

UM ALGORITMO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA PARA O  
PROBLEMA DE DOIS NIVEIS LINEAR

Ana Lucia de Sousa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

  
Prof. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc..

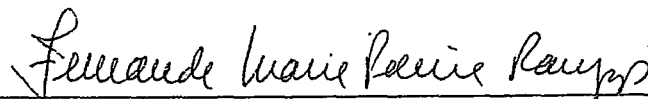
  
Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.



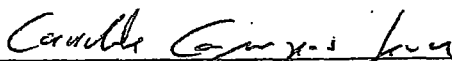
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



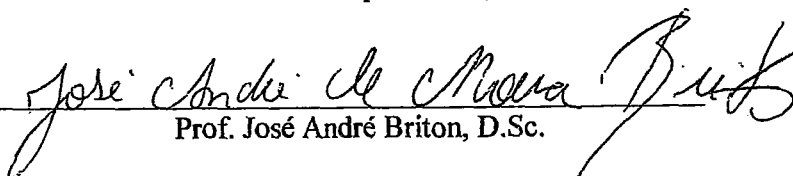
Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Sc.



Prof. Fernanda Maria Ferreira Raupp, D.Sc.



Prof. Carlile Campos Lavor, D.Sc.



Prof. José André Briton, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2006

SOUSA, ANA LUCIA DE

Um Algoritmo Utilizando Programação  
Semidefinida para o Problema de Dois Níveis  
Linear [Rio de Janeiro] 2006

XI, 91 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Programação em dois níveis
2. Relaxação semidefinida

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

Aos meus pais Luis e Luzanira.

# Agradecimentos

A D'us, sem ele seria difícil finalizar esse trabalho. Ele me mostrou e continua me mostrando que não existe vitória sem luta, me mostrou que muitos são os obstáculos, mas também mostrou que devemos ter certeza na nossa caminhada e confiança nos objetivos traçados em nossa vida.

A minha família, pelo apoio e compreensão nas horas difíceis. Eles participaram de cada momento, e se eu cheguei até aqui devo isso a eles.

Ao Professor Adilson Elias Xavier agradeço, não só pelas sugestões e participação na banca, mas também pelo apoio que me deu para a conclusão desse trabalho.

Aos Professores Paulo Roberto Oliveira e Fernanda Raupp agradeço pela atenção e participação na banca.

Aos amigos André Brito e Carlile pela participação na banca.

A COPPE Sistemas pela oportunidade de desenvolver este trabalho

A Professora Marcia Fampa só tenho que agradecer muito pela compreensão que teve durante o desenvolvimento desse trabalho, e pelo apoio que me deu nas horas difíceis. Eu posso dizer que ela, com toda a sua calma, foi um pilar de sustentação para a conclusão desse trabalho. Muito obrigada.

A Denise Candal, minha grande amiga, minha irmã de coração, eu não tenho nem palavras para agradecer. Denise não só deu apoio nas horas difíceis como vivenciou comigo cada um desses momentos. Esse trabalho não seria concluído sem o seu apoio.

Nessa caminhada posso dizer com toda certeza que você me ensinou e continua me ensinando muita coisa. Infinitas vezes posso dizer obrigada para você e mesmo assim não vai ser suficiente.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UM ALGORITMO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA PARA O  
PROBLEMA DE DOIS NÍVEIS LINEAR

Ana Lucia de Sousa

Setembro/2006

Orientadores: Marcia Helena Costa Fampa

Adilson Elias Xavier

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

A programação em dois níveis atualmente é uma áreas que vem merecendo uma grande atenção, por parte dos pesquisadores, por apresentar uma estrutura hierárquica, a qual é caracterizada pela presença de dois problemas. Neste trabalho, será apresentado um estudo sobre o problema de dois níveis, de uma maneira geral, e mais especificamente do problema de dois níveis linear. Algumas formulações e condições de otimalidade para o problema serão apresentadas assim como alguns dos principais algoritmos encontrados na literatura para resolver o problema de dois níveis linear.

Será apresentado um estudo do método de branch-and-bound baseado no trabalho de Bard e Moore para resolver o problema de dois níveis linear, e, baseado neste trabalho será proposta uma relaxação semidefinida positiva buscando, assim, obter melhores limites que serão utilizados no algoritmo de branch-and-bound para resolver o problema de dois níveis linear. Serão apresentados resultados computacionais e estes resultados serão comparados com os de Bard e Moore.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

AN ALGORITHM FOR BILEVEL PROBLEM USING SEMIDEFINITE  
PROGRAMMING

Ana Lucia de Sousa

September/2006

Advisors: Marcia Helena Costa Fampa  
Adilson Elias Xavier

Department: Computing Systems Engineering

Nowadays, bilevel programming problem is a field of great interested because it has a hierarchical structure, which has two problems.

In this work we study bilevel programming in a general way, and more specifically linear bilevel programming. We present some formulations and some optimality conditions for linear cases as well as comment some algorithms found in literature.

We study a branch-and-bound method based on the work of Bard and Moore and also propose a semidefinite relaxation to gain better limits for linear bilevel programming. We use this limits in the branch-and-bound algorithm and present numerical results comparing both algorithms.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Organização dos Capítulos . . . . .	2
<b>2</b>	<b>A Teoria dos Jogos</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	O que é um jogo? . . . . .	5
2.3	Modelando um jogo . . . . .	6
2.4	Jogo simultâneo e jogo sequencial . . . . .	6
2.5	Análise de um jogo . . . . .	7
2.6	Equilíbrio de Nash . . . . .	7
2.7	Algumas aplicações da Teoria dos Jogos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Problema de dois níveis</b>	<b>10</b>
3.1	Introdução . . . . .	10
3.2	Notas históricas sobre a programação em dois níveis . . . . .	11
3.3	Teoria de Stackelberg . . . . .	12
3.4	Formulação dos problemas . . . . .	14
3.4.1	Problema de programação multinível (PPM) . . . . .	14
3.4.2	Problema Estático de Stackelbeg (PES) . . . . .	15
3.4.3	Problema de Programação de dois níveis . . . . .	17
3.4.4	Problema Relaxado . . . . .	18
3.5	Definição dos conjuntos utilizados no estudo dos problemas de dois níveis	18



3.6	Condições de existência de solução . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Problema de Dois Níveis Linear</b>	<b>23</b>
4.1	Introdução . . . . .	23
4.2	Formulação do problema de dois níveis linear . . . . .	24
4.3	Definição dos conjuntos utilizados no caso linear . . . . .	25
4.4	Exemplos de Problemas de dois níveis Linear . . . . .	26
4.5	A Geometria dos Problemas de dois Níveis Linear . . . . .	37
4.6	Algumas Aplicações da Programação de Dois Níveis Linear . . . . .	43
4.7	Considerações sobre o Problema de Dois Níveis Linear . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Condições de Otimalidade</b>	<b>47</b>
5.1	Introdução . . . . .	47
5.2	Formulação 1 de Bard . . . . .	48
5.3	Formulação 2 de Bard . . . . .	49
5.4	Formulação de Chen e Florian . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Algoritmos para o problema de dois níveis linear</b>	<b>53</b>
6.1	Introdução . . . . .	53
6.1.1	Métodos de enumeração de pontos extremos . . . . .	54
6.1.2	Métodos baseados nas condições de otimalidade . . . . .	54
6.1.3	Métodos do tipo Branch-and-bound . . . . .	55
6.2	O algoritmo de Bard e Moore . . . . .	55
6.2.1	Introdução . . . . .	55
6.2.2	Problemas . . . . .	56
6.2.3	Algoritmo de Bard e Moore . . . . .	57
6.2.4	Algoritmo de Bard e Moore . . . . .	59
6.2.5	Exemplo . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Relaxação Semidefinida para o Problema de dois Níveis Linear</b>	<b>69</b>
7.1	Introdução . . . . .	69

7.2	Modelagem de variáveis binárias e restrições de complementaridade por programação semidefinida . . . . .	70
7.3	Modelagem do problema de dois níveis linear por programação semidefinida	72
7.4	Relaxando o problema de dois níveis linear . . . . .	75
7.5	Resultados Numéricos . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>81</b>

