \hat{c}_2 = -42} \quad .$$

Como $z_2 - \hat{c}_2 < 0$, devemos gerar o vetor coluna λ^2 , associado à variável λ_2 , que entrará na base:

$$\lambda^2 = \left[z_2 - \hat{c}_2 \ ,\ B^{-1}\ [A\hat{x}^2, 1]^T \right]^T$$

onde

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3\ \ 2)\binom{4}{6} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Atualizando $[A\hat{x}^2,\ 1]^T$, obtemos:

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

logo,

$$\boxed{\lambda^2 = (-42,\ 24,\ 1)^T} \quad \rightarrow \quad (\text{Q.IV.14.3}) \quad .$$

O vetor coluna λ^2 será introduzido na última coluna do quadro (Q.IV.14.3), isto é:

					$\lambda^2 \downarrow$
v	1	0	0	0	-42
$\leftarrow$ s	0	1	0	18	24
λ_1	0	0	1	1	1

(Q.IV.14.4)

Após o pivoteamento e retirando a coluna de λ^2, obtemos o seguinte quadro:

v	1	42/24	0	756/24
λ_2	0	1/24	0	18/24
λ_1	0	-1/24	1	6/24

(Q.IV.14.5)

Iteração 2

Do quadro (Q.IV.14.5), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (42/24,\ 0)$$

$$\bar{v} = 756/24$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/24 & 0 \\ -1/24 & 1 \end{bmatrix} .$$

Passemos então, a resolução do seguinte problema auxiliar:

<u>minimizar</u> $\quad z_j - \hat{c}_j = (u_1, u_o) \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} - cx^j$

sujeito à: $\quad x \in X$.

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z_j - \hat{c}_j = (42/24,\ 0) \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix} - (3x_1 + 5x_2)$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 6 \quad .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z_j - \hat{c}_j = 42/24\ (3x_1 + 2x_2) - 3x_1 - 5x_2$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 6 \quad .$$

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z_j - \hat{c}_j = \frac{54}{24}\ x_1 - \frac{36}{24}\ x_2$$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 6 \quad .$$

A solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\hat{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_2 = 6$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^3 = (0,\ 6)^T} \ .$$

Desta forma, teremos:

$$z_3 - \hat{c}_3 = \frac{54}{24}\ \hat{x}_1 - \frac{36}{24}\ \hat{x}_2 = \frac{-36}{24}\ .\ 6 = \frac{-216}{24} = -9$$

$$\boxed{z_3 - \hat{c}_3 = -9 < 0} \ .$$

Como $z_3 - \hat{c}_3 < 0$, geraremos o vetor λ^3 dado por:

$$\lambda^3 = \left[z_3 - \hat{c}_3 \; ; \; B^{-1} \; [A\hat{x}^3, 1]^T\right]^T$$

onde

$$\begin{bmatrix} Ax^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \;\; 2)\binom{0}{6} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/24 & 0 \\ -1/24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/24 \\ 12/24 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^3 = (-9, \; 12/24, \; 12/24)^T} \quad \rightarrow \quad \text{(Q.IV.14.5)} \; .$$

Introduzindo o vetor λ^3 na última coluna do quadro (Q.IV.14.5), obtemos o seguinte quadro:

					λ^3 ↓
v	1	42/24	0	756/24	-216/24
λ_2	0	1/24	0	18/24	12/24
← λ_1	0	-1/24	1	6/24	12/24

(Q.IV.14.6)

Após o pivoteamento, obtemos o quadro (Q.IV.14.7), isto é:

v	1	1	18	36
λ_2	0	1/12	-1	1/2
λ_3	0	-1/12	1	1/2

(Q.IV.14.7)

$\boxed{\text{Iteração 3}}$

Do quadro (Q.IV.14.7), tiramos:

$$(u_1, u_o) = (1,\ 18)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & -1 \\ -1/12 & 1 \end{bmatrix} .$$

Passemos agora, a resolver o seguinte problema auxiliar:

<u>minimizar</u> $z_j - \hat{c}_j = (1,\ 18) \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix} - (3x_1 + 5x_2)$

sujeito à:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 6 \quad .$$

<u>minimizar</u> $z_j - \hat{c}_j = 18 - 3x_2 + 0x_1$

sujeito à:

$$0 \leq x_2 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 6 \quad .$$

A solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\hat{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_2 = 6$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^4 = (0,\ 6)^T} \ .$$

Assim,

$$z_4 = \hat{c}_4 = 18 - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_4 - \hat{c}_4 = 0} \ .$$

Como $z_4 - \hat{c}_4 = 0$, o quadro (Q.IV.14.7) é ótimo, assim, a solução ótima em termos das variáveis primais λ_j , são obtidas deste quadro, isto é:

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)^T$$

$$\boxed{\lambda^* = (0,\ 1/2,\ 1/2)^T} ,$$

onde a variável $\lambda_2^* = 1/2$ é associada à solução $\hat{x}^2 = (4,6)^T$, e a variável $\lambda_3^* = 1/2$ é associada à solução $\hat{x}^3 = (0,6)^T$, dando $z^* = 36$.

A solução ótima do problema original, será obtida através da combinação convexa dos pontos extremos $\hat{x}^2$ e $\hat{x}^3$, isto é:

$$x^* = \lambda_2^* \hat{x}^2 + \lambda_3^* \hat{x}^3$$

e

$$\lambda_2^* + \lambda_3^* = 1$$

ou $$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \\ x_2^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \\ x^*_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 6 \end{bmatrix} .$$

Assim, a solução ótima do problema original será $x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$, dando $z^* = 36$.

IV.15. Propriedade importante do algoritmo de decomposição

Consideremos o seguinte problema de programação linear com variáveis limitadas.

$$\text{minimizar} \quad z = cx \tag{IV.15.1}$$

$$\text{sujeito à:} \quad Ax = b \tag{IV.15.2}$$

$$\ell \leq x \leq u \ , \tag{IV.15.3}$$

onde c^T, x, ℓ, $u \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $u > \ell$ e A uma matriz com m linhas e n colunas.

Seja o conjunto:

$$X = \{x/x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ell \leq x \leq u \ ; \ u > \ell\} \quad .$$

Quando $X \neq \emptyset$ for compacto, então o problema (IV.15.1) - (IV.15.3) terá sempre uma solução finita.

Consideremos o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \ \left\{u_o + (u_1A - c)x\right\} \\ &\text{sujeito à:} \\ &\qquad x \in X \ . \end{aligned} \tag{IV.15.4}$$

Vamos supor que o valor da função objetivo no ótimo de (IV.15.4), seja $z_k - \hat{c}_k$, assim teremos:

$$z_k - \hat{c}_k = \min\left\{u_o + (u_1A - c)x\right\}$$

$$z_k - \hat{c}_k \leq u_o + (u_1A - c)x$$

$$z_k - \hat{c}_k \leq u_o + u_1 \, A \, x - cx \quad ,$$

como

$$Ax = b \quad ,$$

temos:

$$cx \leq u_o + u_1\, b - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$cx \leq u_1 b + u_o - (z_k - \hat{c}_k)$$

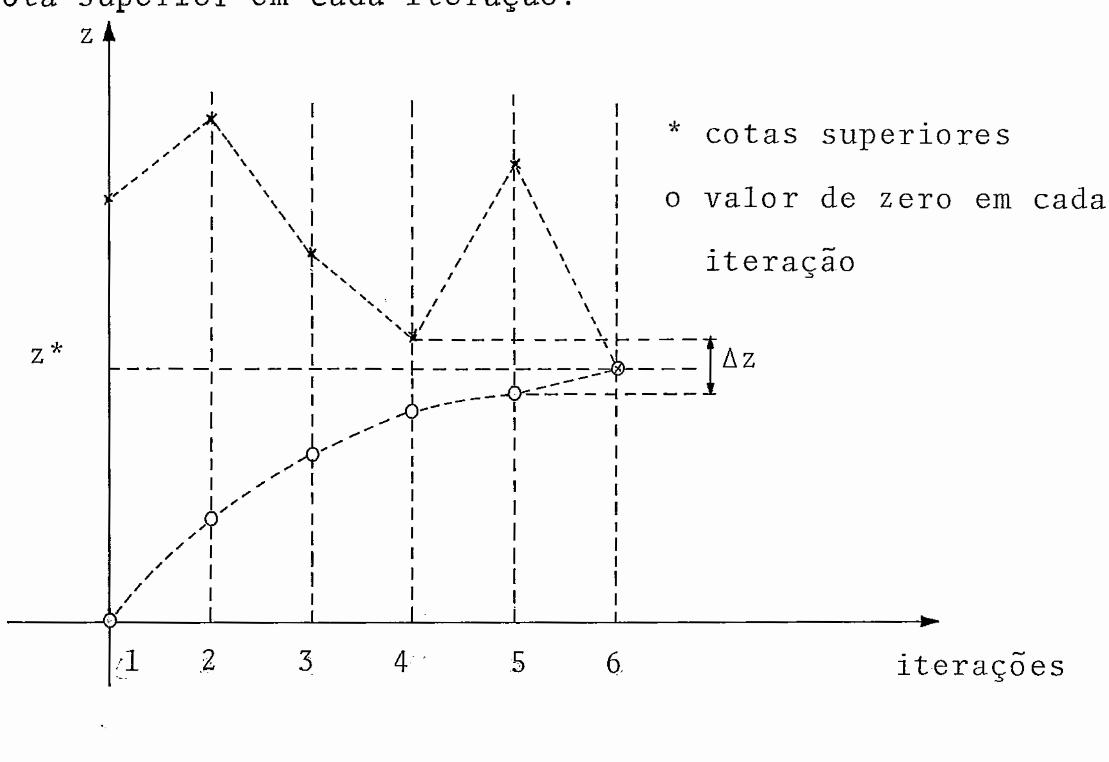
$$cx \leq (u_1, u_o)\binom{b}{1} - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$cx \leq c_B\, B^{-1}\binom{b}{1} - (z_k - \hat{c}_k)$$

$$\boxed{c_x \leq \overline{z} - (z_k - \hat{c}_k)} \quad . \qquad \text{(IV.15.5)}$$

Da expressão (IV.15.5) temos que o valor $\overline{z}$ é tirado do quadro ótimo e $z_k - \hat{c}_k$ é calculado. Assim sendo (IV.15.5) nos fornecerá um limite superior para o problema linear que queremos resolver. Esse limite pode ser calculado a cada iteração (resolução do problema auxiliar) quando utilizamos o algoritmo de decomposição.

Graficamente podemos esquematizar o cálculo dessa cota superior em cada iteração:



Caso quiséssemos interromper o algoritmo na 5ª iteração, poderíamos, graças ao conhecimento de Δ_z , ter uma idéia da distância em que nos encontraríamos do ótimo.

Do exemplo da seção IV.14, temos:

(1)

$$z_2 - \hat{c}_2 = 42$$

$$\bar{z} = c_B\ B^{-1} \binom{b}{1} = 0$$

assim, o limite superior, será:

$$cx \leq 0 - (-42) = 42 \quad \rightarrow \quad cx \leq 42 \ ,$$

portanto,

$$\boxed{z_{sup} = 42} \qquad e \qquad \boxed{\bar{z} = 0\ .}$$

(2) $z_3 - \hat{c}_3 = -216/24$

$$\bar{z} = c_B\ B^{-1}\ \bar{b} = 756/24 = 31{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = 31{,}5}$$

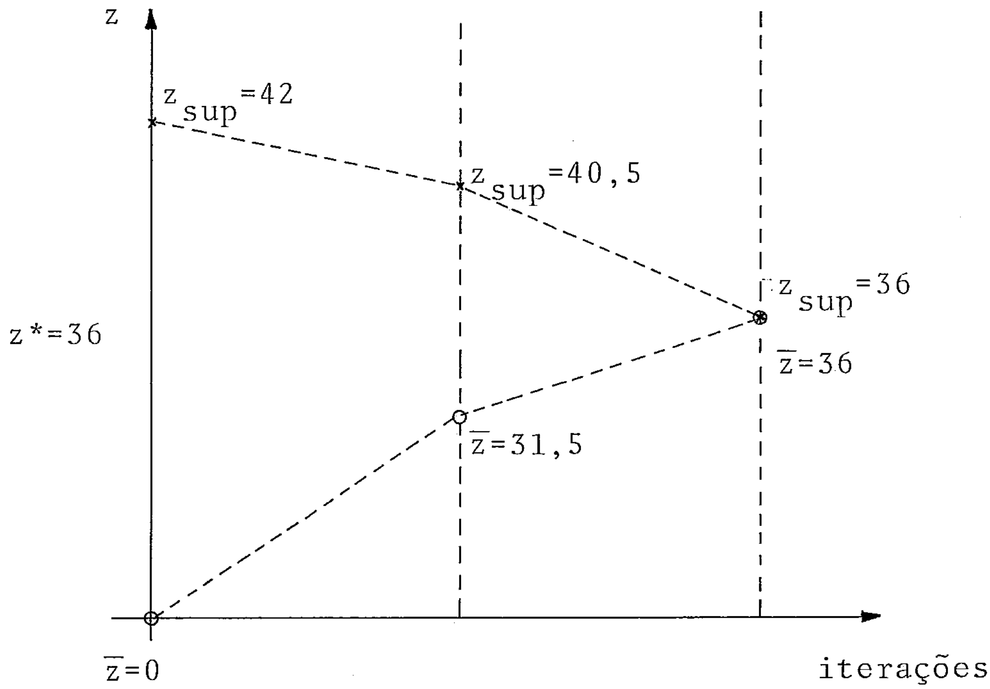
$$z_{sup} \rightarrow cx \leq \frac{756}{24} - \left(\frac{-216}{24}\right) = 40{,}5 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_{sup} = 40{,}5\ .}$$

(3) $z_4 - \hat{c}_4 = 18 - 18 = 0$

$$\bar{z} = 36 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = 36}$$

$$z_{sup} \rightarrow cx \leq 36 - 0 = 36 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_{sup} = 36\ .}$$

Graficamente, temos:



IV.16. Comparação entre os dois métodos

Teceremos a seguir, alguns comentários sobre os dois métodos apresentados neste capítulo:

(i) O método do simplex adaptado para as variáveis limitadas, passa de vértice em vértice do conjunto de soluções viáveis, ao passo que o de decomposição, pode trabalhar pelo interior desse conjunto de soluções viáveis.

Do exemplo da seção anterior, tínhamos:

$$\lambda_2^* = 1/2 \quad \text{associado a} \quad \hat{x}^2 = (4,6)^T$$

$$\lambda_3^* = 1/2 \quad \text{associado a} \quad \hat{x}^3 = (0,6)^T$$

e

$$z^* = 36 \quad .$$

A solução ótima do problema original será então:

$$x^* = 1/2\ \hat{x}^2 + 1/2\ \hat{x}^3$$

$$x^* = 1/2\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

$$\boxed{x^* = (2,6)^T}\ ,$$

dando:

$$\boxed{z^* = 36\ .}$$

Gráficamente teremos:

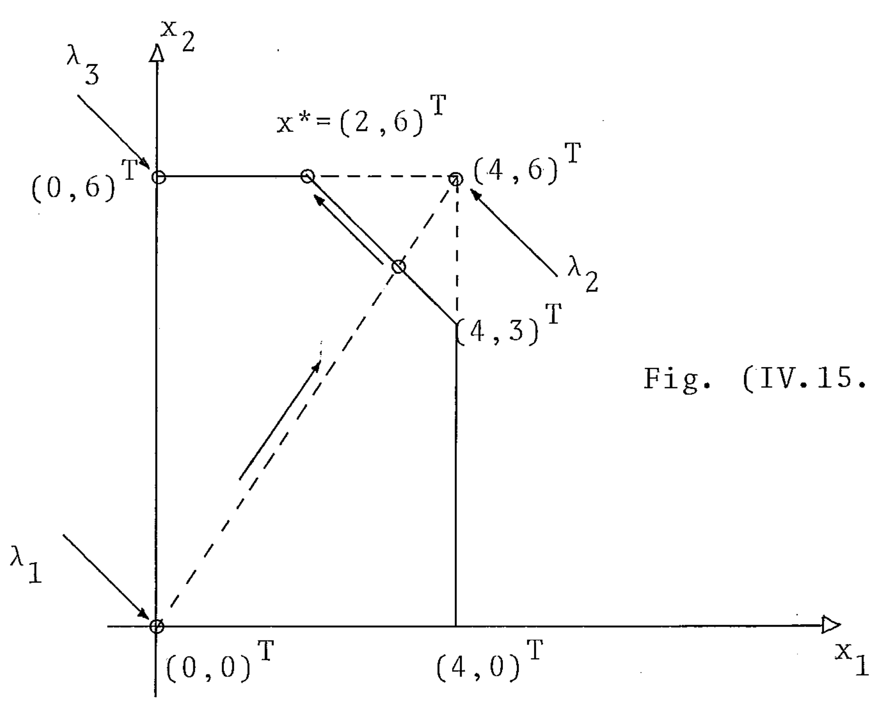


Fig. (IV.15.1)

(ii) O método de decomposição necessita para cada iteração todos os elementos da matriz A , pois ,temos que gerar a coluna que entrará na base , que será ou da forma $[Ax^j,1]^T$ ou $[Ad^j,0]^T$. É importante que a matriz A seja estocada em linhas e não em colunas, como no caso do simplex adaptado a variáveis limitadas, em memória auxiliar quando se quiser possuir um código computacional eficiente.

(iii) No método adaptado, quando se necessita reinverter a matriz básica, temos necessidade de realizar a operação $B^{-1} N$, que também é muito trabalhosa nos problemas de médio e grande porte, pois sabemos que:

$$\bar{x}_B = B^{-1} b - B^{-1} N \bar{x}_N ,$$

onde,

$$\bar{x}_j = u_j \quad \text{ou} \quad \bar{x}_j = \ell_j \quad , \quad j \in I_N .$$

O caso mais desfavorável é quando tivermos todos os $u_j \neq 0$, $j \in I_N$, pois teremos que buscar todas as colunas de N em memória auxiliar.

(iv) Como já foi sublinhado em (ii), logo acima, o armazenamento em memória auxiliar de A deve ser feito para o algoritmo do simplex adaptado em colunas,e para o algoritmo de decomposição em linhas.

(v) A solução dos problemas auxiliares quando u_j e ℓ_j, $j \in I_N$, forem inteiros, será inteira não acarretando erros de arredondamento.

(vi) O simplex sob forma revisada, no algoritmo adaptado, tem uma matriz inversa de ordem m, e no algoritmo de decomposição, $m+1$.

(vii) No caso de X ser compacto podemos ter uma cota superior do máximo de z, calculada a cada iteração do simplex, no método de decomposição. Algo importante quando o problema for de grande porte, pois poderíamos parar o processamento quando $\bar{z}$ e a menor cota de z, obtida até aquela iteração, diferirem abaixo de uma certa tolerância. Em alguns casos executamos inúmeras iterações para aumentar muito pouco o valor de $\bar{z}$, e em termos práticos, já poderíamos parar o processamento se conhecêssemos uma cota superior (boa) para z, algo só possível com o algoritmo de decomposição, quando X for um compacto em $\mathbb{R}^n$.

IV.17. Experiência Computacional

Consideremos a experiência computacional descrita em |[10]|. Foi desenvolvido neste trabalho, um programa linear para o algoritmo de decomposição em linguagem FORTRAN. O desempenho deste algoritmo será comparado com o algoritmo clássico, utilizando o MPS-TEMPO da Burroughs. Foram comparados tempos e número de iterações de cada algoritmo, para resolverem a mesma lista de problemas gerados aleatoriamente. Esses testes foram realizado no Burroughs 6700 do NCE da UFRJ.

A Tabela (IV.17.1) nos fornece alguns dados. Nos nove exemplos rodados, constando desta tabela, devemos esclarecer alguns pontos:

(i) O tempo de CPU (unidade aritmética de processamento) é maior para o algoritmo de decomposição do que para o algoritmo clássico, quando se aumenta o tamanho do exemplo. Devemos acrescentar que o MPS-TEMPO é um programa otimizado, com mais de cinco anos de implantação e inovações, além de sua programação ter sido feita para rodar somente no Burroughs, u-

exemplo	m	n	Algoritmo de Decomposição: tempo de CPU(seg.)	Algoritmo de Decomposição: tempo de E/S(seg.)	Algoritmo de Decomposição: iterações	Algoritmo de Decomposição: vértices gerados	Algoritmo clássico - MPS-TEMPO: tempo de CPU(seg.)	Algoritmo clássico - MPS-TEMPO: tempo de E/S(seg.)	Algoritmo clássico - MPS-TEMPO: iterações	Algoritmo clássico - MPS-TEMPO: iterações especiais
1	3	7	8,279	7,582	8	8	14,328	12,215	8	3
2	5	10	9,378	8,213	13	11	15,127	12,723	17	7
3	10	31	7,714	6,812	9	7	13,423	12,520	16	6
4	50	100	206,702	135,900	193	101	100,839	158,776	142	33
5	40	80	118,812	88,757	144	86	72,357	103,775	118	34
6	40	70	109,480	74,530	146	83	61,356	91,628	99	21
7	60	85	245,689	136,382	182	102	116,511	169,059	120	30
8	70	120	408,354	225,610	185	99	110,294	284,009	159	39
9	20	30	28,886	19,054	126	64	28,787	27,131	65	26

TABELA (IV.17.1)

tilizando todas suas vantagens específicas. Acreditamos que se o algoritmo de decomposição fosse assim programado, seu desempenho no que se refere ao tempo de CPU seria bem melhor.

(ii) Caso comparássemos o número de iterações dos dois métodos sem nenhuma análise rigorosa, poderia nos parecer que o algoritmo clássico, apresenta vantagem quando aumentamos o porte do exemplo, porém é importante notar que o número de vértices gerados em cada exemplo pelo algoritmo de decomposição foi sempre menor que o número de iteração do MPS-TEMPO. No MPS-TEMPO há também iterações especiais, nas quais se realizam algumas técnicas de otimização local, não sendo apenas um simples pivoteamento. Os vértices do algoritmo de decomposição são gerados pelos sub-problemas do tipo (I.7.1). Tomemos o exemplo 5 da tabela (IV.17.1), onde o número de iterações é 144, o número de vértices gerados, 86, e as iterações não ligadas aos problemas de geração de vértices são realizadas automáticamente no quadro do simplex sob forma revisada, pois,estão relacionadas com a entrada de variáveis de folga na base.

Devemos notar que o programa por nós desenvolvido, não foi otimizado e nenhuma técnica específica de esparsidade e pivoteamento foi aplicada.

CAPÍTULO V

TÉCNICA GUB - VARIÁVEIS GENERALIZADAS

V.1. Introdução:

Veremos neste capítulo, através de uma variação do método revisado do simplex, como resolver problemas lineares com (m+p) equações, sendo que, p destas têm a propriedade de que cada variável possui ao menos um coeficiente diferente de zero.

