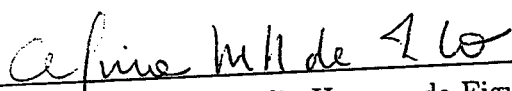


PROBLEMAS SANDUÍCHE EM GRAFOS: CLASSES HEREDITÁRIAS
E PARTIÇÕES

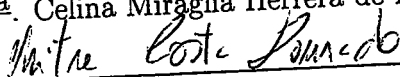
Rafael Bernardo Teixeira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

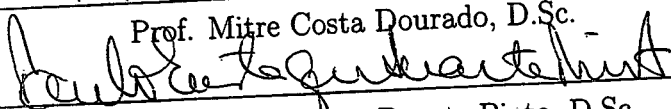
Aprovada por:



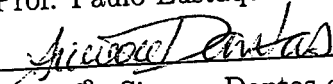
Prof^{ca}. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



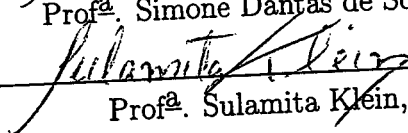
Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.



Prof. Paulo Eustáquio Duarte Pinto, D.Sc.



Prof^{ca}. Simone Dantas de Souza, D.Sc.



Prof^{ca}. Sulamita Klein, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2008

TEIXEIRA, RAFAEL BERNARDO

Problemas sanduíche em grafos: classes hereditárias e partições [Rio de Janeiro] 2008

X, 68 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2008)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Grafos sanduíche

2 - Complexidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

À minha orientadora, Prof^a. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, pela orientação firme.

Aos professores Maria Alice, Paulo Eustáquio e Vera, por terem sido o ponto de partida para este trabalho.

À todos os colegas da linha de Algoritmos e Combinatória, pelo apoio e companheirismo.

Aos meus amigos, pela compreensão e paciência.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Àqueles cujos olhos não pude mais ver, mas com certeza seguraram minha mão durante a jornada. Minha mãe, meu pai, minha avó Wanda, minha avó Dulce, meu avó Octávio, minha tia Ângela, senti muito a sua falta.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PROBLEMAS SANDUÍCHE EM GRAFOS: CLASSES HEREDITÁRIAS
E PARTIÇÕES

Rafael Bernardo Teixeira

Maio/2008

Orientadora: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Problemas sanduíche são generalizações de problemas de reconhecimento de uma propriedade Π . Enquanto em problemas de reconhecimento comum existe apenas um grafo como entrada, em problemas sanduíche existem dois grafos e procura-se por um terceiro grafo, intermediário entre os dois grafos de entrada, satisfazendo a propriedade Π . Esta tese apresenta resultados sobre dois tipos distintos de propriedades de grafos. O primeiro tipo trata-se de classes hereditárias de grafos, com ênfase a classes relacionadas à propriedade Helly. O segundo tipo trata-se de problema de partições dos vértices de um grafo. Apresentamos uma dicotomia polinomial para os problemas de partição em três partes não vazias.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

GRAPH SANDWICH PROBLEMS: HEREDITARY CLASSES AND
PARTITIONS

Rafael Bernardo Teixeira

May/2008

Advisor: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Department : Computing and Systems Engineering

Sandwich problems generalize graph recognition problems with respect to a property Π . A recognition problem has a graph as input, whereas a sandwich problem has two graphs as input. In a sandwich problem, we look for a third graph, whose edge set lies between the edge sets of two given graphs. This third graph is required to satisfy a property Π . This work presents some results on two distinct types of graph properties. The first type concerns hereditary classes of graphs, emphasizing classes related to the Helly property. The second type concerns the problem of partitioning the vertices of a graph. We presented a polynomial dichotomy for the three nonempty part partition problems.

Índice

1	Introdução	1
2	Características de problemas sanduíche	3
2.1	Definições	3
2.2	Motivação	4
3	Classes hereditárias	6
3.1	Definições	6
3.2	Grafos clique-Helly hereditário	9
3.3	Grafos clique-Helly não-hereditário	16
3.4	Considerações finais	21
4	Partições	23
4.1	Definições	23
4.2	Partições em três partes	25
4.2.1	Critérios de enumeração	26
4.2.2	Ferramentas de solução	27
4.2.3	Redução a duas partes	29
4.2.4	Corte estável, 3-coloração	30
4.2.5	Vértice universal	30
4.2.6	Partição desconexa	33
4.2.7	Conjunto homogêneo	37

4.2.8	Parte unitária	40
4.2.9	3-SAT	40
5	Conclusões	60

Lista de Figuras

3.1	Grafos induzidos proibidos para grafos clique-Helly hereditários	8
3.2	Diamante variável forçado, grafo de Hajós cláusula forçado e composição	11
3.3	Exemplo de instância construída de (V, E^1, E^2) correspondendo às cláusulas (x_1, x_2, x_4) , (\bar{x}_1, x_2, x_3) e $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$	13
3.4	Em G^2 , o triângulo estendido relativo ao triângulo $\{x_i, \bar{x}_i, d_{jk}\}$ não possui vértice universal.	18
3.5	Exemplo de instância construída de (V, E^1, E^2) correspondendo às cláusulas (x_1, x_2, x_4) , (\bar{x}_1, x_2, x_3) e $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$	20
4.1	Lista de todas as matrizes de ordem 3 a menos de isomorfismos	28
4.2	Matrizes para CORTE ESTÁVEL e 3-COLORAÇÃO	30
4.3	Diagramas dos problemas da ferramenta 3-SAT	41
4.4	Conjunto de vértices cláusula e vértices base para $3NPM_{14}SP$	43
4.5	Estrutura de ligação de cláusulas tipos 1 e 2 para $3NPM_{14}SP$	43
4.6	Instância obtida a partir da instância satisfatível de 1-em-3 3-SAT para $3NPM_{14}SP$	49
4.7	Conjunto de vértices cláusula e vértices base para $3NPM_{42}SP$	50
4.8	Instância obtida a partir da instância satisfatível de 1-em-3 3-SAT para $3NPM_{42}SP$	51

4.9	Posicionamentos possíveis dos vértices cláusula e dos vértices variável	52
4.10	M_{42} -partição correspondente à atribuição verdade $x_2 = x_5 = T$.	53
4.11	Subgrafo base para $3NPM_{51}SP$	57
4.12	Instância obtida a partir da instância satisfatível de 1-em-3 3-SAT para $3NPM_{51}SP$	58
4.13	M_{51} -partição correspondente à atribuição verdade $x_2 = x_5 = T$.	59

Capítulo 1

Introdução

Seja um grafo simples, finito e não-direcionado $G = (V, E)$ e uma propriedade Π . Problemas de reconhecimento de grafos perguntam, dado um grafo G , se G satisfaz uma propriedade Π . Definimos tais problemas como segue:

PROBLEMA DE RECONHECIMENTO PARA PROPRIEDADE Π EN-

TRADA: Um grafo $G = (V, E)$.

QUESTÃO: O grafo G satisfaz a propriedade Π ?

Problemas sanduíche em grafos generalizam tais problemas de reconhecimento, introduzindo o conceito de grafo sanduíche. Sejam dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, tais que G^1 é subgrafo gerador de G^2 , isto é, $E^1 \subseteq E^2$. Um *grafo sanduíche* $G = (V, E)$, relacionado ao par (G^1, G^2) , é um grafo tal que, G^1 é subgrafo gerador de G e G , por sua vez, é subgrafo gerador de G^2 , isto é, $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$. Definimos problemas sanduíche como segue:

PROBLEMA DE GRAFO SANDUÍCHE PARA PROPRIEDADE Π EN-

TRADA: Dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, onde $E^1 \subseteq E^2$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ para o par (G^1, G^2) , que satisfaça a propriedade Π ?

Podemos também definir o mesmo problema da seguinte forma:

PROBLEMA II SANDUÍCHE

ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) , onde $E^1 \cap E^3 = \emptyset$.

QUESTÃO: Existe um grafo $G = (V, E)$, tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$, e que G satisfaça a propriedade Π ?

Nesta tese, apresentamos resultados sobre problemas sanduíche, considerando vários tipos de propriedades.

No Capítulo 2, discutimos algumas propriedades gerais sobre problemas sanduíche. Ainda nesse capítulo, apresentamos as motivações que levaram ao estudo das variadas classes de problemas.

No Capítulo 3, iniciamos o estudo de problemas sanduíche para classes hereditárias e classes relacionadas a estas últimas. O enfoque foi dado a classes que envolvem a propriedade Helly.

No Capítulo 4, apresentamos resultados sobre problemas sanduíche para partições do conjunto de vértices de grafos, considerando restrições internas e externas.

Concluimos, no Capítulo 5, o estudo sobre problemas sanduíche. Nesse capítulo mostramos algumas conseqüências do presente trabalho e trabalhos posteriores, assim como propomos alguns problemas em aberto.

Capítulo 2

Características de problemas sanduíche

2.1 Definições

Problemas sanduíche foram introduzidos por Golubic *et al.* em [17]. Nesse artigo foram consideradas propriedades relacionadas a grafos perfeitos (*split*, cografo, intervalo, comparabilidade).

Como já notado anteriormente, problemas sanduíche são generalizações de problemas de reconhecimento. Entretanto, não são todas as propriedades que despertam o interesse em sua versão sanduíche. Para propriedades cujo reconhecimento é NP-completo, o problema sanduíche correspondente também é NP-completo.

Uma propriedade Π é *ancestral* se, para todo grafo G que satisfaz Π , qualquer supergrafo de G também satisfaz Π . Uma propriedade Π é *hereditária* se, para todo grafo G que satisfaz Π , qualquer subgrafo de G também satisfaz Π . Propriedades ancestrais e hereditárias também não são interessantes para problemas sanduíche. Seja Π uma propriedade ancestral (hereditária). Se existe um grafo sanduíche G para um par (G^1, G^2) satisfazendo Π , então G^2 (G^1) também satisfaz Π . Essa característica torna o problema sanduíche para a propriedade Π equivalente ao problema de reconhecimento.

Chamamos os conjuntos de arestas E^1 , $E^0 = E^2 \setminus E^1$ e $E^3 = \overline{E^2}$, respectivamente, de arestas *forçadas*, *opcionais* e *proibidas*.

Seja Π uma propriedade. Definimos $\overline{\Pi}$ como sendo a propriedade complementar de Π . Se um dado grafo G satisfaz Π , seu complemento \overline{G} satisfaz $\overline{\Pi}$. Existe um grafo sanduíche com a propriedade Π para a instância (V, E^1, E^3) se, e somente se, existe um grafo sanduíche com a propriedade $\overline{\Pi}$ para a instância (V, E^3, E^1) .

2.2 Motivação

Os estudos sobre problemas sanduíche em grafos mostram que, na maioria dos casos, a complexidade dos problemas se torna NP-completo. Nossos estudos visam, além de classificar diversas classes de problemas, entender o que faz um problema polinomial se tornar NP-completo ou continuar polinomial em sua versão sanduíche.

Como exemplo dessa disparidade, citamos os problemas de reconhecimento CORTE-CLIQUE e CORTE-ESTRELA, ambos polinomiais [32, 7]. Esses dois problemas são problemas de decomposição similares, sendo corte-clique um caso especial de corte-estrela. Em suas versões sanduíche, esses problemas se comportam de maneira distinta, com CORTE-ESTRELA mantendo a polinomialidade [28] e até mesmo a complexidade $O(n^3)$, enquanto que CORTE-CLIQUE se torna NP-completo [28]. Além disso, esse resultado nos proporcionou a quebra de monotonia de problemas sanduíche, pois até então, não era conhecida uma propriedade que levasse a um problema sanduíche polinomial e uma subpropriedade que, ao contrário, nos levasse a um problema sanduíche NP-completo.

Uma vez que essas propriedades são problemas de decomposição, nos focamos em tais problemas. Problemas de decomposição, ou *problemas de*

partição são problemas cujo objetivo consiste em particionar o conjunto de vértices em número k de partes, satisfazendo algumas propriedades. Mais especificamente, direcionamos nossa atenção às M -partições. M -partições representam uma classe de problemas bastante estudada [4, 8, 15].

Além disso, não havia estudos relacionados a classe de grafos hereditários sem relação com grafos perfeitos. Por isso, iniciamos o estudos de tais classes começando com aquelas relacionadas à propriedade Helly.

Capítulo 3

Classes hereditárias

Neste capítulo, provamos que os problemas sanduíche para as classes de grafos: clique, clique-Helly, clique-Helly hereditário, e clique-Helly não-hereditário são todos NP-completos. O problema de reconhecimento para a classe dos grafos clique é um problema famoso recentemente resolvido. Concluimos este capítulo com uma discussão sobre o estudo da complexidade para problemas sanduíche para classes de grafos complementares.

3.1 Definições

Seja $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$ uma família, possivelmente infinita, de grafos. Uma *classe hereditária definida sobre \mathcal{H}* é o conjunto de grafos que não admitem nenhum grafo $H \in \mathcal{H}$ como subgrafo proibido. Chamamos \mathcal{H} de família de subgrafos proibidos. A propriedade Π equivale a pertencer a classe hereditária.

Problemas sanduíche para classes hereditárias têm sido bastante estudados. Como exemplo temos grafos cordais, de intervalo, *split*, cografos, entre outras [17]. Algumas classes importantes permanecem em aberto, como por exemplo grafos perfeitos e grafos sem garra (*claw-free*).

Dado um grafo $G = (V, E)$, um *conjunto completo* de G é um subconjunto

de V induzindo um subgrafo completo. Uma *clique* é um conjunto completo maximal.

Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de um conjunto S . Dizemos que \mathcal{F} satisfaz a *propriedade Helly* quando toda subfamília consistindo de subconjuntos dois a dois intersectantes possui uma interseção não vazia. Um grafo é *clique-Helly* quando sua família de cliques satisfaz a propriedade Helly. Um grafo é *clique-Helly hereditário* quando todos os seus subgrafos induzidos são clique-Helly. O *grafo clique de um grafo* é o grafo de interseção da família de suas cliques. G é um *grafo clique* se existe um grafo H tal que G é o grafo clique de H . Os problemas de reconhecimento para as classes de grafos clique-Helly e de grafos clique-Helly hereditário são conhecidos como polinomiais. O problema de reconhecimento para a classe de grafos clique é um problema famoso recentemente resolvido [1].

Teorema 3.1 (Roberts e Spencer [21]) *Um grafo G é um grafo clique se e somente se existe uma cobertura de arestas por completos satisfazendo a propriedade Helly.*

Tal família de completos é chamada de uma *família-RS*. Se G admite uma família-RS, então G admite uma pequena família-RS com no máximo $|E|$ conjuntos, pois toda aresta precisa ser coberta por pelo menos um completo, e qualquer subfamília de uma família que satisfaz a propriedade Helly também satisfaz a propriedade Helly. Logo, a caracterização dada no Teorema 3.1 fornece um certificado para a classe de grafos clique, pois a propriedade Helly para uma família de subconjuntos pode ser testada em tempo polinomial no número de subconjuntos [2, 21, 23]. Por outro lado, o reconhecimento de grafos clique foi recentemente provado ser NP-completo [1].

A família de cliques de G é uma cobertura de arestas por completos, assim segue que grafos clique-Helly são grafos clique. Um algoritmo polinomial

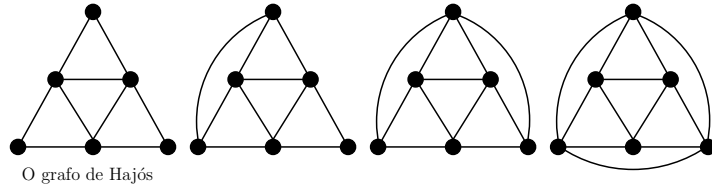


Figura 3.1: Grafos induzidos proibidos para grafos clique-Helly hereditários

de reconhecimento para a classe de grafos clique-Helly foi apresentado em [14] e independentemente em [22]. Esse algoritmo é uma consequência de uma caracterização de grafos clique-Helly baseada no conceito de triângulo estendido. Um *triângulo* T de um grafo G é um conjunto completo contendo exatamente três vértices. O *triângulo estendido* de G relativo ao triângulo T é definido em [22] como o subgrafo induzido em G pelos vértices adjacentes a pelo menos dois vértices de T e é denotado T' . Um *vértice universal* em um grafo é um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo.

Teorema 3.2 (Dragan [14], Szwarcfiter [22]) *Um grafo G é um grafo clique-Helly se e somente se todo triângulo estendido de G contém um vértice universal.*

Um algoritmo polinomial de reconhecimento para a classe de grafos clique-Helly hereditários foi apresentado em [20]. Esse algoritmo usa uma família finita de subgrafos induzidos proibidos, os então chamados *grafos oculares* mostrados na Figura 3.1.

Dado um grafo G e um triângulo $T = \{x_1, x_2, x_3\}$, dizemos que T gera um grafo ocular em G se existem vértices y_1, y_2 e y_3 tais que o vértice y_1 não é adjacente a x_1 e é adjacente a x_2 e x_3 , o vértice y_2 não é adjacente a x_2 e é adjacente a x_1 e x_3 , e o vértice y_3 não é adjacente a x_3 e é adjacente a x_1 e x_2 . O grafo à esquerda na Figura 3.1 é conhecido como *grafo de Hajós* e o triângulo que gera esse grafo ocular particular e conhecido como o

triângulo central do grafo de Hajós. Grafos oculares foram definidos em [31] como uma ferramenta para o estudo da propriedade Helly e foram mostrados em [20] serem as configurações proibidas minimais para grafos clique-Helly hereditários.