# Lista de Figuras

3.1	Esquema da relação entre o líder e o seguidor . . . . .	11
4.1	Esquema para os exemplos do problema de dois níveis linear . . . . .	26
4.2	Região viável do problema relaxado . . . . .	27
4.3	Região viável do problema do seguidor . . . . .	28
4.4	Conjunto solução do problema seguidor . . . . .	29
4.5	Conjunto viável do problema de dois níveis linear . . . . .	29
4.6	Região viável do problema relaxado . . . . .	31
4.7	Região viável do problema seguidor para $S(x)$ para $1 \leq x \leq 5$ . . . . .	31
4.8	Conjunto solução do problema seguidor . . . . .	32
4.9	Conjunto viável do problema de dois níveis linear . . . . .	32
4.10	Região viável do problema relaxado . . . . .	34
4.11	Região viável do problema seguidor . . . . .	34
4.12	Conjunto solução do problema seguidor . . . . .	35
4.13	Conjunto solução do problema seguidor . . . . .	36
4.14	Conjunto viável do problema de dois níveis linear . . . . .	41
4.15	Conjunto viável do problema de dois níveis linear . . . . .	41
6.1	Árvore de Branch-and-bound . . . . .	68

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A Teoria dos Jogos é uma teoria que determina as estratégias que os jogadores devem tomar para assegurar os melhores resultados para si próprios, isto é, maximizar seu ganho pessoal face as estratégias dos outros jogadores. Esta teoria, devido ao seu carácter estratégico, motivou os problemas de programação em dois níveis.

A programação de dois níveis é atualmente uma das áreas que vem merecendo uma grande atenção por apresentar uma estrutura hierárquica, a qual é caracterizada pela presença de dois problemas. O primeiro problema é controlado por um líder, enquanto que o segundo problema é controlado por um seguidor. Muitos são os problemas que envolvem uma decisão hierárquica e podem portanto ser modelados como um problema de dois níveis.

O problema de dois níveis linear é o que vem recebendo maior atenção por parte dos pesquisadores. Verifica-se que são apresentados muitos resultados teóricos e diferentes formulações para esse tipo de problema com objetivo de desenvolver algoritmos e métodos de resolução diferentes. Em decorrência disso, diferentes análises sobre condições de otimalidade têm surgido na literatura e a partir dessas diferentes formulações, novos algoritmos vêm sendo desenvolvidos para a resolução dos problemas.

Problemas de programação em dois níveis fazem parte de uma classe nada trivial de problemas de otimização global. O problema seguidor é definido implicitamente, fazendo com que o conjunto de restrições do problema de dois níveis possua uma certa dificuldade geométrica. Sendo assim, a implementação de métodos diretos de descida não representa uma tarefa fácil.

Neste trabalho, faremos um estudo sobre o problema de dois níveis, de uma maneira geral e mais especificamente do problema de dois níveis linear. Adaptaremos o algoritmo do tipo branch-and-bound proposto por Bard e Moore para o caso linear e proporemos uma relaxação semidefinida positiva para o problema, com o objetivo de obter o cálculo de limites superiores a serem utilizados no algoritmo de Bard e Moore. Através de resultados numéricos preliminares, mostramos o potencial dos limites gerados por essa relaxação em diminuir a árvore enumerativa de branch-and-bound.

## 1.2 Organização dos Capítulos

No capítulo dois faremos um breve estudo sobre Teoria dos Jogos, destacando o seu caráter motivador para a programação em dois níveis.

Descreveremos, no capítulo três, o problema de dois níveis na sua forma geral, suas principais características e propriedades.

O problema de dois níveis linear é o caso mais simples de programação em dois níveis. Este tipo de problema possui interessantes e importantes particularidades, principalmente com respeito a sua geometria. No capítulo quatro, abordaremos este problema, apresentando suas propriedades particulares, aplicações práticas e resultados teóricos.

No capítulo cinco apresentaremos algumas condições de otimalidade para o problema de dois níveis linear.

No capítulo seis destacaremos três grupos de algoritmos encontrados na literatura para resolver o problema de dois níveis linear: Métodos de enumeração de pontos extremos, Métodos baseados nas condições de otimalidade e Métodos do tipo branch-and-bound. Será desenvolvida uma breve abordagem teórica destes algoritmos. Nesse mesmo capítulo apresentaremos um estudo do método de branch-and-bound baseado no trabalho de Bard e Moore.

A partir do trabalho de Bard e Moore, apresentado no capítulo seis, propomos, no capítulo sete, numa relaxação semidefinida positiva para o problema de dois níveis linear. Apresentamos resultados numéricos para ambos os algoritmos aplicados a problemas-teste aleatórios, com o intuito de comparar os algoritmos.

# Capítulo 2

## A Teoria dos Jogos

### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo fazer uma breve abordagem sobre a teoria dos jogos. Essa teoria serviu de motivação para o surgimento dos problemas de dois níveis [61]. Isso devido ao seu carácter estratégico, pois essa teoria determina as atitudes que os jogadores devem tomar para assegurar os melhores resultados para si próprios, isto é, maximizar seus ganhos pessoais.

Como pode ser observado, inúmeras situações fazem com que o interesse individual se choque com o coletivo. Essas situações há muito tempo vêm merecendo uma certa atenção por parte dos pesquisadores. A dinâmica desses conflitos de interesse foi esclarecida justamente através da teoria dos jogos, que busca compreender a lógica existente nos processos de decisão. Esta busca se dá através da análise de problemas onde a interação entre jogadores está presente, e onde as decisões tomadas por um indivíduo, firma ou governo influenciam e são influenciadas pelas decisões dos demais jogadores.

Nessa teoria os jogadores tomam suas decisões tendo por base objetivos bem definidos. É interessante observar que essa abordagem inicial, sobre a teoria dos jogos, apresenta uma certa semelhança com a dinâmica existente nos modelos de programação de dois níveis. O atenção desse trabalho está voltada para os problemas de dois níveis.

## 2.2 O que é um jogo?

Situações que envolvem interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente podem ser analisadas formalmente como um jogo. Assim, um jogo nada mais seria do que uma representação formal que permitiria a análise de situações em que agentes interagem entre si, agindo racionalmente.

Um jogo ser um modelo formal significa que a teoria dos jogos envolve técnicas de descrição e análise, ou, em outras palavras, existem regras pré-estabelecidas para apresentar e estudar um jogo.

O termo "Interações" significa que as ações de cada agente, consideradas individualmente, afetam os demais. Um agente é qualquer indivíduo, ou grupo de indivíduos, com capacidade de decisão para afetar os demais. Assumir que os agentes são racionais significa supor que os indivíduos empregam os meios mais adequados aos objetivos que almejam, sejam quais forem esses objetivos.

Por comportamento estratégico entende-se que cada jogador, ao tomar a sua própria decisão, leva em consideração o fato de que os jogadores interagem entre si, e que, portanto, a sua decisão terá consequências sobre os demais jogadores, assim como as decisões dos outros jogadores terão consequências sobre ele.

Desse modo, os jogadores tomam decisões estratégicas, no sentido preciso de que suas decisões não contemplam apenas os seus objetivos e suas possibilidades de escolha, mas também os objetivos e as possibilidades de escolha dos demais jogadores. Observe que essa teoria ajuda a entender teoricamente o processo de decisão dos agentes que interagem. Veja que um indivíduo que deseja realizar os seus objetivos por meio de uma ação racional deve, como um primeiro passo, formular uma hipótese inicial sobre a melhor forma de agir para atingir seus objetivos. Definida essa hipótese inicial, ele deve procurar recolher informações para testar a validade dessa hipótese. No processo de coleta de informações essa hipótese pode permanecer válida, ser corrigida, ou mesmo ser substituída por outra hipótese mais adequada, de acordo com as informações obtidas.



Finalmente, com base na hipótese final que resulta da coleta de informações, o agente escolhe a melhor ação a seguir.