Consideremos o seguinte problema de programação linear:

minimizar x_o
sujeito à:

$$\text{m linhas}\left\{\; a^o x_o + \ldots + a^{n_o} x_{n_o} + a^{n_o+1} x_{n_o+1} + \ldots + a^{n_1} x_{n_1} + \ldots + a^{n_{p-1}+1} x_{n_{p-1}+1} + \ldots + a^{n_p} x_{n_p} = b \right. \tag{V.1.1}$$

$$\text{p linhas}\left\{\begin{array}{lr} x_{n_o} + \ldots + x_{n_1} & =1 \\ x_{n_1+1} \ldots x_{n_2} & =1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\ x_{n_{p-1}+1} + \ldots x_{n_p} & =1, \end{array}\right. \tag{V.1.2}$$

$$x_j \geq 0 \ , \quad \forall j \ ,$$

onde as colunas a^j e o vetor termo independente b, têm ambos m componentes.

Qualquer problema linear pode ser colocado nesta forma, dividindo cada equação pelo valor de b e escalonando as variáveis. Além disso, tanto os coeficientes diferentes de zero, como também o valor de b, são ambos positivos.

Apresentaremos o procedimento descrito por Dantzig e Slyke em |9|, que nada mais é que uma especialização do método do simplex. Este procedimento, resolve os problemas com estruturas semelhantes a (V.1.1) - (V.1.2), mantendo uma "base de trabalho" de dimensão reduzida $m \times m$. Esta "base de trabalho" é de vital importância, especialmente para problemas em que o número p é muito maior do que o número m. Para este caso, teremos uma redução considerável nos cálculos, e além disso, derivamos desta "base de trabalho", todos os elementos necessários para a realização de uma iteração do método do simplex, como por exemplo, os valores das variáveis básicas; os multiplicadores do simplex; a representação da coluna a entrar na base em termos das colunas básicas, etc.

Iniciaremos a descrição do método definindo o seguinte conjunto; seja S_i o i-ésimo conjunto formado pelos vetores coluna, em que o elemento unitário está na (m+i)-ésima posição. Em outras palavras, o conjunto S_1 é o conjunto formado pelos vetores coluna, nos quais o elemento unitário se encontra na (m+1)-ésima posição. O conjunto S_0 é o conjunto constituido pelos vetores coluna que possuem elementos nulos nas (m+1) à (m+p)-ésimas posições.

Os conjuntos S_i, $i = 1,\dots,p$, representam também as variáveis associadas às colunas contidas neles. Além disso, será necessário para o nosso estudo, representar a j-ésima coluna do problema (V.1.1) - (V.1.2) por $\bar{a}^j$, enquanto que a j-ésima coluna omitindo as p últimas componentes por a^j. Assim, a j-ésima coluna caracterizada por $\bar{a}^j$ ou a^j

possui, respectivamente, (m+p) ou m componentes. Podemos relacioná-las da seguinte forma:

$$\bar{a}^j = [(a^j)^T, 0, \ldots, 1, \ldots, 0]^T .$$

Vamos supor agora, que tenhamos para o sistema (V.1.1.) - (V.1.2), uma base inicial de dimensão (m+p)x(m+p), dada por:

$$\bar{B} = \left[\bar{a}^{j_1}, \bar{a}^{j_2}, \ldots, \bar{a}^{j_{m+p}}\right] .$$

Além disso, vamos supor também, que tenhamos sempre $\bar{a}^o = \bar{a}^{j_1}$. Assim, para o desenvolvimento da técnica GUB, precisamos de dois teoremas:

Teorema (V.1.1):

"Qualquer base viável para o problema (V.1.1) - (V.1.2), deve incluir ao menos uma coluna de cada conjunto S_i, $i = 0, \ldots, p$."

Teorema (V.1.2):

"O número de conjuntos contendo duas ou mais variáveis básicas é no máximo m-1."

Ver as demonstrações desses teoremas em |9| e |6|.

V.2. <u>Descrição do método</u>:

Vamos supor, que tenhamos inicialmente, uma base viável $\overline{B}$, para o problema (V.1.1) - (V.1.2), representada por:

$$\overline{B} = \left[\bar{a}^{j_1}, \bar{a}^{j_2}, \ldots, \bar{a}^{j_{m+p}}\right] \quad . \tag{V.2.1}$$

Esta base pode ser encontrada aplicando a técnica do algoritmo do simplex, e além disso é uma matriz de ordem $(m+p) \times (m+p)$. Uma vez que cada conjunto S_i , $i=1,..,p$, deve ter ao menos uma coluna em $\overline{B}$, podemos escolher em cada conjunto S_i , uma coluna básica e denominá-la "<u>coluna pivô</u>". A variável associada a esta coluna será a "<u>variável pivô</u>". Pelo que foi dito, é óbvio que o conjunto S_o não possui nenhuma coluna pivô. Em outras palavras, uma coluna pivô será aquela coluna que tiver um elemento unitário em uma das P últimas posições. Se considerarmos a coluna $\bar{a}^{k_i}$ como sendo a coluna pivô do conjunto S_i , $i = i,\ldots,p$, poderemos particionar a base $\overline{B}$, dada em (V.2.1), da seguinte maneira:

$$\overline{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{a}^{k_1} \cdots \bar{a}^{k_p} & & \bar{a}^{0} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{m\text{x}p} & \hat{B}_{m\text{x}m} \\ \hline I_{p\text{x}p} & C_{p\text{x}m} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{p colunas pivô}} & \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{(m-1) colunas não pivô}} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{A_{m}}\right\} \text{m linhas} \\ \left.\vphantom{I_{p}}\right\} \text{p linhas} \end{array} \tag{V.2.2}$$

(m+p)x(m+p)

coluna $\bar{a}^0$

A matriz A_{mxp} é uma matriz constituída pelas p colunas pivô de $\overline{B}$; a matriz I_{pxp} é uma matriz identidade de ordem p . Os m vetores da matriz C_{pxm} são ou vetores nulos, representando as colunas pertencentes ao conjunto S_o , ou vetores unitários. A (p+t)-ésima coluna de $\overline{B}$ pertence ao conjunto S_{r_t} , isto significa que o elemento unitário desta coluna é o seu r_t-ésimo elemento.

Agora, se cada uma das colunas pivô $\overline{a}^{k_i}$, for subtraída de cada uma das outras colunas básicas em seu conjunto S_i , a matriz C_{pxm} ficará reduzida a uma matriz nula. Desta forma, a matriz básica $\overline{B}$ torna-se uma matriz bloco triangular superior, e terá a seguinte representação:

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & O_{pxm} \end{array}\right] .$$

Vamos supor agora, que a matriz T , seja a matriz que multiplicando $\overline{B}$ à direita, executa esta subtração, de forma que teremos:

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & C_{pxm} \end{array}\right] T = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & O_{pxm} \end{array}\right] . \quad (V.2.3)$$

É fácil verificar, que a matriz T deverá ter a seguinte configuração:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I_{pxp} & -C_{pxm} \\ \hline O_{mxp} & I_{mxm} \end{array}\right]_{(m+p)x(m+p)} . \qquad (V.2.4)$$

Podemos desta forma, calcular o determinante da matriz T, isto é:

$$\det(T) = \det(I_{pxp}\ I_{mxm}) = 1 ,$$

logo, a matriz T é uma matriz não-singular,pois,seu determinante é diferente de zero, e além disso, é uma matriz quadrada de ordem $(m+p)x(m+p)$.

Sabemos que:

$$\bar{B}\ x_B = \bar{b} \quad , \qquad (V.2.5)$$

então, se

$$x_B = T\ y_B \quad , \qquad (V.2.6)$$

a relação (V.2.5) ficará:

$$\boxed{(\bar{B}\ T)\ y_B = \bar{b}} , \qquad (V.2.7)$$

onde

$$\bar{b} = (b^T, 1, \ldots, 1)^T ,$$

sendo b um vetor m-dimensional e $\bar{b}$, (m+p)-dimensional.

Denominaremos o sistema (V.2.7) "sistema transformado", assim, poderemos reescrevê-lo de outra maneira, isto é:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & 0_{pxm} \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_B^1 \\ \vdots \\ y_B^p \\ y_B^{p+1} \\ \vdots \\ y_B^{p+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (V.2.8)$$

Resolvendo o problema matricial (V.2.8), obtemos:

$$A_{mxp} \begin{bmatrix} y_B^1 \\ \vdots \\ y_B^p \end{bmatrix} + B_{mxm} \begin{bmatrix} y_B^{p+1} \\ \vdots \\ y_B^{p+m} \end{bmatrix} = b \quad ,$$

$$I_{pxp} \begin{bmatrix} y_B^1 \\ \vdots \\ y_B^p \end{bmatrix} + 0_{pxm} \begin{bmatrix} y_B^{p+1} \\ \vdots \\ y_B^{p+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Podemos ainda, colocá-lo de uma forma mais conveniente:

$$A_{mxp}\, y_B^i + B_{mxm}\, y_B^{i+j} = b \quad , \quad i = 1,\ldots,p \, , \quad j = 1,\ldots,m \, , \qquad (V.2.9)$$

e

$$I_{pxp}\, y_B^i = \alpha \quad , \quad i = 1,\ldots,p \, , \qquad (V.2.10)$$

onde α é um vetor coluna com p componentes iguais a um (1), isto é, $\alpha = (1,\ldots,1)^T$. Assim, de (V.2.10) tiramos:

$$\boxed{y_B^i = 1} \qquad , \quad i = 1,\ldots,p \quad . \qquad \text{(V.2.11)}$$

Como a matriz A_{mxp} é formada pelas colunas pivô a^{k_i}, o produto matricial $A_{mxp}\, y_B^i$ da equação (V.2.9) ficará:

$$A_{mxp}\, y_B^i = \sum_{i=1}^{p} a^{k_i}\, y_B^i = \sum_{i=1}^{p} a^{k_i} \quad .$$

Assim, a relação (V.2.9) ficará:

$$\sum_{j=1}^{p} a^{k_i}\, y_B^i + B_{mxm}\, y_B^{p+j} = b \qquad , \; j = 1,\ldots,m \quad ,$$

ou

$$\sum_{i=1}^{p} a^{k_i} + B_{mxm}\, y_B^{p+j} = b \qquad , \; j = 1,\ldots,m \quad .$$

Agora, se no sistema acima, transportamos todas as colunas pivô para o lado do termo independente, teremos:

$$B_{mxm}\, y_B^{p+j} = b - \sum_{i=1}^{p} a^{k_i} \qquad , \; j = 1,\ldots,m. \qquad \text{(V.2.12)}$$

Definindo:

$$d = b - \sum_{i=1}^{p} a^{k_i} \quad , \qquad \text{(V.2.13)}$$

e substituindo (V.2.13) em (V.12.12), obtemos:

$$B_{mxm}\, y_B^{p+j} = d \quad , \quad j = 1,\ldots,m \quad . \qquad \text{(V.2.14)}$$

Podemos agora, introduzir a seguinte notação: se $\bar{a}^j \in S_i$, isto é, se o elemento unitário da coluna $\bar{a}^j$ é o seu i-ésimo elemento, temos então:

$$D^j = \begin{cases} a^{k_i} & , \text{ se } j = k_i , \\ \\ a^j - a^{k_i} & , \text{ se } j \neq k_i , \end{cases} \qquad \text{(V.2.15)}$$

sendo a^{k_i} uma coluna pivô e a^j uma coluna básica mas não pivô. Uma vez que a matriz B_{mxm} foi obtida da matriz $\hat{B}_{mxm}$ subtraindo as colunas pivô, podemos definir a matriz B pelas suas colunas, isto é:

$$B = \{D^j / a^j \text{ é uma coluna básica mas não é uma coluna pivô}\} \qquad \text{(V.2.16)}$$

A matriz B é uma matriz quadrada de ordem (mxm) e será denominada "<u>base de trabalho</u>".

Das p últimas equações de (V.1.2), podemos tirar o valor das variáveis pivô em função das variáveis não-pivô, isto é:

$$x_{k_i} = 1 - \sum_{j \neq k_i} x_{n_{i-1}+j} \quad . \qquad \text{(V.2.17)}$$

Se substituirmos os valores das variáveis pivô x_{k_i}, dadas em (V.2.17), nas m primeiras equações de (V.1.1), produziremos um novo sistema denominado "sistema reduzido", que será representado por:

$$\sum_j D^j y_j = d \quad . \qquad \text{(V.2.18)}$$

A base de trabalho B, é uma matriz composta pelas colunas do sistema reduzido, desta forma, poderemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema V.2.1:

"A base de trabalho B, é uma base do sistema reduzido, definido por:

$$\sum_j D^j y_j = d \text{ ."}$$

Ver demonstração em |6|.

Até o momento, o que fizemos foi associar a cada base viável $\overline{B}$ do sistema original, um conjunto de colunas pivô $\left\{a^{k_i}\right\}$, e uma base de trabalho B de dimensão reduzida. Agora, passaremos, a demonstração de que cada iteração do método do simplex, para o problema original (V.1.1) - (V.1.2), será executada usando quantidades associadas com a base de trabalho B.

V.3. Cálculo dos multiplicadores do simplex

Dada uma base viável para o problema (V.1.1) - (V.1.2), $\overline{B}$. O multiplicador para esta base, será formado por um vetor linha constituido de duas partes, isto é, de um vetor linha $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$, cujas componentes estão associadas às m primeiras equações, e de um outro vetor linha $u = (u_1, \ldots, u_p)$, cujas componentes estão associadas às p últimas equações. Assim, o multiplicador associado à base $\overline{B}$, será um vetor linha $(\pi \mid u)$ com $(m+p)$ componentes, e além disso, satisfará a seguinte condição:

$$(\pi \mid u)\ \bar{B} = c_B \quad , \tag{V.3.1}$$

onde c_B é um vetor linha com (m+p) componentes, definido por:

$$c_B = (c_{\bar{a}^{j_2}},\ c_{\bar{a}^{j_3}},\ \ldots,\ c_{\bar{a}^{j_{m+p}}},\ c_{\bar{a}^{j_1}}) \quad ,$$

ou

$$c_B = (c_{\bar{a}^{j_2}},\ c_{\bar{a}^{j_3}},\ \ldots,\ c_{\bar{a}^{j_{m+p}}},\ c_{\bar{a}^{o}}) \quad ,$$

pois, $\bar{a}^{j_1} = \bar{a}^{o}$, logo,

$$\boxed{c_B = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1)}\ . \tag{V.3.2}$$

Assim, a equação (V.3.1), ficará:

$$(\pi \mid u)\ \bar{B} = c_B = (0,\ 0, \ldots,\ 1). \tag{V.3.3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (V.3.3), à direita por T , obtemos:

$$(\pi \mid u)\ \bar{B}\ T = c_B\ T = (0, \ldots,\ 1)\ T \quad ,$$

logo

$$(\pi \mid u)\ \bar{B}\ T = (0, \ldots,\ 1) \quad , \tag{V.3.4}$$

pois,

$$c_B\ T = (0, \ldots,\ 1) T = (0, \ldots, 1) \quad .$$

Vimos na relação (V.2.3), que o produto matricial $\bar{B}\ T$ pode ser escrito numa forma particionada, isto é:

$$\bar{B}\ T = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & 0_{pxm} \end{array}\right] ,$$

assim, a relação (V.3.4) ficará:

$$(\pi \mid u) \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & 0_{pxm} \end{array}\right] = (0,\ldots,1) \quad . \qquad \text{(V.3.5)}$$

Resolvendo o produto matricial dado acima, obtemos o seguinte sistema, cuja solução é facilmente obtida, uma vez que $\bar{B}\ T$ é uma matriz bloco triangular:

$$\begin{cases} \pi\ A_{mxp} + u\ I_{pxp} = \underbrace{(0,\ldots,\ 0)}_{p \text{ componentes nulas}} \quad , & \text{(V.3.6)} \\ \\ \pi\ B_{mxm} = \underbrace{(0,\ldots,\ 1)}_{m \text{ componentes}} \quad . & \text{(V.3.7)} \end{cases}$$

A relação (V.3.6), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\pi\ a^{k_i} + u_i = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,p \ , \qquad \text{(V.3.8)}$$

ou ainda,

$$\boxed{u_i = -\pi\ a^{k_i}} \quad , \quad i = 1,\ldots,p \quad . \qquad \text{(V.3.9)}$$

Uma vez que a base de trabalho B, é não-singular, podemos da relação (V.3.7) obter o valor do vetor linha π, isto é:

$$\pi B = (0,\ldots,1) \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{\pi = (0,\ldots,\ 1)\ B^{-1}.} \qquad \text{(V.3.10)}$$

Em outras palavras, o vetor π é a m-ésima linha da inversa da base de trabalho B^{-1}. Assim, obtido o vetor π, calculamos o vetor u através da relação (V.3.9).

V.4. Cálculo da coluna a entrar na base

Para determinarmos a coluna a entrar na base, devemos calcular os valores $z_j - c_j$ para as colunas não-básicas $\bar{a}^j$, isto é:

$$z_j - c_j = c_B\ \bar{B}^{-1}\ \bar{a}^j - c_j \quad .$$

Como $(\pi \mid u) = c_B\ \bar{B}^{-1}$ e $c_j = 0$, temos:

$$z_j - c_j = (\pi \mid u)\ \bar{a}^j \quad ,$$

além disso, sabemos que:

$$\bar{a}^j = \left[(a^j)^T\ ,\ 0,\ldots,\ \underbrace{1}_{\text{i-ésimo componente}}\ ,\ \ldots,\ 0\right]^T \quad ,$$

portanto:

$$z_j - c_j = (\pi \,\vdots\, u) \begin{bmatrix} a^j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \quad \text{se} \quad a^j \in S_i \ ,$$

$$z_j - c_j = \pi \ a^j + u_i \qquad , \quad \text{se} \quad a^j \in S_i \ . \tag{V.4.1}$$

Se

$$\boxed{\underline{\text{máx}} \ \{z_j - c_j\} = z_s - c_s \leq 0} \quad , \tag{V.4.2}$$

então, a solução encontrada é a solução ótima. Caso contrário, isto é, se

$$\boxed{\underline{\text{máx}} \ \{z_j - c_j\} = z_s - c_s > 0} \quad , \tag{V.4.3}$$

então, a coluna $\overline{a}^s$ entrará na base $\overline{B}$. Vamos supor então, que tenhamos:

$$\overline{a}^s \in S_\sigma \quad ,$$

isto é, o elemento unitário da s-ésima coluna da matriz $\overline{B}$,é o seu σ-ésimo elemento, assim, a coluna $\overline{a}^s$ terá o seguinte aspecto:

$$\overline{a}^s = \left[(a^s)^T . 0 \ldots \underbrace{1}_{\sigma\text{-ésimo elemento}} \ldots . \ 0\right]^T \quad .$$

Passemos agora, ao cálculo da coluna $\bar{a}^s$ em termos da base $\bar{B}$, isto é, atualizemos a coluna $\bar{a}^s$, ou seja:

$$\hat{a}^s = (\bar{B})^{-1}\ \bar{a}^s \quad . \tag{V.4.4}$$

Multiplicando ambos os lados da relação acima por $\bar{B}$, obtemos:

$$\bar{B}\ \hat{a}^s = \bar{B}(\bar{B})^{-1}\ \bar{a}^s \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{\bar{B}\ \hat{a}^s = \bar{a}^s} \quad . \tag{V.4.5}$$

Novamente, devemos fazer uma mudança de variável para reduzir a base $\bar{B}$ a uma matriz bloco triangular superior. Desta forma, se considerarmos:

$$\hat{a}^s = T\ z^s \quad , \tag{V.4.6}$$

e substituirmos este valor na relação (V.4.5), teremos:

$$\bar{B}\ (T\ z^s) = \bar{a}^s \quad ,$$

ou

$$(\bar{B}\ T) z^s = \bar{a}^s \quad . \tag{V.4.7}$$

Utilizando a relação (V.2.3), podemos escrever a relação (V.4.7) da seguinte maneira:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & 0_{pxm} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Z_1^s \\ \vdots \\ Z_p^s \\ Z_{p+1}^s \\ \vdots \\ Z_{p+m}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^s \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to \sigma\text{-ésimo elemento} \\ \text{da coluna } \bar{a}^s \\ \\ \end{array} \qquad \text{(V.4.8)}$$

Resolvendo o sistema matricial (V.4.8), obtemos:

$$A_{mxp} \begin{bmatrix} Z_1^s \\ \vdots \\ Z_p^s \end{bmatrix} + B_{mxm} \begin{bmatrix} Z_{p+1}^s \\ \vdots \\ Z_{p+m}^s \end{bmatrix} = a^s \quad , \qquad \text{(V.4.9)}$$

e

$$I_{pxp} \begin{bmatrix} Z_1^s \\ \vdots \\ Z_p^s \end{bmatrix} + 0_{pxm} \begin{bmatrix} Z_{p+1}^s \\ \vdots \\ Z_{p+m}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \to \sigma\text{-ésimo} \\ \text{elemento} \\ \text{de } \bar{a}^s \end{array} . \qquad \text{(V.4.10)}$$

Da relação (V.4.10), temos:

$$I_{pxp} \begin{bmatrix} Z_1^s \\ \vdots \\ Z_p^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto obtemos:

$$Z_i^s = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad \text{e} \quad i \neq \sigma \quad , \qquad \text{(V.4.11)}$$

e

$$Z_\sigma^s = 1 \quad . \qquad \text{(V.4.12)}$$

Substituindo (V.4.11) e (V.4.12) em (V.4.9), teremos:

$$A_{mxp} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Z^s_\sigma \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} Z^s_{p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ Z^s_{p+m} \end{bmatrix} = a^s \quad ,$$

ou

$$a^{k_\sigma} Z^s_\sigma + B \begin{bmatrix} Z^s_{p+1} \\ \vdots \\ Z^s_{p+m} \end{bmatrix} = a^s \quad , \qquad (V.4.13)$$

$$a^{k_s} + B \begin{bmatrix} Z^s_{p+1} \\ \vdots \\ Z^s_{p+m} \end{bmatrix} = a^s \quad ,$$

$$B \begin{bmatrix} Z^s_{p+1} \\ \vdots \\ Z^s_{p+m} \end{bmatrix} = a^s - a^{k_\sigma} \quad . \qquad (V.4.14)$$

Definindo o seguinte vetor:

$$\overline{D}^s = \begin{bmatrix} D^s_1 \\ \vdots \\ D^s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^s_{p+1} \\ \vdots \\ Z^s_{p+m} \end{bmatrix} \quad , \qquad (V.4.15)$$

a relação (V.4.14) ficará:

$$B\ \overline{D}^s = (a^s - a^{k_\sigma}) \quad , \qquad (V.4.16)$$

cuja solução será:

$$\boxed{\overline{D}^s = B^{-1}\,(a^s - a^{k_\sigma})} \quad . \qquad \text{(V.4.17)}$$

Da relação (V.4.16), podemos ainda escrever:

$$\boxed{(a^s - a^{k_\sigma}) = \sum_{i=1}^{m} D_i^s\,(a^{\eta_i} - a^{\gamma_i})} \quad , \qquad \text{(V.4.18)}$$

onde η_i indica o número da coluna correspondente à i-ésima coluna da base de trabalho, e denominamos γ_i o número da coluna associada a variável pivô.