Teorema 3.3 (Prisner [20]) *Um grafo G é grafo clique-Helly hereditário se e somente se G não contém nenhum dos quatro grafos mostrados na Figura 3.1 como um subgrafo induzido.*

Claramente, dos Teoremas 3.2 e 3.3 podemos também reconhecer em tempo polinomial se um grafo é clique-Helly não-hereditário.

3.2 Grafos clique-Helly hereditário

Provamos que o PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE é NP-completo através de uma redução do problema NP-completo 3-SAT. Esses dois problemas são definidos como segue.

3-SAT ENTRADA: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, coleção $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas em X tal que cada cláusula $c \in C$ possui $|c| = 3$ literais.

QUESTÃO: Existe uma atribuição verdade para X tal que toda cláusula em C possui pelo menos um literal verdadeiro?

PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE ENTRADA: Dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, onde $E^1 \subseteq E^2$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ para o par (G^1, G^2) , tal G seja clique-Helly hereditário?

Teorema 3.4 *O PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE é NP-completo.*

Prova. O PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE está em NP pois um certificado é um grafo sanduíche G que é clique-Helly hereditário junto com o algoritmo de tempo polinomial para reconhecimento de grafos clique-Helly hereditário.

Para que possamos reduzir 3-SAT para o PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE, precisamos construir, em tempo polinomial, uma instância particular (V, E^1, E^2) de PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE a partir de uma instância genérica (X, C) de 3-SAT, tal que C é satisfatível se e somente se (V, E^1, E^2) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ que é clique-Helly hereditário.

Seja (X, C) uma instância genérica de 3-SAT. Assumimos, sem perda de generalidade, que cada variável ocorre tanto como literal positivo, quanto como negativo. Para cada variável X_i , começamos criando quatro *vértices variável*: x_i, \bar{x}_i, a_i e b_i . Para cada cláusula $c_j = \{\ell_r, \ell_s, \ell_t\}$, onde $\ell_u, u \in \{r, s, t\}$ é um literal da variável X_u , adicionamos a V os *vértices cláusula* y_{jr}, y_{js} e y_{jt} . O conjunto V contém $4n$ vértices variável, mais $3m$ vértices cláusula.

Observe a Figura 3.2, onde representamos as arestas forçadas como arestas contínuas, e as arestas opcionais como arestas pontilhadas. Cada tripla de vértices cláusula correspondentes à cláusula c_j induz um triângulo T_j em G^1 , chamado *triângulo cláusula*. Vértices a_i, b_i, x_i, \bar{x}_i induzem um diamante forçado D_i , chamado *diamante variável*, composto por dois triângulos que compartilham um aresta $x_i\bar{x}_i$.

Sejam y_{jr}, y_{js}, y_{jt} os vértices cláusula de um triângulo cláusula T_j . Se o vértice cláusula $y_{ju}, u \in \{r, s, t\}$, corresponde ao literal positivo da variável X_u , então adicionamos a aresta opcional $x_u y_{ju}$, duas arestas obrigatórias $x_u y_{jw}$, para $w \neq u$, e a aresta forçada $a_u y_{ju}$. Se o vértice cláusula $y_{ju}, u \in$

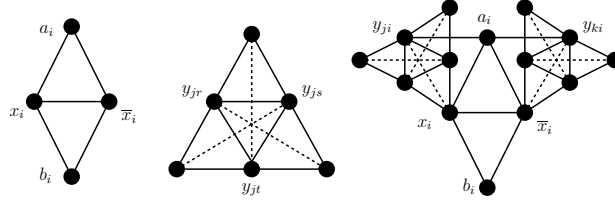


Figura 3.2: Diamante variável forçado, grafo de Hajós cláusula forçado e composição

$\{r, s, t\}$, corresponde ao literal negativo da variável X_u , então adicionamos a aresta opcional $\bar{x}_u y_{ju}$, duas arestas obrigatórias $\bar{x}_u y_{jw}$, para $w \neq u$, e a aresta forçada $a_u y_{ju}$. A construção da instância particular (V, E^1, E^2) está concluída.

Primeiramente, mostramos que, dado um grafo sanduíche G para o par (G^1, G^2) , se G contém um grafo ocular como subgrafo induzido, então esse grafo ocular é de fato um grafo de Hajós. Além disso, mostramos que existem apenas dois casos para os triângulos que os geram.

Observe a Figura 3.2. Primeiramente, note que se o triângulo $T = \{y_{jr}, y_{js}, y_{jt}\}$, formado pelos três vértices cláusula de uma cláusula c_j , gera um grafo ocular em G , esse subgrafo é de fato um grafo de Hajós, pois não existem arestas unindo dois vértices variável correspondentes a variáveis distintas. Chamamos tal subgrafo de *grafo de Hajós cláusula*.

Agora, verifique que se o triângulo $T = \{a_i, x_i, \bar{x}_i\}$, formado por três vértices variável de uma variável X_i , gera um grafo ocular, esse subgrafo também é um grafo de Hajós, pois b_i possui grau dois em G^2 , e não existem arestas unindo dois vértices cláusula correspondentes a cláusulas distintas. Chamamos tal subgrafo de *grafo de Hajós variável*.

As duas únicas possibilidades de um triângulo além destas são: $T = \{b_i, x_i, \bar{x}_i\}$, para algum i , uma vez que b_i não possui outros vizinhos, T nunca

pode gerar um grafo ocular em G ; $T = \{v, l, z\}$, onde v é um vértice variável, l é um vértice cláusula e z é vértice cláusula ou variável, e nesse caso é fácil verificar que T nunca pode gerar um grafo ocular em G .

Usaremos a caracterização do Teorema 3.3. Pela construção, está claro que G^1 e G^2 contêm, respectivamente, um grafo de Hajós cláusula e um grafo de Hajós variável, impedindo que tanto G^1 quanto como G^2 sejam clique-Helly hereditário.

Suponha inicialmente que C é satisfatível, e considere uma atribuição verdade para X tal que cada cláusula c_j em C possui pelo menos um literal verdadeiro. Para definir o grafo sanduíche G , se X_i possui valor verdadeiro, adicione a E , para toda cláusula c_j onde X_i ocorre como literal positivo, a aresta opcional $y_{ji}x_i$; se X_i possui valor falso, adicione a E , para toda cláusula c_j onde X_i ocorre como literal negativo, a aresta opcional $y_{ji}\bar{x}_i$. Note que no grafo sanduíche construído G , para cada variável X_i , ou todas as arestas opcionais incidentes ao vértice x_i , ou todas as arestas opcionais incidentes ao vértice \bar{x}_i estão presentes. Logo, todo grafo de Hajós variável em G^2 é evitado em G . Adicionalmente, note que no grafo sanduíche construído G , para cada cláusula c_j , pelo menos uma aresta opcional é adicionada ao grafo de Hajós cláusula forçado correspondente. Logo, todo grafo de Hajós cláusula em G^1 é evitado em G .

Finalmente, suponha que G é um grafo sanduíche clique-Helly hereditário para a instância particular construída (V, E^1, E^2) . Segue que G não contém nenhuma das configurações proibidas mostradas na Figura 3.1. Pela construção da instância particular (V, E^1, E^2) , o grafo G^1 contém um grafo de Hajós cláusula forçado para cada cláusula. Assim, no grafo sanduíche clique-Helly hereditário G , para cada grafo de Hajós cláusula forçado, foi adicionado pelo menos uma aresta opcional. Adicionalmente, G não pode, para uma variável

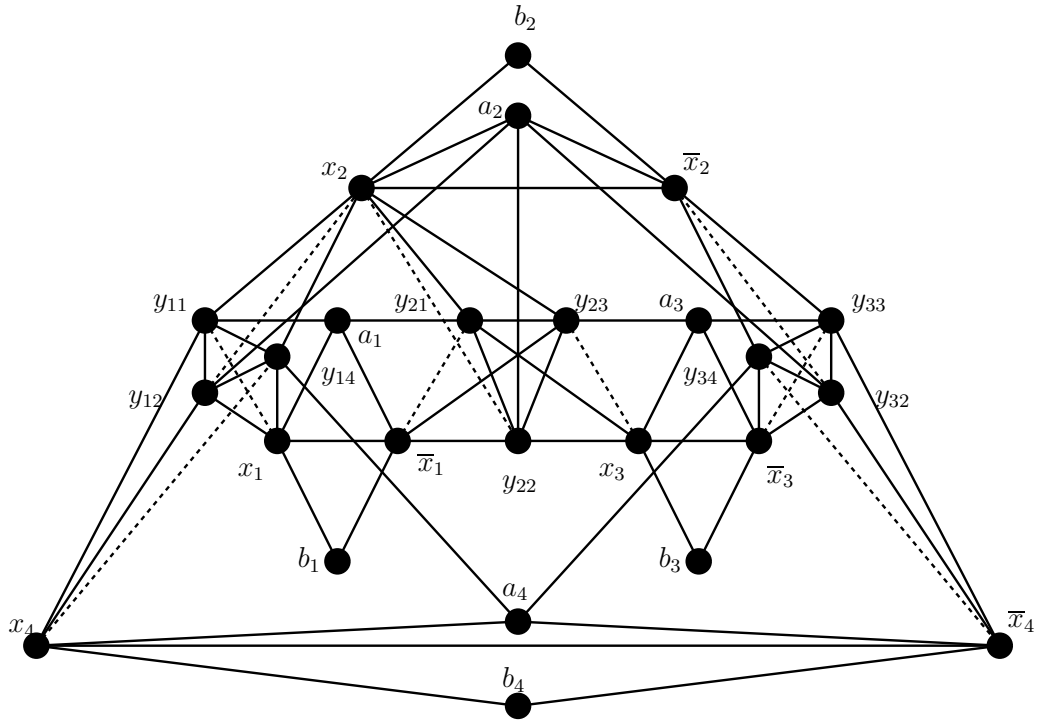


Figura 3.3: Exemplo de instância construída de (V, E^1, E^2) correspondendo às cláusulas (x_1, x_2, x_4) , (\bar{x}_1, x_2, x_3) e $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

X_i , ter uma aresta opcional incidente ao vértice x_i e uma aresta opcional incidente ao vértice \bar{x}_i presentes ao mesmo tempo, pois isso levaria a um grafo de Hajós variável em G^2 . Logo, podemos construir uma atribuição verdade que satisfaz C selecionando a variável X_i como verdadeira se existir em G uma aresta $y_{ji}x_i$ para alguma cláusula c_j onde X_i ocorre como literal positivo, e selecionando a variável X_i como falsa caso contrário. ■

A Figura 3.3 mostra um exemplo de uma instância construída no Teorema 3.4. Representamos as arestas forçadas como arestas contínuas, e as arestas opcionais como arestas pontilhadas.

Em seqüência, aprofundamos o estudo das propriedades da instância particular construída no Teorema 3.4 e provamos, no Teorema 3.5 e no Teorema

3.6, respectivamente, que o PROBLEMA CLIQUE-HELLY SANDUÍCHE e o PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE são NP-completos.

PROBLEMA CLIQUE-HELLY SANDUÍCHE ENTRADA: Dois grafos

$G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, onde $E^1 \subseteq E^2$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ para o par (G^1, G^2) , tal G seja clique-Helly?

Teorema 3.5 *O PROBLEMA CLIQUE-HELLY SANDUÍCHE é NP-completo.*

Prova. Para que possamos estabelecer a dificuldade do problema, realizamos a mesma redução de 3-SAT do Teorema 3.4. É suficiente mostrar que todo grafo sanduíche de (V, E^1, E^2) que é clique-Helly também é clique-Helly hereditário. Por contradição, suponha que um grafo sanduíche G de (V, E^1, E^2) é clique-Helly mas não clique-Helly hereditário. Pelo Teorema 3.3, G possui como subgrafo induzido um dos grafos da Figura 3.1. Denote-o como G' . Pelas observações presentes na prova do Teorema 3.4, G' ou é um grafo de Hajós cláusula ou é um grafo de Hajós variável. Em ambos os casos, existem dois vértices variáveis v_1 e v_2 em G' . Note que esses dois vértices variável podem ser correspondentes à mesma variável ou não. Uma vez que G é clique-Helly, pelo Teorema 3.2, existe um vértice v adjacente a todos os vértices de G' . Lembre que todo vértice de V é um vértice cláusula ou um vértice variável. Uma vez que o grau de um vértice cláusula é no máximo 6, e nesse caso, seus 6 vizinhos nunca induzem um grafo de Hajós, concluimos que v é um vértice variável. Temos uma contradição, pois não existe nenhum vértice variável fora de G' adjacente a v_1 e v_2 . ■

Agora, direcionamos nossa atenção para o PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE e apresentamos uma prova simples de sua NP-completude.

PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE ENTRADA: Dois grafos

$G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, onde $E^1 \subseteq E^2$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ para o par (G^1, G^2) , tal que G seja um grafo clique?

Inicialmente, precisamos de um lema auxiliar. Esse lema é uma consequência de um resultado mais geral estabelecido em [18].

Lema 3.1 *Seja G um grafo contendo um grafo de Hajós H como subgrafo induzido. Se o triângulo central T de H não estiver contido em um K_4 , então G não é um grafo clique.*

Prova. Para conseguir uma contradição, assuma que temos uma família-RS \mathcal{C} para G . Consideramos dois casos com respeito ao triângulo central T de H pertencer ou não a \mathcal{C} . Sejam h_1, h_2, h_3 os vértices de T e h_4, h_5, h_6 os outros vértices de H , tais que $h_4h_2, h_4h_3, h_5h_1, h_5h_2, h_6h_1, h_4h_6 \in E$. No caso em que os vértices h_i, h_j, h_k definem um triângulo, denote esse triângulo por T_{ijk} . Seja H_{pq} um completo de \mathcal{C} cobrindo a aresta h_ph_q .

Primeiramente, suponha que $T \notin \mathcal{C}$. Uma vez que T não está contido em um K_4 , a subfamília de completos distintos H_{12}, H_{13}, H_{23} de \mathcal{C} não satisfaz a propriedade Helly, uma contradição.

Finalmente, suponha que $T \in \mathcal{C}$. Se $h_2 \notin H_{34}$ e $h_3 \notin H_{24}$, então H_{24}, H_{34} e T não satisfazem a propriedade Helly. Logo, existem os completos $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$, tais que $h_1, h_3, h_6 \in C_1$, $h_1, h_2, h_5 \in C_2$, e $h_2, h_3, h_4 \in C_3$. E C_1, C_2, C_3 contém um vértice comum se e somente se $T \subseteq K_4$, uma contradição. ■

Teorema 3.6 *O PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE é NP-completo.*

Prova. O PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE está em NP pois um certificado é um grafo sanduíche G que é um grafo clique, e uma pequena

família-RS para G junto com o algoritmo de tempo polinomial para a propriedade Helly.

Novamente, realizamos uma redução de 3-SAT usando a mesma instância particular do Teorema 3.4. Seja (V, E^1, E^2) a instância particular construída. Uma vez que, pelo Teorema 3.1, todo grafo clique-Helly hereditário é um grafo clique, é suficiente mostrar que todo grafo sanduíche de (V, E^1, E^2) que é um grafo clique também é clique-Helly hereditário. Por contradição, suponha que o grafo sanduíche G de (V, E^1, E^2) é um grafo clique mas não é clique-Helly hereditário. Assim, pelo Teorema 3.3 e pelas observações do Teorema 3.4, G contém um grafo de Hajós cláusula ou um grafo de Hajós variável. Denote-o como G' . Uma vez que G é um grafo clique, pelo Lema 3.1, o triângulo central de G' deve estar contido em um K_4 . Se G' é um grafo de Hajós cláusula, então seu triângulo central é da forma $T = \{y_{kr}, y_{ks}, y_{kt}\}$. Uma vez que, dado $u \in \{r, s, t\}$, o único vértice adjacente a y_{ku} e não contido em G' é o vértice variável a_u , e a_u não é adjacente aos outros vértices de T , temos que esse triângulo central não está em um K_4 . Finalmente, se G' é um grafo de Hajós variável, seu triângulo central é da forma $T = \{a_i, x_i, \bar{x}_i\}$. Esse triângulo central não está em um K_4 , pois não existe vértice de G^2 adjacente a esses três vértices. ■

3.3 Grafos clique-Helly não-hereditário

Não podemos concluir a partir dos Teoremas 3.4 e 3.5 que o problema sanduíche para grafos clique-Helly não-hereditários é NP-completo. O Teorema 3.7 prova que o PROBLEMA CLIQUE-HELLY NÃO-HEREDITÁRIO SANDUÍCHE é NP-completo através de uma redução do problema NP-completo SAT. Os dois problemas de decisão são definidos como segue:

SAT ENTRADA: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, coleção

$C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas em X .

QUESTÃO: Existe uma atribuição verdade para X tal que toda cláusula em C possui pelo menos um literal verdadeiro?

PROBLEMA CLIQUE-HELLY NÃO-HEREDITÁRIO SANDUÍCHE ENTRADA: Dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, onde $E^1 \subseteq E^2$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ para o par (G^1, G^2) , tal G seja clique-Helly não-hereditário?

Teorema 3.7 *O PROBLEMA CLIQUE-HELLY NÃO-HEREDITÁRIO SANDUÍCHE é NP-completo.*

Prova. O PROBLEMA CLIQUE-HELLY NÃO-HEREDITÁRIO SANDUÍCHE está em NP pois um certificado é um grafo sanduíche que é clique-Helly não-hereditário junto com os algoritmos de tempo polinomial para clique-Helly e clique-Helly hereditário.

Seja (X, C) uma instância genérica de SAT. Assumimos sem perda de generalidade que cada variável ocorre tanto como literal positivo, quanto como literal negativo.