## 2.3 Modelando um jogo

Modelar um jogo é representar uma situação de interação estratégica de forma abstrata focalizando apenas os elementos considerados mais importantes para explicar como os agentes (jogadores) interagem.

Por interação estratégica simples devemos entender uma situação em que o número de jogadores envolvidos, suas características, as estratégias de que dispõem e as circunstâncias do ambiente que podem afetar o desenvolvimento do jogo não tornam difícil a compreensão e a modelagem do processo de interação estratégica por parte de cada jogador.

Ao avaliar a melhor ação, cada jogador considera não apenas todas as ações relevantes de que dispõe, mas também todas as ações relevantes que estejam disponíveis para os demais jogadores. Um jogador seria irracional se não considerasse todas as informações disponíveis antes de tomar sua decisão.

## 2.4 Jogo simultâneo e jogo sequencial

A forma mais simples de apresentar um jogo simultâneo é pela forma normal. A representação em forma normal é constituída por uma tabela onde as estratégias dos jogadores são listadas. Além das ações possíveis de cada jogador, a forma normal apresenta as recompensas que cada jogador recebe pelas suas escolhas, dadas as escolhas do outro jogador.

Uma recompensa é aquilo que todo jogador obtém depois de terminado o jogo, de acordo com as suas próprias escolhas e as dos demais jogadores.

Jogos simultâneos são aqueles em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão, e os jogadores não se preocupam com consequências futuras de suas escolhas.

Observe que jogos simultâneos possuem uma evidente limitação. Eles não são o modelo mais adequado para descrever um processo de interação que se desenrola em etapas sucessivas. O jogo mais adequado para dar conta do desdobramento sucessivo das interações estratégicas é o jogo sequencial.

No jogo sequencial os processos de interação estratégica se desenrolam em etapas sucessivas, isto é, os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem pré-determinada.

## 2.5 Análise de um jogo

Na análise de um jogo considera-se a hipótese de que os jogadores escolhem a estratégia, que produz os melhores resultados, dados os seus objetivos.

Em teoria dos jogos quando um fato é de conhecimento comum, isso significa que todos os jogadores sabem do fato. Um jogo é dito de informação completa quando as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.

As recompensas dos jogadores definem que tipo de jogador faz parte do jogo. Se o jogo é de informação completa, cada jogador sabe com quem está jogando, sabe que os outros sabem etc.

## 2.6 Equilíbrio de Nash

Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash [64], [65] quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para todos os jogadores.

O conceito de equilíbrio de Nash exige que cada jogador individualmente adote a melhor resposta às estratégias dos demais, mas isso não implica que a situação resultante

das decisões conjuntas dos jogadores será a melhor possível para um deles.

O equilíbrio de Nash requer que todas as estratégias selecionadas de todos os jogadores sejam reciprocamente as melhores respostas. Todavia, o fato de os requisitos desse equilíbrio serem exigentes não significa que ele será único. Também pode acontecer que não haja equilíbrio de Nash.

## 2.7 Algumas aplicações da Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos pode ser aplicada em várias situações [38], [35]. Por exemplo, os cartéis. Os cartéis são organizações de produtores ou indústrias de um setor que determinam a política de preços para todos os associados através da fixação de cotas de mercado para cada um deles. A sobrevivência do cartel depende da cooperação de cada um no que diz respeito a seguir uma política comum. Um produtor, individualmente, pode melhorar sua situação se romper o acordo, reduzindo seu preço e conquistando uma parte maior do mercado. Esta possibilidade pode fazer com que não haja a formação de cartéis se os produtores pensam estrategicamente como num jogo.

Pode-se pensar em termos de inflação. Por exemplo, a inflação pode ser tratada como um jogo não cooperativo. Veja que o fim da inflação vai ocorrer se todos abrirem mão da indexação. No entanto, problemas de coordenação, credibilidade de política anti-inflacionária, poder de fixação de preços e salários diferenciados na economia acabam por criar uma situação de não cooperação entre os vários agentes econômicos. Os agentes só aceitarão abrir mão do reajuste em seus preços se todos também abrirem mão.

Um outro exemplo foi o que ocorreu no Brasil no episódio do racionamento de energia. Ameaçando com cortes e sobretaxas individuais, o governo transferiu para cada cidadão, de forma individual, a responsabilidade por algo, que até então, era percebido como uma obrigação diluída entre todos. Nesse problema ficou claro que era de interesse individual colaborar com o grupo, isso foi visto na forma como a população reagiu à crise. Todos estavam cuidando dos próprios interesses. Pode-se dizer nesse caso que

governo e sociedade atingiram uma estratégia de equilíbrio, na qual os interesses deixam de ser conflitantes, pois é vantajoso para todos a cooperação.

# Capítulo 3

## Problema de dois níveis

### 3.1 Introdução

Um problema de programação de dois níveis é um modelo de otimização que apresenta uma estrutura hierárquica. Nesta estrutura as decisões tomadas pelo nível superior restringem as ações do nível inferior. Observa-se que cada nível possui objetivos próprios, que podem ser ou não conflitantes. Nesse modelo, a região viável do problema de dois níveis é definida inteira ou parcialmente pelo conjunto de soluções fornecidas pelo nível inferior.

Nessa hierarquia o nível superior é chamado de *líder*, enquanto que o inferior é chamado de *seguidor*. Com isso, fica claro que as decisões são tomadas de cima para baixo ao longo dessa hierarquia. A figura 3.1 representa a interação existente entre o líder e o seguidor.

A figura 3.1 mostra que o líder toma as decisões segundo o seu objetivo e aguarda a reação do seguidor, e a reação desse vai ser de acordo com o objetivo a ele associado. O seguidor, em função da sua resposta, pode levar o líder a modificar a sua estratégia e, conseqüentemente, tomar novas decisões. Assim, verifica-se que as decisões do seguidor afetam as decisões do líder. Essa relação pode ser verificada no seguinte exemplo onde a estrutura hierárquica está presente.

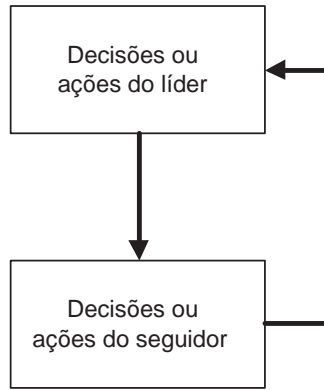


Figura 3.1: Esquema da relação entre o líder e o seguidor

Atualmente muitos países enfrentam problemas para gerar energia suficiente para abastecer seus mercados. Essa dificuldade, geralmente, é uma consequência da escassez de recursos naturais para geração de energia, e também pela ausência de planejamento energético. Diante desse fato um governante (líder) impõe para o mercado atacadista de energia um preço de varejo para a energia, cotas ou até mesmo decide por uma política de racionamento de energia. Conseqüentemente, os consumidores e demais setores da sociedade (seguidor) terão que ajustar o seu consumo de energia de acordo com os preços fixados e com a disponibilidade de recursos existentes. Portanto, esta medida afetará os preços, as importações e a receita do governante.

## 3.2 Notas históricas sobre a programação em dois níveis

Em 1973, J. Bracken e J. Mc Gill [83] apresentaram a formulação original para a programação em dois níveis, embora tenha sido W. Candler e R. Norton [24] que primeiro usaram a designação "dois níveis" e "Programação Multinível".

O problema de programação em dois níveis pode ser considerado como um caso especial da programação multinível. Esta focaliza uma estrutura hierárquica que apresenta vários níveis. Em termos de modelagem, o domínio das restrições associadas com um

problema de programação multinível é implicitamente determinado por uma série de problemas de otimização, os quais devem ser resolvidos dentro de uma seqüência pré-determinada. Na literatura problemas com múltiplos líderes são citados por H.Sherali [77] e J.F.Bard [8].

Segundo C. Blair [14] problemas desse tipo apresentam um aumento na sua complexidade devido ao número de níveis ser superior a dois. Nesse trabalho será abordado o problema de programação multinível com apenas dois níveis, denotado por problema de programação de dois níveis.