Da relação (V.4.17), observamos que o vetor $\overline{D}^s$ é simplesmente a representação, em termos da base de trabalho B, do vetor $(a^s - a^{k_\sigma})$, que entrará na base do sistema reduzido. Assim, tendo a inversa da base de trabalho B^{-1}, podemos facilmente calcular o vetor $\overline{D}^s$.

Da relação (V.4.6), temos:

$$\hat{a}^s = \left[\begin{array}{c} \hat{a}_1^s \\ \vdots \\ \hat{a}_p^s \\ \hline \hat{a}_{p+1}^s \\ \vdots \\ \hat{a}_{p+m}^s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I_{pxp} & -C_{pxm} \\ \hdashline 0_{mxp} & I_{mxm} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \hline D_1^s \\ \vdots \\ D_m^s \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \sigma\text{-ésima linha} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{(V.4.19)}$$

Observamos de (IV.4.19), que o elemento $\hat{a}_i^s$ nada mais é do que o produto escalar da linha i da matriz T com o vetor Z^s. Além disso, a t-ésima coluna da matriz

- C_{pxm} será constituída do elemento -1 na r_t-ésima posição e 0 nas outras, ou será toda nula se $r_t = 0$. Podemos dizer que o r_t-ésimo elemento é -1, pois, a coluna $\bar{a}^{p+t}$ de $\bar{B}$ pertence ao conjunto S_{r_t}. Assim, quando tomamos o produto escalar da linha i da matriz $-C_{pxm}$ com $\bar{D}^s$, obtemos um produto diferente de zero quando $r_t = i$. A partir daí, podemos definir os seguintes conjuntos:

$$R(i) = \{t \ / \ t \in \{1,\ldots,m\},\ r_t = i\} \quad , \ i=i,\ldots,m \ .$$

Desta forma, os elementos $\hat{a}_i^s$ serão obtidos das seguintes relações:

$$\hat{a}_i^s = \begin{cases} -\sum\limits_{t\in R(i)} D_t^s & , \ 1 \leq i \leq p \ , \ i \neq \sigma \ , \\ 1 - \sum\limits_{t\in R(i)} D_t^s & , \ i = \sigma \ . \end{cases} \qquad \text{(V.4.20)}$$

$$\hat{a}_{p+t}^s = D_t^s \qquad , \qquad t = 1,\ldots,m \quad . \qquad \text{(V.4.21)}$$

Assim, se calcularmos $\bar{D}^s$ através da relação (V.4.17), facilmente iremos obter os valores $\hat{a}_i^s$ pelas expressões (V.4.20) e (V.4.21).

Podemos ainda, representar a coluna atualizada $\hat{a}^s$, em termos da base $\bar{B}$, pelos elementos $\hat{a}_i^s$ da seguinte forma:

$$\hat{a}^s = \sum_{i=1}^{m+p} \hat{a}_i^s \ \bar{a}^{j_i} \quad .$$

V.5. Escolha da coluna a sair da base

Para calcularmos a coluna que deverá sair da base, devemos primeiramente, obter os valores para as variáveis na base, $\bar{b}_i$. Esses valores são obtidos ou atualizando os valores da iteração anterior, ou calculando-os de uma maneira semelhante ao cálculo dos elementos $\hat{a}_i^s$.

Seja:

$$\bar{d} = (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_m) \quad , \tag{V.5.1}$$

onde:

$$\bar{d} = B^{-1} \left(b - \sum a^{k_i}\right) = B^{-1} d \quad . \tag{V.5.2}$$

Como:

$$\bar{d} = \bar{b} - \sum a^{k_i} \quad ,$$

temos,

$$\bar{b} - \sum a^{k_i} = \sum \bar{d}_i \left(a^{\eta_i} - a^{\gamma_i}\right) ,$$

$$\boxed{\bar{b} = \sum a^{k_i} + \sum \bar{d}_i \left(a^{\eta_i} - a^{\gamma_i}\right)} \quad . \tag{V.5.3}$$

Em vista disto, a coluna que deixará a base será obtida da mesma maneira que no método simplex, isto é,

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\hat{a}_r^s} = \min_{\hat{a}_i^s > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\hat{a}_i^s} \right\} \quad , \tag{V.5.4}$$

onde $\bar{b}_i$ é o valor atual da i-ésima variável básica.

Temos dois casos a considerar:

(i) se todos os elementos $\hat{a}_i^s \leq 0$, o problema (V.1.1.) - (V.1.2) tem solução ilimitada;

(ii) caso contrário, isto é, se existe ao menos um elemento $\hat{a}_i^s > 0$, então, a coluna r de $\overline{B}$, isto é, $\overline{a}^{j_r}$,deixará a base. Além disso, vamos supor que $\overline{a}^{j_r} \in S_\rho$, isto é, o elemento unitário da coluna $\overline{a}^{j_r}$ é seu ρ-ésimo elemento.

Podemos ainda, representar os valores das variáveis básicas em termos dos elementos $\hat{a}_i^s$, isto é:

$$\overline{b}_i = b_i - \theta\, \hat{a}_i^s \quad , \quad i = 1,\ldots,m+p \; ; \; i \neq r \; , \qquad \text{(V.5.5)}$$

$$\overline{b}_i = \theta \quad . \qquad \text{(V.5.6)}$$

V.6. Atualização da inversa da base de trabalho

Lembremos que, inicialmente tínhamos uma base $\overline{B}$ de ordem (mxp) x (m+p), da seguinte forma:

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & \hat{B}_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & C_{pxm} \end{array}\right] .$$

Nosso objetivo, é trabalhar com uma matriz de dimensão menor, assim, para reduzir a dimensão da base $\overline{B}$, devemos pósmultiplicá-la por uma matriz T, construída, de tal forma que, tenhamos sempre uma matriz bloco triangular superior, isto é:

$$\overline{B}\ T = \left[\begin{array}{c|c} A_{mxp} & B_{mxm} \\ \hline I_{pxp} & 0_{pxm} \end{array}\right] .$$

Após determinarmos a base de trabalho B de ordem mxm, passemos ao cálculo da coluna que entrará na base $\overline{B}$, $\overline{a}^{s} \in S_{\sigma}$, e finalmente, ao cálculo da coluna que sairá da base, isto é, $\overline{a}^{j_r} \in S_{\rho}$.

Em vista disto, temos que levar em consideração dois casos:

<u>Caso 1</u>:

<u>"A coluna $\overline{a}^{j_r}$ não é uma coluna pivô"</u>

Neste caso, a coluna que sairá da base $\overline{a}^{j_r}$, não é uma coluna pivô, portanto será, uma das m últimas colunas da base $\overline{B}$. Vamos supor que esta coluna seja a $(p+i_2)$-ésima coluna de $\overline{B}$. Se a coluna $\overline{a}^{j_r}$ for substituida pela coluna $\overline{a}^{s}$, e se a matriz básica for transformada em uma matriz bloco triangular superior, da forma $\overline{B}\ T$, então haverá uma única mudança na base de trabalho B. Em outras palavras, a coluna de B correspondente à coluna $\overline{a}^{j_r}$, isto é; $a^{j_r} - a^{k_\rho}$, é substituida por $a^{s} - a^{k_\sigma}$. Assim, para atualizarmos B^{-1} , devemos adicionar à inversa B^{-1} , a coluna $\overline{D}^s$:

$$\overline{D}^s = B^{-1} (a^s - a^{k_\sigma}) \quad , \qquad \text{V.6.1)}$$

e executarmos um pivoteamento ao redor do elemento pivô i_2 de $\overline{D}^s$. Além disso, todas as outras quantidades utilizadas na próxima iteração, também devem ser atualizadas. Por exemplo, as colunas a^{k_i} , que aparecem na equação (V.3.9) para os multiplicadores do simplex u_i , e os índices r_t que são usados para definir os conjuntos R(i). A única mudança que haverá, é justamente, em relação ao índice r_{i_2} que se tornará σ , assim como, o vetor coluna i_2 de C , que se tornará o σ-ésimo vetor unitário.

Caso 2

"A coluna $\overline{a}^{j_r}$ é uma coluna pivô"

Se a coluna a sair da base, $\overline{a}^{j_r}$, for uma coluna pivô, temos que levar em consideração dois subcasos:

Subcaso (a):

Vamos supor agora, que as colunas $\overline{a}^{j_r}$ e $\overline{a}^s$ pertençam a conjuntos direntes, isto é $S_\rho \neq S_\sigma$ ou $\rho \neq \sigma$. Neste subcaso, estamos substituindo uma coluna pivô do conjunto S_ρ por uma outra coluna $\overline{a}^s$, que não pertence a ele. Devemos encontrar uma nova coluna pivô para o conjunto S_ρ , após a coluna $\overline{a}^{j_r}$ sair da base, pois, pelo teorema (V.1.1), o conjunto S_ρ deve conter ao menos uma variável básica. Assim, ao menos uma das colunas da base $\overline{B}$ que não for pivô, deverá pertencer ao conjunto S_ρ . Devemos escolher qualquer uma dessas colunas por exemplo, a coluna $p + i_2$. Denominemos esta coluna por $\bar{a}^k$, onde $k = p + i_2$. Esta coluna se tornará pivô pela troca de $\bar{a}^{j_r} \equiv \bar{a}^{k_\rho}$. Ao realizarmos esta mudança, iremos obter como resultado uma matriz $\bar{B}$ na forma de bloco triangular superior, desde que as colunas da base de trabalho B , que têm a forma $a^{j_i} - a^{k_\rho}$ com j_i em S_ρ, sejam mudadas da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{l} a^{j_i} - a^{k_\rho} \leftarrow a^{j_i} - a^k \\ a^k - a^{k_\rho} \leftarrow a^{k_\rho} - a^k . \end{array}\right\} , \; j_i \in S_\rho , \; j_i \neq k, \qquad (V.6.2)$$

Essas substituições podem ser realizadas, multiplicando $a^k - a^{k_\rho}$ por -1 e adicionando os resultados a cada coluna $a^{j_i} - a^{k_\rho}$, $j_i \in S_\rho$. Na forma matricial, temos:

$$B \leftarrow B\,T_1 \quad , \qquad (V.6.4)$$

onde,

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha } i_2 \qquad (V.6.5)$$

Os elementos -1 aparecem nas colunas correspondentes a $\bar{a}^{j_i} \in S_\rho$. Uma que os elementos 1, na ρ-ésima linha de C , também aparecem nessas posições, a linha i_2 de T_1

é o negativo da linha ρ de C . A inversa B^{-1} é então, substituida por:

$$B^{-1} \leftarrow T_1^{-1} B^{-1} \quad . \tag{V.6.6}$$

Uma vez executada as transformações coluna, representadas por duas vezes T_1 , retornamos a matriz original B .

$$T_1^{-1} = T_1 \ , \tag{V.6.7}$$

de forma que:

$$B^{-1} \leftarrow T_1 B^{-1} \quad . \tag{V.6.8}$$

A mudança de a^{j_r} e a^k também induz o vetor a^{j_r} a ser substituido por a^k . Uma vez que esta mudança for realizada, a situação transforma-se numa situação semelhante àquela do caso 1, portanto, é só aplicar o procedimento usado no caso 1.

Subcaso (b):

Vamos supor agora, que as colunas $\bar{a}^{j_r}$ e $\bar{a}^s$ pertencem a um mesmo conjunto, isto é, $S_\rho = S_\sigma$, ou $\rho = \sigma$. Agora, a coluna pivô $\bar{a}^{j_r}$ pertencente ao conjunto S_ρ , será substituida por uma outra coluna também pertencente a esse conjunto. Se existem colunas pertencentes ao conjunto S_ρ que não sejam pivô, devemos tracar uma delas com a coluna $\bar{a}^{j_r}$, como descrito no subcaso (a) e então, utilizar as operações do caso 1. Se não existe nenhuma coluna que seja pivô pertencente ao conjunto S_ρ , então a coluna $\bar{a}^s$ substitui $\bar{a}^{j_r}$ na base $\bar{B}$. A nova base $\bar{B}$, deve ser colocada na forma bloco triangular superior, $\bar{B}\,T$. Uma vez que as m últimas colunas de $\bar{B}$ não contêm nenhuma coluna em S_ρ , a submatriz B, definida em (V.2.3), fica inalterada, isto é, a base de trabalho B , permanece a mesma. A única mudança é que a coluna a^s substitui a^{j_r} na partição superior esquerda da matriz $\bar{B}$.

Realizando as mudanças descritas acima, quando possível, simplificamos consideravelmente este caso. Quando a mudança for possível, vamos para o caso anterior, e quando não for, a base de trabalho permanece inalterada.

V.7. Fluxograma do Algoritmo

Após a atualização da inversa da base de trabalho, B^{-1} , começamos uma nova iteração. O fluxograma do procedimento é descrito na fig.(V.7.1).

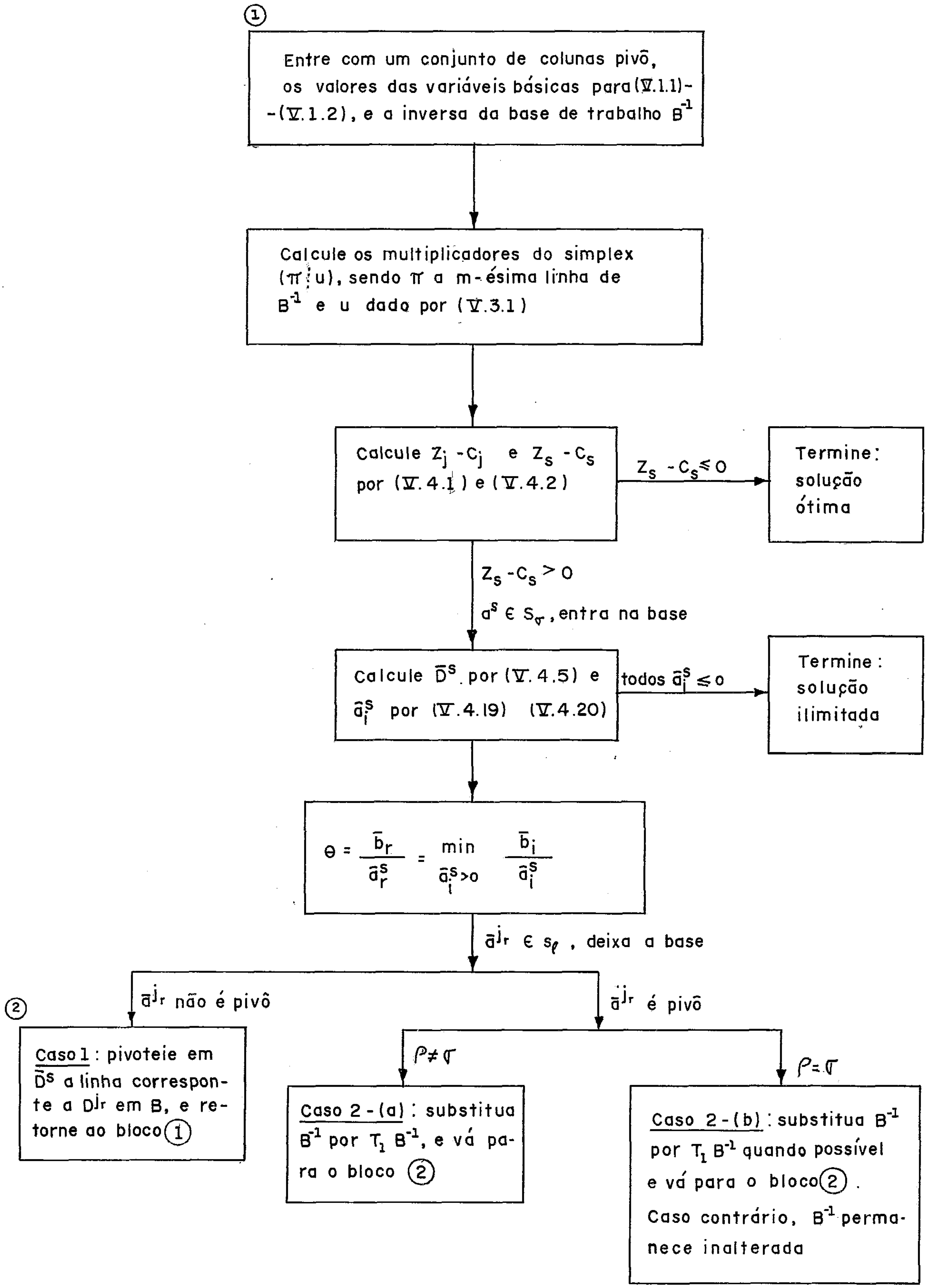

1
Entre com um conjunto de colunas pivô, os valores das variáveis básicas para (V.1.1)-(V.1.2), e a inversa da base de trabalho B^{-1}
Calcule os multiplicadores do simplex $(\pi \vdots u)$, sendo π a m-ésima linha de B^{-1} e u dado por (V.3.1)
Calcule $Z_j - C_j$ e $Z_s - C_s$ por (V.4.1) e (V.4.2)
$Z_s - C_s \leq 0$
Termine: solução ótima
$Z_s - C_s > 0$
$a^s \in S_\sigma$, entra na base
Calcule $\bar{D}^s$ por (V.4.5) e $\bar{a}_i^s$ por (V.4.19) (V.4.20)
todos $\bar{a}_i^s \leq 0$
Termine: solução ilimitada
$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_r^s} = \min_{\bar{a}_i^s > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_i^s}$
$\bar{a}^{j_r} \in s_\ell$, deixa a base
$\bar{a}^{j_r}$ não é pivô
$\bar{a}^{j_r}$ é pivô
2
Caso 1: pivoteie em $\bar{D}^s$ a linha correspondente a D^{j_r} em B, e retorne ao bloco 1
$\rho \neq \sigma$
$\rho = \sigma$
Caso 2-(a): substitua B^{-1} por $T_1 B^{-1}$, e vá para o bloco 2
Caso 2-(b): substitua B^{-1} por $T_1 B^{-1}$ quando possível e vá para o bloco 2. Caso contrário, B^{-1} permanece inalterada

Figura (V.7.1)

V.8. Exercício Resolvido

Este problema foi tirado de |9|.

Consideremos o seguinte problema de programação linear:

maximizar x_o

sujeito à:

S_o	S_1			S_2	S_3	S_4		S_5		
$\bar{a}^o$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	$\bar{a}^3$	$\bar{a}^4$	$\bar{a}^5$	$\bar{a}^6$	$\bar{a}^7$	$\bar{a}^8$	$\bar{a}^9$	b
1	0	2	0	3	4	5	1	-1	-12	15
1	1	-1	0	2	1	4	2	-3	6	7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1							1
				1						1
					1					1
						1	1			1
								1	1	1

$x_j \geq 0$, $j=1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Do quadro acima, temos que:

$\bar{a}^o \in S_o$

$\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3 \in S_1$

$\bar{a}^4 \in S_2$

$\bar{a}^5 \in S_3$

$\bar{a}^6$, $\bar{a}^7$ ε S_4
$\bar{a}^8$, $\bar{a}^9$ ε S_5 .

Além disso, o problema tem $(m+p) = (3+5) = 8$ equações, portanto, a base inicial será formada por 8 linhas e 8 colunas, e poderá ser, por exemplo, constituída pelas seguintes colunas: $\bar{a}^0$, $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$, $\bar{a}^3$, $\bar{a}^4$, $\bar{a}^5$, $\bar{a}^6$ e $\bar{a}^8$, logo,

$$\bar{B} = \left[\bar{a}^1,\ \bar{a}^2,\ \bar{a}^3,\ \bar{a}^4,\ \bar{a}^5,\ \bar{a}^6,\ \bar{a}^8,\ \bar{a}^o\right]$$

Dentre essas colunas, tomemos $\bar{a}^1$, $\bar{a}^4$, $\bar{a}^5$, $\bar{a}^6$ e $\bar{a}^8$, como sendo as colunas pivô, assim a base inicial na forma particionada será:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|ccc}
\bar{a}^1 & \bar{a}^4 & \bar{a}^5 & \bar{a}^6 & \bar{a}^8 & \bar{a}^2 & \bar{a}^3 & \bar{a}^o
\end{array} \\
\bar{B}' = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 3 & 4 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 4 & -3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & & & & & 1 & 1 & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & &
\end{array}\right]_{8\times 8}
\end{array}$$

Da base $\bar{B}$, observamos que:

$\bar{a}^2$, $\bar{a}^3$ ε S_1 e $\bar{a}^o$ ε S_o , portanto temos:

$$r_1 = r_2 = 1 \quad \text{e} \quad r_3 = 0 \quad .$$

Para colocarmos a matriz $\bar{B}$ na forma bloco triangular superior, devemos subtrair a coluna $\bar{a}^1$ das colunas $\bar{a}^2$ e $\bar{a}^3$. Para realizarmos tal operação, devemos multiplicar $\bar{B}$ à direita, por uma matriz T, dada por:

$$T = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & & & & & -1 & -1 & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & \\
 & & 0 & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right] \quad .$$

Assim, a matriz $\bar{B}\,T$ ficará:

$$\bar{B}\,T = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 3 & 4 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 5 & -3 & -2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 0 & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & &
\end{array}\right] \quad .$$

A base de trabalho B, é a matriz que fica na partição superior direita de $\bar{B}\,T$, isto é:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} = \left[\bar{a}^2-\bar{a}^1,\ \bar{a}^3-\bar{a}^1,\ \bar{a}^o-0\right] .$$

A inversa da base de trabalho B , será:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}_{3x3} .$$

$\boxed{\text{Iteração 1}}$

Cálculo dos multiplicadores do simplex:

Como vimos na expressão (V.3.10), o vetor π é a m-ésima linha da inversa da base de trabalho. Neste caso, é a terceira linha da inversa, isto é:

$$\boxed{\pi = (1/2 \ 1/2 \ 1/2)} .$$

Pela expressão (V.3.9), podemos calcular os multiplicadores u_i , $i = 1,\ldots,p$, isto é:

$$u_i = -\pi a^{k_i} , \quad i = 1,\ldots,5 .$$

Assim, teremos para as colunas pivô $\bar{a}^1$, $\bar{a}^4$, $\bar{a}^5$, $\bar{a}^6$ e $\bar{a}^8$:

$$u_1 = -\pi\ a^1 = -(1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = -1/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_1 = -1/2}$$

$$u_2 = -\pi\ a^4 = -(1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix} = -(3/2+2/2) = -5/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_2 = -5/2}$$

$$u_3 = -\pi\ a^5 = -(1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix} = -(4/2+1/2) = -5/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_3 = -5/2}$$

$$u_4 = -\pi\ a^6 = -(1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix} = -(5/2+4/2) = -9/2 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_4 = -9/2}$$

$$u_5 = -\pi\ a^8 = -(1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\end{bmatrix} = -(-1/2\ -3/2) = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_5 = 2}$$

portanto:

$$\boxed{u = (-1/2,\ -5/2,\ -5/2,\ -9/2,\ 2)}\ .$$

Calculemos agora, os $z_j - c_j$ associados às colunas não-básicas $\bar{a}^7$ e $\bar{a}^9$. Assim, da relação (V.4.1), temos:

$$z_j - c_j = (\pi \mid u)\begin{bmatrix}a^j\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \pi\ a^j + u_i \quad , \quad \text{se} \quad a^j \in S_i \quad ,$$

logo,

$$z_7 - c_7 = \pi\ a^7 + u_4 \quad , \text{ pois, } \quad a^7 \in S_4 \quad ,$$

$$z_7 - c_7 = (1/2\ \ 1/2\ \ 1/2)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-9/2) = (1/2+2/2)-9/2 = 3/2-9/2 = -6/2 = -3 \ ,$$

$$\boxed{z_7 - c_7 = -3} \quad ,$$

e

$$z_9 - c_9 = \pi\, a^9 + u_5 \quad , \text{ pois } \quad a^9 \in S_5 \; ,$$

$$z_9 - c_9 = (1/2\ 1/2\ 1/2) \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 = (-12/2+6/2)+2 = -3+2 = -1 \quad ,$$

$$\boxed{z_9 - c_9 = -1} .$$

Assim,

$$z_s - c_s = \min\{z_j - c_j\} = \min\{-3,-1\} = -3 \quad ,$$

portanto:

$$\boxed{z_s - c_s = z_7 - c_7 = -3} \quad .$$

Como $z_7 - c_7 < 0$, a coluna $\bar{a}^7$ entrará na base $\bar{B}$, e além disso, temos que $\bar{a}^7 \in S_4$.