Cada cláusula c_j corresponde a uma cópia H_j do grafo de Hajós em G^1 . Cada par de cláusulas distintas c_j, c_k corresponde a um vértice auxiliar d_{jk} adjacente em G^1 a dois vértices em cada um dos triângulos centrais dos grafos Hajós correspondentes H_j e H_k (veja Figura 3.4).

Como cada variável X_i ocorre tanto como literal positivo quanto como literal negativo, para cada variável X_i , temos três vértices: o *vértice literal* x_i representa as ocorrências da variável X_i como literal positivo, o *vértice literal* \bar{x}_i representa as ocorrências da variável X_i como literal negativo, e o vértice X_i representa a variável. Esses três vértices x_i, \bar{x}_i, X_i induzem um *triângulo variável* T_i em G^1 .

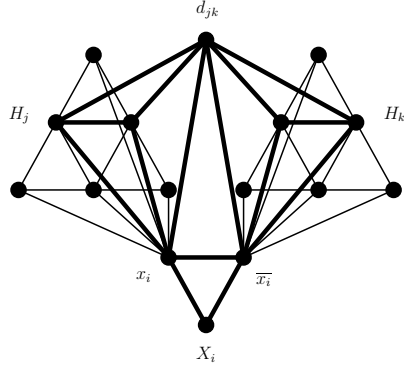


Figura 3.4: Em G^2 , o triângulo estendido relativo ao triângulo $\{x_i, \bar{x}_i, d_{jk}\}$ não possui vértice universal.

Concluimos a construção da instância particular (V, E^1, E^2) definindo o conjunto de arestas opcionais $E^2 \setminus E^1$. Suponha que o literal $\ell \in c_j$. Ele corresponde ao vértice literal $\ell \in V$. Adicionamos a $E^2 \setminus E^1$ seis arestas opcionais ℓz , uma para cada vértice z do grafo de Hajós H_j . Além disso, para cada vértice auxiliar d_{jk} , adicionamos a $E^2 \setminus E^1$ a aresta opcional ℓd_{jk} .

Note que todo grafo sanduíche G de (V, E^1, E^2) não é clique-Helly hereditário, pois, para toda cláusula, existe um grafo de Hajós como subgrafo induzido de G . Logo, um grafo sanduíche G de (V, E^1, E^2) é clique-Helly não-hereditário se e somente se G é clique-Helly. Usaremos a caracterização do Teorema 3.2 para grafos clique-Helly.

Primeiramente, suponha que C é satisfatível, e considere uma atribuição verdade para X tal que toda cláusula c_j em C possua pelo menos um literal verdadeiro. Para definir um grafo sanduíche G , adicione a E , para cada grafo de Hajós H_j correspondente a cláusula c_j , as arestas opcionais que fazem que exatamente um dos literais verdadeiros da cláusula c_j seja adjacente a todo vértice de H_j e a todo vértice d_{jk} . Seja L o conjunto dos literais verdadeiros escolhidos. Note que toda aresta opcional possui uma extremidade em L . E, para um triângulo estendido presente em G^1 , digamos T' , com um vértice z ,

se ℓz , onde $\ell \in L$, foi adicionada a E na construção de G , então $\ell z'$, para todo vértice $z' \in V(T')$, foi igualmente adicionado a E . Isso implica que todos os triângulos estendidos de G^1 possuem vértices universais em G . Ainda é necessário analisar os triângulos estendidos de G não presentes em G^1 . Tais triângulos contêm precisamente um vértice literal e esse vértice é universal com respeito ao triângulo estendido relacionado.

Por outro lado, suponha que G é um grafo clique-Helly sanduíche para a instância particular (V, E^1, E^2) . Então, todo triângulo estendido de G possui um vértice universal. Seja c_j uma cláusula, e considere seu grafo de Hajós correspondente H_j . Em G , o triângulo estendido relacionado ao triângulo central de H_j possui um vértice universal. Esse vértice universal é um vértice literal correspondente a um literal da cláusula c_j . Para uma variável X_i , suponha que seu literal positivo ocorra em c_j e seu literal negativo ocorra em c_k . Se, em G ambos os vértices literais x_i e \bar{x}_i são universais com respeito aos grafos Hajós correspondentes H_j e H_k , então o triângulo estendido relacionado a x_i , \bar{x}_i , d_{jk} não possui vértice universal. Veja Figura 3.4. Logo, para cada variável X_i , se seu literal positivo é universal com respeito a um grafo de Hajós associado a uma cláusula, então selecione a variável X_i como verdadeira, caso contrário, selecione X_i como falsa. Obtemos assim a atribuição verdade desejada. ■

A Figura 3.5 mostra um exemplo de uma instância construída na prova do Teorema 3.7. Representamos as arestas forçadas como arestas contínuas, e as arestas opcionais incidentes a d_{jk} como arestas pontilhadas. Cada grafo de Hajós está desenhado dentro de um quadrado e representamos as seis arestas opcionais que fazem o literal $\ell \in c_j$ universal com respeito ao grafo de Hajós H_j por uma linha pontilhada unindo ℓ ao quadrado.

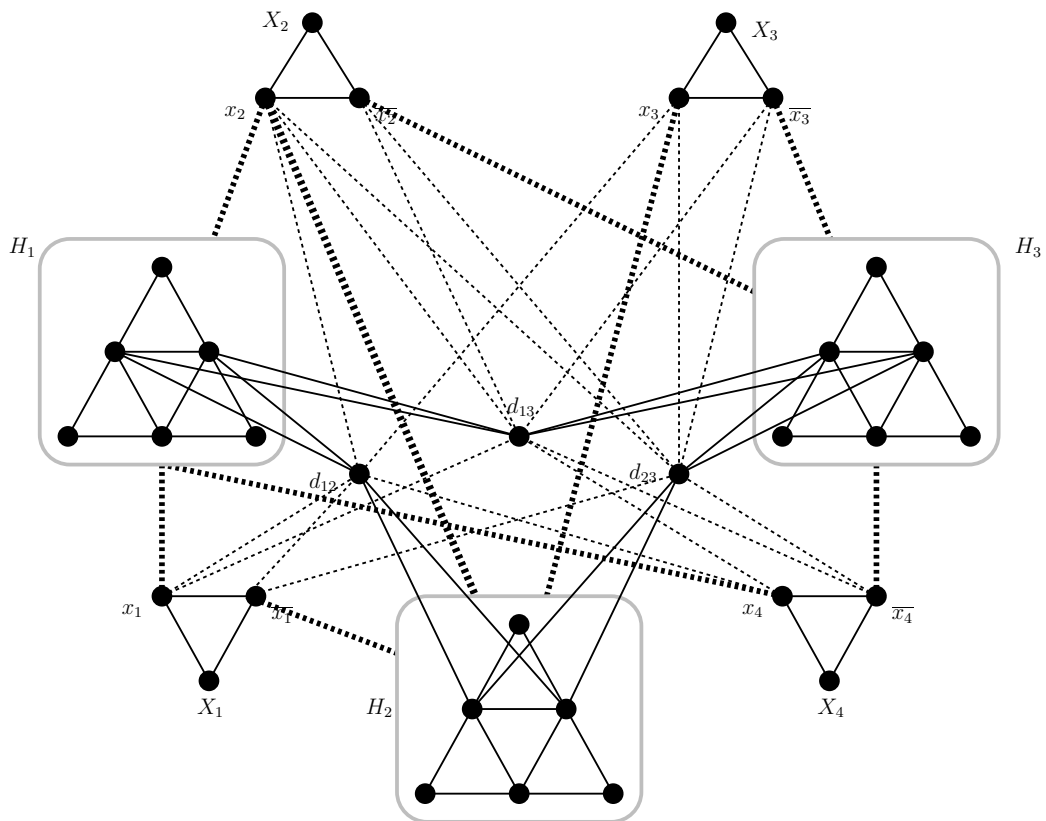


Figura 3.5: Exemplo de instância construída de (V, E^1, E^2) correspondendo às cláusulas (x_1, x_2, x_4) , (\bar{x}_1, x_2, x_3) e $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

3.4 Considerações finais

Apresentamos quatro provas de NP-completude, estabelecendo que o PROBLEMA CLIQUE-HELLY SANDUÍCHE, o PROBLEMA CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO SANDUÍCHE, o PROBLEMA CLIQUE-HELLY NÃO-HEREDITÁRIO SANDUÍCHE e o PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE são NP-completos. Enfatizamos que a NP-completude do reconhecimento de grafos clique é um problema resolvido recentemente e implica diretamente na NP-completude de PROBLEMA GRAFO CLIQUE SANDUÍCHE. Este capítulo propôs uma prova de NP-completude simples para a versão sanduíche do problema.

Uma linha de pesquisa interessante consiste em investigar outras classes complementares de grafos com respeito à complexidade dos problemas sanduíche correspondentes. É bem conhecido que é possível decidir em tempo polinomial se um grafo é cordal e se é de intervalo. Logo, também é decidir possível em tempo polinomial se um grafo é cordal mas não de intervalo. A complexidade dos problemas sanduíche correspondentes: PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS e PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE INTERVALO foram consideradas em [17], onde os dois problemas sanduíche são provados serem NP-completos. Nesse caso, podemos concluir que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS NÃO-INTERVALO também é NP-completo. De forma mais geral, considere três classes de grafos \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , tais que $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2$. Se tanto \mathcal{C}_1 como \mathcal{C}_2 são hereditárias em relação a subgrafos induzidos, e se \mathcal{C}_1 corresponde a um problema sanduíche NP-completo, então \mathcal{C}_3 também corresponde a um problema sanduíche NP-completo. Enfatizamos que os resultados do presente capítulo investigam o caso em que \mathcal{C}_1 não é hereditária em relação a subgrafos induzidos. De fato, considere agora de novo três classes, digamos \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , tais que $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2$. Se tanto \mathcal{C}_1 como \mathcal{C}_2 correspondem a problemas de

reconhecimento polinomial, então \mathcal{C}_3 também corresponde a um problema de reconhecimento polinomial. Para os problemas sanduíche correspondentes, as complexidades dos problemas sanduíche para \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não determinam a complexidade do problema sanduíche para \mathcal{C}_3 , ainda que tanto \mathcal{C}_1 como \mathcal{C}_2 correspondam a problemas sanduíche polinomiais: dada um instância do problema sanduíche para \mathcal{C}_1 , ela pode admitir um grafo sanduíche que pertence a \mathcal{C}_2 e outro grafo sanduíche que pertence a \mathcal{C}_3 .

Capítulo 4

Partições

4.1 Definições

Seja M uma matriz quadrada de ordem k simétrica, construída sob $\{0, 1, *\}$. Uma M -partição de $V(G)$ é uma partição do conjunto de vértices de G em pelo menos k partes A_1, \dots, A_k , sujeitas às restrições especificadas pela matriz M . A matriz M relaciona cada parte a uma de suas linhas, de forma que cada elemento de M estabelece as restrições, que são de dois tipos: internas ou externas. Uma *restrição interna* é representada pelos elementos na diagonal de M . Para cada linha i , se $a_{ii} = 0$ ($1, *$), a parte A_i induz um conjunto independente (clique, grafo qualquer) em G . Uma *restrição externa* é representada pelos elementos fora da diagonal. Para cada duas linhas i, j , se $a_{ij} = 0$ ($1, *$), as partes A_i, A_k possuem nenhuma (todas, qualquer) arestas entre si no grafo G . Assim podemos podemos definir os seguintes problemas:

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO PARA UMA MATRIZ M ENTRADA:

Um grafo $G = (V, E)$.

QUESTÃO: O grafo G admite uma M -partição?

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO SEM PARTE VAZIA ENTRADA: Um

grafo $G = (V, E)$.

QUESTÃO: O grafo G admite uma M -partição, tal que nenhuma parte $A_i = \emptyset$?

Problemas de partições são bem conhecidos e bastante estudados. Entre esses tipos de problemas temos grafos *split*, bipartidos, 3-coloríveis, corte-clique, corte estável, corte-estrela [17, 16, 19, 3, 32]. Em especial, para todas as matrizes M de ordem 3, o PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO SEM PARTE VAZIA correspondente está classificado como polinomial ou NP-completo [15], e para toda matriz M de ordem 4, com exceção de uma (*stubborn*), o PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO está classificado como polinomial ou NP-completo [4].

Dados um grafo G e, para todo $v \in V(G)$, um conjunto $\mathcal{L}(v) \subseteq \{A_i, \dots, A_k\}$, podemos definir a seguinte particularização de problemas de M -partição:

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS ENTRADA: Um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de listas $\mathcal{L}(v)$ para todo $v \in V$.

QUESTÃO: O grafo G admite uma M -partição, tal que $v \in A$ somente se $A \in \mathcal{L}(v)$?

Note que PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS é equivalente a PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO quando, para todo $v \in V$, $\mathcal{L}(v) = \{A_i, \dots, A_k\}$. Essa característica torna o problema de listas tão ou mais difícil que o problema original.

Podemos definir esses três problemas em suas respectivas versões sanduíche:

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO SANDUÍCHE ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) , onde $E^1 \cap E^3 = \emptyset$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$, tal que G admita uma M -partição?

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO SEM PARTE VAZIA SANDUÍCHE ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) , onde $E^1 \cap E^3 = \emptyset$.
 QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$, tal que G admita uma M -partição, tal que nenhuma parte $A_i = \emptyset$?

PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) e um conjunto de listas $\mathcal{L}(v)$ para todo $v \in V$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$, tal que G admita uma M -partição, onde $v \in A$ somente se $A \in \mathcal{L}(v)$?

Seguindo uma analogia com problemas sanduíche, denotamos as restrições decorrentes de um elemento 1 na matriz M de *restrição forçada*, e as restrições decorrentes de um elemento 0 de *restrição proibida*.

4.2 Partições em três partes

Nesta tese, classificamos o PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO DE TRÊS PARTES NÃO VAZIAS SANDUÍCHE para todas matrizes M de ordem 3 distintas. Para isso, precisamos enumerar todas as matrizes de forma que duas matrizes que definem propriedades equivalentes nunca sejam listadas mais de uma vez. Além disso, excluímos da enumeração matrizes que definem propriedades hereditárias ou ancestrais, visto que tais propriedades não despertam interesse. As matrizes que definem propriedades hereditárias são aquelas que não possuem nenhum elemento $a_{ij} = 0$. Analogamente, as matrizes que definem propriedades ancestrais são aquelas que não possuem nenhum elemento $a_{ij} = 1$.

4.2.1 Critérios de enumeração

O complemento \overline{M} de uma matriz M é obtido trocando cada 0 por 1 e cada 1 por 0, deixando os * inalterados. Duas matrizes M e M' são isomorfas se elas representam a mesma partição de M ou \overline{M} . Ou seja, M' pode ser obtida de M ou \overline{M} apenas trocando a ordem das linhas e das colunas correspondentes às mesmas partes. Matrizes isomorfas sempre definem a mesma propriedade, ou a propriedade complementar. Assim, estamos interessados apenas nas matrizes não isomorfa entre si.

Todavia, existem critérios de enumeração que nos permitem eliminar toda matriz isomórfica a outra. O conjunto de regras apresentado a seguir está adaptado para matrizes de ordem 3. Porém, não é difícil estender esse conjunto de regras para abranger ordens maiores.

1. Inicialmente, partimos da matriz com apenas * como elementos;
2. Ordenamos as matrizes primeiramente pelo número de restrições internas e depois pelo número de restrições externas, começando sempre com a possibilidade de não existir nenhuma restrição;
3. Geramos as matrizes trocando um * por um 1 ou por um 0.
4. Em primeiro lugar, preenchemos a diagonal, relacionadas com as restrições internas;
5. Fixamos um 0 na primeira posição, caso possível;
6. Colocamos no máximo um 1 na diagonal, e sempre imediatamente depois de um 0;
7. Começamos a preencher fora da diagonal pela posição mais à esquerda e por linha.

8. Se $a_{kk} = a_{ll}$ para $k < l$, $a_{km} = 1$ somente se $a_{lm} = 1$;
9. Se $a_{kk} = a_{ll}$ para $k < l$, $a_{km} = *$ somente se $a_{lm} = *$;
10. Se a diagonal for autocomplementar, colocamos no máximo um 1 fora da diagonal, especificamente, se $a_{11} = 0$, $a_{22} = 1$ e existem somente duas restrições externas, então $a_{12} = 0$;
11. Não existe linha sem 0 ou sem 1;
12. Para evitar propriedades hereditárias ou ancestrais, colocamos sempre pelo menos um 0 e pelo menos um 1.

A Figura 4.1 lista todas as matrizes de acordo com as regras citadas acima. Associamos um número a cada matriz, de acordo com sua posição na lista. Identificamos, a partir de agora, cada matriz como M_x , onde x é a sua posição na lista.

Definimos os problemas relativos às matrizes listadas como segue:

PROBLEMA DE M_x -PARTIÇÃO SEM PARTE VAZIA SANDUÍCHE
(3NPM_xSP) ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) ,
onde $E^1 \cap E^3 = \emptyset$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$, tal que G
admita uma M_x -partição, tal que nenhuma parte $A_i = \emptyset$?

4.2.2 Ferramentas de solução

As 61 matrizes listadas na Figura 4.1 representam 58 problemas sanduíche que classificamos como polinomial ou NP-completo e mais três problemas já classificados anteriormente: corte-clique (M_3) e (2,1)-partição (M_{38}), NP-completos [28, 9] e conjunto homogêneo (M_1) [28, 5, 9], polinomial.