Segundo A.W.Yezza [85], dois aspectos motivaram o estudo dos problemas de dois níveis:

- O fato de que problemas com estrutura de dois níveis possam ser formulados em um único nível, o que faz com que eles sejam resolvidos mais facilmente.
- O modelo especial da teoria dos jogos proposto em 1934 pelo economista alemão Von Stackelberg, chamados de jogos de Stackelberg

Na próxima seção será feita uma pequena abordagem sobre a Teoria de Stackelberg.

### **3.3 Teoria de Stackelberg**

Em sua monografia sobre economia de mercado [78] e [79], H.V.Stackelberg usou pela primeira vez um modelo hierárquico para descrever situações que ocorriam no mercado. O modelo apresentado por ele mostra a situação onde diferentes agentes decidem tomar as melhores decisões sobre o mercado, mas essas decisões seriam tomadas de acordo com seus interesses próprios. Geralmente os objetivos são diferentes e os agentes frequentemente não podem tomar suas decisões de forma independente, mas são forçados a obedecerem uma certa hierarquia. Essa hierarquia é formada por dois agentes, onde um deles pode tomar suas decisões independente do outro, então esse agente seria chamado de líder. O outro, conseqüentemente, viria a ser o seguidor. O seguidor não pode tomar suas decisões

de forma independente, pois suas decisões estarão condicionadas as decisões tomadas pelo líder. O líder é capaz de decidir os preços de vendas ou de compras de seus produtos para o mercado. Nas suas decisões ele já tem antecipada a possível reação do seguidor, desde que seus lucros dependam firmemente, não somente de suas próprias decisões, mas também da resposta do seguidor. Por outro lado a escolha do líder influencia o conjunto de possíveis decisões do seguidor, assim como seus objetivos. Isso acaba por levá-lo a reagir sobre a decisão do líder.

Parece claro que se um agente (líder) é capaz de tomar suas decisões de forma independente, e assim observar e utilizar as reações do segundo agente (seguidor), então ele tentará fazer bom uso dessa vantagem no sentido de maximizar o seu lucro. Essa situação caracteriza o então chamado Jogos de Stackelberg, o qual será formulado mais a frente.

O modelo proposto por Stackelberg motivou o estudo da Programação em dois níveis, tendo em vista que ele é aplicado em sistemas que apresentam uma hierarquia. Como foi observado nesse modelo as empresas decidem sobre as quantidades, em vez de decidirem simultaneamente, elas decidem uma após a outra, isto é, de forma seqüencial. A essência do comportamento estratégico proposto por Stackelberg está na antecipação que uma empresa pode fazer em relação às empresas rivais.

Vários autores motivados pela teoria dos jogos de Stackelberg estudaram a programação em dois níveis e contribuíram para a proliferação dela junto a comunidade acadêmica, mas foi a partir de 1980 que ela teve uma atenção maior por parte dos pesquisadores. Neste período os estudos foram voltados para um melhor entendimento dos fundamentos teóricos da programação de dois níveis, e paralelamente a isto algoritmos foram desenvolvidos com o objetivo de resolver estes problemas. Pode-se destacar os trabalhos desenvolvidos por G. Savard e Gauvin [74], G. Anandalingam, Friesz [1] e C. Kolstad [54], trabalhos estes que serão relatados posteriormente.



## 3.4 Formulação dos problemas

Inicialmente será apresentado o problema de programação multinível, tendo em vista que o problema de dois níveis é um caso particular deste. Em seguida serão apresentadas as formulações dos problemas de Stackelberg e do problema de dois níveis.

### 3.4.1 Problema de programação multinível (PPM)

Na literatura, muitas formulações do problema multinível foram sugeridas. A seguir apresentaremos a que foi sugerida por Benson [16].

$$\begin{aligned}
 (P_1) \min f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\
 \text{sujeito a} \\
 g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq 0 \quad \text{onde } x_2 \text{ resolve} \\
 (P_2) \min f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \\
 \text{sujeito a} \\
 g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq 0 \\
 \vdots \quad \text{onde } x_k \text{ resolve} \\
 (P_k) \min f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \\
 \text{sujeito a} \\
 g_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

onde

- $k \geq 1$ ;
- $f_i : \mathfrak{R}^{n_1} \times \dots \times \mathfrak{R}^{n_k} \rightarrow \mathfrak{R}, i = 1, \dots, k$ ;
- $g_i : \mathfrak{R}^{n_1} \times \dots \times \mathfrak{R}^{n_k} \rightarrow \mathfrak{R}^{m_i}, i = 1, \dots, k$ ;
- $n_k \geq 1, m_k \geq 1$  (inteiros).

- $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{im_i}), i = 1, \dots, k$
- Um vetor genérico de  $\Re^{n_1} \times \dots \times \Re^{n_k}$  é denotado por  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Nesta formulação nota-se que o problema  $P_1$  está no primeiro nível (nível mais alto na hierarquia). Ele tem controle sobre a variável  $x_1$  e seu objetivo é minimizar a função  $f_1$ . O problema  $P_k$  é o k-ésimo nível do problema e corresponde ao nível mais inferior da hierarquia.

Em função disso, fica claro que a escolha feita por um nível mais alto afetará as escolhas dos níveis inferiores; a estratégia selecionada por um membro desse sistema, de qualquer modo, influenciará o resultado realizado por qualquer outro membro do sistema através da última função objetivo.

### 3.4.2 Problema Estático de Stackelbeg (PES)

Como foi dito anteriormente o problema de Stackelberg serviu de motivação para o surgimento do problema de dois níveis.

Agora será apresentada a sua formulação.

$$(PES)\min_x F(x, y)$$

Sujeito a:

$$G(x, y) \leq 0 \quad \text{onde } y \text{ é solução de}$$

$$\min_y f(x, y) \tag{3.4.2}$$

Sujeito a:

$$g(x, y) \leq 0$$

onde

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})^T \in X \subseteq \mathfrak{R}^{n_1}$
- $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2})^T \in Y \subseteq \mathfrak{R}^{n_2}$
- $F, f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$
- $G : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{m_1}$
- $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{m_2}$
- $n = n_1 + n_2$

Essa formulação, como pode ser observada, possui dois níveis. O primeiro nível (líder) é composto de uma função objetivo  $F(x, y)$ , e pela restrição  $G(x, y) \leq 0$ . No segundo nível (seguidor), a função objetivo é  $f(x, y)$  e sua restrição é  $g(x, y) \leq 0$ .

Verifica-se que as diretrizes ou estratégias tomadas pelo líder serão descritas através da variável  $x$ , enquanto que as variáveis de decisão do grupo seguidor serão representadas pela variável  $y$ . Para cada diretriz  $x$ , fixada pelo líder, o seguidor reage com uma resposta  $y$  que pode ou não contribuir para minimizar a função objetivo do líder.

Uma vez que as prioridades do líder e do seguidor foram definidas, o problema de Stackelberg determinará um vetor de diretrizes ótimas do líder junto com um vetor de

respostas do seguidor, de tal forma que a função objetivo do líder seja minimizada, satisfazendo as condições de otimalidade.

Como já foi dito, no problema de Stackelberg, o líder influencia as escolhas do seguidor. Por sua vez, as decisões do seguidor não afetam o critério de escolha do líder, isso faz com que a função objetivo do líder seja apenas minimizada na variável  $x$ .

### 3.4.3 Problema de Programação de dois níveis

Agora será apresentada a formulação do problema de dois níveis (*PDN*) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{(PDN)} \min_{x,y} F(x, y) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \quad G(x, y) \leq 0 \qquad \text{onde } y \text{ é solução de} \\
 & \quad \min_y f(x, y) \qquad \qquad \qquad (3.4.3) \\
 & \quad \text{sujeito a} \\
 & \quad \quad g(x, y) \leq 0 \\
 & \quad \quad (x, y) \in X \times Y
 \end{aligned}$$

Nessa formulação nota-se que o problema é dividido em dois subproblemas, tal como na formulação do problema de Stackelberg. O primeiro problema é o problema do líder, enquanto que o segundo problema é o do seguidor. O líder tem a vantagem de ser o primeiro a fixar sua estratégia  $x \in X$ , enquanto que o seguidor, por sua vez, responderá com uma estratégia  $y = y(x)$  e tem como objetivo minimizar sua função objetivo  $f(x, y)$  sujeito as restrições  $g(x, y) \leq 0$ .