<u>Cálculo da coluna $\hat{a}^7$:</u>

Da relação (V.4.17), temos:

$$\bar{D}^7 = B^{-1}\, (a^7 - a^6) \quad ,$$

pois, $\bar{a}^6 \in S_4$, logo:

$$\bar{D}^7 = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 5 \\ 2 \quad -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D}^7 = \begin{bmatrix} D_1^7 \\ D_2^7 \\ D_3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

Temos ainda: $\sigma = 4$; $p = 5$; $r_1 = r_2 = 1$, logo:

$$R(1) = \{t/t = 1,..,m \text{ , } r_t = 1\} \text{ ,}$$

$$R(1) = \{1,2\} \text{ .}$$

Aplicando as relações (V.4.19) e (V.4.20), temos:

$$\hat{a}_1^7 = -(D_1^7 + D_2^7) = -(-1/2 + 0) = 1/2 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_1^7 = 1/2$$

$$\hat{a}_2^7 = - D_2^7 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_4^7 = 0$$

$$\hat{a}_3^7 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_5^7 = 0$$

$$\hat{a}_4^7 = 1 - \sum_{t \varepsilon R(4)} D_t^7 = 1 - 0 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_6^7 = 1$$

$$\hat{a}_5^7 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_8^7 = 0$$

$$\hat{a}_{5+1}^7 = \hat{a}_6^7 = D_1^7 = -1/2 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_2^7 = -1/2$$

$$\hat{a}_{5+2}^7 = \hat{a}_7^7 = D_2^7 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_3^7 = 0$$

$$\hat{a}_{5+3}^7 = \hat{a}_8^7 = D_3^7 = -3 \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}_o^7 = -3$$

portanto:

$$\hat{a}^7 = (\hat{a}_1^7, \hat{a}_4^7, \hat{a}_5^7, \hat{a}_6^7, \hat{a}_8^7, \hat{a}_2^7, \hat{a}_3^7, \hat{a}_0^7)^T \text{ ,}$$

$$\boxed{\hat{a}^7 = (1/2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1/2,\ 0,\ -3)^T} \text{ .}$$

A representação da coluna $\hat{a}^7$ em termos da base $\overline{B}$, poderá também sèr calculada da seguinte maneira:

$$(a^7 - a^6) = \sum_{i=1}^{3} D_i^7 (a^{\eta_i} - a^{\gamma_i})$$

$$a^7 - a^6 = -1/2\ (a^2 - a^1) + 0\ (a^3 - a^1) - 3a^o$$

$$a^7 - a^6 = -1/2\ a^2 + 1/2\ a^1 - 3a^o$$

$$a^7 = -3a^o + 1/2\ a^1 - 1/2\ a^2 + a^6$$

ou

$$\boxed{\hat{a}^7 = \left[-3,\ 1/2,\ -1/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\right]^T ,}$$

$$a^7 = \left[\hat{a}_o^7,\ \hat{a}_1^7,\ \hat{a}_2^7,\ \hat{a}_3^7,\ \hat{a}_4^7,\ \hat{a}_5^7,\ \hat{a}_6^7,\ \hat{a}_8^7\right]^T .$$

<u>Cálculo da variável a sair da base</u>:

Em primeiro lugar, vamos calcular os valores das variáveis, isto é:

$$\overline{d} = B^{-1}\ (b - \sum a^{k_i}) \qquad ,$$

$$b - \sum a^{k_i} = \begin{bmatrix} 15 - (3 + 4 + 5 - 1) \\ 7 - (2 + 1 + 4 - 3 + 1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 11 \\ 7 - 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$B^{-1}(b - \sum a^{k_i}) = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Isto significa que:

$$\bar{b} - \sum a^{k_i} = 1/2\ (a^2 - a^1) + 0(a^3 - a^1) + 3a^o$$

$$\bar{b} - (a^1 + a^4 + a^5 + a^6 + a^8) = 3a^o + 1/2\ a^2 - 1/2\ a^1$$

$$\bar{b} = 3a^o - 1/2\ a^1 + 1/2\ a^2 + a^1 + a^4 + a^5 + a^6 + a^8$$

$$\boxed{\bar{b} = 3a^o + 1/2\ a^1 + 1/2\ a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^8}$$

ou

$$\boxed{\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T} ,$$

$$\theta = \min_{\hat{a}_i^7 > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\hat{a}_i^7} \right\} ,$$

como $\hat{a}_1^7 = 1/2$, $\hat{a}_4^7 = 1$ e $\bar{b}_1 = 1/2$, $\bar{b}_4 = 1$, temos:

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\hat{a}_1^7} , \frac{\bar{b}_4}{\hat{a}_4^7} \right\} = \left\{ \frac{1/2}{1/2} , \frac{1}{1} \right\} = 1$$

$$\boxed{\theta = 1} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\bar{b}_1}{\hat{a}_1^7} = \frac{\bar{b}_4}{\hat{a}_4^7}} .$$

Portanto, a primaira ou quarta coluna pivô de $\bar{B}$, deverá sair da base. A primeira ou a quarta coluna de $\bar{B}$ são, respectivamente, $\bar{a}^1$ ou $\bar{a}^6$, assim escolheremos $\bar{a}^6 \varepsilon S_4$ para sair da base, isto porque a base de trabalho B , permanecerá inalterada na próxima iteração.

A nova base, será então, formada substituindo a coluna $\bar{a}^6$ pela coluna $\bar{a}^7$, sendo que a base de trabalho B , permanece a mesma. Em outras palavras, teremos:

$$\bar{\bar{B}} = \left[\bar{a}^1, \bar{a}^4, \bar{a}^5, \bar{a}^7, \bar{a}^8 \;\vdots\; \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^0\right] .$$

<u>Atualização da inversa da base de trabalho</u>:

Como a coluna que saiu da base $\bar{a}^6$ é pivô, e a coluna que entrou na base $\bar{a}^7$ pertencem ao mesmo conjunto, isto é:

$$\bar{a}^6 , \bar{a}^7 \varepsilon S_4 ,$$

então, a base de trabalho B , permanece inalterada.

Iteração 2

<u>Multiplicador do simplex</u>:

Como B permanece a mesma, a sua inversa B^{-1}, também, isto é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} ,$$

assim, o vetor π continua sendo a terceira linha de B^{-1} :

$$\boxed{\pi = (1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)} \;.$$

Aplicando a expressão (V.3.9)

$$u_i = -\,\pi\, a^{k_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,p \;,$$

temos:

$$u_1 = -\pi\, a^1 = -(1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -1/2 \;\rightarrow\; \boxed{u_1 = -1/2}$$

$$u_2 = -\pi\, a^4 = -(1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = -(3/2+2/2) = -5/2 \;\rightarrow\; \boxed{u_2 = -5/2}$$

$$u_3 = -\pi a^5 = -(1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix} = -(4/2+1/2) = -5/2 \;\rightarrow\; \boxed{u_3 = -5/2}$$

$$u_4 = -\pi\, a^7 = -(1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = -(1/2+2/2) = -3/2 \;\rightarrow\; \boxed{u_4 = -3/2}$$

$$u_5 = -\pi\, a^8 = -(1/2 \;\; 1/2 \;\; 1/2)\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\end{bmatrix} = -(-1/2 \;-3/2) = 2 \;\rightarrow\; \boxed{u_5 = 2}$$

$$\boxed{u = (-1/2,\; -5/2,\; -5/2,\; -3/2,\; 2)} \;.$$

Calculemos agora, os $z_j - c_j$ associados às colunas não-básicas $\bar{a}^6$ e $\bar{a}^9$, isto é:

$$z_j - c_j = (\pi \,\vdots\, u)\begin{bmatrix}a^j\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \pi\, a^j + u_i \quad , \qquad \text{se} \quad a^j \in S_i \;,$$

portanto:

$$z_6 - c_6 = \pi\ a^6 + u_4 \qquad , \text{pois}, \quad a^6 \in S_4 \ ,$$

$$z_6 - c_6 = (1/2\ 1/2\ 1/2)\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3/2) = (5/2+4/2)-3/2 = 6/2 = 3,$$

$$\boxed{z_6 - c_6 = 3 \ ,}$$

$$z_9 - c_9 = \pi\ a^9 + u_5 \qquad , \text{pois}, \quad a^9 \in S_5 \ ,$$

$$z_9 - c_9 = (1/2\ 1/2\ 1/2)\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 = -\frac{6}{2} + 2 = -3 + 2 = -1 \ ,$$

$$\boxed{z_9 - c_9 = -1 \ .}$$

$$z_s - c_s = \min\{z_j - c_j\} = \min\{3,-1\} = -1 \quad ,$$

$$\boxed{z_s - c_s = z_9 - c_9 = -1} \ .$$

Uma vez que, $z_9 - c_9 < 0$, então, $\bar{a}^9 \in S_5$, entrará na base.

<u>Cálculo de $\hat{a}^9$</u>:

Através da equação (V.4.17), temos:

$$\bar{D}^9 = B^{-1}\ (a^9 - a^8) \ ,$$

pois, $\bar{a}^8 \in S_5$, portanto:

$$\overline{D}^9 = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12-(-1) \\ 6-(-3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{D}^9 = \begin{bmatrix} D_1^9 \\ D_2^9 \\ D_3^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$a^9 - a^8 = \sum_{i=1}^{3} D_i^9 \left(a^{\eta_i} - a^{\gamma_i}\right)$$

$$a^9 - a^8 = -5\,(a^2 - a^1) + 0(a^3 - a^1) - a^o$$

$$a^9 - a^8 = -5a^2 + 5a^1 - a^o$$

$$\boxed{a^9 = -a^o + 5a^1 - 5a^2 + a^8}$$

ou

$$\hat{a}^9 = (\hat{a}_o^9,\ \hat{a}_1^9,\ \hat{a}_2^9,\ \hat{a}_3^9,\ \hat{a}_4^9,\ \hat{a}_5^9,\ \hat{a}_7^9,\ \hat{a}_8^9)^T,$$

$$\boxed{\hat{a}^9 = (-1,\ 5,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^T}\ .$$

Calculemos agora, os valores das variáveis básicas:

$$\overline{d} = B^{-1}\,(b - \sum a^{k_i})$$

$$(b - \sum a^{k_i}) = \begin{bmatrix} 15 & -0 & -3 & -4 & -1 & +1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 & -2 & +3 \\ & & 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} - \sum a^{k_i} = \sum \bar{d}_i \, (a^{\eta_i} - a^{\gamma_i})$$

$$\bar{b} - (a^1+a^4+a^5+a^7+a^8) = 1(a^2-a^1)+0(a^3-a^1)+6a^o$$

$$\bar{b} = 6a^o + a^2 - a^1 + a^1 + a^4 + a^5 + a^7 + a^8$$

$$\boxed{\bar{b} = 6a^o + a^2 + a^4 + a^5 + a^7 + a^8 \;,}$$

ou

$$\boxed{\bar{b} = (6,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^T \,.}$$

Calculemos agora, a coluna que deixará a base:

$$\theta = \underline{\min} \left\{ \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}_1^9} \; , \; \frac{\bar{b}_5}{\hat{a}_5^9} \right\} = \underline{\min} \; (\frac{0}{5} \; , \; \frac{1}{1}) = 0 \;,$$

assim, $\bar{a}^1 \in S_1$, deixará a base.

Atualização de B^{-1}:

Uma vez que a coluna saindo da base $\bar{a}^1$ é uma coluna pivô, e como as colunas $\bar{a}^1 \varepsilon S_1$ e $\bar{a}^9 \varepsilon S_5$, pertencem a conjuntos diferentes, isto é, $S_1 \neq S_5$, então, precisamos trocar uma das 3 últimas colunas de $\bar{B}$ que pertence a S_1, juntamente com $\bar{a}^1$. Neste caso, a coluna $\bar{a}^1$ pode ser substituída pelas colunas $\bar{a}^2$ ou $\bar{a}^3$, pois, $\bar{a}^2, \bar{a}^3 \varepsilon S_1$. Vamos escolher arbitrariamente, a coluna $\bar{a}^2$. Assim, tínhamos a base de trabalho:

$$B = \left[a^2 - a^1,\ a^3 - a^1,\ a^o\right] ,$$

que se transformará em:

$$\tilde{B} = \left[a^1 - a^2,\ a^3 - a^2,\ a^o\right] .$$

Para realizarmos esta transformação, devemos multiplicar $a^2 - a^1$ por -1, e adicionarmos o resultado em $a^3 - a^1$, em outras palavras, devemos multiplicar a base de trabalho B, à direita por T_1, onde T_1 é dada por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Então,

$$\tilde{B} = B\ T_1 ,$$

portanto:

$$(\mathbb{B})^{-1} = (B\ T_1)^{-1} = T_1^{-1}\ B^{-1} ,$$

logo,

$$(\mathbb{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

Após realizarmos a troca das respectivas colunas, obtemos a seguinte matriz básica:

$$\overline{B} = \left[\overline{a}^2, \overline{a}^4, \overline{a}^5, \overline{a}^7, \overline{a}^8 \mid \overline{a}^1, \overline{a}^3, \overline{a}^0\right] .$$

Agora, devemos realizar a substituição da coluna $\overline{a}^1$ que saiu da base, pela coluna $\overline{a}^9$ que deverá entrar na base. Assim, devemos atualizar a coluna $a^9 - a^8$, pois, $a^8, a^9 \in S_5$. A coluna $a^9 - a^8$ substitui a coluna a^1 na base de trabalho $\tilde{\mathbb{B}}$. O novo vetor atualizado, será dado por: $(\mathbb{B})^{-1}(a^9 - a^8)$, isto é:

$$(\mathbb{B})^{-1}(a^9-a^8) = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12-(-1) \\ 6-(-3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{B})^{-1}(a^9 - a^8) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Pivoteamento este vetor na primeira linha, isto é, ao redor do elemento 5, obtemos uma nova inversa da base.

$$(\tilde{B})^{-1} = P\ (\bar{B})^{-1}$$

$$(\tilde{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -1/20 & 1/20 & -3/20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9/20 & 11/20 & 7/20 \end{bmatrix} .$$

A nova matriz básica será:

$$\bar{B} = \left[\bar{a}^2,\ \bar{a}^4,\ \bar{a}^5,\ \bar{a}^7,\ \bar{a}^8 \ \vdots\ \bar{a}^9,\ \bar{a}^3,\ \bar{a}^o\right] .$$

Passemos agora, ao cálculo dos novos valores das variáveis básicas, isto é:

$$(\tilde{B})^{-1}(b-\sum a^{k_i}) = \begin{bmatrix} -1/20 & 1/20 & -3/20 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9/20 & 11/20 & 7/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15\ -2\ -3\ -4\ -1\ +1 \\ 7\ +1\ -2\ -1\ -2\ +3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{B})^{-1}(b-\sum a^{k_i}) = \begin{bmatrix} -1/20 & 1/20 & -3/20 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9/20 & 11/20 & 7/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} - \sum a^{k_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} - (a^2 + a^4 + a^5 + a^7 + a^8) = 6a^o$$

$$\boxed{\bar{b} = 6a^o + a^2 + a^4 + a^5 + a^7 + a^8} \quad ,$$

ou

$$\boxed{\bar{b} = [6,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]^T} \quad .$$

Iteração 3

Cálculo dos multiplicadores do simplex:

O novo vetor π é a terceira linha da nova inversa da base de trabalho, $(\tilde{B})^{-1}$:

$$\boxed{\pi = (9/20,\ 11/20,\ 7/20)} \quad .$$

Calculemos agora, os multiplicadores u_i , dados por:

$$u_i = -\pi\, a^{k_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,p \quad ,$$

portanto:

$$u_1 = -\pi a^2 = -(9/20, 11/20, 7/20)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-18}{20} + \frac{11}{20} = \frac{-7}{20} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_1 = -7/20}$$

$$u_2 = -\pi a^4 = -(9/20, 11/20, 7/20)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-27}{20} - \frac{22}{20} = \frac{-49}{20} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_2 = -49/20}$$

$$u_3 = -\pi a^5 = -(9/20, 11/20, 7/20)\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-36}{20} - \frac{11}{20} = \frac{-47}{20} \rightarrow \boxed{u_3 = -47/20}$$

$$u_4 = -\pi a^7 = -(9/20, 11/20, 7/20)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{-9}{20} - \frac{22}{20} = \frac{-31}{20} \rightarrow \boxed{u_4 = -\ 31/20}$$

$$u_5 = -\pi a^8 = -(9/20, 11/20, 7/20)\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{9}{20} + \frac{33}{20} = \frac{42}{20} \rightarrow \boxed{u_5 = 42/20\ ,}$$

logo,

$$\boxed{u = (-7/20,\ -49/20,\ -47/20,\ -31/20,\ 42/20).}$$

<u>Cálculo dos $z_j - c_j$</u>

Passemos agora, ao cálculo dos $z_j - c_j$ associados às colunas não-básicas, $\bar{a}^1$ e $\bar{a}^6$:

$$z_1 - c_1 = \pi a^1 + u_1 = (9/20\ 11/20\ 7/20)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-7/20) = \frac{11}{20} - \frac{7}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{z_1 - c_1 = 1/5\ ,}$$

$$z_6 - c_6 = \pi a^6 + u_4 = (9/20\ 11/20\ 7/20)\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix} + (-31/20) = \frac{45}{20} + \frac{44}{20} - \frac{31}{20} = \frac{58}{20}$$

$$\boxed{z_6 - c_6 = \frac{58}{20}.}$$

Uma vez todos os $z_j - c_j \geq 0$, a solução obtida é ótima, isto é:

$$\boxed{b_{\text{ótimo}} = \bar{b} = (6,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^T .}$$

V.9. Método de Decomposição:

Veremos agora, uma extensão do algoritmo de decomposição para problemas do tipo GUB (Generalized Upper Bounding).

V.10. Formulação matemática do problema:

Escreveremos o problema do tipo GUB de uma maneira mais conveniente, isto é, consideremos o seguinte problema linear:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{V.10.1}$$

sujeito à:

$$Ax \leq b \tag{V.10.2}$$

$$\sum_{j \varepsilon J_p} x_j = 1 \quad , \quad p = 1,\ldots,P , \tag{V.10.3}$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n , \tag{V.10.4}$$

onde a matriz A é uma matriz com m linhas e n colunas, cujos elementos serão representados por a_{ij} . O vetor c é um vetor linha n-dimensional; x um vetor coluna n-dimensional; b um vetor coluna m-dimensional.

Representaremos os índices das variáveis através do seguinte conjunto:

$$J = \{1,\dots,n\} \quad .$$

Este conjunto, pode ser particionado em P sub-conjuntos disjuntos, isto é:

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \dots\dots \cup J_P \quad ,$$

e

$$J_1 \cap J_2 \cap \dots\dots\dots \cap J_P = \emptyset \quad .$$

Em outras palavras:

$$\bigcup_{p=1}^{P} J_p = J \quad ,$$

e

$$J_r \cap J_s = \emptyset \ , \qquad r \neq s \quad e \quad r,s \in J \ .$$

Vejamos agora, algumas definições:

Definição V.10.1:

"Qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça (V.10.3) e (V.10.4), será uma solução do problema (V.10.1) - (V.10.4)".

Definição V.10.2:

"Qualquer solução do problema que satisfaça (V.10.2), será considerada uma solução viável do problema original".

V.11. Problema relaxado:

A dificuldade do problema (V.10.1) - (V.10.4), se resume somente na restrição (V.10.2), assim, omitindo tal restrição, podemos decompor tal problema em P subproblemas independentes, tendo o seguinte aspecto:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \qquad (V.11.1)$$

sujeito à:

$$\sum_{j \varepsilon J_p} x_j = 1 \quad , \quad p = 1,\ldots,P \; , \qquad (V.11.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \; . \qquad (V.11.3)$$

A solução ótima do problema auxiliar (V.11.1) - (V.11.3), será obtida, tomando para cada sub-conjunto J_p, $p = 1,\ldots,P$, um índice j_o tal que:

$$c_{j_o} = \underline{\min}_{j \varepsilon J_p} \{c_j\} \quad . \qquad (V.11.4)$$

Atribuimos à variável x_{j_o} o valor $1(x_{j_o}=1)$, e o valor 0(zero) para todas as outras variáveis de cada sub-conjunto J_p.

A solução obtida será sempre inteira e satisfará as restrições (V.10.3) - (V.10.4) do problema original.

V.12. Nova formulação do problema:

As restrições (V.10.3) e (V.10.4) do problema inicial definem um poliedro convexo. Seja X o conjunto de seus pontos extremos, de forma que podemos defini-lo da seguinte maneira:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j \in J_p} x_j = 1, p=1\ldots P; \bigcup_{p=1}^{P} J_p = J;\ J_r \cap J_s = \emptyset, \forall r,s \in J, r \neq s;$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J = \{1,\ldots,n\}\} \ .$$

Podemos, em vista disto, reescrever o problema (V.10.1) - (V.10.4):

minimizar $z = cx$ (V.12.1)

sujeito à: $Ax \leq b$ (V.12.2)

$x \in X$. (V.12.3)

Resolveremos o problema (V.12.1) - (V.12.3), utilizando dualidade em programação inteira (0-1). Este problema será denominado problema primal , onde c é um vetor linha n-dimensional; x um vetor coluna n-dimensional; b um vetor coluna m-dimensional; A uma matriz com m linhas e n colunas e X o conjunto representando as estruturas especiais.