$\begin{bmatrix} * & 0 & 1 \\ 0 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & * & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 1 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 1 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$
(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 1 \\ * & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 1 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$
(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$
(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix}$
(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)	(56)
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		
	(57)	(58)	(59)	(60)	(61)		

Figura 4.1: Lista de todas as matrizes de ordem 3 a menos de isomorfismos

Para classificar os 58 problemas restantes, desenvolvemos sete ferramentas auxiliares. A Tabela 4.1 lista as ferramentas e os problemas que elas resolvem. As ferramentas se aplicam de acordo com as propriedades das matrizes. Certas matrizes satisfazem os requisitos para mais de uma ferramenta, entretanto, o uso das ferramentas não é indiscriminado e suas aplicações se restringem aos problemas aqui listados.

Ferramentas	Problemas	Classe
Redução a duas partes	6, 30, 40, 54, 56, 58.	Polinomial
Corte estável, 3-coloração	7, 12, 16, 23, 28, 36, 39, 41, 45, 48, 55, 59.	<i>NP</i> -completo
Vértice universal	9, 22, 29, 34, 35, 46, 52, 53, 57, 61.	Polinomial
Partição desconexa	2, 8, 10, 11, 13, 19, 21, 24, 26, 31, 33, 37, 50.	Polinomial
Conjunto homogêneo	4, 5, 27	Polinomial
Parte unitária	15, 17, 18, 25, 32, 44, 47.	Polinomial
3-SAT	14, 20, 42, 43, 49, 51, 60.	<i>NP</i> -completo

Tabela 4.1: As sete ferramentas e seus problemas correspondentes

Algumas ferramentas referem-se a um problema de partição em duas partes não vazias. Obtemos a matriz M_y associada a esses problemas de duas partes removendo uma linha da matriz M_x . O problema está definido abaixo.

PROBLEMA DE M_y -PARTIÇÃO SEM PARTE VAZIA SANDUÍCHE

($2NPM_ySP$) ENTRADA: Uma tripla de conjuntos (V, E^1, E^3) ,

onde $E^1 \cap E^3 = \emptyset$.

QUESTÃO: Existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$, tal que G

admita uma M_y -partição, tal que nenhuma parte $A_i = \emptyset$?

A resolução desse tipo de problema é feita através de uma redução a 2-SAT, onde as arestas do problema de M_x -partição original definem o conjunto de cláusulas. Esse artifício foi usado em [17] para resolver SPLIT SANDUÍCHE, porém pode ser estendido para qualquer matriz M_y . Podemos fixar alguns vértices em uma das partições do problema de M_x -partição original, definindo adicionalmente algumas cláusulas unitárias.

4.2.3 Redução a duas partes

Nessa ferramenta, a matriz M_x , onde $x \in \{6, 30, 40, 54, 56, 58\}$, possui duas linhas iguais. O problema relacionado a M_x pode ser reduzido a um problema de duas partes $2NPM_ySP$ se as duas linhas forem unificadas. Uma vez que abordamos apenas problemas de parte não vazia, acrescentamos uma restrição de cardinalidade à nova parte resultante. Essa nova restrição é resolvida fixando um dos vértices à parte resultante. Essa restrição impede que a nova parte seja unitária, de forma que sempre teremos um vértice para cada uma das partes originais. Assim, resolvemos o problema com um algoritmo polinomial, que resolve n problemas 2-SAT obtidos ao fixar à nova parte cada um dos vértices de V .

4.2.4 Corte estável, 3-coloração

Sejam as matrizes M_S e M_C , respectivamente, as matrizes de ordem 3 dos únicos problemas de partição em três partes não-vazias NP-completos: CORTE ESTÁVEL[3, 19] e 3-COLORAÇÃO[16] (Figura 4.2). A matriz M_x , onde $x \in T_2 = \{7, 12, 16, 23, 28, 36, 39, 41, 45, 48, 55, 59\}$, é obtida da matriz M_S ou M_C trocando algumas entradas * por 1. Se $x \in T_2$, então uma redução polinomial mostra que $3NPM_xSP$ é NP-completo. Se G é uma instância de CORTE ESTÁVEL ou 3-COLORAÇÃO, então (V, E^1, E^3) tal que $E^1 = E$ e $E^3 = \emptyset$ é a instância requerida para $3NPM_xSP$.

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 4.2: Matrizes para CORTE ESTÁVEL e 3-COLORAÇÃO

4.2.5 Vértice universal

A matriz M_x ou \overline{M}_x , onde $x \in \{9, 22, 29, 34, 35, 46, 52, 53, 57, 61\}$, possui uma linha i com todas as entradas iguais a 1. Chamamos a parte A_i de *parte universal*. Se $3NPM_xSP$ possui uma solução, então todo vértice localizado na parte A_i é um vértice universal em G^2 . Assim, os vértices extremos de arestas em E^3 não podem estar localizados em A_i e devem ser posicionados nas duas partes restantes.

Nós nos referimos à matriz M_y obtida partir de M_x removendo a coluna i e a linha i correspondentes à parte universal A_i . A matriz M_y representa um problema sanduíche de M_y -partição em duas partes não vazias ($2NPM_ySP$).

O Algoritmo 1 opera posicionando todos os vértices universais na parte A_i , e resolvendo o problema associado ($2NPM_ySP$).

Algoritmo 1 Algoritmo de M_x -partição com Vértice Universal

Entrada: (V, E^1, E^2) **Saída:** SIM ou NÃO

```
1:  $\mathcal{U} \Leftarrow \{u \in V \mid u \text{ é um vértice universal em } G^2\}$ 
2:  $P \Leftarrow V \setminus \mathcal{U}$ 
3: se  $\mathcal{U} = \emptyset$  então
4:   retorna NÃO
5: senão se  $|\mathcal{U}| \leq |V| - 2$  então
6:   se  $2\text{NPM}_y\text{SP}((P, E^1(P), E^2(P))) = \text{SIM}$  então
7:     retorna SIM
8:   senão
9:     para todo  $u \in \mathcal{U}$  e  $|\mathcal{U}| > 1$  faça
10:       se  $2\text{NPM}_y\text{SP}((P \cup \{u\}, E^1(P \cup \{u\}), E^2(P \cup \{u\}))) = \text{SIM}$  então
11:         retorna SIM
12:       retorna NÃO
13:   senão
14:     para todo  $u, v \in \mathcal{U}$  faça
15:       se  $2\text{NPM}_y\text{SP}((\{u, v\}, E^1(\{u, v\}), E^2(\{u, v\}))) = \text{SIM}$  então
16:         retorna SIM
17:     retorna NÃO
```

O Teorema 4.1 mostra que, dada uma instância sanduíche, O Algoritmo 1 decide corretamente se ela admite uma M_x -partição.

Teorema 4.1 *Algoritmo 1 decide corretamente se (V, E^1, E^2) admite um grafo sanduíche G que é M_x , $x \in \{9, 22, 29, 34, 35, 46, 52, 53, 57, 61\}$.*

Prova. Primeiramente, mostramos que toda vez que o Algoritmo 1 retorna SIM, existe um grafo sanduíche G que admite uma M_x -partição. Se o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 7, então o conjunto de vértices não universais P admite uma M_y -partição (A_j, A_k) . Fazemos $A_i = \mathcal{U}$.

Se o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 11, então o conjunto de vértices não universais P não admite nenhuma M_y -partição. Entretanto, existe um vértice universal u , tal que $P \cup \{u\}$ admite uma M_y -partição (A_j, A_k) , ou seja, P está inteiramente contido em uma parte e u é o único vértice na outra

parte. Fazemos $A_i = \mathcal{U} \setminus \{u\}$.

Finalmente, se o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 16, então todos os vértices são universais, o que significa que G^2 é uma clique. Nesse caso, o Algoritmo 1 encontra dois vértices u e v que admitem uma M_y -partição (A_j, A_k) , onde $A_j = \{u\}$ e $A_k = \{v\}$. Fazemos $A_i = \mathcal{U} \setminus \{u, v\}$.

Construímos o grafo sanduíche G adicionando a G^1 as arestas opcionais necessárias para satisfazer as restrições internas e externas cheias de A_i , A_j e A_k determinadas por M_x .

Por outro lado, suponha que o Algoritmo 1 pára com resposta NÃO e existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_x -partição (A_i, A_j, A_k) , onde A_i é a parte universal e $A_j \cup A_k$ admite uma M_y -partição. Pela definição de parte universal, todo vértice localizado em A_i é um vértice universal em G^2 , assim o Algoritmo 1 não retorna NÃO na linha 4. Seja \mathcal{U} o conjunto de vértices universais de G^2 .

Se $(A_j \cup A_k) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, então o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 7.

Se $2 \leq |(A_j \cup A_k) \cap \mathcal{U}| < |V|$, então distinguiamos dois casos. No primeiro caso, $(A_j \cup A_k) \setminus \mathcal{U}$ admite uma M_y -partição e então o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 7. No segundo caso, $(A_j \cup A_k) \setminus \mathcal{U}$ não admite uma M_y -partição. Assim, todos os vértices não universais de $A_j \cup A_k$ pertencem ou a A_j , ou a A_k . Sem perda de generalidade, assuma que eles pertencem a A_j . Dessa forma, todos os vértices A_k são universais. Podemos definir outra M_x -partição $Q' = \{A'_i, A'_j, A'_k\}$, onde $A'_j = A_j \setminus \mathcal{U}$, $A'_k = \{v\}$, $v \in A_k$, e $A'_i = A_i \cup (\mathcal{U} \cap A_j) \cup (A_k \setminus \{v\})$. Uma vez que Q' também é uma M_x -partição: A'_i é composto por vértices universais, e $A'_j \cup A'_k$ admite uma M_y -partição; então Algoritmo 1 retorna SIM na linha 11.

Se $(A_j \cup A_k) \setminus \mathcal{U} = \emptyset$, todos os vértices são universais. Uma vez que $A_j \cup A_k$ admite uma M_y -partição, o Algoritmo 1 retorna SIM na linha 16. ■

4.2.6 Partição desconexa

A matriz M_x ou \overline{M}_x , onde $x \in \{2, 8, 10, 11, 13, 19, 21, 24, 26, 31, 33, 37, 50\}$, satisfaz $m_{ij} = m_{ik} = 0$ e $m_{ii} \neq 0$, para algum i . Uma vez que a parte A_i possui restrições proibidas para qualquer outra parte, não existe nenhuma aresta forçada entre vértices de A_i e vértices em outra parte. Isso implica que, se $3\text{NPM}_x\text{SP}$ possui uma solução, então G^1 deve ser desconexo. Chamamos a parte A_i de *parte desconexa*.

Similarmente à ferramenta anterior, nós nos referimos à matriz M_y obtida a partir da M_x removendo a coluna i e a linha i correspondentes à parte desconexa A_i . Resolvemos $3\text{NPM}_x\text{SP}$ considerando as componentes conexas de G^1 e resolvendo um número polinomial de problemas sanduíche de M_y -partição em duas partes não vazias ($2\text{NPM}_y\text{SP}$).

Dividimos em dois casos: $m_{ii} = *$ e $m_{ii} = 1$. O Algoritmo 2 apresenta uma solução para a M_x com $m_{ii} = *$, ou seja, $x \in \{2, 8, 10, 11, 13, 21, 26, 31, 33, 37\}$.

nameAlgoritmo

Algoritmo 2 Algoritmo de M_x -partição com Parte Desconexa sem Restrição

Entrada: (V, E^1, E^2)

Saída: SIM ou NÃO

- 1: $\mathcal{C} \leftarrow \{C_1, \dots, C_l\}$ {conjunto de componentes conexas de G^1 }
 - 2: **se** $|\mathcal{C}| = 1$ **então**
 - 3: **retorna** NÃO
 - 4: **senão**
 - 5: **para todo** $C \in \mathcal{C}$ **faça**
 - 6: **se** $2\text{NPM}_y\text{SP}((C, E^1(C), E^2(C))) = \text{SIM}$ **então**
 - 7: **retorna** SIM
 - 8: **para todo** $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ **faça**
 - 9: **se** $2\text{NPM}_y\text{SP}((C_1 \cup C_2, G^1(C_1 \cup C_2), G^2(C_1 \cup C_2))) = \text{SIM}$ **então**
 - 10: **retorna** SIM
 - 11: **retorna** NÃO
-

Teorema 4.2 *O Algoritmo 2 testa corretamente a existência de um grafo sanduíche G tal que G é M_x , $x \in \{2, 8, 10, 11, 13, 21, 26, 31, 33, 37\}$.*

Prova. Primeiramente, mostramos que, toda vez que o Algoritmo 2 retorna SIM, existe um grafo sanduíche G que é M_x . O Algoritmo 2 pode retornar SIM nas linhas 7 e 10. Então, existe uma componente conexa C (resp. componentes conexas C_1 e C_2) de G^1 admitindo uma M_y -partição (A_j, A_k) . O grafo sanduíche desejado G com uma M_x -partição (A_i, A_j, A_k) é dado pela parte desconexa $A_i = \mathcal{C} \setminus C$ (resp. $A_i = \mathcal{C} \setminus (C_1 \cup C_2)$), e adicionando todas as arestas opcionais de forma a satisfazer as restrições internas e externas cheias da M_y -partição.

Observamos que, no caso que $A_i = \mathcal{C} \setminus (C_1 \cup C_2)$, podemos sempre assumir que ou $A_j = C_1$ e $A_k = C_2$, ou $A_j = C_2$ e $A_k = C_1$. Caso contrário, temos que Algoritmo 2 retorna SIM na linha 7.

Por outro lado, suponha que existe um grafo sanduíche G que é M_x , e o Algoritmo 2 retorna NÃO. Seja (Q_1, Q_2, Q_3) a M_x -partição de G com a parte desconexa Q_1 . Pela definição de M_x -partição, G^1 possui mais de uma componente conexa. Assim, o Algoritmo 2 não retorna NÃO na linha 3.

Seja $\{C_1, \dots, C_k\}$, $k \geq 1$ o conjunto de componentes conexas de G^1 . Uma vez que Q_2 e Q_3 são conjunto não vazios, para $1 \leq i \leq k$, um dos seguintes casos ocorre: $C_i \subseteq Q_2 \cup Q_3$, $C_i \subseteq Q_2$, ou $C_i \subseteq Q_3$. Isso implica que o algoritmo retorna SIM na linha 7 ou na linha 10. ■

Uma abordagem diferente é empregada quando $m_{ii} = 1$. Nesse caso, a parte desconexa A_i deve induzir uma clique em G^2 . O Teorema 4.3 apresenta uma caracterização para M_{19} e M_{24} , e o Teorema 4.4 apresenta uma caracterização para M_{50} .

Teorema 4.3 *Dada uma instância sanduíche (V, E^1, E^2) , existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_x -partição, $x \in \{19, 24\}$ se, e somente se, G^1*

é desconexo e existe uma componente conexa C de G^1 , tal que C induz uma clique em G^2 e $|V \setminus C| \geq 2$.

Prova. Suponha que exista um grafo sanduíche G admitindo uma M_x -partição (A_i, A_j, A_k) . Pela definição de M_x , a parte desconexa A_i induz uma clique em G^2 , e deve ser formada por pelo menos uma componente conexa de G^1 . Uma vez que A_j e A_k são conjuntos não vazios, $|V \setminus C| \geq 2$.

Por outro lado, suponha que exista uma componente conexa C de G^1 , tal que C induz uma clique em G^2 e $|V \setminus C| \geq 2$. Construimos o grafo sanduíche desejado G com uma M_x -partição (A_i, A_j, A_k) como segue. Em primeiro lugar, fazemos a parte desconexa $A_i = C$. Seja A_j tal que $m_{jj} = *$, $j \neq i$, e seja $v \in V \setminus C$. Uma vez que não existe restrição externa entre as partes A_j e A_k , e não existe restrição interna na parte A_j , fazemos $A_k = \{v\}$ e $A_j = V \setminus (\{v\} \cup C)$. Finalmente, adicionamos todas as arestas opcionais entre vértices de C de forma a satisfazer as restrições internas forçadas. ■

Teorema 4.4 *Dada uma instância sanduíche (V, E^1, E^2) , existe um grafo sanduíche G que é M_{50} se, e somente se, G^1 é desconexo e pelo menos uma das seguintes propriedades valerem:*

- *Toda componente conexa não unitária C em G^1 induz um grafo bipartido em G^1 , e pelo menos uma delas induz uma clique em G^2 ;*
- *pelo menos uma das componentes conexas induz um grafo bipartido em G^1 ; a união de todas as componentes conexas não unitárias C , tal que C não induz um grafo bipartido em G^1 , induz uma clique em G^2 ;*
- *nenhuma componente conexa não unitária induz um grafo bipartido em G^1 , e a união dessas componente induz uma clique em G^2 ; existem pelo menos duas componentes conexas unitárias em G^1 ;*

Prova. Primeiramente, suponha que existe um grafo sanduíche admitindo uma M_{50} -partição (A_i, A_j, A_k) , com a parte desconexa A_i . Claramente, G^1 é desconexo e A_i induz uma clique em G^2 . Se A_i induz um grafo bipartido em G^1 , então a primeira propriedade vale. Se A_i não induz um grafo bipartido em G^1 , distinguimos dois casos: no primeiro caso, se $A_j \cup A_k$ não induz um conjunto independente em G^1 , então a segunda propriedade vale; caso contrário, a terceira propriedade vale.

Por outro lado, suponha que pelo menos uma das três propriedades vale. Considerando o grafo G^1 : seja \mathcal{C} o conjunto de componentes conexas não unitárias C tal que C induz um grafo bipartido com partição (B_1, B_2) ; seja \mathcal{R} o conjunto de componentes conexas não unitárias R tal que R não induz um grafo bipartido; e seja \mathcal{U} o conjunto de componentes conexas unitárias.