De acordo com a reação do seguidor, o líder escolherá entre todos os valores de  $x$  admissíveis aquele que é ótimo para a sua função objetivo  $F(x, y(x))$ . Isso faz com que

o problema do líder minimize nas variáveis  $x$  e  $y$  a sua função objetivo  $F(x, y)$ , sujeito as restrições dadas.

Verifica-se então a diferença entre o problema de Stackelberg e o problema de dois níveis, pois como foi visto anteriormente, no problema de Stackelberg a função objetivo do primeiro nível é minimizada em  $x$  enquanto que no problema de dois níveis ela é minimizada em  $x$  e  $y$ .

Agora serão definidos conjuntos que possuem grande importância no estudo dos problemas de programação em dois níveis e que serão utilizados ao longo deste trabalho, porém antes disso será definido o problema relaxado associado ao problema de dois níveis.

#### 3.4.4 Problema Relaxado

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & F(x, y) \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & G(x, y) \leq 0 \\ & g(x, y) \leq 0 \\ & (x, y) \in X \times Y \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

No Problema Relaxado (PR) do problema de dois níveis é omitida a função objetivo do problema seguidor. PR é um problema de apenas um nível.

### 3.5 Definição dos conjuntos utilizados no estudo dos problemas de dois níveis

1. Conjunto viável do problema relaxado (PR)

$$S = \{(x, y) \in X \times Y : G(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0\}$$

Esse conjunto é formado apenas pelas restrições do líder e do seguidor.

2. Conjunto viável do problema seguidor para cada  $x$  fixado pelo líder

$$S(x) = \{y \in Y : g(x, y) \leq 0\} \quad (3.5.5)$$

Esse conjunto é parametrizado pelas variáveis  $x$ , as quais são controladas pelo líder. Isso ocorre devido ao fato de que a região viável do seguidor é afetada pela escolha  $x$  do líder. As escolhas do problema seguidor são elementos do conjunto  $S(x)$ . Esse conjunto é formado apenas com as restrições do segundo nível.

3. Conjunto de reação racional do seguidor para cada  $x$  fixado pelo líder, também chamado de conjunto solução do problema do seguidor.

$$Y(x) = \{y : y = \arg \min \{f(x, y) : y \in S(x)\}\} \quad (3.5.6)$$

Esse conjunto representa a reação do seguidor face a decisão do líder.

4. Conjunto viável do problema de programação de dois níveis (ou região induzida)

$$\Psi = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in Y(x)\} \quad (3.5.7)$$

O líder desperta diferentes reações no seguidor pela fixação de vários valores para o vetor  $x$ . A união de todos os possíveis vetores que o líder selecionará,  $x$ , e as reações racionais,  $Y(x)$ , formam a chamada região induzida. O problema do líder é minimizar sua função objetivo  $F(x, y)$  sobre a região induzida.

A região induzida é geralmente não convexa e com a presença de restrições no nível superior pode ser desconexa.

No capítulo quatro, apresentaremos exemplos que ilustram as definições acima relacionadas.

## 3.6 Condições de existência de solução

Inicialmente são dadas as seguintes definições sugeridas por Bard [10] e Dempe [33] relacionadas à existência de solução para o problema de dois níveis 3.4.3:

1. Um ponto  $(x, y)$  é chamado de viável se  $(x, y) \in \Psi$ .
2. Um ponto  $(x^*, y^*)$  é uma solução ótima para o problema de dois níveis se:
  - $(x^*, y^*)$  é viável; e
  - Se  $F(x^*, y^*)$  é única para todo  $y^* \in Y(x^*)$ , e  $F(x^*, y^*) \leq F(x, y)$  para todo par viável  $(x, y) \in \Psi$ .

Agora será verificado o comportamento do conjunto solução do problema do seguidor quanto à existência de soluções.

O conjunto reação racional do seguidor  $Y(x)$  pode apresentar uma única solução, múltiplas soluções ou pode não possuir nenhuma solução.

A solução de um problema de dois níveis está associada a aplicação ponto-conjunto  $Y(\cdot): \mathfrak{R}^n \rightarrow V(\mathfrak{R}^m)$ , onde  $V(\mathfrak{R}^m)$  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $\mathfrak{R}^m$ . No caso geral, o conjunto  $Y(x)$  pode apresentar várias soluções.

Quando o problema seguidor apresenta uma única solução para todo  $x \in X$ , tem-se que  $Y(\cdot)$  é uma aplicação ponto-ponto de  $\mathfrak{R}^n$  em  $\mathfrak{R}^m$ .

O resultado abaixo, apresentado por Vicente [82] introduz uma condição suficiente para a aplicação  $Y(\cdot)$  ser contínua, fechada e uma aplicação ponto-ponto.

**Teorema 3.1** *Se para cada  $x \in X$ ,  $f$  e  $g$  são funções duas vezes continuamente diferenciáveis para todo  $y \in S(x)$ ,  $f$  é estritamente convexa para todo  $y \in S(x)$  e o conjunto  $S(x)$  é compacto e convexo, então  $Y(\cdot)$  é uma aplicação ponto-ponto, contínua e fechada.*

A demonstração deste teorema se encontra em [5].

A unicidade de solução para o problema seguidor faz com que o problema de Stackelberg seja equivalente ao problema de dois níveis, pois para cada  $x \in X$  o conjunto  $Y(x)$  consiste de um único  $y$ .

Esta unicidade é também um ingrediente para que sejam estabelecidas condições suficientes para a existência de solução para um problema de dois níveis. O resultado abaixo foi proposto por Vicente e por Harker e Pang [22].

**Teorema 3.2** *Se além de serem válidas as hipóteses do teorema 3.1, a função  $F(x, y)$  for contínua em  $x$  e  $y$  e  $X$  é compacto, então existe sempre uma solução para o problema de dois níveis.*

Esse resultado pode ser verificado através do Teorema de Weierstrass [7], que garante que se uma função é contínua sobre um conjunto compacto, então o problema de otimização tem uma solução ótima.

Pode-se considerar também as seguintes afirmações sugeridas por Bialas e Karwan [19] para garantir a existência de solução para o problema de dois níveis:

1.  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são duas funções continuamente diferenciáveis em  $y$ ,  $\forall y \in S(x)$ .
2.  $f(x, y)$  é estritamente convexa em  $y$ ,  $\forall y \in S(x)$ .
3.  $S(x)$  é um conjunto convexo e compacto.



4.  $F(x, y)$  é contínua e convexa em  $x$  e  $y$ .

5.  $X$  é um conjunto compacto.

Acerca das hipóteses acima verifica-se que

- De (1), (2), (3) temos que  $Y(x)$  é uma aplicação ponto-ponto contínua e fechada.
- (4) implica que  $F(x, y(x))$  é contínua em  $x$ , tendo em vista que  $F(x, y)$  e  $Y(x)$  também são.
- De (5) e pelo fato de  $Y(x)$  ser fechado segue que a região de induzida é compacta.

Assim, o líder minimiza uma função contínua sobre um conjunto compacto. Com isso garante-se a existência de solução para o problema.

# Capítulo 4

## Problema de Dois Níveis Linear

### 4.1 Introdução

Esse capítulo descreve especificamente o problema de dois níveis linear. Inicialmente será apresentada a formulação do problema seguida da definição de conjuntos mais específicos para o caso linear. Em seguida serão apresentadas as características pertinentes a esse tipo de problema, assim como alguns resultados importantes vistos na literatura. Alguns exemplos serão verificados, e em função deles serão ressaltadas as características mencionadas. Por fim, serão apresentadas algumas aplicações surgidas na literatura.