Podemos facilmente verificar que o conjunto poliédrico X é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, logo, é um conjunto compacto. Assim, qualquer ponto de X pode ser escrito como uma combinação convexa de seus pontos extremos, isto é:

$$\forall x \in X \rightarrow x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j \tag{V.12.4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{V.12.5}$$

$$\lambda_j \geq 0, \ j=1,\ldots,p \ , \tag{V.12.6}$$

onde os x^j são os vértices de X e λ_j as variáveis primais.

Substituindo (V.12.4), (V.12.5) e (V.12.6) no problema (V.12.1) - (V.12.3), obtemos um problema cuja solução já foi apresentada nos capítulos II e III. Em outras palavras, obtemos um problema definido da seguinte maneira:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} (cx^j) \lambda_j \tag{V.12.7}$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} (Ax^j) \lambda_j = b \tag{V.12.8}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \tag{V.12.9}$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j=1,\ldots,p \ , \tag{V.12.10}$$

onde λ_j são as variáveis primais e x^j , $j = 1,\ldots,p$, os pontos extremos do conjunto X , sendo $p = 2^n$.

Este problema será resolvido aplicando o método de Dantzig e Wolfe, sendo que, a única diferença está na escolha das variáveis da solução ótima do problema auxiliar, que neste caso, assumirão os valores 0 ou 1, sendo obtidas através da expressão (V.11.4).

V.13. Exemplo numérico:

O método exposto nas seções anteriores, poderá ser facilmente entendido, no caso em que tenhamos um problema de programação linear da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
\underline{\text{minimizar}} & z = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - x_6 \\
\text{sujeito à:} & \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \leq 2 \\
& -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 4 \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 \leq 3 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_3 + x_4 = 1 \\
& x_5 + x_6 = 1 \\
& x_j \geq 0 \ , \ j=1,2,3,4,5,6 \ .
\end{array}$$

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad c = (-3 \ 2 \ -4 \ 1 \ 5 \ -1) ,$$

e

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^T \ .$$

Podemos assim, reescrever o problema anterior, de uma maneira mais conveniente, isto é:

<u>minimizar</u> $z = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j$

$$Ax \leq b$$

$$\sum_{j \varepsilon J_1} x_j = 1 \quad , \quad J_1 = \{1,2\}$$

$$\sum_{j \varepsilon J_2} x_j = 1 \quad , \quad J_2 = \{3,4\}$$

$$\sum_{j \varepsilon J_3} x_j = 1 \quad , \quad J_3 = \{5,6\}$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad \forall j \varepsilon J \quad ,$$

onde:

$$J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$$

$$J = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} \quad ,$$

e

$$J_1 \cap J_2 \cap J_3 = \emptyset \quad .$$

Seja o seguinte conjunto:

$$X = \{x/x \ \varepsilon \ \mathbb{R}^6 \ ; \sum_{j \varepsilon J_1} x_j=1; \sum_{j \varepsilon J_2} x_j=1; \sum_{j \varepsilon J_3} x_j=1; \bigcup_{p=1}^{3} J_p = J; \bigcap_{p=1}^{3} J_p = \emptyset \ ;$$

$$x_j \geq 0, \ j \ \varepsilon \ J = \{1,2,3,4,5,6\} \ \} .$$

Desta forma, o problema primal ficará:

<u>minimizar</u> $z = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j$

sujeito à:

$$Ax \leq b$$

$$x \ \varepsilon \ X \quad .$$

Explicitando:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad z = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - x_6$$

sujeito à:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 \leq 3$$

$$x \in X \ .$$

Como o conjunto X é um conjunto compacto, podemos escrever qualquer ponto pertencente a ele, como uma combinação convexa de seus pontos extremos, isto é:

$$\forall x \in X \rightarrow \quad x = \sum_{j=1}^{p} x^j \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,p \ ,$$

onde x^j , $j = 1,\ldots,p$, são os vértices de X .

Substituindo esta expressão de x , no problema anterior, obtemos:

$$\underline{\text{minimizar}} \quad v = \sum_{j=1}^{p} \left[(-3 \ 2 \ -4 \ 1 \ 5 \ -1)x^j\right]\lambda_j$$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(1 \ 2 \ -1 \ 3 \ 1 \ -1)x^j\right]\lambda_j \leq 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(-1 \ 1 \ -4 \ -5 \ 2 \ 2)x^j\right]\lambda_j \leq 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(2 \ -3 \ 1 \ 1 \ -3 \ 1)x^j\right]\lambda_j \leq 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_1 \qquad\qquad = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,p \quad .$$

Acrescentando as variáveis de folga $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$, onde $s = (s_1,s_2,s_3)^T$, o problema acima ficará:

<u>minimizar</u> $v = \sum_{j=1}^{p} \left[(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1)x^j\right]\lambda_j$

sujeito à:

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(1\ 2\ -1\ 3\ 1\ -1)\ x^j\right]\lambda_j + s_1 \qquad = 2$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(-1\ 1\ -4\ -5\ 2\ 2)x^j\right]\lambda_j \qquad + s_2 \qquad = 4$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[(2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1)x^j\right]\lambda_j \qquad\qquad + s_3 \qquad = 3$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad\qquad = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \ , \quad j = 1,\ldots,p \quad ,$$

$$s \geq 0 \ .$$

Como não conhecemos "a priori" uma solução básica viável, utilizaremos o método do simplex sob forma revisada, iniciando com uma solução básica artificial e utilizando o método duas fases.

Acrescentaremos à restrição de convexidade $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, a variável artificial λ_a , ou seja:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a = 1 \quad .$$

A primeira fase do método, consiste em minimizar a função objetivo artificial, isto é:

<u>1ª Fase</u>

<u>minimizar</u> $\xi = \lambda_a$

sujeito à:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} \left[(1\ 2\ -1\ 3\ 1\ -1)x^j\right]\lambda_j + s_1 && = 2 \\
&\sum_{j=1}^{p} \left[(-1\ 1\ -4\ -5\ 2\ 2)x^j\right]\lambda_j + s_2 && = 4 \\
&\sum_{j=1}^{p} \left[(2\ -3\ 1\ 1\ -3\ 1)x^j\right]\lambda_j + s_3 && = 3 \\
&\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + \lambda_a && = 1
\end{aligned}$$

$\lambda_j \geq 0 \quad , \ j=1,\ldots,p \quad ,$

$s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \quad ,$

$\lambda_a \geq 0 \quad .$

Do problema acima, tiramos:

$$b = (2\ 4\ 3\ 1)^T$$

$$B = \left[e_{s_1},\ e_{s_2},\ e_{s_3},\ e_{\lambda_a}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto:

$$B = I_4 = B^{-1}$$

$$\xi_B = (c_{s_1}\ c_{s_2}\ c_{s_3}\ c_{\lambda_a}) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$\xi_B B^{-1} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\ I_4 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$\bar{\xi} = \xi_B\ B^{-1}\ b = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{b} = B^{-1}\ b = b = (2\ \ 4\ \ 3\ \ 1)^T$$

$$\xi_{s_1} = \xi_B\ B^{-1}\ e_1 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_2} = \xi_B\ B^{-1}\ e_2 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{s_3} = \xi_B\ B^{-1}\ e_3 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\xi_{\lambda_a} = \xi_B\ B^{-1}\ e_{\lambda_a} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\ .$$

Podemos desta forma, construir o seguinte quadro:

ξ	$[\bar{\xi}]$	$[\xi_{s_1}$	ξ_{s_2}	ξ_{s_3}	$\xi_{\lambda_a}]$
s_1					
s_2	$\bar{b}$			B^{-1}	
s_3					
λ_a					

Explicitando:

ξ	1	0	0	0	1
s_1	2	1	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0
s_3	3	0	0	1	0
λ_a	1	0	0	0	1

(Q.V.13.1)

Passemos agora, a resolução do problema auxiliar:

Problema Auxiliar:

$$\underline{\text{minimizar}}\ (u_1, u_o) \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix} - cx^j$$

sujeito à: $x \in X$.

Do quadro (Q.V.13.1), tiramos os seguintes resultados:

$$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 0\ 1)$$

$$B^{-1} = I \ ,$$

portanto:

$$\underline{\text{maximizar}}\ (0\ 0\ 0\ 1) \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 \\ 1 \end{bmatrix} - 0$$

sujeito à:

$$x^j \in X \ .$$

<u>maximizar</u> 1

sujeito à:

$$\begin{array}{llllll} x_1 + x_2 & & & = 1 \\ & x_3 + x_4 & & = 1 \\ & & x_5 + x_6 & = 1 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j=1,2,3,4,5,6 \ .$$

Qualquer vértice de X satisfaz a esse problema auxiliar, pois a função objetivo independe de x, isto é, a função objetivo é uma constante. Tomemos então, como solução os seguintes valores das variáveis:

$$\hat{x}_j = 0 \ , \ j = 1,2,3,4,5,6 \ ,$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T .}$$

Assim, $\hat{x}^1$ é uma solução do problema auxiliar, e além disso, a variável primal λ_1 estará associada a esta solução.

Passemos agora, ao cálculo do vetor λ^1 associado à variável λ_1, que deverá provavelmente entrar na base:

$$\lambda^1 = \left[(u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^1 \ ; \ B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T \quad ,$$

onde:

$$(u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^1 = 1$$

e

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = I_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

portanto,

$$\boxed{\lambda^1 = (1\ 0\ 0\ 0\ 1)^T} \quad \rightarrow \quad (Q.V.13.1)\ .$$

Adicionando o vetor gerado λ^1, ao quadro (Q.V.13.1), temos:

						$\lambda^1 \downarrow$
ξ	1	0	0	0	1	1
s_1	2	1	0	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0	0
s_3	3	0	0	1	0	0
$\leftarrow \lambda_a$	1	0	0	0	1	1

(Q.V.13.2)

Após o pivoteamento, eliminamos a linha que contem ξ, a coluna gerada λ^1 e introduzimos a linha que contem v, obtendo assim, o quadro inicial (Q.V.13.3):

v	0	0	0	0	0
s_1	2	1	0	0	0
s_2	4	0	1	0	0
s_3	3	0	0	1	0
λ_1	1	0	0	0	1

(Q.V.13.3)

Do quadro (Q.V.13.3), temos:

$\bar{v} = 0$

$(u_1, u_o) = (0\ 0\ 0\ 0)$

$B = B^{-1} = I_4$

$\bar{b} = (2\ 4\ 3\ 1)^T$.

Problema auxiliar:

maximizar $(u_1, u_o)\begin{bmatrix}Ax\\1\end{bmatrix} - cx$

sujeito à:

$x \in X$.

maximizar $(0\ 0\ 0\ 0)\begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6 \\ 1 \end{bmatrix} -(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ -1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$

sujeito à:

$x \in X$,

maximizar $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 + x_6$

sujeito à:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

$x_j \geq 0$, $j=1,2,3,4,5,6$.

De acordo com a regra de escolha do índice j_o, vista anteriormente, temos para cada subconjunto J_p :

$$c_{jo} = \max_{j \in J_p} \{c_j\} .$$

Assim, para o problema auxiliar, temos:

$$J_1 = \{1,2\}$$

$$c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_1, c_2\} = \underline{\text{máx}}\ \{3,-2\} = 3\ ,$$

portanto:

$$c_{jo} = c_1 = 3 \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$
$$\boxed{x_2 = 0}\ .$$

$$J_2 = \{3,4\}$$

$$c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_3, c_4\} = \text{máx}\ \{4,\ -1\} = 4\ ,$$

portanto:

$$c_{jo} = c_3 = 4 \rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$
$$\boxed{x_4 = 0}\ .$$

$$J_3 = \{5,6\}$$

$$c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_5, c_6\} = \underline{\text{máx}}\{-5,1\} = 1\ ,$$

portanto:

$$c_{jo} = c_6 = 1 \rightarrow \boxed{x_6 = 1}$$
$$\boxed{x_5 = 0.}$$

Desta forma, a solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\boxed{\hat{x}^2 = (1,\ 0\ ,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T\ .}$$

Calcularemos agora, $z_2 - \hat{c}_2$, isto é:

$$z_2 - \hat{c}_2 = 3\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 4\hat{x}_3 - \hat{x}_4 - 5\hat{x}_5 + \hat{x}_6 = 3 + 4 + 1 = 8 > 0$$

$$\boxed{z_2 = \hat{c}_2 = 8 .}$$

Como $z_2 - \hat{c}_2$ é positivo, devemos gerar o vetor λ^2 , associado à variável que entrará na base λ_2 :

$$\lambda^2 = \left[(u_1, u_o) \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^2 \; ; \; B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T ,$$

onde:

$$(u_1, u_o) \begin{bmatrix} Ax^2 \\ 1 \end{bmatrix} - c\hat{x}^2 = 8$$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = I_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^2 = (8 \ -1 \ -3 \ 4 \ 1)^T} \rightarrow \qquad (Q.V.13.3) \quad .$$

Introduzindo o vetor coluna λ^2 no quadro (Q.V. 13.3), obtemos:

						$\downarrow\lambda^2$
v	0	0	0	0	0	8
s_1	2	1	0	0	0	-1
s_2	4	0	1	0	0	-3
← s_3	3	0	0	1	0	4
λ_1	1	0	0	0	1	1

(Q.V.13.4)

Após o pivoteamento, temos:

v	-6	0	0	-2	0
s_1	11/4	1	0	1/4	0
s_2	25/4	0	1	3/4	0
λ_2	3/4	0	0	1/4	0
λ_1	1/4	0	0	-1/4	1

(Q.V.13.5)

Do quadro (Q.V.13.5), tiramos:

$\bar{v} = -6$

$(u_1, u_o) = (0\ 0\ -2\ 0)$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} .$$

<u>Problema auxiliar</u>:

$$\underline{\text{maximizar}}\ (0\ 0\ -2\ 0)\begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6 \\ 1 \end{bmatrix} -(-3\ 2\ -4\ 1\ 5\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

sujeito à:

$x \in X$ ..

$$\underline{\text{maximizar}}\ -2(2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6)-(-3x_1+2x_2-4x_3+x_4+5x_5-x_6)$$

sujeito à: $x \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}$ $-x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6$

sujeito à:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 1 \\ & x_3 + x_4 & = 1 \\ & & x_5 + x_6 = 1 \end{array}$$

$x_j \geq 0$, $j=1,2,3,4,5,6$.

Passemos agora, a resolução do problema acima:

$J_1 = \{1,2\}$

$c_{jo} = \underline{\text{máx}} \{c_1, c_2\} = \underline{\text{máx}} \{-1,4\} = 4$,

portanto,

$c_{jo} = c_2 = 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = 1}$.

$J_2 = \{3,4\}$

$c_{jo} = \underline{\text{máx}} \{c_3, c_4\} = \underline{\text{máx}} \{2,-3\} = 2$,

portanto:

$c_{jo} = c_3 = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 1}$ $\boxed{x_4 = 0}$.

$J_3 = \{5,6\}$

$c_{jo} = \underline{\text{máx}}\{c_5, c_6\} = \underline{\text{máx}} \{1,-1\} = 1$,

portanto:

$$c_{jo} = c_5 = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_5 = 1} \quad \boxed{x_6 = 0.}$$

Assim, a solução ótima do problema auxiliar, será:

$$\boxed{\hat{x}^3 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)^T}.$$

Calculemos $z_3 - \hat{c}_3$:

$$z_3 - \hat{c}_3 = -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - 3\hat{x}_4 + \hat{x}_5 - \hat{x}_6 \ ,$$

$$z_3 - \hat{c}_3 = 4 + 2 + 1 = 7 \ ,$$

$$\boxed{z_3 - \hat{c}_3 = 7\ .}$$

Como $z_3 - \hat{c}_3$ é positivo, devemos gerar o vetor coluna λ^3 associado à variável λ_3 , que deverá entrar na base:

$$\lambda^3 = \left[z_3 - \hat{c}_3 \ ,\ B^{-1}\begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T \ ,$$

onde:

$$z_3 - \hat{c}_3 = 7$$

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\begin{bmatrix} A\hat{x}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -19/4 \\ -5/4 \\ 9/4 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^3 = (7 \;\; 3/4 \;\; -19/4 \;\; -5/4 \;\; 9/4)^T} \quad \rightarrow \quad \text{(Q.V.13.5)} \; ;$$

Introduzindo o vetor gerado λ^3 no quadro (Q.V. 13.5), obtemos:

						λ^3 ↓
v	-6	0	0	-2	0	7
s_1	11/4	1	0	1/4	0	3/4
s_2	25/4	0	1	3/4	0	-19/4
λ_2	3/4	0	0	1/4	0	-5/4
← λ_1	1/4	0	0	-1/4	1	9/4

(Q.V.13.6)

Após o pivoteamento, obtemos o seguinte quadro.

v	-61/9	0	0	-11/9	-28/9
s_1	8/3	1	0	1/3	-1/3
s_2	61/9	0	1	4/9	19/9
λ_2	8/9	0	0	1/9	5/9
λ_3	1/9	0	0	-1/9	4/9

(Q.V.13.7)

Do quadro (Q.V.13.7), tiramos:

$\bar{v} = -61/9$

$(u_1, u_o) = (0\ 0\ -11/9\ -28/9)$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4/9 & 19/9 \\ 0 & 0 & 1/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{bmatrix} .$$

<u>Problema auxiliar</u>:

$$\underline{\text{maximizar}}\ (0\ 0\ -11/9\ -28/9) \begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6 \\ 1 \end{bmatrix} -(-3x_1+2x_2-4x_3+x_4+5x_5-x_6)$$

sujeito à:

$x \in X$.

$\underline{\text{maximizar}}\ -11/9(2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6)-28/9-(-3x_1+2x_2-4x_3+x_4+5x_5-x_6)$

sujeito à: $x \in X$.

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{maximizar}} & 5/9\ x_1 + 15/9\ x_2 + 25/9\ x_3 - 20/9\ x_4 - 12/9\ x_5 - 2/9\ x_6 - 28/9 \\ \text{sujeito à:} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_3 + x_4 = 1 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & x_j \geq 0\ ,\ j = 1,2,3,4,5,6 \quad . \end{array}$$

Passemos agora, ao cálculo da solução ótima do problema auxiliar:

$J_1 = \{1,2\} \rightarrow c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_1, c_2\} = \underline{\text{máx}}\ \{5/9, 15/9\} = 15/9$,

portanto:

$$c_{jo} = c_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = 1} \quad \boxed{x_1 = 0.}$$

$$J_2 = \{3,4\} \rightarrow c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_3, c_4\} = \underline{\text{máx}}\ \{25/9,\ -20/9\} = 25/9 \ ,$$

portanto:

$$c_{jo} = c_3 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 1} \quad \boxed{x_4 = 0.}$$

$$J_3 = \{5,6\} \rightarrow c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_5, c_6\} = \underline{\text{máx}}\ \{-17/9,\ -2/9\} = -2/9 \ ,$$

portanto:

$$c_{jo} = c_6 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_6 = 1} \quad \boxed{x_5 = 0 \ .}$$

Assim, a solução ótima deste problema auxiliar, será:

$$\boxed{\hat{x}^4 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T \ .}$$

Calculemos agora, $z_4 - \hat{c}_4$:

$$z_4 - \hat{c}_4 = 5/9\ \hat{x}_1 + 15/9\ \hat{x}_2 + 25/9\ \hat{x}_3 - 20/9\ \hat{x}_4 - 12/9\ \hat{x}_5 - 2/9\ \hat{x}_6 - 28/9$$

$$z_4 - \hat{c}_4 = 15/9 + 25/9 - 2/9 - 28/9 = 10/9 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_4 - \hat{c}_4 = 10/9.}$$

Como $z_4 - \hat{c}_4$ é positivo, devemos gerar coluna λ^4, associado à variável λ_4 que entrará na base:

$$\lambda^4 = \left[z_4 - \hat{c}_4 \; ; \; B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^4 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^T ,$$

onde:

$$z_4 - \hat{c}_4 = 10/9$$

e

$$\begin{bmatrix} A\hat{x}^4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} A\hat{x}^4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 4/9 & 19/9 \\ 0 & 0 & 1/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & -1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/9 \\ 4/9 \\ 5/9 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\boxed{\lambda^4 = (10/9 \;\; 0 \;\; 6/9 \;\; 4/9 \;\; 5/9)^T} \rightarrow \qquad (Q.V.13.7) .$$

Introduzindo o vetor coluna λ^4 no quadro (Q.IV. 13.7), temos:

						$\lambda^4 \downarrow$
v	-61/9	0	0	-11/9	-28/9	10/9
s_1	8/3	1	0	1/3	-1/3	0
s_2	61/9	0	1	4/9	19/9	6/9
λ_2	8/9	0	0	1/9	5/9	4/9
$\leftarrow \lambda_3$	1/9	0	0	-1/9	4/9	5/9

(Q.V.13.8)

Após o pivoteamento, temos:

v	-7	0	0	-1	-4
s_1	8/3	1	0	1/3	-1/3
s_2	299/45	0	1	26/45	9/5
λ_2	4/5	0	0	1/5	7/15
λ_4	1/5	0	0	-1/5	4/5

(Q.V.13.9)

Do quadro (Q.V.13.9), temos:

$\bar{v} = 7$

$(u_1, u_o) = (0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; -4)$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 26/45 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 7/15 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} .$$

<u>Problema auxiliar</u>:

$$\underline{\text{maximizar}} \quad (u_1, u_o)' \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - cx$$

sujeito à:

$$x \in X .$$

$$\underline{\text{maximizar}} \; (0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; -4) \begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5-x_6 \\ -x_1+x_2-4x_3-5x_4+2x_5+2x_6 \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6 \\ 1 \end{bmatrix} -(-3x_1+2x_2-4x_3+x_4+5x_5-x_6)$$

sujeito à:

$$x \in X .$$

$\underline{\text{maximizar}}$ $-(2x_1-3x_2+x_3+x_4-3x_5+x_6)-4-(-3x_1+2x_2-4x_3+x_4+5x_5-x_6)$

sujeito à:

$$x \in X \, .$$

$\underline{\text{maximizar}}$ $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 0x_6 - 4$

sujeito à:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 1 \\ x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,3,4,5,6 \; .$$

Passemos agora, ao cálculo da solução ótima do problema auxiliar:

$J_1 = \{1,2\}$

$c_{jo} = \underline{\text{máx}} \, \{c_1, c_2\} = \underline{\text{máx}} \, \{1,1\} = 1$,

portanto:

$$c_{jo} = c_1 = c_2 = 1 \quad .$$

Neste caso temos duas possibilidades:

$$\boxed{x_1 = 1} \quad \boxed{x_2 = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = 1 \, .}$$

$J_2 = \{3,4\} \rightarrow c_{jo} = \underline{\text{máx}} \, \{c_3, c_4\} = \underline{\text{máx}} \, \{3,-2\} = 3$,

portanto:

$$c_{jo} = c_3 = 3 \rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$
$$\boxed{x_4 = 0.}$$

$J_5 = \{5,6\} \rightarrow c_{jo} = \underline{\text{máx}}\ \{c_5, c_6\} = \underline{\text{máx}}\ \{-2, 0\} = 0$,

portanto:

$$c_{jo} = c_6 = 0 \rightarrow \boxed{x_6 = 1}$$
$$\boxed{x_5 = 0\ .}$$

Assim, teremos duas soluções ótimas para o problema auxiliar, isto é:

$$\boxed{\hat{x}^5 = (1,\ 0\ ,1,\ 0,\ 0,\ 1)^T\ ,}$$

ou

$$\boxed{\hat{x}^6 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T.}$$

Observamos que:

$$\hat{x}^5 = \hat{x}^2 \qquad \text{e} \qquad \hat{x}^6 = \hat{x}^4\ .$$

Calculemos agora, $z_5 - \hat{c}_5$ e $z_6 - \hat{c}_6$:

$$z_5 - \hat{c}_5 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 + 0\hat{x}_6 - 4 = 1 + 3 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\boxed{z_5 - \hat{c}_5 = 0}\ ,$$

e

$$z_6 - \hat{c}_6 = \hat{x}_1 + x_2 + 3\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 + 0\hat{x}_6 - 4 = 1 + 3 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\boxed{z_6 - \hat{c}_6 = 0 .}$$

Como $z_5 - \hat{c}_5 = 0$ e $z_6 - \hat{c}_6 = 0$, temos duas soluções ótimas: $\hat{x}^5$ e $\hat{x}^6$, isto é:

$$\boxed{\hat{x}^5 = \hat{x}^2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T} \quad ,$$

e

$$\boxed{\hat{x}^6 = \hat{x}^4 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T \ .}$$

A solução ótima do problema original será uma combinação convexa dos pontos extremos $\hat{x}^2$ e $\hat{x}^4$, isto é:

$$x^* = \lambda_2^* \hat{x}^2 + \lambda_4^* \hat{x}^4 \quad ,$$

e

$$\lambda_2^* + \lambda_4^* = 1 \quad ,$$

onde

$$\lambda_2^* = 4/5 \quad ,$$

e

$$\lambda_4^* = 1/5 \quad ,$$

portanto:

$$x^* = 4/5(1,0,1,0,0,1)^T + 1/5(0,1,1,0,0,1)^T \quad ,$$

$$x^* = (4/5,0,4/5,0,0,4/5)^T + (0,1/5,1/5,0,0,1/5)^T \quad ,$$

$$\boxed{x^* = (4/5,\ 1/5,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)^T} \quad ,$$

ou $\boxed{\begin{matrix} x_1^* = 4/5 \\ x_2^* = 1/5 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x_3^* = 1 \\ x_4^* = 0 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x_5^* = 0 \\ x_6^* = 1 \end{matrix}}$,

dando $\boxed{z^* = -7.}$

CAPÍTULO VI

UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA O PLANEJAMENTO DINÂMICO DE PLANTIOS

VI.1. Introdução

A inclusão deste capítulo neste trabalho, se fez necessário para apresentar o problema prático que deu origem a teoria desenvolvida no capítulo II.