Suponha que a primeira propriedade vale. Assim, $\mathcal{R} = \emptyset$ e existe uma componente conexa não unitária $C' \in \mathcal{C}$ que induz uma clique em G^2 . Se $|\mathcal{C}| = 1$, uma vez que G^1 é desconexo, então $|\mathcal{U}| \geq 1$. Fazemos a parte desconexa $A_i = U' \in \mathcal{U}$, as partes $A_j = B_1$ e $A_k = \bigcup_{U \in \mathcal{U} \setminus U'} U \cup B_2$. Se $|\mathcal{C}| > 1$, fazemos $A_i = C'$, $A_j = B_1 \setminus C'$, e $A_k = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \cup (B_2 \setminus C')$.

Agora, suponha que a segunda propriedade vale. Assim, $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ induz uma clique em G^2 . Fazemos a parte desconexa $A_i = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$, $A_j = B_1$, e $A_k = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \cup B_2$.

Finalmente, suponha que a terceira propriedade vale. Assim, $\mathcal{C} = \emptyset$, e $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ induz uma clique em G^2 e $|\mathcal{U}| \geq 2$. Fazemos a parte desconexa $A_i = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$, a parte $A_j = U' \in \mathcal{U}$, e $A_k = \bigcup_{U \in \mathcal{U} \setminus U'} U$.

Nestes três casos, A_i induz uma clique em G^2 , $A_j \cup A_k$ induz um grafo bipartido em G^1 e construímos o grafo sanduíche G adicionando todas as arestas opcionais entre vértices de A_i de forma a satisfazer a restrição interna que faz com que A_i seja uma clique. ■

4.2.7 Conjunto homogêneo

A matriz M_1 representa o PROBLEMA DE CONJUNTO HOMOGÊNEO SANDUÍCHE. A matriz M_x , onde $x \in \{4, 5, 27\}$, é obtida de M_1 pela adição de uma restrição que permite uma solução polinomial através de uma modificação no algoritmo apresentado em [5]. Para i qualquer, $m_{ij} = 1$ e $m_{ik} = 0$.

Resolvemos $3NPM_xSP$ aplicando uma versão modificada do algoritmo para conjunto homogêneo sanduíche apresentado por Cerioli *et al.* [5]. Nesse algoritmo, as partes $A = A_1$, $B = A_2$ e $C = A_3$, de acordo com nossa notação, são denotadas, respectivamente, por \mathcal{H} , \mathcal{N} e \mathcal{A} , onde \mathcal{H} é o conjunto homogêneo, \mathcal{N} é a parte com restrição proibida para \mathcal{H} , e \mathcal{A} é a parte com restrição forçada para \mathcal{H} .

Primeiramente mostramos versões modificadas desse algoritmo para resolver respectivamente os problemas para as matrizes M_4 e M_5 .

No $3NPM_4SP$, o conjunto homogêneo \mathcal{H} é um conjunto independente. Fazemos a correspondência das partes da seguinte forma: $\mathcal{H} = A$, $\mathcal{A} = C$ e $\mathcal{N} = B$. Nesse caso, o algoritmo deve começar com dois vértices não adjacentes. Se o algoritmo encontra um conjunto homogêneo, ele verifica se esse conjunto homogêneo é um conjunto independente.

No $3NPM_5SP$, a parte \mathcal{N} com restrição proibida para o conjunto homogêneo é um conjunto independente. Fazemos a correspondência das partes da seguinte forma: $\mathcal{H} = B$, $\mathcal{A} = C$ e $\mathcal{N} = A$. No decorrer do algoritmo, todos os pares de vértices u, v , tais que $u, v \in \mathcal{N}$ e uv é uma aresta forçada, devem ser transferidos para \mathcal{H} .

Agora, apresentamos um algoritmo para $3NPM_{27}SP$ com um outra abordagem. No $3NPM_{27}SP$, a parte \mathcal{N} com restrição proibida para o conjunto homogêneo é um conjunto independente e a parte \mathcal{A} com restrição forçada para o conjunto homogêneo é uma clique. Para esse problema, assumimos a

correspondência das partes como segue: $\mathcal{H} = C$, $\mathcal{A} = B$ e $\mathcal{N} = A$. Note que se existem dois vértices distintos a, b , tais que, a é um vértice isolado de G^1 e b é um vértice universal de G^2 , então o problema possui uma solução trivial onde $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = V \setminus \{a, b\}$. O Algoritmo 3 resolve $3NPM_{27}SP$, quando não existe nenhum vértice universal em G^2 . Um algoritmo similar pode ser obtido para o caso em que não existe nenhum vértice isolado em G^1 . Denotamos como $N^1(A) = \{v \in V : \exists a \in A \text{ com } va \in E^1\}$. Denotamos como $N^3(B) = \{v \in V : \exists b \in B \text{ com } vb \in E^3\}$.

Algoritmo 3 Algoritmo $3NPM_{27}SP$

Entrada: (V, E^1, E^2)

Saída: SIM ou NÃO

```

1: para todo  $v \in V$  faça
2:    $P \leftarrow \emptyset$ 
3:    $B \leftarrow \{v\}$ 
4:   enquanto  $P \neq B$  faça
5:      $P \leftarrow B$ 
6:      $A \leftarrow N^3(B) \cup A$ 
7:     se  $A$  não é um conjunto independente de  $G^1$  então
8:       vá para 1
9:      $B \leftarrow N^1(A) \cup B$ 
10:    se  $B$  não é uma clique  $G^2$  então
11:      vá para 1
12:    se  $A \cup B \neq V$  então
13:       $C \leftarrow V \setminus A \cup B$ 
14:    retorna SIM
15: retorna NÃO

```

Teorema 4.5 *Dado uma instância sanduíche $\mathcal{I} = (V, E^1, E^2)$, o Algoritmo 3 decide corretamente se uma instância sanduíche de entrada (V, E^1, E^2) admite um grafo sanduíche G e uma partição \mathcal{Q} tal que \mathcal{Q} é uma M_{27} -partição de G .*

Prova. Primeiramente, precisamos mostrar que se o Algoritmo 3 retorna SIM, então existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_{27} -partição \mathcal{Q} . No

laço da linha 4, os conjuntos A e B são aumentados, de modo que cada vértice $a \in A$ tem seus vizinhos forçados em B , e cada vértice $b \in B$ tem seus vizinhos proibidos em A . O laço termina quando A não é um conjunto independente, B não é uma clique, ou os conjuntos param de aumentar. Assim, fazemos $C = V \setminus (A \cup B)$, e se $C \neq \emptyset$, então o Algoritmo 3 retorna SIM na linha 14. Nesse caso, não existe nenhuma aresta proibida entre vértices de C e B , e não existe nenhuma aresta forçada entre vértices de C e A . Note que C é um conjunto homogêneo, A induz um conjunto independente em G^1 , e B induz uma clique em G^2 . Isso descreve uma M_{27} -partição.

Reciprocamente, precisamos mostrar que, se existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_{27} -partição \mathcal{Q} , então o Algoritmo 3 retorna SIM. Suponha que existe um grafo sanduíche G e uma M_{27} -partição $\mathcal{Q} = (A', B', C')$, onde C' é o conjunto homogêneo, A' é conjunto independente, e B' é a clique.

Seja K o conjunto de vértices isolados de G^1 , e $K' = K \cap B'$. Definimos a partição $\mathcal{Q}' = (A', B'', C'')$, tal que $B'' = B' \setminus K'$, e $C'' = C' \cup K'$. Note que \mathcal{Q}' também é M_{27} -partição. Note ainda que todos os vizinhos proibidos dos vértices de B'' pertencem a A' , e todos os vizinhos forçados dos vértices de A' pertencem a B'' . Lembre que não existe vértice universal em G^2 , assim todos os vértices de B'' possuem algum vizinho proibido em A' .

Seja $b \in B''$. Se definirmos $b = v$, na linha 1 do algoritmo, temos que, pelas notas acima, em cada repetição do laço das linhas 5–11, o conjunto $A \subseteq A'$ e o conjunto $B \subseteq B''$, então $A \cup B \subset V$ e o teste da linha 12 sempre é válido. O conjunto $C = V \setminus (A \cup B) = C'$ e o algoritmo retorna SIM na linha 14. ■

4.2.8 Parte unitária

$M_x, x \in \{15, 17, 18, 25, 32, 44, 47\}$, é a matriz tal que se $3NPM_xSP$ possui uma solução, então possui uma solução com uma *parte unitária* A_i . A parte A_i corresponde para cada uma dos sete problemas selecionados às seguintes partes: A, A, A, B, A, C, B . Para cada $v \in V$, selecionamos $A_i = \{v\}$ e obtemos um problema $2NPM_ySP$ sobre $V \setminus \{v\}$ com as restrições dadas pelas duas partes restantes. Dessa forma, obtemos um algoritmo polinomial, que resolve n problemas 2-SAT obtidos ao selecionar $A_i = \{v\}$, para cada $v \in V$.

4.2.9 3-SAT

Todas as matrizes M_x , onde $x \in \{14, 20, 42, 43, 49, 51, 60\}$, possuem uma redução de NP-completude de 1-EM-3 3-SAT (sem literais negativos). Esse problema de decisão é definido como segue.

1-EM-3 3-SAT (sem literais negativos) ENTRADA: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, coleção $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas em X tal que cada cláusula $c \in C$ possui $|c| = 3$ literais positivos. QUESTÃO: Existe uma atribuição verdade para X tal que toda cláusula em C possui exatamente um literal verdadeiro?

Nas provas a seguir, assumimos que os grafos de interseção das cláusulas são conexos. Essa restrição adicional ao conjunto de cláusulas não interfere na natureza do problema.

A Figura 4.3 mostra os diagramas que representam os sete problemas resolvidos pela ferramenta 3-SAT. Provamos que todos esses sete problemas são NP-completos reduzindo o problema NP-completo 1-EM-3 3-SAT (sem literais negativos) para eles. Nesta seção, apresentamos a prova de

NP-completude para os problemas $3NPM_{14}SP$ e $3NPM_{42}SP$. A prova para $3NPM_{20}SP$ é similar à prova para $3NPM_{41}SP$, e a prova para $3NPM_{43}SP$ é similar à prova para $3NPM_{42}SP$. As provas para $3NPM_{51}SP$ e $3NPM_{60}SP$ surgem como corolário de $3NPM_{42}SP$, a prova para $3NPM_{49}SP$ surge como corolário de $3NPM_{43}SP$.

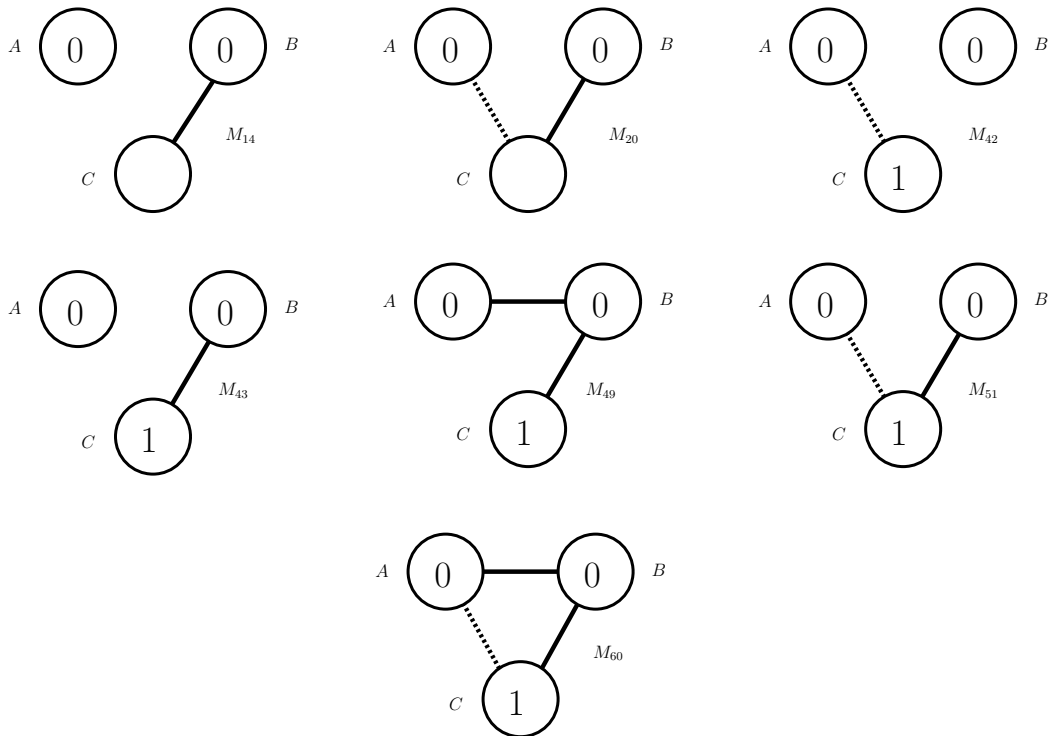


Figura 4.3: Diagramas dos problemas da ferramenta 3-SAT

Teorema 4.6 $3NPM_{14}SP$ é NP-completo.

Prova. Para reduzir 1-em-3 3-SAT para $3NPM_{14}SP$ precisamos construir em tempo polinomial uma instância particular (V, E^1, E^3) de $3NPM_{14}SP$ a partir de uma instância genérica (X, C) de 1-em-3 3-SAT, tal que C é 1-em-3 satisfatível se, e somente se, (V, E^1, E^3) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ que é M_{14} .

Primeiramente, descrevemos a construção de uma instância particular (V, E^1, E^3) de $3NPM_{14}SP$; em seguida provamos no Lema 4.1 que toda atribuição verdade 1-em-3 viável para (X, C) define um grafo $G = (V, E)$ que é M_{14} satisfazendo $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$; finalmente provamos no Lema 4.2 que todo grafo $G = (V, E)$, satisfazendo $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ é tal que G é M_{14} , define uma atribuição verdade 1-em-3 que satisfaz (X, C) . Esses passos são explicados em detalhe abaixo. ■

O conjunto de vértices V contém: vértices base b_k , $k = 1, \dots, 5$; para cada variável x_i , $i = 1, \dots, n$, existe um vértice variável x_i ; para cada cláusula $q^j = (l_p^j, l_r^j, l_s^j)$, $j = 1, \dots, m$, correspondente aos vértices variável x_p, x_r, x_s , existem os vértices cláusula q_p^j, q_r^j, q_s^j .

O conjunto de arestas forçadas E^1 contém: arestas entre vértices base $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, b_4b_5, b_5b_1$; arestas entre vértices cláusula $q_p^jq_r^j, q_r^jq_s^j, q_s^jq_p^j$; arestas entre vértices variável como segue: se x_r, x_s pertencem a uma mesma cláusula, então $x_r x_s$ é uma aresta forçada; arestas entre vértices variável e vértices cláusula: se a variável $x_i = q_p^j$, então $x_i q_r^j, x_i q_s^j$, onde q_r^j, q_s^j são os outros vértices cláusula da cláusula q^j , são arestas forçadas.

O conjunto de arestas proibidas E^3 contém: arestas entre vértices base: $b_1b_3, b_3b_5, b_5b_2, b_2b_4, b_4b_1$; arestas entre vértices base e vértices cláusula: $b_i q_p^j, b_i q_r^j, b_i q_s^j$, $i = 1, \dots, 5$; arestas entre vértices variável e vértices cláusula: se a variável $x_i \in q^j$, então $x_i q_i^j$ é uma aresta proibida.

A Figura 4.4(a) ilustra a relação entre os vértices base. A Figura 4.4(b) ilustra a relação entre os vértices cláusula e os vértices variável.

Para cada quatro vértices x_r, x_s, x_t, x_z , se existe pelo menos um vértice x_p formando as cláusulas $q^j = (x_p, x_r, x_s)$ e $q^l = (x_p, x_t, x_z)$, então existe um conjunto D_{rstz} de vértices auxiliares como segue: $D_{rstz} = \{d_{rt}^{sz}, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz}, d_{sz}^{rt}, d_{rstz}\}$; arestas forçadas: $d_{rt}^{sz} d_{rz}^{st}, d_{rz}^{st} d_{sz}^{rt}, d_{st}^{rz} d_{sz}^{rt}, d_{st}^{rz} d_{sz}^{rt}, x_r d_{rstz}, x_s d_{rstz}, x_t d_{rstz}, x_z d_{rstz}$;

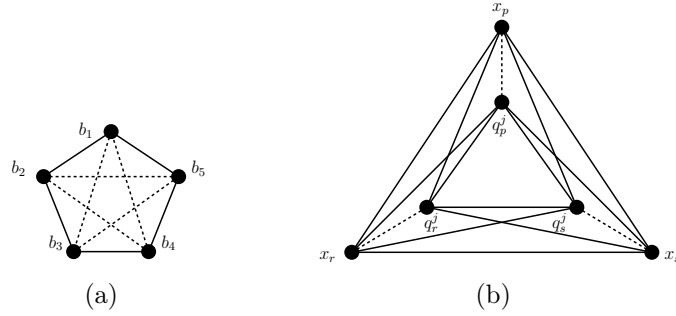


Figura 4.4: Conjunto de vértices cláusula e vértices base para $3NPM_{14}SP$

arestas proibidas: $x_r d_{rt}^{sz}, x_r d_{rz}^{st}, x_s d_{st}^{rz}, x_s d_{sz}^{rt}, x_t d_{rt}^{sz}, x_t d_{st}^{rz}, x_z d_{rz}^{st}, x_z d_{sz}^{rt}, d_{rt}^{sz} d_{rstz}, d_{rz}^{st} d_{rstz}, d_{st}^{rz} d_{rstz}, d_{sz}^{rt} d_{rstz}, d_{rstz} b_1, d_{rstz} b_2, d_{rstz} b_3, d_{rstz} b_4, d_{rstz} b_5$. Chamamos essa construção de estrutura de ligação de cláusulas tipo 1.