O estudo do caso linear vem recebendo grande atenção por parte dos pesquisadores, pois esse modelo vem sendo utilizado em várias aplicações que apresentam uma estrutura hierárquica, onde as decisões são tomadas ao longo dela de forma sequencial. Além das inúmeras aplicações, verifica-se que são apresentados muitos resultados teóricos e diferentes formulações para esse tipo de problema na literatura com objetivo de desenvolver algoritmos e métodos de resolução diferentes. Em decorrência disso, diferentes análises sobre condições de otimalidade tem surgido na literatura. Essas condições de otimalidade serão estudadas no próximo capítulo.

## 4.2 Formulação do problema de dois níveis linear

A seguir apresentamos uma formulação para o Problema de Programação em dois níveis linear (PDNL)

$$(P_1) \text{Min}_{x,y} F(x,y) = c_1^T x + c_2^T y$$

Sujeito a:

$$A_1 x + B_1 y \leq b_1, \text{ onde } y \text{ é solução de}$$

$$\text{Min}_y f(x,y) = d_2^T y$$

Sujeito a: (4.2.1)

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2$$

$$x, y \geq 0$$

onde

$x, c_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}$ ,  $c_2, d_2, y \in \mathfrak{R}^{n_2}$ ,  $b_1 \in \mathfrak{R}^{m_1}$ ,  $b_2 \in \mathfrak{R}^{m_2}$ ,  $A_1 \in \mathfrak{R}^{m_1 \times n_1}$ ,  $B_1 \in \mathfrak{R}^{m_1 \times n_2}$ ,  
 $A_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_1}$  e  $B_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_2}$

Verifica-se na formulação acima a presença de dois problemas

- O problema do primeiro nível, o qual pode ser chamado de problema do líder, cuja função objetivo é dada por  $F(x,y)$  e cuja restrição é  $A_1 x + B_1 y \leq b_1$ . Como já foi visto no capítulo anterior,  $x$  é a variável controlada do líder.

- O problema do segundo nível que também pode ser chamado de problema do seguidor. A sua função objetivo é dada por  $f(x, y)$  e sua restrição por  $A_2x + B_2y \leq b_2$ . Tem-se que  $y$  é a variável controlada pelo problema seguidor.

### 4.3 Definição dos conjuntos utilizados no caso linear

No capítulo anterior foram definidos, de forma geral, os conjuntos referentes ao problema de dois níveis, porém nesse capítulo a abordagem está sendo feita para o caso linear. Observa-se na formulação desse problema que todas as funções envolvidas são lineares. Dessa forma, serão definidos conjuntos direcionados para esse caso.

1. Conjunto viável do problema relaxado (PR)

$$S = \{(x, y) \in R^{n_1 \times n_2} \times : A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2, x, y \geq 0\} \quad (4.3.2)$$

2. Conjunto viável do problema seguidor para cada  $x$  fixado pelo líder

$$S(x) = \{y : A_2x + B_2y \leq b_2, y \geq 0\} \text{ ou } S(x) = \{y : B_2y \leq b_2 - A_2x, y \geq 0\} \quad (4.3.3)$$

3. Conjunto solução do problema seguidor para cada  $x$  fixado pelo líder ou conjunto reação do seguidor.

$$Y(x) = \{y : y = \arg \min \{f(x, y) = d_2^T y : y \in S(x)\}\} \quad (4.3.4)$$

4. Conjunto viável do problema de dois níveis linear( ou região induzida )

$$\Psi = \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in Y(x)\} \quad (4.3.5)$$

## 4.4 Exemplos de Problemas de dois níveis Linear

Apresentaremos nesta seção exemplos do problema de dois níveis linear e suas características.

Os exemplos que serão analisados seguem o seguinte esquema:

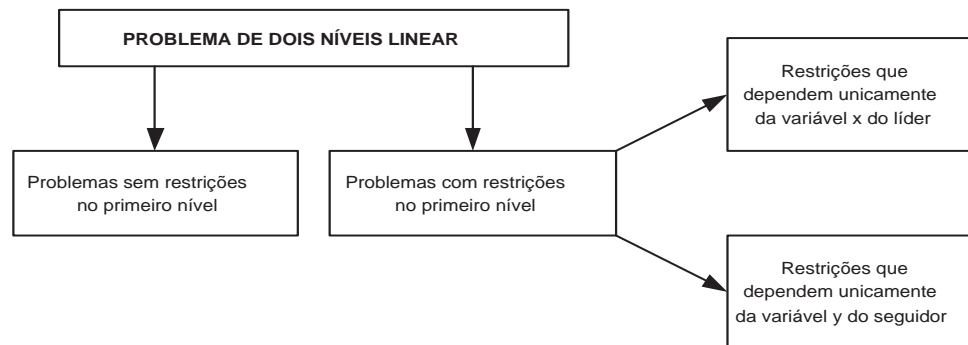


Figura 4.1: Esquema para os exemplos do problema de dois níveis linear

Observa-se no esquema acima que os problemas de dois níveis linear podem ser analisados como problemas que possuem ou não restrições no primeiro nível. Vamos analisar o impacto que a região viável do problema sofre, quando a restrição existente no primeiro nível depende apenas de uma determinada variável.

No exemplo a seguir o problema de dois níveis linear não apresenta restrições no primeiro nível.

$\text{Min}_{x,y \geq 0} F(x,y) = -x - 2y$ , onde  $y$  é solução de

$$\text{Min}_{y \geq 0} f(x,y) = -2x + y$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 4 \\ x - 3y &\leq 4 \\ 2x + 3y &\leq 17 \\ -x + 3y &\leq 5 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

O conjunto viável do problema relaxado é dado por  $S$ , onde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, -x + 3y \leq 5, 2x + y \geq 4, x - 3y \leq 4, 2x + 3y \leq 17\}$$

Esse conjunto é representado na figura.4.2

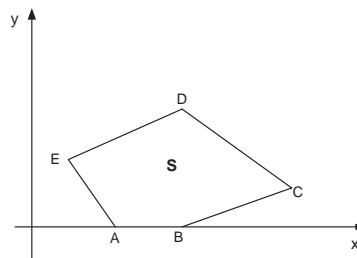


Figura 4.2: Região viável do problema relaxado

O conjunto viável do problema é definido por  $S(x)$ , onde

$$S(x) = \left\{ y \in \mathfrak{R} : y \geq 0, \quad y \geq -2x + 4, \quad y \geq \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \quad y \leq \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y \leq \frac{-2}{3}x + \frac{17}{3} \right\}$$

Segue então que

$$S(x) = \begin{cases} [-2x + 4, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}] & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ [0, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}] & , \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \\ [\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}] & , \text{ se } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Esse conjunto é representado na figura 4.3. O conjunto viável do problema do seguidor, parametrizado por  $x$ , é representado por um segmento vertical.

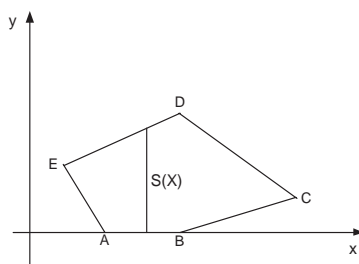


Figura 4.3: Região viável do problema do seguidor

O conjunto solução do problema seguidor é dado por  $Y(x)$ , onde

$$Y(x) = \{y : y = \operatorname{argmin} \{f(x, y) = y : y \in S(x)\}\}. \text{ Portanto,}$$

$$Y(x) = \begin{cases} -2x + 4 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} & , \text{ se } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Note que o conjunto solução do problema do seguidor será representado pelos segmentos que estão na extremidade inferior do conjunto  $S(x)$ .