O problema linear de ordenação (P.L.O.), surgiu ao se fazer um estudo sobre substituição de culturas, isto é, dada uma área ocupada com diferentes culturas de diferentes idades, desejamos plantar nesta área outras culturas. Assim, nosso objetivo será erradicar as culturas existentes para podermos plantar em seus lugares, as novas culturas. Em vista disto, descreveremos neste capítulo, uma aplicação da programação linear no planejamento para N anos de plantios de diferentes culturas.

Os principais fatores que provocam substituição de culturas, básicamente são:

a) características biológicas das culturas;
b) condições físicas de plantio da região, que devem ser adequadas as culturas;
c) condições de demanda, e portanto, do preço destes bens, tanto no mercado nacional, quanto no internacional;
d) e principalmente, das condições de crédito amarradas a determinados produtos, que geralmente são os exportáveis, pois,

aumentam a divisa do governo.

Para a implementação deste modelo de programação linear, consideramos importantes as seguintes hipóteses:

(i) estabelecer o início e o final de cada ano, respectivamente, como as épocas de plantio e de cômputo da receita líquida total;

(ii) considerar perenes as diferentes culturas;

(iii) fixar variações mensais para a mão-de-obra.

Estas considerações são válidas, visto este modelo, ser ainda, totalmente teórico e só poderemos alterá-las se encontrarmos dados numéricos, que representem quantitativamente o problema em questão.

Algumas dessas considerações fogem totalmente a realidade, como por exemplo, na hipótese (i) estabelecemos o início de cada ano como a época do plantio. Isto não ocorre na prática, pois, o plantio é característica de cada cultura, podendo ocorrer em qualquer época do ano.

É importante também frizarmos que culturas perenes são aquelas que exigem investimentos nos primeiros anos, mas têm altos retornos por hectare, a partir do segundo ou terceiro ano de plantio.

Outra observação que devemos ressaltar, é quanto as variações mensais para a mão-de-obra, pois isto nos permite uma representação melhor das diferentes intensidades do uso deste recurso, ao longo dos meses do ano, para as diversas culturas. Isto é muito importante, pois o modelo computa certas épocas em que a mão-de-obra se torna mais onerosa, especialmente quando a demanda é muito grande.

Além disso, existem dados que modelo utiliza, tipo referente às restrições anuais de mão-de-obra, de crédito, etc, as quais são estimativas de projeções. Em outras palavras, neste ponto o modelo sofre uma margem de erro maior, uma vez que estes dados são bastante conjunturais, podendo variar facilmente fora das tendências esperadas, devido às outras variáveis, dos quais, por sua vez, eles dependem.

O objetivo da programação do cultivo, é determinar as quantidades que se devem plantar e desativar, de cada cultura em cada ano, durante N anos, de tal maneira que o valor atual da receita líquida total, ao longo do horizonte de planejamento, seja máximo.

Respeitaremos neste modelo, as restrições relativas aos recursos produtivos, que básicamente são três: mão-de-obra, crédito e área disponível, cujos totais anuais serão especificados para cada ano do horizonte de planejamento.

VI.2. O modelo

Vamos supor, que antes do início do planejamento, tenhamos uma área S ocupada por P culturas com k anos de idade, $k=1,\ldots,n_p$, sendo n_p a idade máxima da cultura p. Assim, uma cultura p ocupará uma área antes do planejamento S_p^k, de modo que, a área total S seja a soma das áreas S_p^k, isto é:

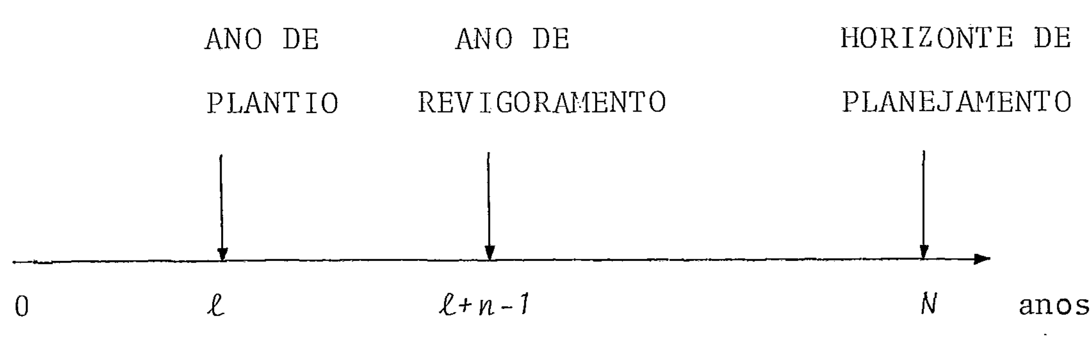
$$S = \sum_{p=1}^{P} S_p^k \qquad , \qquad k = 1,\ldots,n_p \ .$$

Por algum motivo, queremos erradicar essas culturas e plantar outras em seus lugares.

As P culturas ao serem erradicadas solicitam para isto, uma determinada mão-de-obra, t^k_{pm}, em homens/mês/hectare, e fornecem no final de cada ano uma receita líquida por hectare, r^k_p .

A cada ano que passa, as áreas restantes das culturas que serão desativadas, $y^k_{p\ell}$, $\ell = 1,\dots,N$, diminuirão de tamanho, sendo que em determinado momento, poderá ser mais rendoso erradicar de vez as culturas plantadas nessas áreas.

Vamos supor agora, que I culturas ocuparão essas áreas desativadas. Assim, consideremos uma cultura i qualquer plantada no início do ano ℓ , sendo que este cultura tem n anos de utilização, contados a partir do ano de plantio, e que, além disso, seja rentável até o ano $\ell + n - 1$. Em outras palavras, a cultura i que está substituindo uma outra cultura, deverá ser revigorada no ano $\ell + n - 1$, uma vez que esta cultura não poderá ser abandonada ou erradicada.



O ano de revigoramento é também denominado "horizonte de produção".

Vamos supor também, que o horizonte de planejamento seja de N anos. Desta forma, esta cultura ocupará uma determinada área em hectare, $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$, solicitando uma certa mão-de-obra para o seu plantio, t_{im}^{s}, em homens por mês por hectare , e fornecendo uma receita líquida por hectare, r_i^s, no final de cada ano.

É importante observarmos que a área em hectare, ocupada pela cultura i , $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$, será a diferença da área existente antes do planejamento, S_p^k, e a área restante, $y_{p\ell}^k$, ocupada pela cultura p .

Vamos partir da hipótese, que o horizonte de produção de cada área plantada, possa se estender até N anos após o plantio, ou seja, uma cultura i plantada no ano ℓ, será totalmente irradicada no N-ésimo ano após o plantio. Consideremos uma área com plantação de guaraná, sendo este guaraná plantado no quarto ano (ℓ=4) e tomemos o horizonte de planejamento de 10 anos (N=10). Desta forma, a área poderá render até o fim do décimo terceiro ano, pois, ℓ+N+1=4+10-1=13. Porém, se a área de plantio for abandonada cinco anos depois (n=5), ainda haverá produção nela até o oitavo ano, pois, ℓ+n-1 = 4+5-1=8.

O que fizemos nada mais foi do que contabilizar as conseqüências de todas as decisões tomadas ao longo dos N primeiros anos, respeitando naturalmente, as restrições dos recursos de produção desses anos, sem nos preocupar com as restrições do ano N+1 até o ano 2N-1.

A produtividade de uma área plantada pode decrescer depois de alguns anos. Assim, levando em consideração os recursos disponíveis, muitas vezes é mais conveniente, do ponto de vista econômico, abandonar partes de algumas culturas. Mesmo quando a produtividade não seja decrescente, o abandono de culturas poderá ser a opção mais viável. Como exemplo, vamos supor que uma cultura C tenha, depois de 6 anos de plantio, alto retorno por hectare e exija pouca mão-de-obra ao longo desses anos. Paralelamente podemos plantar e colher, com os recursos disponíveis, outras culturas que tenham várias e boas produções durante esses anos, mas que deverão ser abandonadas quando a cultura C exigir esses recursos, mesmo que os rendimentos por hectare dessas culturas iniciais não decresçam. A cultura C, que não exigiu nenhum recurso nesses 6 anos, além de seu plantio, terá alta rentabilidade a partir do sétimo ano, justificando amplamente o abandono daquelas culturas.

Desta maneira, para podermos equacionar nosso problema, definiremos primeiramente, as variáveis do modelo:

N → horizonte de planejamento, em anos.

I → número das diferentes culturas que serão plantadas.

P → número das diferentes culturas com k anos de idade no início do planejamento, e que serão erradicadas.

A_j → área total em hectare, disponível no ano j.

Q_j → crédito total em cruzeiros, disponível no ano j.

T_j^m → mão-de-obra total em homens/mês, disponível no mês m do ano j.

S_p^k → área em hectare, ocupada pela cultura p com k anos de idade, antes do início do planejamento.

t_{pm}^{k} → mão-de-obra em homens/mês/hectare , solicitada pela cultura p no mês m , quando a cultura tiver k anos de idade.

t_{im}^{s} → mão-de-obra em homens/mês/hectare , solicitada pela cultura i no mês m , quando a cultura tiver s anos de idade.

r_{p}^{k} → receita líquida por hectare, da cultura p com k anos de idade.

r_{i}^{s} → receita líquida por hectare, da cultura i com s anos de idade.

n_p → idade máxima em anos, da cultura p .

n_i → idade máxima em anos, da cultura i .

α → taxa anual de desconto.

n → tempo de utilização de uma cultura, em anos.

$c_{i\ell}^{\ell+n-1}$ → valor atual da receita líquida total por hectare, da cultura i plantada no ano ℓ , tendo n anos de utilização após o plantio, sendo revigorada no ano ℓ+n-1.

d_{pj}^{k} → valor atual da receita líquida total por hectare ,da cultura p que no início do planejamento tinha k anos de idade, e que será erradicada no ano j .

$x_{i\ell}^{\ell+n-1}$ → área em hectare , da cultura i plantada no ano ℓ, tendo n anos de utilização após o plantio, e renda frutos até o ano ℓ+n-1.

$y_{p\ell}^{k}$ → área restante em hectare, da cultura p no ano ℓ, que no início do planejamento tinha k anos de idade.

Nosso objetivo é maximizar o valor atual da receita líquida total, advinda de todas as áreas plantadas ao longo do horizonte de produção das culturas.

A expansão ou o abandono de uma cultura, baseia-se, neste modelo, na rentabilidade. Porém, a rentabilidade tem como primeira referência, o preço do produto no mercado. Assim, se basearmos o preço das culturas tendo como ano base o ano $\ell=1$, corremos sérios riscos de não retratarmos o quadro real da receita dos anos seguintes. Neste sentido devemos levar em consideração que o modelo só pode dar uma idéia geral da rentabilidade, e que não podemos ater à diferenças pequenas, ou mesmo tentar recalcular a rentabilidade das várias culturas, toda vez que apresentar uma variação no preço de cada uma delas. Isto é totalmente inviável, pois a decisão de abandonar ou expandir uma cultura, não pode jamais ser modificada facilmente, sob pena de termos que incorrer em custos muito mais elevados.

Os cálculos desta receita líquida não podem se estender além do horizonte de planejamento N, durante o qual, estaremos preocupados em não consumir mais recursos produtivos do que o disponível.

As restrições de produção são apenas para N anos do horizonte de planejamento. No entanto, uma cultura plantada no ano N, tendo n anos de utilização, poderá ser rentável até o ano $N+n-1$. É importante frisarmos que nenhum plantio poderá ser feito depois do ano N.

Consideremos o ano n_i, como sendo o horizonte de economicidade da cultura i .

A partir do ano n_i o plantio da cultura i não será mais conveniente do ponto de vista econômico. Assim, n_i é considerado a idade máxima, em anos, da cultura i e será definido da seguinte maneira:

$$n_i = \text{máx } \{s / r_i^s > 0 \quad \text{e} \quad r_i^q \leq 0 \quad \text{para} \quad q > s\} \quad .$$

A escolha do horizonte N depende dos valores de n_i , isto é, depende das idades máximas das culturas. No caso de todas as culturas serem anuais, não há sentido em ter $N > 1$. De modo geral, devemos permitir um horizonte N que propicie decisões mais precisas no primeiro ano, tendo em vista as iterações destas decisões com todas as decisões futuras; se N for grande, teremos valores menos distorcidos pelas possíveis distorções devidas a não consideração das limitações dos recursos produtivos além do ano N . Desta forma o horizonte de planejamento N deverá pertencer sempre ao seguinte intervalo:

$$\boxed{n_i \leq N \leq \infty} \quad .$$

VI.3. Função Objetivo

Dividiremos nosso estudo em duas partes a primeira se refere às culturas plantadas no ano ℓ , e a segunda, às culturas com k anos de idade no início do planejamento.

Vamos considerar primeiramente, uma cultura i plantada no ano ℓ , tendo n anos de utilização após o plantio e com boa rentabilidade até o ano $\ell+n-1$, quando será revigorada.

Tomemos, por exemplo, o ano j , para o qual devemos considerar as culturas plantadas antes e no decorrer dele, e que ainda não foram abandonadas.

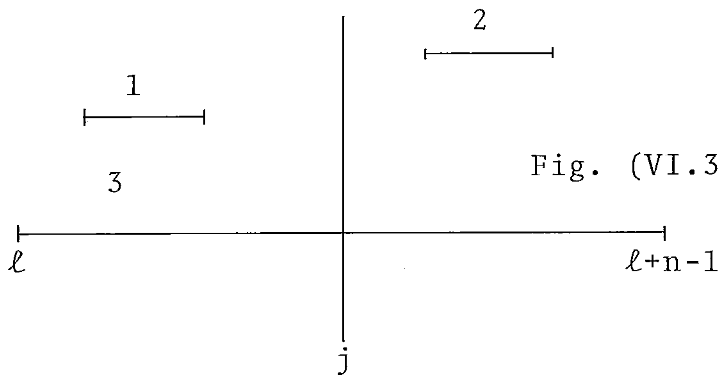


Fig. (VI.3.1)

Vejamos os exemplos apresentados na figura acima. A cultura 1 não será levada em consideração, pois, foi plantada e abandonada antes do ano j . O mesmo acontece com a cultura 2, isto é, não será levada em consideração neste estudo, pois, foi plantada e abandonada após o ano j . Já o estudo da cultura 3 nos interessa, pois, foi plantada antes do ano j e continua produzindo após o ano j , de forma que teremos sempre, para culturas nesta situação, as seguintes condições:

$$\begin{cases} j \geq \ell \\ \ell+n-1 \geq j \end{cases} ,$$

ou

$$\begin{cases} j \geq \ell \\ n \geq j-\ell+1 \end{cases} .$$

Assim, o tempo de utilização da cultura 3 deverá ser no mínimo igual a $j-\ell+1$ anos. Sendo n o tempo de utilização de uma cultura, então, deverá ser limitado pela idade máxima desta cultura, isto é, $n \leq n_i$, uma vez que n_i é uma característica da cultura. Resumindo: o tempo n deverá pertencer ao seguinte intervalo:

$$\boxed{j-\ell+1 \leq n \leq n_i \ ,}$$

onde ℓ é o ano de plantio, n_i a idade máxima da cultura i, e j o ano em estudo.

Estabelecemos inicialmente, que podemos plantar uma cultura qualquer até o ano N , isto é, até o horizonte de planejamento e desta forma, o valor do ano de plantio e, deverá pertencer ao seguinte intervalo:

$$\boxed{1 \leq \ell \leq N} \ .$$

Uma cultura i plantada num ano próximo do horizonte de planejamento N , tendo no máximo n_i anos de vida, poderá ser rentável além deste ano. Entretanto, como não devemos nos preocupar com as restrições dos anos $N+1$ até $2N-1$, precisamos definir para cada cultura, o seguinte valor:

$$\boxed{\overline{n}_i = \underline{\min} \{N-\ell, \ n_i\}} \ . \qquad \text{(VI.3.1)}$$

Para esta cultura, o tempo de utilização após o plantio, deverá ser no máximo igual a $\overline{n}_i$, de forma que teremos para $j = \ell = 1$,

$$\boxed{1 \leq n \leq \overline{n}_i} \ .$$

A cultura i ocupará uma área $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$, onde os índices i, ℓ e $\ell+n-1$ representam respectivamente, a cultura, o ano do plantio e o ano de seu revigoramento. Além disso, esta cultura fornecerá no final do ano ℓ , uma receita líquida por hectare, r_i^s , onde o expoente s representa a idade da cultura, isto é, há quantos anos foi plantada, e que no presente momento é representado por $s=1$.

Esta receita líquida leva em consideração os custos de mão-de-obra e outras despesas. Para efeito do cálculo do valor atual da receita ou despesa, partimos sempre da hipótese de que elas ocorrerão sempre no final de cada ano.

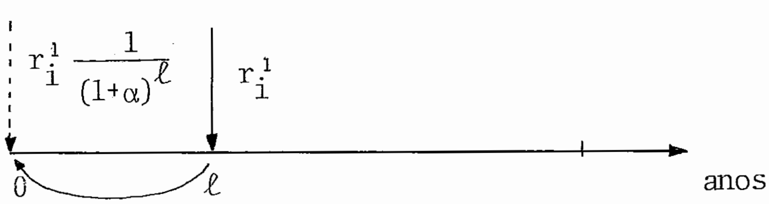
Nosso objetivo é obter o máximo do valor atual da receita líquida total, ao longo do horizonte de planejamento.

Desta forma, no final do ano de plantio ℓ , a cultura i fornecerá uma receita líquida por hectare, r_i^1 :

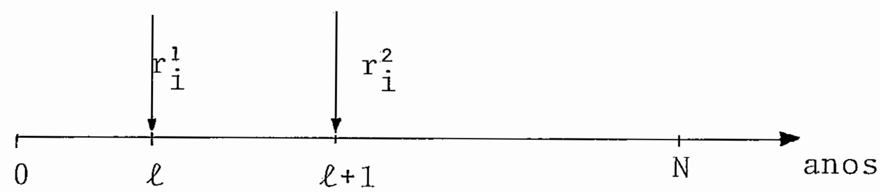
O valor atual desta receita será:

$$r_i^1 \frac{1}{(i+\alpha)^{\ell}} \quad , \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,I \ , \\ \ell = 1,\ldots,N \ , \end{array}$$

onde α é a taxa de desconto.



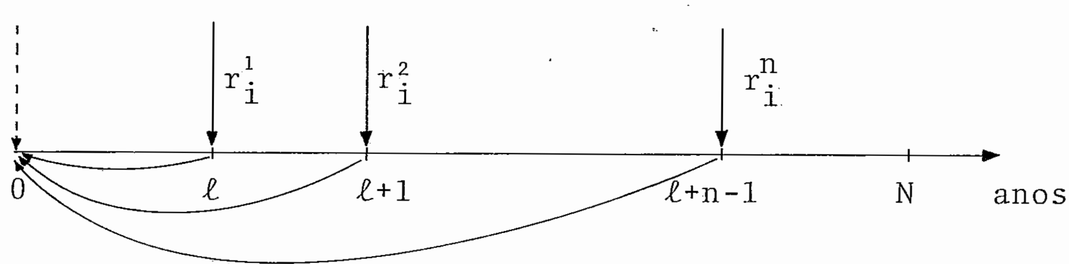
Se considerarmos o ano $(\ell+1)$, teremos no final deste ano, as seguintes receitas líquidas por hectare, r_i^1 e r_i^2, relativas aos anos ℓ e $(\ell+1)$.



Para efeito de cálculo, devemos sempre atualizar as receitas, multiplicando-as por um fator anual de desconto, de maneira que a receita líquida total, por hectare, seja:

$$r_i^1 \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell}} + r_i^2 \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+1}} \quad , \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,I \ , \\ \ell = 1,\ldots,N \ . \end{array}$$

Para um ano n qualquer, teremos as seguintes receitas líquidas por hectare; r_i^1, $r_i^2,\ldots,$ r_i^n , relativas aos anos ℓ, $\ell+1,\ldots,n$.