Para cada par de vértices x_s, x_t , tais que existem pelo menos dois vértices x_p, x_r formando as cláusulas $q^j = (x_p, x_r, x_s)$ e $q^l = (x_p, x_r, x_t)$, então existe um conjunto U_{st} de vértices auxiliares: $U_{st} = \{u_s^t, u_t^s, u_{st}\}$; arestas forçadas: $u_s^t u_t^s, x_s u_{st}, x_t u_{st}$; arestas proibidas: $x_s u_s^t, x_s u_t^s, x_t u_s^t, x_t u_t^s, u_s^t u_{st}, u_t^s u_{st}, u_{st} b_1, u_{st} b_2, u_{st} b_3, u_{st} b_4, u_{st} b_5$. Chamamos essa construção de estrutura de ligação de cláusulas tipo 2.

A Figura 4.5 ilustra essas duas estruturas de ligação.

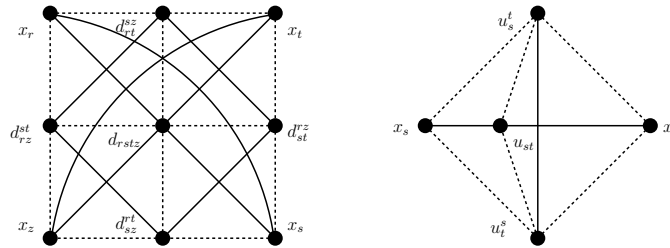


Figura 4.5: Estrutura de ligação de cláusulas tipos 1 e 2 para $3NPM_{14}SP$

Lema 4.1 *Se existe uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT viável, então*

existe um grafo sanduíche G , tal que G é M_{14} .

Prova. Suponha que exista uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT viável. Posicionamos os vértices da instância particular construída nas partes A , B , C como segue. Os vértices base são colocados na parte C . Se x_i é uma variável verdadeira, então coloque o vértice x_i na parte B . Se x_i é uma variável falsa, então coloque o vértice x_i na parte C . Seja $q^j = (l_p^j, l_r^j, l_s^j)$ uma cláusula, e $x_i = l_r^j$ sua variável verdadeira. Coloque q_r^j em A e q_p^j, q_s^j em C . Coloque os vértices auxiliares de D_{rstz} como segue. Se $x_s, x_z \in C$ e $x_r, x_t \in B$, então coloque d_{rt}^{sz} em B , $d_{rstz}, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz}$ em A e d_{sz}^{rt} em C . Se $x_r, x_s, x_t, x_z \in C$, então coloque $d_{rt}^{sz}, d_{rstz}, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz}, d_{sz}^{rt}$ em C . Coloque os vértices auxiliares de U_{st} como segue. Se $x_s, x_t \in B$, então coloque u_s^t em B e u_t^s, u_{st} em A . Se $x_s, x_t \in C$, então $u_s^t, u_t^s, u_{st} \in C$.

Agora, precisamos mostrar que A e B induzem dois conjuntos independentes em G^1 , e que não existe nenhuma aresta proibida ligando as partes B e C .

Apenas os vértices variável x_i , e os vértices de ligação de cláusulas d_{il} e u_i podem pertencer a B . Uma vez que temos uma atribuição verdade 1-em-3, para cada cláusula, exatamente um de seus vértices variável está em B . Assim não existe nenhuma aresta forçada entre vértices variável em B . Para cada estrutura de ligação D_{rstz} , apenas um vértice d_{il} pode pertencer a B . Para cada estrutura de ligação U_{st} , apenas um vértice u_i pode pertencer a B . Uma vez que não existe nenhuma aresta forçada entre conjuntos de ligação, tipo 1 ou tipo 2, diferentes, a parte B não contém nenhuma aresta forçada, logo B induz um conjunto independente em G^1 .

Apenas vértices cláusula q_i^j , e vértices de ligação de cláusulas podem pertencer a A . Para cada cláusula, apenas um vértice q_i^j pertence a A . Para cada estrutura de ligação D_{rstz} , apenas o vértice d_{rstz} e seus vizinhos proibidos

d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz} podem pertencer a A . Entretanto $d_{rz}^{st}d_{st}^{rz}$ é uma aresta opcional. Para cada estrutura de ligação U_{st} , apenas o vértice u_{st} e seu vizinho proibido u_s^t podem pertencer a A . Uma vez que não existe nenhuma aresta forçada entre conjuntos de ligação, tipo 1 ou tipo 2, diferentes, a parte A não contém nenhuma aresta forçada, logo A induz um conjunto independente em G^1 .

A única aresta proibida possível ligando as partes B e C são x_id_{il}, x_iu_i e x_iu_l . Entretanto, se $x_i \in B$ então d_{il}, u_i pertencem a B , e u_l pertence a A , ou o simétrico $u_l \in B$ e $u_i \in A$, e se $x_i \in C$, então $d_{il} \in A \cup C$ e $u_i, u_l \in C$.

Obtemos o grafo sanduíche G admitindo uma M_{14} -partição adicionando a E^1 todas as arestas opcionais entre as partes B e C . ■

Lema 4.2 *Se existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_{14} -partição, então existe uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT viável.*

Prova. Suponha que exista um grafo sanduíche $G = (V, E)$ tal que G é M_{14} . Seja (A, B, C) uma M_{14} -partição, onde a restrição externa forçada está localizada entre as partes B e C .

Construímos uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT como segue: a variável x_i é verdadeira se, e somente se, o vértice variável $x_i \in B$.

Uma vez que B é um conjunto independente, para mostrar que essa atribuição verdade é 1-em-3 e viável, é suficiente mostrar que, para cada cláusula, algum de seus vértices variável pertence a B .

Pela construção da instância de $3NPM_{14}SP$, podemos extrair algumas propriedades sobre a parte B . A primeira propriedade determina que alguns vértices nunca podem pertencer a B . Sem perda de generalidade, suponha que $b_1 \in B$. Assim, $b_3, b_4 \notin C$. Uma vez que b_3b_4 é uma aresta forçada, sem perda de generalidade, suponha que $b_3 \in B$ e $b_4 \in A$. Com isso, b_5 não pode pertencer a B , devido à aresta forçada b_1b_5 ; não pode pertencer a A , devido à aresta forçada b_4b_5 ; e não pode pertencer a C , devido à aresta proibida b_3b_5 .

Assim, b_1 não pode pertencer a B . Similarmente, b_2, b_3, b_4, b_5 não podem pertencer a B . Além disso, uma vez que o conjunto independente máximo do conjunto de vértices base possui tamanho 2, no máximo dois vértices base podem pertencer a A , o que implica que sempre existe algum vértice base em C , o que por sua vez implica que nenhum vértice cláusula q_r^j e nenhum vértice auxiliar d_{rstz} ou u_{st} podem pertencer a B .

Lembre que o problema é sem partes vazias, assim deve existir algum vértice v em B . Pela primeira propriedade, apenas vértices variável, vértices d e vértices u podem pertencer a B .

A segunda propriedade garante que sempre existe algum vértice variável em B . Seja $v \in B$. Se v é um vértice variável, a propriedade é válida. Se v é um vértice d_{st}^{rz} , então, pela Proposição 4.3, os vértices x_s, x_t pertencem a B . Se v é um vértice u_{st} , então, pela Proposição 4.4, os vértices x_s, x_t pertencem a B . Assim, sempre temos pelo menos um vértice variável em B .

Proposição 4.3 *Se $d_{rt}^{sz} \in D_{rstz} \setminus \{d_{rstz}\}$ pertence à parte B , então $x_r, x_t \in B$, $d_{rstz}, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz} \in A$ e $d_{sz}^{rt}, x_s, x_z \in C$.*

Prova. Sem perda de generalidade, suponha que $d_{rt}^{sz} \in B$. Isso implica que d_{rstz}, x_r, x_t não pertencem a C . Uma vez que d_{rstz} possui arestas proibidas para os vértices base, d_{rstz} não pode pertencer a B . Logo, d_{rstz} pertence a A . Uma vez que $d_{rstz} \in A$, temos que x_r, x_t não podem pertencer a A devido a arestas forçadas incidentes a d_{rstz} , assim x_r, x_t pertencem a B . Isso implica que d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz} não pertencem a C . Entretanto, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz} não pertencem a B devido a arestas forçadas incidentes a $d_{rt}^{sz} \in B$. Assim, d_{rz}^{st}, d_{st}^{rz} pertencem a A . Os vértices restantes d_{sz}^{rt}, x_s, x_z não podem pertencer a $A \cup B$ devido a vizinhos forçados pertencentes a B e A . Logo, d_{sz}^{rt}, x_s, x_z pertencem a C . Em resumo, $d_{rt}^{sz} \in B$ implica que os vértices x_r, x_t pertencem a B , e que os vértices x_s, x_z pertencem a C . Analogamente, $d_{rz}^{st} \in B$ implica que os vértices

x_r, x_z pertencem a B , e que os vértices x_s, x_t pertencem a C . $d_{st}^{rz} \in B$ implica que os vértices x_s, x_t pertencem a B , e que os vértices x_r, x_z pertencem a C . $d_{sz}^{rt} \in B$ implica que os vértices x_s, x_z pertencem a B , e que os vértices x_r, x_t pertencem a C . ■

Proposição 4.4 *Se $u_s^t \in U_{st} \setminus \{u_{st}\}$ pertence à parte B , então $x_s, x_t \in B$ e $u_t^s, u_{st} \in A$.*

Prova. Sem perda de generalidade, suponha que $u_s^t \in B$. Isso implica que u_{st}, x_s, x_t não pertence a C . Uma vez que u_{st} possui arestas proibidas para os vértices base, u_{st} não pode pertencer a B . Então u_{st} pertence a A . Uma vez que $u_{st} \in A$, x_s, x_t não podem pertencer a A devido a arestas forçadas incidentes a u_{st} , então x_s, x_t pertencem a B . Finalmente, o vértice u_t^s pertence a A devido aos vizinhos proibidos $x_s, x_t \in B$ e ao vizinho forçado $u_t^s \in B$. Obtemos resultado similar se partimos com $u_s^t \in B$. ■

Finalmente, considere um vértice variável $x_p \in B$. Claramente, todas as cláusulas contendo x_p são satisfeitas. Precisamos provar que todas as cláusulas $q_l = \{q_i^l, q_t^l, q_z^l\}$ que não contêm x_p também são satisfeitas. Para isso, distinguimos três casos. Caso 1: x_p e x_i pertencem à mesma cláusula, x_p e x_t não pertencem à mesma cláusula, e x_p e x_z não pertencem à mesma cláusula. Assim, pela estrutura de ligação tipo 1, x_p possui os vizinhos proibidos d_{pt} e d_{pz} . Uma vez que $x_p \in B$, temos que $d_{pt}, d_{pz} \notin C$. Entretanto, ambos os vértices não podem pertencer simultaneamente a B ou a A , devido à aresta forçada $d_{pt}d_{pz}$. Logo, exatamente um deles pertence a B . Pela Proposição 4.3, temos que ou x_t , ou x_z também pertence a B . Isso garante que q^l seja satisfeita. Caso 2: x_p, x_i e x_t pertencem à mesma cláusula, mas não x_z . Assim, pela estrutura de ligação tipo 2, x_p possui os vizinhos proibidos u_p^z e u_z^p . Uma vez que $x_p \in B$, temos que $u_p^z, u_z^p \notin C$. Entretanto, ambos os vértices não podem pertencer simultaneamente a B ou a A , devido à aresta forçada

$u_i u_z$. Logo, exatamente um deles pertence a B . Pela Proposição 4.4, temos que x_z também pertence a B . Isso garante que q^l seja satisfeita. Caso 3: Nenhuma das variáveis de q^l compartilha uma cláusula com x_p . Lembre que o 1-em-3 3-SAT é conexo. Isso implica que sempre existe um caminho entre alguma cláusula q^j contendo x_p e q^l . Assim, aplicando os Casos 1 e 2 aos vértices variável das cláusulas desse caminho, podemos alcançar q^l . Como resultado, todas as cláusulas do caminho são satisfeitas. ■

A Figura 4.6 ilustra uma instância construída para as cláusulas (x_1, x_2, x_3) , (x_2, x_3, x_4) , (x_4, x_5, x_1) .

Teorema 4.7 $3NPM_{42}SP$ é *NP-completo*.

Prova. Para reduzir 1-em-3 3-SAT para $3NPM_{42}SP$, precisamos construir, em tempo polinomial, uma instância particular (V, E^1, E^3) de $3NPM_{42}SP$ a partir de uma instância genérica (X, C) de 1-em-3 3-SAT, tal que C é 1-em-3 satisfatível se, e somente se, (V, E^1, E^3) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ que é M_{42} .

Primeiramente, descrevemos a construção de uma instância particular (V, E^1, E^3) de $3NPM_{42}SP$; em seguida, provamos no Lema 4.5 que toda atribuição verdade 1-em-3 satisfatível para (X, C) define um grafo $G = (V, E)$ que é M_{42} que satisfaz $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$; e finalmente, provamos no Lema 4.6 que todo $G = (V, E)$, satisfazendo $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ e tal que G é M_{42} , define uma atribuição verdade 1-em-3 viável para (X, C) . Esses passos são explicados em detalhes abaixo. ■

O conjunto de vértices V contém: vértices base b_k , $k = 1, \dots, 7$; para cada variável x_i , $i = 1, \dots, n$, existe um vértice variável x_i ; para cada cláusula $q^j = (l_1^j, l_2^j, l_3^j)$, $j = 1, \dots, m$, existem os vértices cláusula $q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j$.

O conjunto de arestas forçadas E^1 contém: arestas entre vértices base $b_1 b_3, b_1 b_4, b_2 b_3, b_2 b_4, b_3 b_5, b_3 b_6, b_4 b_6, b_4 b_7, b_5 b_6, b_5 b_7, b_6 b_7$; arestas entre vértices

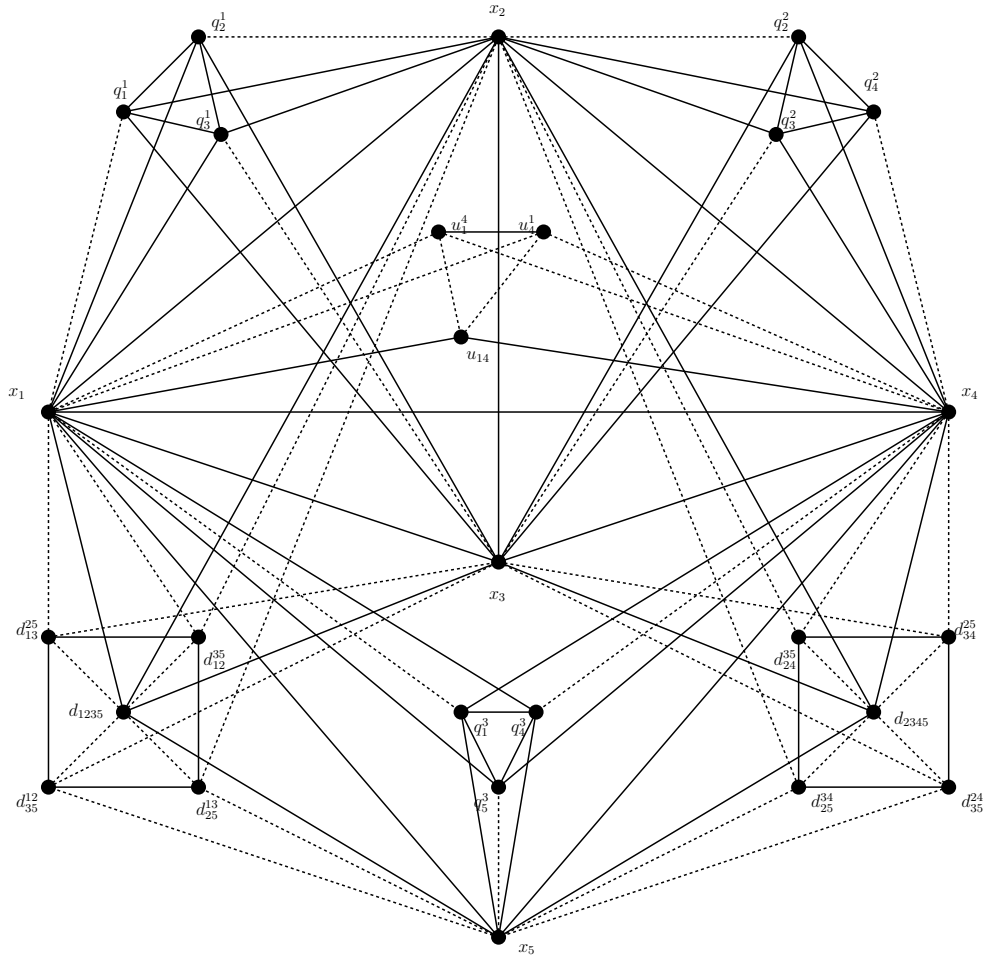


Figura 4.6: Instância (V, E^1, E^3) obtida a partir da instância satisfatível de 1-em-3 3-SAT: $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_4, x_5, x_1)\})$ para $3NPM_{14}SP$ sem o subgrafo base.

cláusula $q_1^j q_2^j, q_2^j q_3^j, q_3^j q_4^j, q_4^j q_1^j$; arestas entre vértices base e vértices variável $x_i b_6$; arestas entre vértices cláusula e vértices variável, para cada cláusula $q^j = (l_1^j, l_2^j, l_3^j)$: se $l_1^j = x_i$, então $x_i q_1^j, x_i q_3^j$ são arestas forçadas; se $l_2^j = x_i$, então $x_i q_2^j$ é uma aresta forçada; se $l_3^j = x_i$, então $x_i q_4^j$ é uma aresta forçada; se $x_i = l_2^j$ e $x_k = l_3^j$, então $x_i x_k$ é uma aresta forçada entre vértices variável.