O conjunto  $Y(x)$  pode ser verificado na figura.4.4

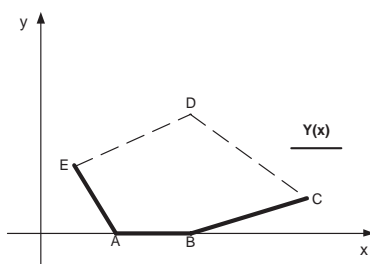


Figura 4.4: Conjunto solução do problema seguidor

Por fim verifica-se que o conjunto viável do problema de dois níveis linear é definido por  $\Psi$ , onde

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + 4, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 2 \leq x \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, 4 \leq x \leq 7\}$$

Essa solução é verificada na figura.

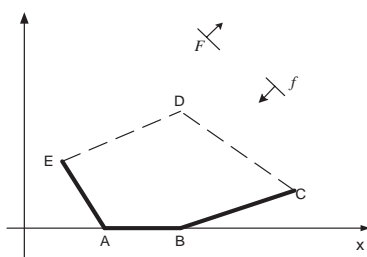


Figura 4.5: Conjunto viável do problema de dois níveis linear

A solução ótima do problema encontra-se no ponto  $C = (7, 1)$ . Este ponto fornece o valor que minimiza a função objetivo do líder. Nota-se que ele é ponto extremo do conjunto viável do problemas de dois níveis linear( $\Psi$ ), assim como é também um ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado( $S$ ).



Nesse segundo exemplo considera-se o exemplo 4.4.7 apresentando uma restrição no primeiro nível. Observe que essa restrição depende unicamente da variável  $x$  do líder.

$$\text{Min}_{x,y \geq 0} F(x, y) = -x - 2y$$

Sujeito a:

$$x \leq 5, \text{ onde } y \text{ é solução de}$$

$$\text{Min}_y f(x, y) = 2x + y$$

Sujeito a:

$$-x + 3y \leq 5$$

$$2x + y \geq 4$$

$$x - 3y \leq 4$$

$$2x + 3y \leq 17$$

(4.4.7)

O conjunto viável do problema relaxado desse exemplo com restrição no primeiro nível é dado por  $S$ , onde

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, -x + 3y \leq 5, 2x + y \geq 4, x - 3y \leq 4, \\ 2x + 3y \leq 17, x \leq 5\}$$

Devido a restrição introduzida no primeiro nível do problema verifica-se que em relação ao exemplo anterior a região viável do problema relaxado fica reduzida, como pode ser observado na figura 4.6.

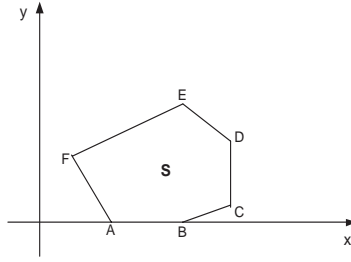


Figura 4.6: Região viável do problema relaxado

O conjunto viável do problema do seguidor será definido por  $S(x)$ , onde

$$S(x) = \left\{ y \in \mathfrak{R} : y \geq 0, \quad y \geq -2x + 4, \quad y \geq \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \quad y \leq \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y \leq \frac{-2}{3}x + \frac{17}{3} \right\}$$

$$\text{Logo temos } S(x) = \begin{cases} [-2x + 4, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}] & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ [0, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}] & , \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \\ [\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}] & , \text{ se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

A figura 4.7 mostra o conjunto viável  $S(x)$  para  $1 \leq x \leq 5$ .

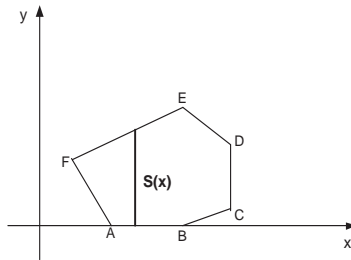


Figura 4.7: Região viável do problema seguidor para  $S(x)$  para  $1 \leq x \leq 5$

O conjunto solução do seguidor é definido por

$$Y(x) = \begin{cases} -2x + 4 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} & , \text{ se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

O conjunto  $Y(x)$  pode ser verificado na figura 4.8.

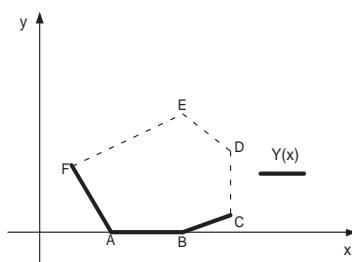


Figura 4.8: Conjunto solução do problema seguidor

O conjunto viável do problema de dois níveis linear é definido por  $\Psi$ , onde

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + 4, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 2 \leq x \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, 4 \leq x \leq 5\}$$

Esse conjunto é verificado na figura 4.9

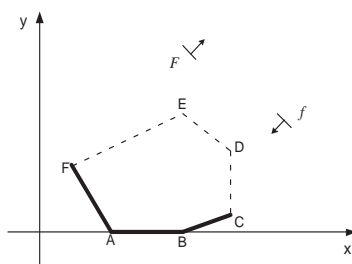


Figura 4.9: Conjunto viável do problema de dois níveis linear

A solução ótima do problema de dois níveis encontra-se no ponto  $C = (5, \frac{1}{3})$ , ponto que minimiza a função objetivo do líder.

Nesse exemplo a região induzida ou região viável do problema de dois níveis é um conjunto não convexo, porém conexo, devido a presença de restrição no primeiro nível do problema depender somente da variável  $x$  do líder, fazendo com que a conexidade seja mantida. Esse fato também é verificado no exemplo 4.4.6, pois o problema não apresenta restrições no primeiro nível.

Por último considera-se o exemplo 4.4.7 com a restrição no primeiro nível, agora depende da variável  $y$  do seguidor.

$$\text{Min}_{x,y \geq 0} F(x,y) = -x - 2y$$

Sujeito a:

$$y \geq \frac{1}{2}, \text{ onde } y \text{ é solução de}$$

$$\text{Min}_y f(x,y) = 2x + y$$

Sujeito a:

$$-x + 3y \leq 5$$

$$2x + y \geq 4$$

$$x - 3y \leq 4$$

$$2x + 3y \leq 17$$

(4.4.8)

O conjunto viável do problema relaxado é dado por  $S$ , onde

$$S = \{(x,y) \in \Re \times \Re : x \geq 0, y \geq 0, -x + 3y \leq 5, 2x + y \geq 4, x - 3y \leq 4, 2x + 3y \leq 17, y \geq \frac{1}{2}\}$$

Esse conjunto com a restrição do primeiro nível em  $y$  pode ser verificado na figura 4.10

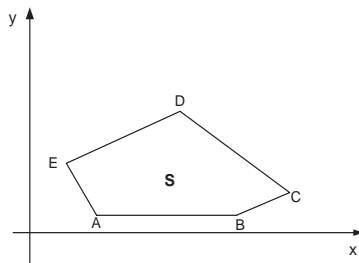


Figura 4.10: Região viável do problema relaxado

O conjunto viável do problema do seguidor será definido por  $S(x)$ , onde

$$S(x) = \left\{ y \in \mathfrak{R} : y \geq -2x + 4, \quad y \geq \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \quad y \leq \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}, y \geq 0 \right\}$$

Segue então que

$$S(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \left[ -2x + 4, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \right] & , se \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \left[ 0, \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \right] & , se \quad 2 \leq x \leq 4 \\ \left[ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3} \right] & , se \quad 4 \leq x \leq 7 \end{array} \right\}$$

A figura 4.11 mostra o conjunto viável do seguidor  $S(x)$ .

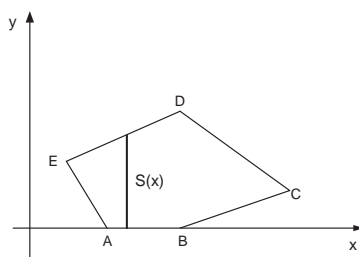


Figura 4.11: Região viável do problema seguidor

Verifica-se também o conjunto solução do problema seguidor como sendo

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2x + 4 & , se \ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , se \ 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} & , se \ 4 \leq x \leq 7 \end{array} \right\}$$

O conjunto solução do problema seguidor é apresentado na figura 4.12

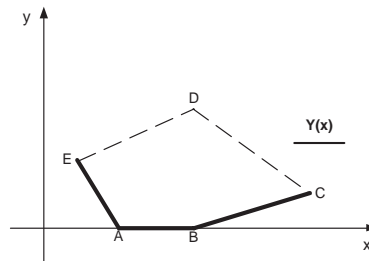


Figura 4.12: Conjunto solução do problema seguidor

Na figura 4.13 verifica-se que a restrição do primeiro nível, na variável  $y$ , faz com que a região induzida ou região viável do problema de dois níveis linear seja desconexa. Pode existir ainda situações em que o conjunto viável  $\Psi$  apresenta pontos isolados.