Atualizando-as, obtemos:

$$r_i^1 \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell}} + r_i^2 \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+1}} + \ldots + r_i^n \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+n-1}} \quad , \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I \ , \\ \ell=1,\ldots,N \ , \\ n=1,\ldots,\bar{n}_i \ . \end{array}$$

Podemos ainda, colocá-las sob a forma de somatório, isto é:

$$\sum_{s=1}^{n} r_i^s \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+s-1}} \quad , \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I, \\ \ell=1,\ldots,N, \\ n=1,\ldots,\bar{n}_i . \end{array}$$

Assim, a receita líquida total produzida pelas I culturas, ocupando uma área $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$, num horizonte de planejamento de N anos será:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} \sum_{s=1}^{n} r_i^s \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+s-1}} x_{i\ell}^{\ell+n-1} \quad . \tag{VI.3.2}$$

Suponhamos que no ano ℓ tenhamos uma cultura p, que no início do planejamento tinha k anos de idade, e que além disso ,seja erradicada no ano j, ocupando neste ano, uma área restante em hectare, $y_{p\ell}^k$. Além disso, terá de 1 a n_p anos de vida, sendo n_p a sua idade máxima. À vista disto, teremos:

$$\boxed{1 \leq k \leq n_p} \quad .$$

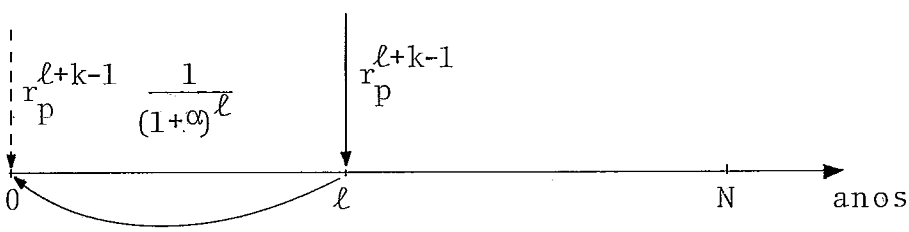
A cultura p com k anos de idade no início do planejamento, terá no máximo J_p^k anos de utilização após o plantio, onde J_p^k é definido por:

$$\boxed{J_p^k = \min \{N-\ell,\ n_p-k\}} \quad . \tag{VI.3.3}$$

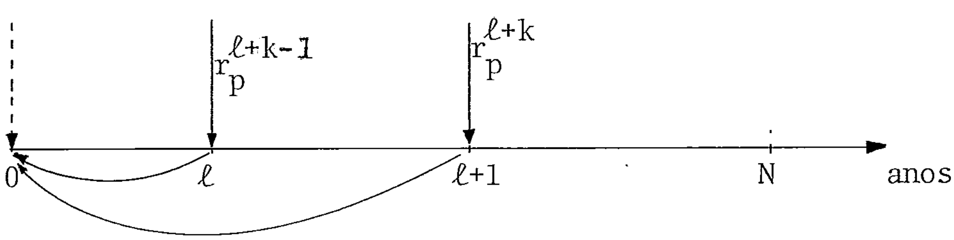
A receita líquida por hectare, da cultura p que tinha k anos de idade no início do planejamento, será no final do ano ℓ, $r_p^{\ell+k-1}$:

O valor atual desta receita líquida, será:

$$r_p^{\ell+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell}} \quad , \qquad \begin{array}{l} p = 1,\ldots,P \quad , \\ \ell = 1,\ldots,J_p^k \quad , \\ k = 1,\ldots,n_p \quad . \end{array}$$



Consideremos agora, o ano $(\ell+1)$. No final deste ano, teremos as seguintes receitas líquidas por hectare, $r_p^{\ell+k-1}$ e $r_p^{\ell+k}$, relativas aos anos ℓ e $(\ell+1)$:



O valor atual da receita líquida total por hectare, será:

$$r_p^{\ell+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell}} + r_p^{\ell+k} \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+1}} \quad , \qquad \begin{array}{l} p=1,\ldots,P \; , \\ \ell=1,\ldots,J_p^k \, , \\ k=1,\ldots,n_p \, . \end{array}$$

Até o ano J_p^k após o ano ℓ , temos as seguintes receitas líquidas por hectare: $r_p^{\ell+k-1}$, $r_p^{\ell+k}$, $r_p^{J_p^k+k-1}$. Atualizando-as, obtemos:

$$r_p^{\ell+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell}} + r_p^{\ell+k} \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+1}} + \dots + r_p^{J_p^k+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^{J_p^k}}$$

$$, \quad p=1,\dots,P \ , \quad k=1,\dots,n_p \ .$$

A expressão acima, na forma de somatório, ficará:

$$\sum_{j=1}^{J_p^k} r_p^{j+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j} \quad , \quad p=1,\dots,P \ , \quad k=1,\dots,n_p \ .$$

Assim, a receita líquida total fornecida pelas P culturas, ocupando uma área restante y_{pj}^k , $j=1,\dots,J_p^k$, será:

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{J_p^k} r_p^{j+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j} y_{pj}^k \quad . \tag{VI.3.4}$$

Somando as expressões (VI.3.2) e (VI.3.4), obtemos a função que queremos maximizar, isto é:

$$\underline{\text{maximizar}}\ z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} \sum_{s=1}^{n} r_i^s \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+s-1}} x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{J_p^k} r_p^{j+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j} y_{pj}^k .$$

(VI.3.5)

Tinhamos definido inicialmente, os seguintes valores: $c_i^{\ell+n-1}$ e d_{pj}^k, isto é, $c_{i\ell}^{\ell+n-1}$ é o valor atual da receita líquida total da cultura i plantada no ano ℓ, tendo n anos de utilização após o plantio e revigorada no ano ℓ+n-1. Em outras palavras, $c_{i\ell}^{\ell+n-1}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$c_i^{\ell+n-1} = \sum_{s=1}^{n} r_i^s \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+s-1}}, \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I, \\ \ell=1,\ldots,N, \\ n=1,\ldots,\bar{n}_i. \end{array} \qquad \text{(VI.3.6)}$$

Da mesma forma, d_{pj}^k que é o valor atual da receita líquida total da cultura p, que no início do planejamento tinha k anos de idade, sendo erradicada no ano j, e poderá ser representado da seguinte forma:

$$d_{pj}^k = r_p^{j+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j}, \quad \begin{array}{l} p=1,\ldots,P, \\ j=1,\ldots,J_p^k, \\ k=1,\ldots,n_p. \end{array} \qquad \text{(VI.3.7)}$$

Substituindo (VI.3.6) e (VI.3.7) em (VI.3.5), obtemos finalmente a função objetivo do problema de planejamento de plantios de diferentes culturas:

$$\underline{\text{maximizar}}\ z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} c_{i\ell}^{\ell+n-1} x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{J_p^k} d_{pj}^k y_{pj}^k. \qquad \text{(VI.3.8)}$$

VI.4. Restrições

Nosso objetivo é maximizar uma função linear, que estará sujeita às restrições relativas aos recursos produtivos: restrições de mão-de-obra, restrições de crédito e restrições de áreas. Analisaremos então, cada uma dessas restrições, em particular.

VI.5. Mão-de-obra

É sempre importante frisarmos, que para qualquer ano em estudo, devemos levar em consideração as culturas plantadas no decorrer deste ano, e as culturas plantadas antes dele, e que no entanto ainda não foram abandonadas.

Consideremos duas culturas A e B, tendo respectivamente, 2 e 3 anos de idade no início do planejamento, que será de 2 anos, isto é, N=2 . As áreas ocupadas pelas culturas A e B, antes do planejamento são S_A^2 e S_B^3 , sendo:

$$S = S_A^2 + S_B^3 \quad ,$$

a área total antes do planejamento.

Nosso objetivo, agora, é erradicar essas culturas e plantar em seus lugares outras duas culturas 1 e 2, que substituirão, respectivamente, a cultura A e a cultura B. Assim, no primeiro ano do planejamento, a cultura A, que no início tinha 2 anos de idade, ocupará uma área restante, em hectare , y_{A1}^2 . A mão-de-obra em homens/mês, solicitada por esta cultura, no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t^2_{Am} \; y^2_{A1}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.1)}$$

Já a cultura B, que no início do planejamento tinha 3 anos de idade, ocupará no primeiro ano de planejamento, uma área restante y^3_{B1} em hectare , e solicitará uma mão-de-obra t^3_{Bm} , em homens/mês/hectare. Assim, a mão-de-obra, em homens/mês, solicitada por esta cultura no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t^3_{Bm} \; y^3_{B1}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.2)}$$

Consideremos agora, duas outras culturas 1 e 2 que serão plantadas nas áreas desativadas pelas culturas A e B. O tempo de utilização dessas novas culturas são respectivamente, 2 e 3 anos. Assim, a cultura 1 será revigorada no ano $\ell+2-1 = \ell+1$ após o plantio, e a cultura 2, no ano $\ell+2$.

Desta forma, a cultura 1 plantada no primeiro ano e revigorada no ano 2, ocupará uma área em hectare , x^2_{11} , e solicitará uma mão-de-obra no mês m deste ano, t^1_{1m} em homens/mês/hectare. Assim, a mão-de-obra solicitada em homens/mês, será:

$$\boxed{t^1_{1m} \; x^2_{11}} \quad , \quad m = 1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.3)}$$

De maneira análoga, a cultura 2 plantada no início do primeiro ano e revigorada no ano 3, ocupará uma área em hectare , x^3_{21} , e solicitará no mês m deste ano uma mão-de-obra t^1_{2m} , em homens/mês/hectare. Portanto, a mão-de-obra solicitada por essa cultura, em homens/mês, será:

$$\boxed{t^1_{2m}\ x^3_{21}} \qquad , \qquad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.4)}$$

É óbvio, que a mão-de-obra total, em homens/mês, solicitada pelas quatro culturas no mês m deste ano, não poderá exceder à mão-de-obra disponível para o mês m deste ano, isto é, T^m_1 . Em outras palavras, somando as expressões (VI.5.1), (VI.5.2), (VI.5.3) e (VI.5.4), obtemos a mão-de-obra total, em homens/mês, que não poderá ultrapassar T^m_1 , isto é:

$$\boxed{t^2_{Am}\ y^2_{A1} + t^3_{Bm}\ y^3_{B1} + t^1_{1m}\ x^2_{11} + t^1_{2m}\ x^3_{21} \leq T^m_1} \qquad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.5)}$$

<u>mão-de-obra</u> →	<u>áreas restantes</u> →	<u>mão-de-obra</u> →	<u>áreas plantadas</u>
t^2_{Am}	y^2_{A1}	t^1_{1m}	$x^2_{11} = S^2_A - y^2_{A1}$
t^3_{Bm}	y^3_{B1}	t^1_{2m}	$x^3_{21} = S^3_B - y^3_{B1}$

Consideremos agora, o segundo ano do planejamento. A cultura A, que inicialmente tinha 2 anos de idade, terá então 3 anos e ocupará neste ano uma outra área restante y^2_{A2} . A mão-de-obra solicitada por esta cultura no mês m deste ano, em homens/mês será:

$$\boxed{t^3_{Am}\ y^2_{A2}} \qquad , \qquad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.6)}$$

Da mesma forma, a cultura B que inicialmente tinha 3 anos de idade, ocupará no segundo ano de planejamento uma área restante y_{B2}^{3} . Esta cultura terá neste ano, 4 anos de idade e solicitará no mês m deste ano, uma mão-de-obra t_{Bm}^{4} , em homens/mês/hectare. Assim, a mão-de-obra em homens/ mês solicitada no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t_{Bm}^{4}\, y_{B2}^{3}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.7)}$$

É importante frisar que as áreas ocupadas pelas culturas A e B vão diminuindo a cada ano que passa, pois estão sendo erradicadas. Teremos para essas culturas, as seguintes relações de áreas:

$$S_A^2 \geq y_{A1}^2 \geq y_{A2}^2$$

e $$S_B^3 \geq y_{B1}^3 \geq y_{B2}^3 \quad .$$

A cultura 1, plantada no primeiro ano e revigorada no ano 2, ocupará no segundo ano, a mesma área x_{11}^{2} . Esta cultura terá agora 2 anos de idade e deverá ser revigorada neste ano, solicitando no mês m deste ano, uma mão-de-obra t_{1m}^{2} , em homens/mês/hectare. Desta forma, a mão-de-obra em homens/mês, solicitada no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t_{1m}^{2}\, x_{11}^{2}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.8)}$$

A cultura 1 ocupará, ainda, uma outra área plantada neste ano, isto é, no segundo ano de plantio, sendo revigorada no ano 3, x_{12}^{3} . Para o plantio desta cultura, necessitamos no mês m deste ano, de uma mão-de-obra em homens/mês/hectare, t_{1m}^{1} . Assim, a mão-de-obra em homens/mês, utilizada pela cultura 1 no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t^1_{1m}x^3_{12}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.9)}$$

Da mesma forma, a cultura 2 plantada no primeiro ano é rentável até o ano 3,eocupará a mesma área anterior x^3_{21} . Esta cultura, neste ano, terá 2 anos de idade e solicitará no mês m deste ano, uma mão-de-obra t^2_{2m} , em homens/mês/hectare. Assim, a mão-de-obra em homens/mês, solicitada pela cultura 2 no mês m do segundo ano de plantio, será:

$$\boxed{t^2_{2m}\ x^3_{21}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.10)}$$

Finalmente, a cultura 2, plantada no segundo ano e produzindo até o ano 4, ocupará uma área x^4_{22} e solicitará no mês m deste ano, uma mão-de-obra t^1_{2m} , em homens/mês/hectare . Assim, a mão-de-obra em homens/mês, solicitada pela cultura 2, no mês m deste ano, será:

$$\boxed{t^1_{2m}\ x^4_{22}} \quad , \quad m=1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.11)}$$

mão-de-obra →	áreas restantes →		mão-de-obra →	áreas plantadas
t^3_{Am}	y^2_{A2}		t^2_{1m}	$x^2_{11}=S^2_A - y^2_{A1}$
		→	t^1_{1m}	$x^3_{12}=y^2_{A1} - y^2_{A2}$
t^4_{Bm}	y^3_{B2}		t^2_{2m}	$x^3_{21}=S^3_B - y^3_{B1}$
			t^1_{2m}	$x^4_{22}=y^3_{B1} - y^3_{B2}$

Somando as expressões (VI.5.6), (VI.5.7),(VI.5.8), (VI.5.9), (VI.5.10) e (VI.5.11), obtemos a mão-de-obra total em homens/mês, no mês m do segundo ano solicitada para o plantio e cultivo das culturas A, B, 1 e 2 , sendo que, esta soma não pode ultrapassar o valor da mão-de-obra disponível no mês m deste ano, T_2^m . Desta forma, teremos:

$$t_{Am}^3\, y_{A2}^2 + t_{Bm}^4\, y_{B2}^3 + t_{1m}^2\, x_{11}^2 + t_{1m}^1\, x_{12}^3 + t_{2m}^2\, x_{21}^3 + t_{2m}^1\, x_{22}^4 \leq T_2^m \quad ,$$

$$m = 1,\ldots,12 \quad . \qquad \text{(VI.5.12)}$$

Vamos considerar agora, uma cultura p com k anos de idade no início do planejamento,e sendo erradicada no j . Esta cultura ocupará uma área restante y_{pj}^k e solicitará no mês m do ano j , uma mão-de-obra t_{pm}^{k+j-1} , em homens/mês/hectare. Em outras palavras, a mão-de-obra em homens/mês, solicitada pela cultura p no mês m do ano j , será:

$$t_{pm}^{k+j-1}\ y_{pj}^k \quad , \quad \begin{array}{l} p=1,\ldots,P \ , \\ m=1,\ldots,12 \ , \\ j=1,\ldots,J_p^k \ , \\ k=1,\ldots,n_p \ . \end{array} \qquad \text{(VI.5.13)}$$

Sabemos que k varia de 1 ano até a idade máxima da cultura p,n_p , e que temos P culturas, assim, a expressão acima ficará:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} t_{pm}^{k+j-1} \; y_{pj}^{k}} \quad , \quad \begin{array}{l} m=1,\ldots,12 \; , \\ j=1,\ldots,J_p^k \; . \end{array} \qquad \text{(IV.5.14)}$$

Consideremos agora, uma cultura i plantada no ano ℓ, tendo n anos de utilização após o plantio, e sendo revigorada no ano $\ell+n-1$. Assim, no ano j, esta cultura solicitará uma mão-de-obra no mês m deste ano, $t_{im}^{j-\ell+1}$, em homens/mês/hectare, e ocupará uma área em hectare, $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$. Logo, a mão-de-obra em homens/mês, solicitada por esta cultura no mês m do ano j, será:

$$\sum_{\ell=1}^{j} t_{im}^{j-\ell+1} \; x_{i\ell}^{\ell+n-1} \quad , \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I \; , \\ m=1,\ldots,12 \; , \\ j=1,\ldots,N \; , \\ n=1,\ldots,\bar{n}_i \; . \end{array}$$

Como temos I culturas e n varia de 1 a $\bar{n}_i$ anos, a expressão acima ficará:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} \sum_{\ell=1}^{j} t_{im}^{j-\ell+1} \; x_{i\ell}^{\ell+n-1}} \quad , \quad \begin{array}{l} m=1,\ldots,12 \; , \\ j=1,\ldots,N \; . \end{array} \qquad \text{(VI.5.15)}$$

Somando as expressões (VI.5.14) e (VI.5.15), obtemos a expressão da mão-de-obra total no mês m do ano j, solicitada pelas culturas P e I. Esta soma não poderá exceder a mão-de-obra disponível no mês m do ano j, isto é, não poderá ultrapassar ao valor T_j^m. Desta forma, teremos:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} t_{pm}^{k+j-1} \, y_{pj}^{k} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} \sum_{\ell=1}^{j} t_{im}^{j-\ell+1} \, x_{i\ell}^{\ell+n-1} \leq T_j^m} \quad , \quad \text{(VI.5.16)}$$

$$m=1,\ldots,12 \; ,$$
$$j=1,\ldots,J_p^k \; .$$

A expressão (VI.5.16) nos fornece a restrição quanto à mão-de-obra, em homens/mês.

VI.6. Crédito

Calculemos a seguir, a restrição relativa ao crédito máximo necessário para o plantio e cultivo das culturas 1 e 2, que estão substituindo as culturas A e B, que por sua vez, estão sendo erradicadas.

Antes de determinarmos tal restrição, devemos salientar que ao nos referirmos ao crédito, estaremos nos referindo ao crédito rural, mais os recursos próprios dos proprietários. Neste crédito já está incluído uma previsão para as culturas, no caso em que hajam secas, geadas, etc. Além da inflação estar incluida na taxa de desconto.

Assim, a cultura A com 2 anos no início do planejamento, ocupará uma área restante y_{A1}^2 , e fornecerá no final do primeiro ano do planejamento, uma receita líquida por hectare, r_A^2 . Portanto, a receita líquida, no final do primeiro ano do planejamento, fornecida por esta cultura, será:

$$\boxed{r_A^2 \; y_{A1}^2 \; .} \qquad \text{(VI.6.1)}$$

No primeiro ano do planejamento, a cultura B que no início tinha 3 anos de idade, ocupará uma área restante y_{B1}^{3} e fornecerá no final deste ano, uma receita líquida por hectare, r_{B}^{3} . Assim, a receita no final deste ano, será:

$$\boxed{r_{B}^{3}\ y_{B1}^{3}} \quad . \tag{VI.6.2}$$

Somando as expressões (VI.6.1) e (VI.6.2), obteremos a receita líquida total no final do primeiro ano de planejamento, fornecida pelas culturas A e B que estão sendo erradicadas:

$$\boxed{r_{A}^{2}\ y_{A1}^{2} + r_{B}^{3}\ y_{B1}^{3}} \quad . \tag{VI.6.3}$$

A cultura 1 com duração de 2 anos, plantada no primeiro ano e revigorada no ano 2, ocupará uma área x_{11}^{2} e fornecerá uma receita líquida por hectare, r_{1}^{1} . Assim, a receita líquida, fornecida no final deste ano, por esta cultura, será:

$$\boxed{x_{1}^{1}\ x_{11}^{2}} \quad . \tag{VI.6.4}$$

A cultura 2, plantada no primeiro ano de plantio, tendo uma duração de 3 anos ocupará uma área x_{21}^{3} e fornecerá uma receita líquida, por hectare , r_{2}^{1} . Assim, a receita líquida total fornecida por esta cultura,no final do primeiro ano, será:

$$\boxed{r_2^1\ x_{21}^3}\ . \qquad (VI.6.5)$$

Somando as expressões (VI.6.4) e (VI.6.5), obtemos a receita líquida total fornecida pelas culturas 1 e 2, no final do primeiro ano de plantio:

$$\boxed{r_1^1\ x_{11}^2 + r_2^1\ x_{21}^3\ .} \qquad (VI.6.6)$$

A expressão da receita líquida total fornecida pelas culturas A, B, 1 e 2, no final do primeiro ano de plantio, será obtida somando as expressões (VI.6.3) e (VI.6.6). Esta receita líquida total não poderá exceder o valor do crédito máximo disponível no primeiro ano de plantio, Q_1 . Desta forma, teremos:

$$\boxed{r_A^2\ y_{A1}^2 + r_B^3\ y_{B1}^3 + r_1^1\ x_{11}^2 + r_2^1\ x_{21}^3 \leq Q_1}\ . \qquad (VI.6.7)$$

Um fazendeiro ao fazer um crédito rural, terá nos primeiros anos, apenas despesas. Assim, a receita líquida por hectare da cultura i será considerada menor ou igual a zero, isto é, $r_i^s \leq 0$. Quando a cultura iniciar a produção, o lucro do proprietário amortizará as despesas, as dívidas do crédito obtido e ainda haverá saldo em dinheiro. A partir deste momento, a receita liquida por hectare é considerada positiva, isto é, $r_i^s > 0$.