O conjunto de arestas proibidas E^3 contém: arestas entre vértices base $b_1 b_2, b_1 b_5, b_1 b_6, b_1 b_7, b_2 b_5, b_2 b_6, b_2 b_7, b_3 b_4, b_3 b_7, b_4 b_5$; arestas entre vértices

cláusula $q_1^j q_3^j, q_2^j q_4^j$; arestas entre vértices base e vértices cláusula $b_6 q_1^j, b_6 q_3^j$, $j = 1, \dots, m$.

A Figura 4.7(a) ilustra o relacionamento entre os vértices base. A Figura 4.7(b) ilustra o relacionamento entre os vértices cláusula e os vértices variável. A Figura 4.8 ilustra uma instância construída para as cláusulas $(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_4, x_5, x_1)$.

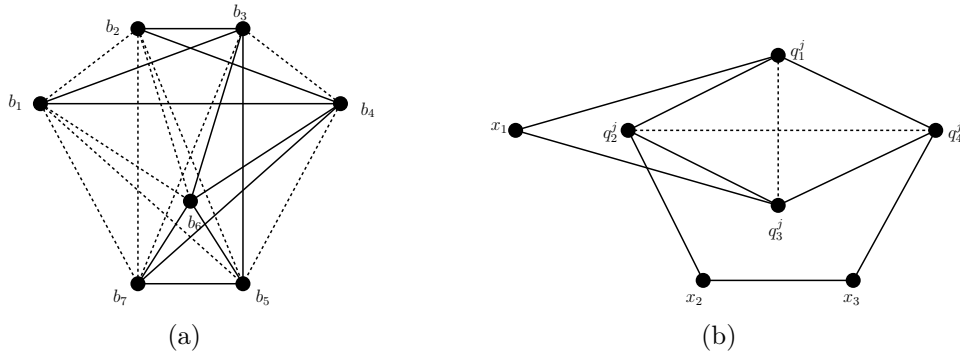


Figura 4.7: Conjunto de vértices cláusula e vértices base para $3NPM_{42}SP$

Lema 4.5 *Se existe uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT, então existe um grafo sanduíche G , tal que G é M_{42} .*

Prova. Suponha que existe uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT (sem literais negativos) viável. Posicionamos os vértices da instância construída nas partes A, B e C como segue. Os vértices base b_1, b_2 são colocados na parte A , b_3, b_4 na parte B e b_5, b_6, b_7 na parte C . Se x_i é uma variável verdadeira, então coloque o vértice x_i na parte B . Se x_i é uma variável falsa, então coloque o vértice x_i na parte C . Seja $q^j = (l_1^j, l_2^j, l_3^j)$ uma cláusula, e x_i sua variável verdadeira. Se $x_i = l_1^j$ é verdadeira, então coloque os vértices cláusula q_1^j, q_3^j na parte A e q_2^j, q_4^j na parte B . Se $x_i = l_2^j$ é verdadeira, então coloque os vértices cláusula q_1^j, q_3^j na parte B , q_2^j na parte C e q_4^j na parte A .

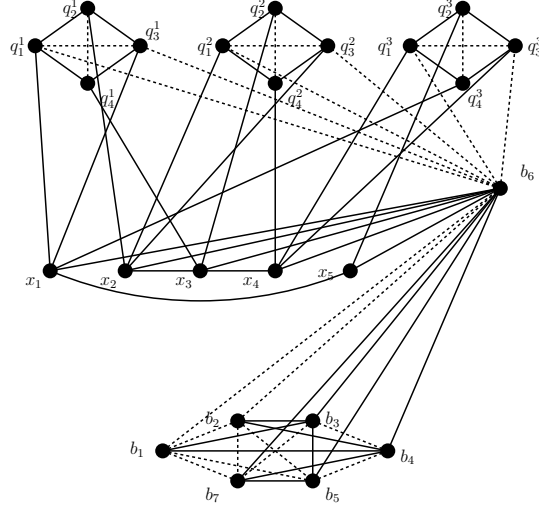


Figura 4.8: Instância (V, E^1, E^3) obtida a partir da instância satisfável de 1-em-3 3-SAT: $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_4, x_5, x_1)\})$ para $3NPM_{42}SP$ sem o subgrafo base.

Se $x_i = l_3^j$ é verdadeira, então coloque os vértices cláusula q_1^j, q_3^j na parte B , q_2^j na parte A e q_4^j na parte C . Observe os diagramas da Figura 4.9, cada um deles representa a situação onde uma das variáveis da cláusula (x_1, x_2, x_3) é verdadeira.

Agora precisamos mostrar que as partes A e B induzem dois conjuntos independentes em G^1 , a parte C induz uma clique em G^2 e que não existe nenhuma aresta forçada ligando as partes A e C .

Note que não existe nenhuma aresta proibida e nenhuma aresta forçada ligando vértices cláusula de cláusulas diferentes. Devido a isso, é suficiente considerar apenas a adjacência entre vértices da mesma cláusula.

As arestas $b_1b_2, q_1^j q_3^j, q_2^j q_4^j$ são proibidas e não existe nenhuma aresta forçada entre b_1, b_2 e uma vértice cláusula. Assim, uma vez que b_1, b_2 já pertencem a A , apenas os vértices $q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j$ podem ainda pertencer a A .

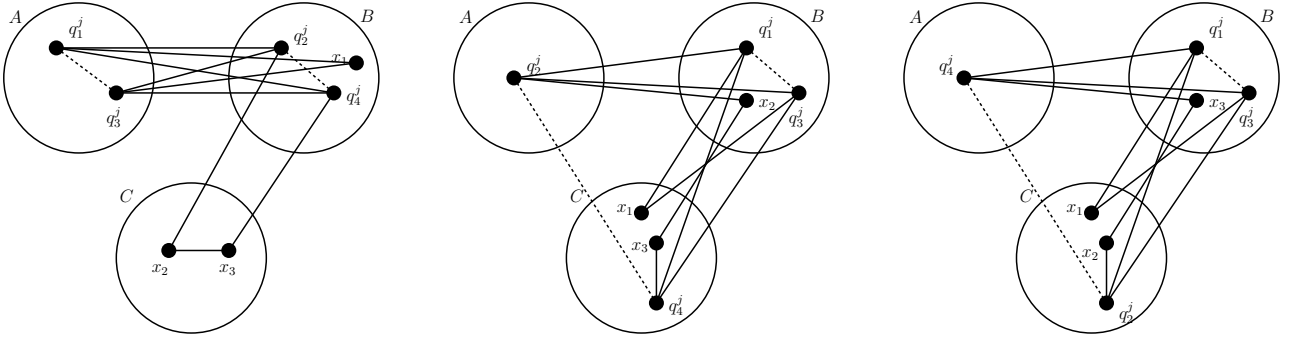


Figura 4.9: Posicionamentos possíveis dos vértices cláusula e dos vértices variável para a cláusula (x_1, x_2, x_3) .

Pelos posicionamentos acima, se $q_1^j \in A$ ou $q_3^j \in A$, então seus vizinhos cláusula forçados q_2^j, q_4^j pertencem à parte B . Similarmente, se $q_2^j \in A$ ou $q_4^j \in A$, então seus vizinhos cláusula forçados q_1^j, q_3^j pertencem à parte B . Assim, não existe nenhuma aresta forçada entre vértices de A ou ligando as partes A e C .

As arestas $b_3b_4, q_1^jq_3^j, q_2^jq_4^j$ são proibidas e não existe nenhuma aresta forçada entre b_3, b_4 e um vértice cláusula. Assim, uma vez que b_3, b_4 já pertence a B , apenas os vértices $x_i, q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j$ podem ainda pertencer a B . Pelos posicionamentos acima, se $x_i \in B$, então seus vizinhos cláusulas forçados $q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j$ pertencem a $A \cup C$. Se $q_1^j \in B$ ou $q_3^j \in B$, então seus vizinhos forçados q_2^j, q_4^j, x_i pertencem a $A \cup C$. Similarmente, se $q_2^j \in B$ ou $q_4^j \in B$, então seus vizinhos forçados q_1^j, q_3^j, x_i pertencem a $A \cup C$. Assim, não existe nenhuma aresta forçada entre os vértices de B .

Uma vez que b_5, b_6, b_7 já pertencem a C , apenas os vértices x_i, q_2^j, q_4^j podem ainda pertencer a C . Os vértices b_5, b_6, b_7 induzem uma clique em G^2 . Não existe nenhuma aresta forçada entre b_5, b_6, b_7 e os vértices cláusula q_2^j, q_4^j ou o vértice variável x_i . Pelos posicionamentos acima, o vértice variável x_i não possui vizinho proibido. Se $q_2^j \in C$ ($q_4^j \in C$), seu vizinho proibido q_4^j pertence a A (respectivamente q_4^j pertence a C). Assim, não existe nenhuma aresta

forçada entre vértices de C .

Obtemos o grafo sanduíche G admitindo uma M_{42} -partição adicionando a E^1 todas as arestas opcionais entre vértices de C . ■

A Figura 4.10 mostra uma M_{42} -partição para o exemplo da Figura 4.8.

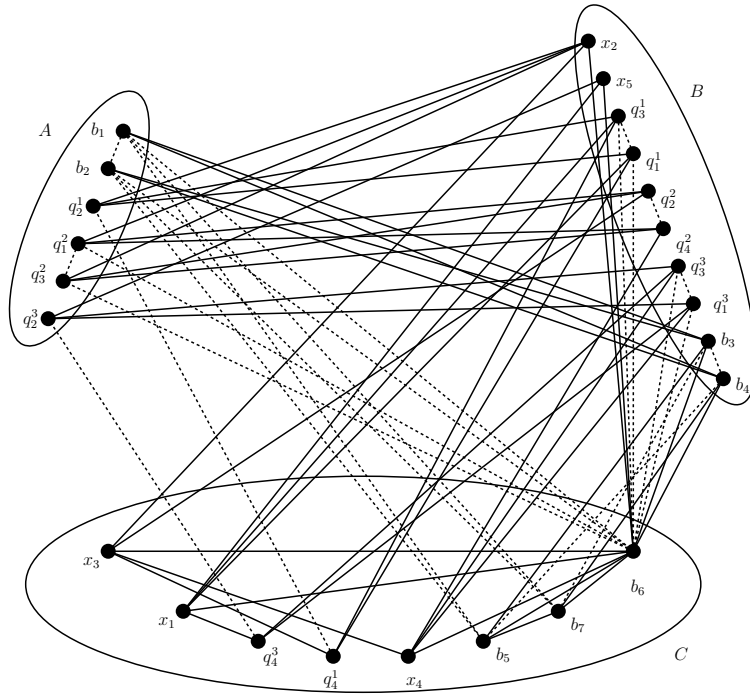


Figura 4.10: M_{42} -partição correspondente à atribuição verdade $x_2 = x_5 = T$.

Lema 4.6 *Se existe um grafo sanduíche G admitindo uma M_{42} -partição, então existe uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT (sem literais negativos) viável.*

Prova. Suponha que existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ tal que G é M_{42} . Seja (A, B, C) a M_{42} -partição, onde a restrição externa proibida está localizada entre as partes A e C .

Construímos uma atribuição verdade como segue: a variável x_i é verdadeira se, e somente se, o vértice variável $x_i \in B$.

Para mostrar que essa atribuição verdade é 1-em-3 e viável, precisamos mostrar que para toda cláusula exatamente um dos vértices correspondentes a um de seus literais pertence a B . Antes disso, precisamos colher alguma informação sobre a localização dos vértices base e dos vértices cláusula. As Proposições 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 apresentadas abaixo fornecem a informação necessária.

Proposição 4.7 *Os vértices base $b_1, b_2 \in A$, $b_3, b_4 \in B$ e $b_5, b_6, b_7 \in C$.*

Prova. Se $b_5 \in A$, então seus vizinhos forçados b_3, b_6, b_7 não podem pertencer a $A \cup C$. Uma vez que b_6b_7 é uma aresta forçada, b_6, b_7 não pode pertencer à parte B . Então, b_5 não pode pertencer à parte A . Analogamente, b_6, b_7 não podem pertencer à parte A .

Se $b_5 \in B$, então seus vizinhos forçados b_3, b_6, b_7 não podem pertencer a B . Uma vez que b_3b_6, b_6b_7 são arestas forçadas, b_3, b_6, b_7 devem pertencer a C . Entretanto, b_3b_7 é uma aresta proibida, logo b_5 não pode pertencer à parte B . Analogamente, b_7, b_6 não podem pertencer a B . Logo, b_5, b_6, b_7 pertencem à parte C .

Uma vez que b_5 pertence à parte C , o vértice b_4 não pode pertencer à parte C . Uma vez que b_7 pertence à parte C , o vértice b_3 não pode pertencer à parte C . Uma vez que b_6 pertence à parte C , os vértices b_3, b_4 não podem pertencer à parte A .

Então, b_3, b_4 devem pertencer à parte B . Isso implica que os vértices b_1, b_2 pertencem à parte A . ■

Proposição 4.8 *Os vértices cláusula q_1^j e q_3^j pertencem ambos a A ou ambos a B .*

Prova. Pela Proposição 4.7, $b_6 \in C$. Uma vez que $q_1^jb_6$ e $q_3^jb_6$ são arestas proibidas, os vértices cláusula q_1^j, q_3^j não podem pertencer à parte C .

Sem perda de generalidade, suponha que $q_1^j \in A$ e $q_3^j \in B$. Isso implica que q_2^j, q_4^j não podem pertencer a $A \cup B$, devido às arestas forçadas $q_1^j q_2^j, q_1^j q_4^j, q_3^j q_1^j$ e $q_3^j q_4^j$. Obtemos resultado análogo se $q_1^j \in B$ e $q_3^j \in A$. Assim, as únicas localizações possíveis são $q_1^j, q_3^j \in A$ ou $q_1^j, q_3^j \in B$. ■

Proposição 4.9 *Os vértices cláusula q_2^j e q_4^j pertencem à mesma parte se, e somente se, $q_2^j, q_4^j \in B$.*

Prova. Uma vez que $q_2^j q_4^j$ é uma aresta proibida, q_2^j e q_4^j não podem pertencer ambos a C .

Se $q_2^j, q_4^j \in A$, então os vértices variável $x_i = l_2^j, x_k = l_3^j$ não podem pertencer a $A \cup C$ devido a arestas forçadas incidentes a q_2^j, q_4^j . Uma vez que $x_i x_k$ é uma aresta forçada, x_i e x_k não podem pertencer também a B . Assim, q_2^j, q_4^j não podem pertencer a A . ■

Proposição 4.10 *Os vértices cláusula q_2^j e q_4^j pertencem a partes diferentes se, e somente se, $q_2^j \in A$ e $q_4^j \in C$, ou $q_4^j \in A$ e $q_2^j \in C$.*

Prova. Pela Proposição 4.8, os vértices cláusula q_1^j, q_3^j ou pertencem ambos à parte A , ou pertencem ambos à parte B . Se $q_1^j, q_3^j \in A$, então $q_2^j, q_4^j \in B$ devido às arestas forçadas $q_1^j q_2^j$ e $q_3^j q_4^j$. Similarmente, se $q_1^j, q_3^j \in B$, então q_2^j, q_4^j pertencem a $A \cup C$. Entretanto, pela Proposição 4.9, os vértices q_1^j e q_3^j não podem simultaneamente pertencer a A ou a C . ■

A Figura 4.9 mostra as localizações possíveis para os vértices cláusula e os vértices variável, de acordo com as Proposições 4.8, 4.9 e 4.10.

Seja $q^j = (l_1^j, l_2^j, l_3^j)$ uma cláusula, tal que $x_r = l_1^j, x_s = l_2^j$ e $x_t = l_3^j$.

Primeiramente, precisamos mostrar que pelo menos um dentre x_r, x_s, x_t pertence à parte B . Lembre que $x_i b_6$ é uma aresta forçada, o que implica que nenhum vértice variável pertence à parte A . Agora, suponha que x_r, x_s, x_t

todos pertencem à parte C . Assim, devido às arestas forçadas $x_r q_1^j$, $x_r q_3^j$, $x_s q_2^j$ e $x_t q_4^j$, os vértices cláusula $q_1^j, q_2^j, q_3^j, q_4^j$ pertencem à parte B . Entretanto, $q_1^j q_2^j, q_2^j q_3^j, q_3^j q_4^j, q_4^j q_1^j$ são arestas forçadas, contradizendo que B é um conjunto independente. Assim, x_r, x_s, x_t não podem pertencer simultaneamente a C , o que implica que pelo menos um deles pertence a B .