Assim, para compatibilizar as definições de receita liquida e de crédito total, devemos multiplicar por -1, a receita líquida total obtida, somando as expressões

(VI.6.3) e (VI.6.6). Desta forma, a restrição relativa ao crédito será:

$$\boxed{- \{r_A^2\, y_{A1}^2 + r_B^3\, y_{B1}^3 + r_1^1\, x_{11}^2 + r_2^1\, x_{21}^3\} \leq Q_1} \,. \qquad \text{(VI.6.8)}$$

No segundo ano de planejamento, a cultura A que no início tinha 2 anos de idade terá neste ano 3 anos. Esta cultura ocupará uma área restante y_{A2}^2 e fornecerá no final deste ano, uma receita líquida por hectare, r_A^3 . Assim, a receita total no final deste ano, será:

$$\boxed{r_A^3\, y_{A2}^2} \,. \qquad \text{(VI.6.9)}$$

Da mesma forma, a cultura B com 3 anos de idade no início do planejamento, ocupará no segundo ano uma área restante, y_{B2}^3 , e fornecerá uma receita líquida por hectare, r_B^4 . Assim, a receita líquida total fornecida por esta cultura no final deste ano, será:

$$\boxed{r_B^4\, y_{B2}^3 .} \qquad \text{(VI.6.10)}$$

A expressão da receita líquida total fornecida pelas culturas A e B, no final do segundo ano do planejamento, será obviamente, a soma das expressões (VI.6.9) e (VI.6.10):

$$\boxed{- \{r_A^3\, y_{A2}^2 + r_B^4\, y_{B2}^3\}} \,. \qquad \text{(VI.6.11)}$$

A cultura 1 plantada no primeiro ano, tendo 2 anos de utilização, será revigorada neste ano. Assim, esta cultura ocupará a área x_{11}^2 e fornecerá no final do segundo ano de plantio, uma receita líquida por hectare, r_1^2. Desta forma, a receita líquida total no final deste ano, fornecida pela cultura 1 será:

$$\boxed{r_1^2\ x_{11}^2} \quad . \qquad (VI.6.12)$$

A cultura 1, tendo 2 anos de utilização e plantada no segundo ano, ocupará uma outra área x_{12}^3. Esta cultura será revigorada no ano 3, e fornecerá no final do segundo ano, uma receita líquida por hectare, r_1^1. Assim, a receita líquida total, fornecida pela cultura 1 no final deste ano, será:

$$\boxed{r_1^1\ x_{12}^3} \quad . \qquad (VI.6.13)$$

Analogamente, a cultura 2 plantada no primeiro ano e revigorada no ano 3 após o plantio, ocupará uma área x_{21}^3 e fornecerá uma receita líquida por hectare, r_2^2. Assim, a receita líquida total fornecida por esta cultura no final do segundo ano de plantio, será:

$$\boxed{r_2^2\ x_{21}^3} \, . \qquad (VI.6.14)$$

Finalmente, a cultura 2, tendo 3 anos de utilização, ocupará também uma outra área plantada no segundo ano,

x_{22}^{4} , sendo que, esta cultura será revigorada no ano 4 após o plantio e fornecerá uma receita líquida por hectare, r_2^1 . Assim, a receita líquida total, fornecida por esta cultura no final do segundo ano de plantio, será:

$$\boxed{r_2^1 \; x_{22}^4} \; . \tag{VI.6.15}$$

A expressão da receita líquida total fornecida pelas culturas 1 e 2, no final do segundo ano de plantio, será obtida somento-se as expressões (VI.6.12), (VI.6.13), (VI.6.14) e (VI.6.15), isto é:

$$\boxed{r_1^2 \; x_{11}^2 + r_1^1 \; x_{12}^3 + r_2^2 \; x_{21}^3 + r_2^1 \; x_{22}^4} \; . \tag{VI.6.16}$$

A receita líquida total fornecida pelas quatro culturas, no final do segundo ano de plantio, será obtida somando-se as expressões (VI.6.11) e (VI.6.16), sendo que esta soma não poderá exceder o crédito máximo disponível no segundo ano, Q_2 , isto é:

$$\boxed{- \{r_A^3 \, y_{A2}^2 + r_B^4 \, y_{B2}^3 + r_1^2 \, x_{11}^2 + r_1^1 \, x_{12}^3 + r_2^2 \, x_{21}^3 + r_2^1 \, x_{22}^4\} \leq Q_2} \; . \tag{VI.6.17}$$

Suponhamos que uma cultura i qualquer, seja plantada no ano ℓ , tenha n anos de utilização após o plantio, e portanto, seja revigorada no ano ℓ+n-1 . Esta cultura ocupará uma área $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$ e fornecerá no final do ano ℓ , uma receita líquida por hectare, r_i^1 .

Assim, no ano j esta cultura deverá ter no mínimo $j-\ell+1$ anos de idade, ocupando uma área x_{ij}^{j+n-1} e fornecendo no final do ano j, uma receita por hectare, $r_i^{j-\ell+1}$. A receita líquida total fornecida por esta cultura, no final deste ano, será:

$$\sum_{\ell=1}^{j} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} r_i^{j-\ell+1} x_{i\ell}^{\ell+n-1} \quad , \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I \ , \\ j=1,\ldots,N \ . \end{array}$$

Para as I culturas, teremos:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} r_i^{j-\ell+1} x_{i\ell}^{\ell+n-1}} \quad , \ j=1,\ldots,N \ . \tag{VI.6.18}$$

Consideremos que uma cultura p tenha no início do planejamento k anos de idade, e que seja erradicada no ano j. Assim, no ano ℓ, esta cultura ocupará uma área restante $y_{p\ell}^{k}$ e fornecerá no final deste ano, uma receita líquida por hectare, $r_p^{k+\ell-1}$. A receita líquida total fornecida por esta cultura no final do ano ℓ, será:

$$r_p^{k+\ell-1} \ y_{p\ell}^{k} \quad , \qquad \begin{array}{l} p=1,\ldots,P \ , \\ k=1,\ldots,n_p \ , \\ \ell=1,\ldots,J_p^k \ . \end{array}$$

Esta cultura será erradicada no ano j, e como temos P culturas, podemos reescrever a expressão acima:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} r_p^{k+j-1} \ y_{pj}^{k}} \quad , \ j=1,\ldots,J_p^k \ . \tag{VI.6.19}$$

A receita líquida total no final do ano j, não pode exceder o crédito máximo disponível no ano j, Q_j, e para obtê-la devemos somar as expressões (VI.6.18) e (VI.6.19), isto é:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{n=1}^{\overline{n}_i} - r_i^{j-\ell+1} \; x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} - r_p^{k+j-1} \; y_{pj}^{k} \leq Q_j} \; ,$$

$$j=1,\ldots,N \; , \qquad \text{(VI.6.20)}$$

onde o sinal menos (-1) compatibiliza as definições de receita líquida e de crédito total. Além disso, o crédito disponível no ano j, Q_j, representa apenas o maior valor possível da diferença dos somatórios das despesas e das receitas do ano j.

A desigualdade (VI.6.20) nos fornece a restrição quanto ao crédito disponível num determinado ano.

VI.7. Área:

Inicialmente, tínhamos duas culturas A e B que seriam erradicadas, e duas culturas 1 e 2 que ocupariam seus lugares. Vamos supor, que a cultura 1 ocupe a área desativada da cultura A, e a cultura 2 ocupe a respectiva área da cultura B, e que as áreas ocupadas pelas culturas A e B antes do planejamento, sejam respectivamente, S_A^2 e S_B^3. Finalmente, essas duas áreas nos fornecerão a área total que será erradicada, isto é:

$$S = S_A^2 + S_B^3 \quad .$$

Para calcularmos a restrição relativa a área,considerarmos inicialmente, as áreas com diferentes culturas no primeiro ano do plantio:

y_{A1}^2 → área restante da cultura A, que no início do planejamento tinha 2 anos de idade.

y_{B1}^3 → área restante da cultura B, que no início do planejamento tinha 3 anos de idade.

x_{11}^2 → área da cultura 1 plantada no primeiro ano, tendo 2 anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano 2 após o plantio.

x_{21}^3 → área da cultura 2 plantada no primeiro ano, tendo 3 anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano 3 após o plantio.

Como dissemos anteriormente, a cultura 1 ocupará a área desativada pela cultura A, isto é:

$$x_{11}^2 = S_A^2 - y_{A1}^2 \quad .$$

Em outras palavras, a área da cultura 1 no primeiro ano,tendo 2 anos de utilização após o plantio, será a diferença da área ocupada pela cultura A antes do início do planejamento pela área restante da cultura A.

Da mesma forma, teremos para a cultura 2:

$$x_{21}^{3} = S_{B}^{3} - y_{B1}^{3} \quad .$$

A cultura 2 no primeiro ano do plantio, tendo 3 anos de utilização após o plantio, ocupará uma área representada pela diferença entre a área da cultura B antes do início do planejamento e a área restante da cultura B.

A área total ocupada pelas culturas A, B, 1 e 2, não pode exceder a área disponível no primeiro ano de plantio, A_1 . Desta forma, teremos:

$$\boxed{y_{A1}^{2} + y_{B1}^{3} + x_{11}^{2} + x_{21}^{3} \leq A_1} \quad . \qquad \text{(VI.7.1)}$$

Para o segundo ano do plantio, tinhamos as seguintes áreas com diferentes culturas:

y_{A2}^{2} → área restante da cultura A no segundo ano, que no início do planejamento tinha 2 anos de idade.

y_{B2}^{3} → área restante da cultura B no segundo ano, que no início do planejamento tinha 3 anos de idade.

x_{11}^{2} → área da cultura 1 plantada no primeiro ano, tendo 2 anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano 2.

x_{12}^{3} → área da cultura 1 plantada no segundo ano, tendo 2 anos de utilização após o plantio, sendo revigorada no ano 3.

x_{21}^{3} → área da cultura 2 plantada no primeiro ano, tendo 3 anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano 3.

x_{22}^{4} → área da cultura 2 plantada no segundo ano, tendo 3 anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano 4.

As áreas x_{12}^{3} e x_{22}^{4} serão determinadas por:

$$x_{12}^{3} = y_{A1}^{2} - y_{A2}^{2} \quad ,$$

e

$$x_{22}^{4} = y_{B1}^{3} - y_{B2}^{3} \quad .$$

A área total ocupada pelas culturas no segundo ano, não poderá exceder a área disponível para este ano, A_2 , isto é:

$$\boxed{y_{A2}^{2} + y_{B2}^{3} + x_{11}^{2} + x_{12}^{3} + x_{21}^{3} + x_{22}^{4} \leq A_2} \quad . \tag{VI.7.2}$$

Consideremos agora, uma cultura i plantada no ano ℓ , tendo n anos de utilização após o plantio e sendo revigorada no ano ℓ+n-1. Esta cultura ocupará no ano ℓ,uma área $x_{i\ell}^{\ell+n-1}$, em hectare .

Para um ano j qualquer, a área total ocupada por esta cultura, será:

$$\sum_{\ell=1}^{j} x_{i\ell}^{\ell+n-1} \quad , \qquad \begin{array}{l} i=1,\ldots,I \quad , \\ j=1,\ldots,\underline{N} \quad , \\ n=1,\ldots,\underline{n}_i \quad . \end{array}$$

Como temos I culturas, a expressão acima ficará:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} x_{i\ell}^{\ell+n-1}} \quad , \quad \begin{array}{l} j=1,\ldots,\underline{N} \ , \\ n=1,\ldots,\bar{n}_i \ . \end{array} \qquad \text{(VI.7.3)}$$

Consideremos uma cultura p com k anos de idade no início do planejamento, e que seja erradicada no ano j. Esta cultura ocupará no ano ℓ , uma área restante $y_{p\ell}^{k}$, que será desativada progressivamente, e a cada ano que passa, diminuirá de tamanho. Um dos motivos que nos levará a erradicar tal cultura, será o fato de sua receita líquida por hectare, ser menor ou igual a zero, isto é, $r_p^k \leq 0$.

No ano j , a área ocupada pela cultura p , será y_{pj}^{k} , sendo que j não poderá exceder o valor J_p^k , pois J_p^k é o tempo de utilização que a cultura p pode ter, após o plantio. Desta forma, podemos definir o seguinte conjunto:

$$R(j) = \{(p,k)/S_p^k > 0 \quad e \quad j \leq J_p^k\} \quad .$$

Portanto, a área restante total, ocupada pelas P culturas , será dada por:

$$\boxed{\sum_{(p,k)\varepsilon R(j)} y_{pj}^{k}} \quad , \quad \begin{array}{l} j=1,\ldots,J_p^k \ , \\ p=1,\ldots,P \ , \\ k=1,\ldots,n_p \ . \end{array} \qquad \text{(VI.7.4)}$$

Somando as expressões (VI.7.3) e (VI.7.4), obtemos a área total ocupada pelas diferentes culturas no ano j. Esta soma não poderá exceder a área disponível para este ano , A_j , isto é:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{(p,k)\in R(j)} y_{pj}^{k} \leq A_j} \quad , \qquad (VI.7.5)$$

$$, \; j=1,\ldots,N \; , \quad n=1,\ldots,\bar{n}_i \, .$$

A desigualdade (VI.7.5) representa a restrição relativa a área.

VI.8. Restrição de Precedência

Consideremos uma cultura p que no início do planejamento tinha k anos de idade, e que seria erradicada no ano j . Assim, no início do planejamento esta cultura ocupará uma área restante, y_{p1}^{k} . Esta área será desativada progressivamente, e ao mesmo tempo, haverá plantio de outras culturas. Seja então, $y_{p\ell}^{k}$, a área da cultura p no ano ℓ, que no início do planejamento tinha k anos de idade.

O planejamento para esta cultura vai de 1 a J_p^k, sendo que, quando $\ell = J_p^k$, esta cultura estará totalmente erradicada, pois J_p^k é o tempo máximo de utilização desta cultura após o plantio.

Tomemos agora, o primeiro ano do planejamento, quando a área restante ocupada pela cultura p , a ser desativada, será y_{p1}^{k} .

No segundo ano do planejamento, a cultura p com k anos de idade no início do planejamento, ocupará a área restante y_{p2}^{k} , de forma que teremos sempre:

$$y^k_{p1} \geq y^k_{p2} \quad .$$

Generalizando, obtemos a seguinte restrição de precedência:

$$\boxed{S^k_p \geq y^k_{p1} \geq y^k_{p2} \geq \ldots\ldots\ldots \geq y^k_{pJ^k_p} \geq 0} \quad , \; p=1,\ldots,P \; , \; k=1,\ldots,n_p \; . \qquad \text{(VI.8.1)}$$

onde S^k_p é a área ocupada pela cultura p antes do início do planejamento.

Podemos ainda, representar a relação de precedência da seguinte maneira:

$$\boxed{0 \leq x^n_{i1} \leq x^{n+1}_{i2} \leq \ldots\ldots \leq x^{N+n-1}_{iN}} \quad , \; i=1,\ldots,I \; , \; n=1,\ldots,\bar{n}_i \; . \qquad \text{(VI.8.2)}$$

Podemos finalmente, resumir nosso problema escrevendo o objetivo juntamente com as restrições dos recursos produtivos, isto é:

$$\underline{\text{maximizar}} \; z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} c^{\ell+n-1}_{i\ell} \, x^{\ell+n-1}_{i\ell} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{J^k_p} d^k_{pj} \, y^k_{pj} \qquad \text{(VI.8.3)}$$

sujeito à:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} \sum_{\ell=1}^{j} t^{j-\ell+1}_{im} \, x^{\ell+n-1}_{i\ell} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} t^{k+j-1}_{pm} \, y^k_{pj} \leq T^m_j$$

$$, \; m=1,\ldots,12 \; , \; j=1,\ldots,N \; . \qquad \text{(VI.8.4)}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{n=1}^{\bar{n}_i} - r_i^{j-\ell+1} \; x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=1}^{n_p} - r_p^{k+j-1} \; y_{pj}^{k} \leq Q_j$$

$$, \; j=1,\ldots,N \, . \qquad \text{(VI.8.5)}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\ell=1}^{j} x_{i\ell}^{\ell+n-1} + \sum_{(p,k)\varepsilon R(j)} y_{pj}^{k} \leq A_j$$

$$, \; j=1,\ldots,N \; , \quad n=1,\ldots,\bar{n}_i \; , \quad k=1,\ldots,n_p \; , \quad p=1,\ldots,P \; . \qquad \text{(VI.8.6)}$$

$$S_p^k \geq y_{p1}^k \geq y_{p2}^k \geq \ldots\ldots \geq y_{pJ_p^k}^k \geq 0 \qquad , \; k=1,\ldots,n_p \; , \quad p=1,\ldots,P \; . \qquad \text{(VI.8.7)}$$

A restrição (VII.8.7) poderá ainda ser representada da seguinte forma:

$$0 \leq x_{i1}^{n} \leq x_{i2}^{n+1} \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_{iN}^{N+n-1} \qquad , \; i=1,\ldots,I \; , \quad n=1,\ldots,\bar{n}_i \; . \qquad \text{(VI.8.8)}$$

A representação matricial do problema (VI.8.3)-(VI.8.8) será:

<u>maximizar</u> $z = cx + dy$

sujeito à $Ax + By \leq \beta$

$x \geq 0$,

$y \geq 0$,

$$0 \leq x_{i1}^{n} \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_{iN}^{N+n-1} \quad .$$

A geração dos coeficientes da função objetivo (c,d), da matriz tecnológica (A,B) e do vetor de recursos β, é dada pelas seguintes funções:

1. Coeficientes da função objetivo:

$$c_{i\ell}^{\ell+n-1} = \sum_{s=1}^{n} r_i^s \frac{1}{(1+\alpha)^{\ell+s-1}} \quad , \quad \begin{aligned} i &= 1,\dots,I \;, \\ \ell &= 1,\dots,N \;, \\ n &= 1,\dots,\bar{n}_i \;. \end{aligned} \qquad \text{(VI.8.9)}$$

$$d_{pj}^{k} = r_p^{j+k-1} \frac{1}{(1+\alpha)^j} \quad , \quad \begin{aligned} p &= 1,\dots,P \;, \\ k &= 1,\dots,n_p \;, \\ j &= 1,\dots,J_p^k \;. \end{aligned} \qquad \text{(VI.8.10)}$$

2. Coeficientes das matrizes A e B:

Mão-de-Obra:

$$\underbrace{a(1,j,m}_{\textit{linha}} \; ; \; \underbrace{i,\ell,n)}_{\textit{coluna}} = \begin{cases} t_{im}^{j-\ell+1} \;, & \text{se } n \geq j-\ell+1 \text{ e } j \geq \ell \;, \\ 0 \;, & \text{caso contrário} \;. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &i=1,\dots,I \;, \\ &n=1,\dots,12 \;, \\ &\ell=1,\dots,N \;, \\ &n=1,\dots,\bar{n}_i \;, \\ &j=1,\dots,N \;. \end{aligned}$$

(VI.8.11)

$$b(1,j,m \; ; \; p,\ell,n) = \begin{cases} t_{pm}^{j+k-1} \;, & \text{se } \ell=j \;, \\ 0 \;, & \text{se } \ell \neq j \;, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &j=1,\dots,J_p^k \;, \\ &m=1,\dots,12 \;, \\ &p=1,\dots,P \;, \\ &k=1,\dots,n_p \;, \\ &\ell=1,\dots,N \;. \end{aligned}$$

(VI.8.12)

3. Coeficientes das matrizes A e B:

Crédito:

$$a(2,j\ ;\ i,\ell,n) = \begin{cases} -r_i^{j-\ell+1} & ,\ \text{se}\ \ n \geq j-\ell+1 \\ & \quad \text{e}\ \ j \geq \ell\ , \\ 0 & ,\ \text{caso contrário}. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j=1,\dots,N\ , \\ i=1,\dots,I\ , \\ \ell=i,\dots,\underline{N}\ , \\ n=1,\dots,\overline{n}i\ . \end{array}$$

(VI.8.13)

$$b(2,j\ ;\ p,\ell,k) = \begin{cases} -r_p^{j+k-1} & ,\ \text{se}\ \ \ell = j\ , \\ 0 & ,\ \text{se}\ \ \ell \neq j\ , \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j=1,\dots,J_p^k\ , \\ \ell=1,\dots,N\ , \\ p=1,\dots,P\ , \\ k=1,\dots,n_p\ . \end{array}$$

(VI.8.14)

4. Coeficientes das matrizes A e B:

Área:

$$a(3,j\ ;\ i,\ell,n) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{se}\ n \geq j-\ell+1 \\ & \quad \text{e}\ \ j \geq \ell\ , \\ 0 & ,\ \text{caso contrário}\ , \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j=1,\dots,N\ , \\ \ell=1,\dots,\underline{N}\ , \\ n=1,\dots,\overline{n}_i\ , \\ i=1,\dots,I\ . \end{array}$$

(VI.8.15)

$$b(3,j\ ;\ p,\ell,k) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{se}\ \ j = \ell\ , \\ 0 & ,\ \text{se}\ \ j \neq \ell\ , \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j=1,\dots,J_p^k\ , \\ \ell=1,\dots,N\ , \\ p=1,\dots,P\ , \\ k=1,\dots,n_p\ . \end{array}$$

(VI.8.16)

BIBLIOGRAFIA

|1| Bazaraa M.S. - Jarvis J.J. (1977) - "Linear Programming and Network Flows", John Willey and Sons, New York.

|2| Dantzig, G.B. - Wolfe P. (1960) - "Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research, 8.

|3| Dantzig, G.B. - Wolfe P. (1961) - "The Decomposition Algorithms for Linear Programming", Econometrica, 29,nº4.

|4| Dantzig, G.B. (1963) - "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

|5| Gass, S.I. (1958) - "Linear Programming Methods and Applications", McGraw-Hill, New York.

|6| Lasdon, L.S. (1970) - "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan, N.Y.

|7| Hadley, G.F. (1962) - "Linear Programming", Addison-Wesley, Reading, Mass.

|8| Simmonard, M.A. (1973) - "Programmation Linéaire: Technique du Calcul Économique" - Dunnod, Paris, 1º volume.

|9| Dantzig, G.B. - Van Slyke, R.M. (1967) - "Generalized Upper Bounding Techniques", J.Computer System Science,1.

|10| Maculan, F.N. (1979) - "Contribuições para a solução de Problemas de Programação Linear" - Inst. de Matemática, UFRJ.

|11| Varaiya, P.P., "Notes on Optimization", Von Nostrand Reinhold Co., 1971.

|12| Legendre, J.P. - Minoux M., "Une application de la Notion de Dualité en Programmation en Nombres Entiers: Sélection et Affectation Optimales d'une Flotte D'avions", R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle, 11, 201-222, 1977.

|13| Hu, T.C., "Integer Programming and Network Flows", 1970.

|14| Balas, E., "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", Operations Research, 13(4) - 1965.

|15| Geoffrion, A., "An Improved Ennumeration Approach for Integer Programming", Operations Research, 17(3), 1969.

|16| Simonnard, M.A., "Programation Lineáire: Technique du Calcul Économique", Dunnod, Paris, 1973, 2º volume.

|17| Geraldo, G. de Paula Júnior, "Contribuições às Aplicações dos Métodos de Recobrimento e Particionamento em Programação Inteira", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ,1978.

|18| Taha, H.A., "Integer Programming Theory, Applications, and Computations", 1975.

|19| Nelson Maculan Filho, "Programação Linear Inteira", PDD 17, 18, COPPE/UFRJ, Rio, 1978.

|20| Zionts, S. - "Linear and Integer Programming", Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1974.

|21| Garfinkel R.S. and Nemhauser G.L., "Integer Programming", New York, John Wiley, 1972.

|22| Maria Luiza Villares e Nelson Maculan Filho, "Resolução de problemas de programação linear inteira bivalente(0-1) por algoritmos de Enumeração Implícita", PDD-14/79.

|23| Salkin - "Integer Programming", Addison-Wesley, 1975.

|24| Geoffrion A., "Duality in Nonlinear Programming: A simplified Application - Oriented Development", Perspectives on Optimization, Ed. A.M. Geoffrion Addison-Wesley Co., pp.65-101.

|25| Miguel Taube Netto e Roseana Morais Garcia, "Um modelo para programação de plantios de diferentes culturas", Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

|26| Miguel Taube Netto e Roseana Morais Garcia, "Um modelo de programação linear para o planejamento dinâmico de plantios", Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.