Finalmente, precisamos mostrar que exatamente um dentre x_r, x_s, x_t pertence à parte B . Suponha $x_r \in B$. Assim, as arestas forçadas $x_r q_1^j, x_r q_3^j$ garantem que os vértices cláusula q_1^j, q_3^j não pertencem a B , o que implica que, pela Proposição 4.8, os vértices q_1^j, q_3^j pertencem a A , o que por sua vez implica que q_2^j, q_4^j pertencem a B . Uma vez que $q_2^j, q_4^j \in B$, os vértices variável x_s, x_t não podem pertencer a B . Logo, a cláusula q^j é 1-em-3 satisfeita. Agora, suponha que $x_s \in B$. Uma vez que $x_s x_t, x_s q_2^j$ são arestas forçadas, então o vértice variável x_t e o vértice cláusula q_2^j não pertencem à parte B . O vértice variável x_t pertence à parte C , o que implica que o vértice cláusula q_4^j não pertence a A . Uma vez que $q_2^j \notin A$ e $q_4^j \notin B$, pelas Proposições 4.9 e 4.10, temos que q_2^j pertence à parte C e q_4^j pertence à parte A , o que implica que os vértices cláusula q_1^j, q_3^j pertencem a B , o que por sua vez implica que o vértice variável x_r não pertence a B . Assim, a cláusula q^j é 1-em-3 satisfeita. Analogamente, se $x_t \in B$ então a cláusula q^j é 1-em-3 satisfeita. ■

Corolário 4.8 $3\text{NPM}_{51}\text{SP}$ é NP -completo.

Prova. Na prova do Teorema 4.7, se, para a instância particular construída de $3\text{NPM}_{42}\text{SP}$, existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ tal que G é M_{42} , então existe um grafo sanduíche G' tal que $G' = (V', E')$ é M_{51} , modificando os vértices base e suas relações com os outros vértices.

Uma M_{51} -partição é obtida de uma M_{42} -partição adicionando as restrições externas adicionais entre as partes B e C . Dada uma solução de $3\text{NPM}_{42}\text{SP}$, qualquer aresta proibida ligando um vértice de B a uma vértice de C viola

essa restrição adicional. Todas as arestas desse tipo são incidentes a um vértice base. Veja o exemplo de G que é M_{42} na Figura 4.10. Descremos a seguir como modificar o grafo base e as arestas proibidas incidentes aos vértices base de forma a obter uma instância viável para $3NPM_{51}$. Observe a Figura 4.11. A nova base é obtida a partir da antiga removendo o vértice b_7 e trocando a aresta b_4b_5 para o conjunto E^1 . As arestas proibidas entre b_6 e os vértices cláusula são removidas.

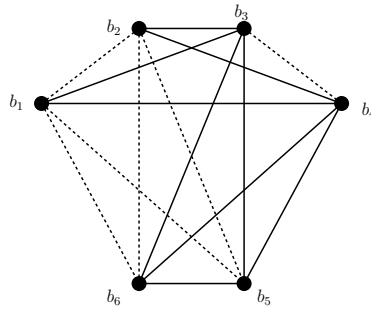


Figura 4.11: Subgrafo base para $3NPM_{51}SP$.

Agora, uma vez que não existe mais aresta proibida entre B e C , G' é M_{51} .

Agora, suponha que temos um grafo sanduíche modificado G' admitindo uma M_{51} -partição. Construímos uma atribuição verdade 1-em-3 3-SAT satisfatível fazendo a variável x_i verdadeira se, e somente se, o vértice variável $x_i \in B$.

Seja $q^j = (l_1^j, l_2^j, l_3^j)$ uma cláusula, tal que $x_1 = l_1^j$, $x_2 = l_2^j$ e $x_3 = l_3^j$. Suponha que $x_2, x_3 \in B$. Pela construção da instância, x_2x_3 é uma aresta forçada, assim, uma vez que B é um conjunto independente, $x_2, x_3 \notin B$, o que leva a uma contradição.

Suponha que $x_1, x_2 \in B$. Uma vez que $x_1q_1^j, x_1q_3^j$ são arestas forçadas, $q_1^j, q_3^j \notin B$. Uma vez que $x_2q_2^j$ é uma aresta forçada, $q_2^j \notin B$. Uma vez que

$q_1^j q_3^j$ é uma aresta proibida, pelo menos uma das extremidade pertence a A . Uma vez que $q_1^j q_2^j$, $q_3^j q_2^j$ são arestas forçadas, então o vértice q_2^j não pode pertencer a $A \cup C$, o que leva a uma contradição. Analogamente, $x_1, x_3 \notin B$.

Suponha, $x_1, x_2, x_3 \in C$. Uma vez que $q_1^j q_3^j$ é uma aresta proibida, temos que q_1^j, q_3^j pertence a B , o que garante que q_2^j, q_4^j pertence a A . Entretanto, $q_2^j x_2$, $q_4^j x_3$ são arestas forçadas, contradizendo a restrição proibida entre A e C . Logo, x_1, x_2, x_3 não podem pertencer simultaneamente a C . ■

A Figura 4.12 ilustra uma instância construída de $3\text{NPM}_{51}\text{SP}$ para as cláusulas (x_1, x_2, x_3) , (x_2, x_3, x_4) , (x_4, x_5, x_1) , e Figure 4.13 mostra uma M_{51} -partição para o exemplo da Figura 4.12.

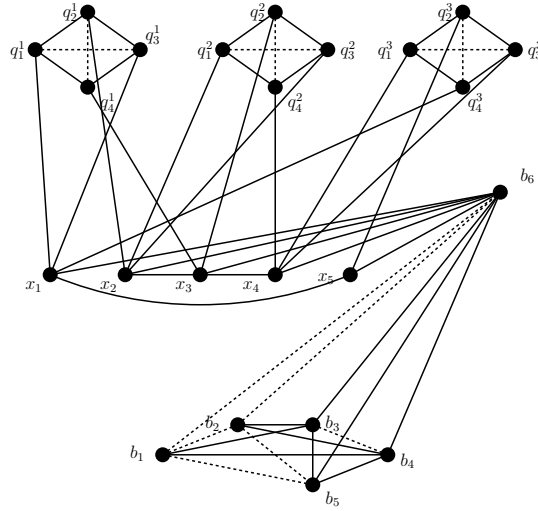


Figura 4.12: Instância (V, E^1, E^3) obtida a partir da instância satisfável de 1-em-3 3-SAT: $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_4, x_5, x_1)\})$ para $3\text{NPM}_{51}\text{SP}$ sem o subgrafo base.

Corolário 4.9 $3\text{NPM}_{60}\text{SP}$ é NP -completo.

Prova. Uma M_{60} -partição é obtida de uma M_{51} -partição adicionando uma restrição externa adicional entre as partes A e B . Dada uma solução de

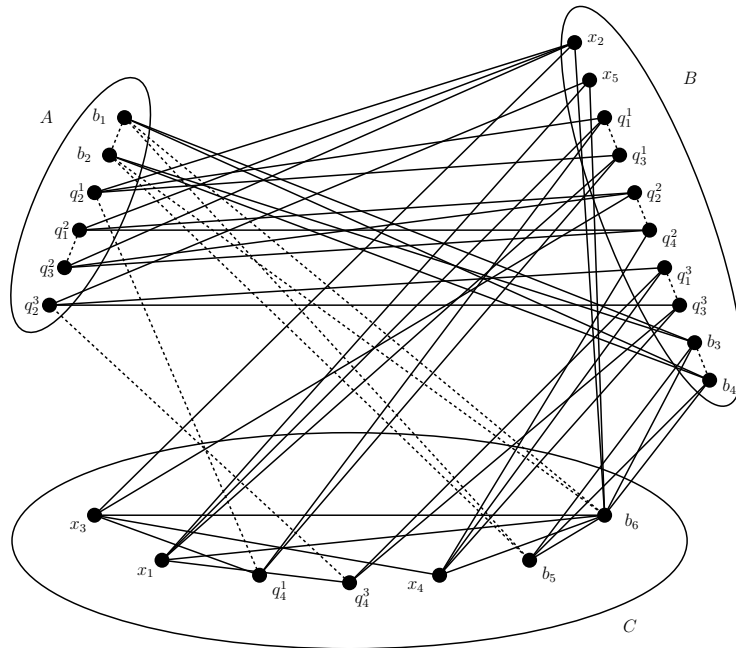


Figura 4.13: M_{51} -partição correspondente à atribuição verdade $x_2 = x_5 = T$.

$3NPM_{51}SP$, qualquer aresta ligando um vértice de A a um vértice de B viola essa restrição adicional.

Na prova do Corolário 4.8, se para a instância particular construída de $3NPM_{51}SP$ existe um grafo sanduíche $G = (V, E)$ tal que G é M_{51} , então a restrição adicional nunca é violada. ■

Capítulo 5

Conclusões

Esta presente tese mostra alguns resultados decorrentes dos estudos iniciados em [28]. Além desses resultados, cabe citar outros estudos, que embora tenham possibilitado a classificação de alguns problemas sanduíche, ainda não permitem, no momento, a classificação completa de uma classe de problemas, caracterizando assim uma dicotomia polinomial como a apresentada no Capítulo 4.

O PROBLEMA PARTIÇÃO SKEW foi definido em [7] como o problema de encontrar uma partição do conjunto de vértices em quatro partes não vazias A , B , C , D tais que existem todas as arestas possíveis entre A e B , e nenhuma aresta entre C e D . Esse problema possui um papel fundamental na prova no teorema forte de grafos perfeitos [6], e admite um algoritmo de tempo polinomial [13]. O PROBLEMA DE PARTIÇÃO SKEW possui apenas restrições externas, variações com restrições internas ou número maior de partes também já foram consideradas [10, 11].

Todo PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS com M de dimensão no máximo 4 foi classificado por uma quase-dicotomia como solucionável em tempo quase-polinomial ou NP-completo, e todo PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS com M de dimensão no máximo 3 foi classificado

como solucionável em tempo polinomial ou NP-completo [15]. Recentemente, todo PROBLEMA DE M -PARTIÇÃO COM LISTAS com M de dimensão no máximo 4 foi classificado como solucionável em tempo polinomial ou NP-completo [4], com a única exceção do PROBLEMA STUBBORN e seu complemento. O PROBLEMA DE H -PARTIÇÃO considera uma matriz M de ordem 4 com apenas * em sua diagonal principal, não impõe restrições internas, e exige que as quatro partes sejam não vazias. O PROBLEMA DE PARTIÇÃO SKEW é um PROBLEMA DE H -PARTIÇÃO. Apenas um problema de H -partição permanece em aberto: o PROBLEMA DE PARTIÇÃO $2K2$, que é uma propriedade ancestral [8].

Problemas sanduíche para matrizes de ordem 4 foram considerados. O PROBLEMA CORTE ESTRELA SANDUÍCHE é um exemplo cuja complexidade é polinomial [28]. O PROBLEMA STUBBORN SANDUÍCHE COM LISTAS foi classificado como NP-Completo em [12]. Submetemos recentemente um resultado que classifica parcialmente os PROBLEMAS H -PARTIÇÃO SANDUÍCHE, onde determinamos alguns problemas polinomiais, e fazemos uma redução polinomial a partir do PROBLEMA DE PARTIÇÃO $2K2$ para alguns de seus derivados não ancestrais. Permanecem em aberto os problemas sanduíche de H -partição para partição *skew* e alguns de seus derivados [24].

O PROBLEMA STUBBORN sem partes vazias é polinomial [8]. Já o problema sanduíche correspondente, assim como a dicotomia polinomial para problemas de partição em 4 partes não vazias permitindo restrições internas não foram classificados.

Sobre classes hereditárias, os métodos utilizados nas provas de NP-completude apresentados no Capítulo 3 fornecem um modelo de como provar a NP-completude para outras classes hereditárias. Assim, temos fortes indicações de que é possível provar a NP-completude de classes hereditárias

simplesmente analisando a estrutura dos grafos que compõem as respectivas famílias de subgrafos proibidos.

Publicações

As seguintes publicações foram obtidas durante o desenvolvimento desta tese.

Artigos completos em periódicos

[28] TEIXEIRA, R. B., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The sandwich problem for cutsets: Clique cutset, k -star cutset. *Discrete Applied Mathematics* 154 (2006), 1791–1798.

[30] TEIXEIRA, R. B., DOURADO, M. C., PETITO, P., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems. submetido para Journal of the Brazilian Computer Society, 2008.

[25] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems. submetido para Discrete Applied Mathematics, 2008.

Resumos expandidos em anais de congressos

[27] TEIXEIRA, R. B., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The sandwich problem for cutsets. In *Proceedings of LACGA 2004* (2004), vol. 18 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 219–225.

[29] TEIXEIRA, R. B., DOURADO, M. C., AND PETITO, P. Helly property and sandwich graphs. In *Proceedings of ICGT 2005* (2005), vol. 22 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 497–500.

[26] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H.

The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems. In *Proceedings of Lagos 2007* (2008), vol. 30 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 81–86.

[24] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The external constraint 4 nonempty part sandwich problem. submetido para Proceedings of CLAIO 2008, 2008.

Referências Bibliográficas

- [1] ALCÓN, L., FARIA, L., DE FIGUEIREDO, C. M. H., AND GUTIERREZ, M. Clique graph recognition is np-complete. In *Proc. WG 2006* (2006), vol. 4271 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 269–277.
- [2] BERGE, C., AND DUCHET, P. A generalization of Gilmore’s theorem. In *Recent advances in graph theory*. Academia Praha, Prague, 1975, pp. 49–55.
- [3] BRANDSTÄDT, A., DRAGAN, F. F., LEE, V. B., AND SZYMCZAK, T. On stable cutsets in graphs. *Discrete Applied Mathematics* 105 (2000), 39–50.
- [4] CAMERON, K., ESCHEN, E. M., HOÀNG, C. T., AND SRITHARAN, R. The complexity of the list partition problem for graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 21, 4 (2007), 900–929.
- [5] CERIOLI, M. R., EVERETT, H., FIGUEIREDO, C. M. H., AND KLEIN, S. The homogeneous set sandwich problem. *Information Processing Letters*, 67 (1998), 31–35.
- [6] CHUDNOVSKY, M., ROBERTSON, N., SEYMOUR, P., AND THOMAS., R. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics* 164 (2006), 51–229.

- [7] CHVÁTAL, V. Star-cutsets and perfects graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B* 39, 3 (1985), 189–199.
- [8] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M., GRAVIER, S., AND KLEIN, S. Finding H -partitions efficiently. *Theoretical Informatics and Applications* 39 (2005), 133–144.
- [9] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., AND FARIA, L. On decision and optimization (k, l) -graph sandwich problems. *Discrete Applied Mathematics* 143, 1-3 (2004), 155–165.
- [10] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., GRAVIER, S., AND KLEIN, S. Extended skew partition problem. *Discrete Mathematics* 306, 19-20 (2006), 2438–2449.
- [11] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., KLEIN, S., GRAVIER, S., AND REED, B. A. Stable skew partition problem. *Discrete Applied Mathematics* 143, 1-3 (2004), 17–22.
- [12] DANTAS, S., AND FARIA, L. On stubborn graph sandwich problems. In *ICCGI '07: Proceedings of the International Multi-Conference on Computing in the Global Information Technology* (Washington, DC, USA, 2007), IEEE Computer Society, p. 46.
- [13] DE FIGUEIREDO, C. M. H., KLEIN, S., KOHAYAKAWA, Y., AND REED, B. A. Finding skew partitions efficiently. *J. Algorithms* 37, 2 (2000), 505–521.
- [14] DRAGAN, F. F. *Centers of graphs and the Helly property*. Doctoral thesis, Moldova State University, Chisinau, 1989.

- [15] FEDER, T., HELL, P., KLEIN, S., AND MOTWANI, R. List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003), 449–478.
- [16] GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [17] GOLUBIC, M. C., KAPLAN, H., AND SHAMIR, R. Graph sandwich problems. *Journal of Algorithms* 19 (1995), 449–473.
- [18] GUTIERREZ, M., AND MEIDANIS, J. On the clique operator. In *Latin'98: Theoretical Informatics* (1998), vol. 1130 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 262–272.
- [19] KLEIN, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The NP-completeness of multi-partite cutset testing. *Congressus Numerantium* 119 (1996), 217–222.
- [20] PRISNER, E. Hereditary clique-Helly graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 14 (1993), 216–220.
- [21] ROBERTS, F. S., AND SPENCER, J. H. A characterization of clique graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 10 (1971), 102–108.
- [22] SZWARCFITER, J. L. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Combinatoria* 45 (1997), 29–32.
- [23] SZWARCFITER, J. L. Algorithmic aspects of tree width. In *Recent advances in algorithms and combinatorics*, CMS Books in Mathematics. Springer, New York, 2003, pp. 109–136.

- [24] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The external constraint 4 nonempty part sandwich problem. submetido para Proceedings of CLAIO 2008, 2008.
- [25] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems. submetido para Discrete Applied Mathematics, 2008.
- [26] TEIXEIRA, R. B., DANTAS, S., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems. In *Proceedings of Lagos 2007* (2008), vol. 30 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 81–86.
- [27] TEIXEIRA, R. B., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The sandwich problem for cutsets. In *Proceedings of LACGA 2004* (2004), vol. 18 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 219–225.
- [28] TEIXEIRA, R. B., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. The sandwich problem for cutsets: Clique cutset, k -star cutset. *Discrete Applied Mathematics* 154 (2006), 1791–1798.
- [29] TEIXEIRA, R. B., DOURADO, M. C., AND PETITO, P. Helly property and sandwich graphs. In *Proceedings of ICGT 2005* (2005), vol. 22 of *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pp. 497–500.
- [30] TEIXEIRA, R. B., DOURADO, M. C., PETITO, P., AND DE FIGUEIREDO, C. M. H. Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems. submetido para Journal of the Brazilian Computer Society, 2008.

- [31] WALLIS, W. D., AND ZHANG, G.-H. On maximal clique irreducible graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 8 (1990), 187–193.
- [32] WHITESIDES, S. H. An algorithm for finding clique cutsets. *Information Processing Letters* 12, 1 (1981), 31–32.