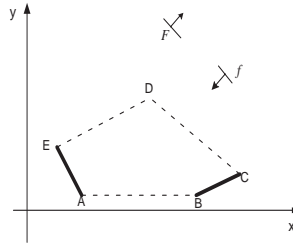


Figura 4.13: Conjunto solução do problema seguidor

Por fim verifica-se que o conjunto viável do problema de dois níveis linear é definido por  $\Psi$ , onde

$$\Psi = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + 4, 1 \leq x \leq \frac{7}{4} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, \frac{11}{2} \leq x \leq 7 \right\}$$

A solução ótima do problema de dois níveis linear é verificada no ponto  $C = (7, 1)$ , ponto que minimiza a função objetivo do líder.

## 4.5 A Geometria dos Problemas de dois Níveis Linear

Na literatura são apresentados alguns resultados que exploram a natureza geométrica dos problemas de dois níveis linear. Nos exemplos apresentados, várias particularidades que envolvem esses problemas foram verificadas. Uma delas é a semelhança existente com os problemas de programação linear. Isso ocorre devido ao fato da solução ótima ser um ponto extremo do conjunto viável. Esses dois problemas, no entanto, diferem entre si no que diz respeito à conexidade do conjunto solução do problema de dois níveis linear que pode não ser mantida, e também em relação a sua convexidade.

Como já foi mencionado antes e verificado através dos exemplos, o conjunto viável do problema de dois níveis linear  $\Psi$  está contido no conjunto viável do problema relaxado ( $S$ ). Esse fato faz com que o problema relaxado determine um limite para a solução ótima do problema.

Essa relação existente entre o conjunto viável do problema de dois níveis linear e o conjunto viável do problema relaxado deixa claro que  $\Psi$  pode ser composto pela união de algumas faces do conjunto viável do problema relaxado. Esse resultado foi apresentado por Benson [16], Dempe [29], [30], [29], [31], [32] entre outros. Ele pode ser verificado no teorema abaixo.

**Teorema 4.1** *Seja  $S$  o conjunto viável do problema relaxado, e  $\Psi$  o conjunto viável do problema de dois níveis. Considere  $S_1, S_2, \dots, S_n$  as faces não vazias de  $S$ . Se  $\Psi \neq \emptyset$ , então  $\Psi = \bigcup_{n \in \bar{k}} S_n$ , onde  $\bar{k}$  é um subconjunto de  $K = \{1, 2, \dots, n\}$ , isto é,  $\bar{k} \subseteq K$ .*

A prova desse Teorema foi apresentada por Benson [16].

Esse resultado relaciona-se ao fato de que o conjunto viável do problema relaxado é convexo, e possui faces poliedrais. Seu número de faces é finito, pois é formado pela interseção de um número finito de semi-espacos fechados. Além disso verifica-se que o



conjunto viável do problema de dois níveis linear é fechado, já que ele é formado pela união de fechados. Assim, uma solução do problema ocorre numa das extremidades do conjunto viável do problema relaxado.

Na literatura encontram-se resultados que envolvem a existência de soluções para o problema de dois níveis linear [50], [74], [22], [19], [83]. Alguns desses resultados são apresentados a seguir.

**Teorema 4.2** *Se o problema de dois níveis linear possui solução então pelo menos uma delas está localizada num ponto extremo do conjunto viável do problema ( $\Psi$ ).*

A prova do teorema a seguir encontra-se em Campelo [67].

**Teorema 4.3** *Uma solução ótima do problema de dois níveis linear ocorre num ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado.*

O fato de que uma solução ótima do problema de dois níveis linear é um ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado serviu de estímulo para o aparecimento de algoritmos que procuram solução para o problema de dois níveis através dos vértices do conjunto viável do problema relaxado.

Na literatura, esta abordagem foi inicialmente apresentada por Candler e Townsley [24]. Eles estão entre os primeiros que apresentaram um algoritmo para obter a solução para o problema de dois níveis linear. Esse fato ocorreu devido a um certo otimismo que eles sentiram em desenvolver um algoritmo baseado num esquema de enumeração implícita, que gera informações que seriam usadas para a busca de soluções ótimas. A informação gerada define um conjunto de condições necessárias, as quais são usadas para evitar o retorno a qualquer base já explorada. Destacam-se, também, os trabalhos de Bialas e Karwan [19] que motivados pelo fato de que a solução ótima do problema de dois níveis linear ocorre num ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado, desenvolveram um algoritmo usando técnicas de programação linear tal como Candler

e Townsley [24]. Candler e Norton [25] propuseram também um algoritmo, porém por não levarem em consideração a não convexidade do problema, o algoritmo falhou ao tentar encontrar uma solução ótima global. Dempe [29] apresentou o resultado anterior formulado conforme é mostrado a seguir.

**Teorema 4.4** *Se a solução ótima do problema do segundo nível em 4.2.1 é determinada unicamente para cada valor do parâmetro  $x$ , então existe uma solução ótima para problema de dois níveis linear a qual é um vértice do conjunto  $\{(x, y) : A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2, x, y \geq 0\}$ .*

Bard [10] também mostra que a solução ótima do problema de dois níveis linear ocorre num vértice do conjunto relaxado.

Uma outra característica existente nesses problemas e que devemos mencionar é a não convexidade do conjunto viável do problema de dois níveis linear. Há na literatura trabalhos onde esse conjunto pode ser substituído pela sua envoltória convexa a fim de contornar o problema [16]. Verifica-se que uma solução do problema de dois níveis linear é uma solução do problema onde a envoltória é utilizada.

O fato de que o conjunto viável do problema de dois níveis linear é não convexo, implica na existência de soluções ótimas locais para o problema, isso pode ser verificado nos exemplos dados. Além desse aspecto, destacamos o fato de que ele pode também não ser conexo. Essa não conexidade está associada a presença de restrições no problema do primeiro nível. O resultado que será apresentado a seguir foi mostrado por Benson [16], e ele ressalta justamente o aspecto da conexidade.

**Teorema 4.5** *Se as restrições existentes no problema do líder não dependem da variável do problema do seguidor, então o conjunto viável ( $\Psi$ ) do problema de dois níveis linear é conexo.*

Considerando  $A_1x + B_1y \leq b_1$  a restrição existente no problema do líder, o resultado apresentado por Benson mostra que se  $B_1 = 0$ , a restrição do primeiro nível fica sendo

$A_1x \leq b_1$ . Isso faz com que o conjunto viável do problema  $\Psi$ , mesmo na presença de restrições no primeiro nível, mantenha sua conexidade. Veja que isso ocorre devido a restrição existente no primeiro nível, depender unicamente da variável  $x$  do líder. Esse fato pode ser verificado no exemplo 4.4.8.

No exemplo 4.4.9 isso já não ocorre, pois  $B_1 \neq 0$ . Agora a restrição existente no primeiro nível depende da variável  $y$  do problema do seguidor, o que faz com que o conjunto viável do problema de dois níveis linear seja desconexo. Se essa restrição for transferida do primeiro nível para o segundo, o conjunto viável do problema volta a ser conexo. Isso pode ser verificado no exemplo abaixo.

$$\text{Min}_{x,y \geq 0} F(x,y) = 3x + y$$

Sujeito a:

$$y \leq 3, \text{ onde } y \text{ é solução de}$$

$$\text{Min}_y f(x,y) = -y$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} -2x + y &\leq 0 \\ x + 3y &\leq 14 \\ 3x + 2y &\leq 21 \\ x + 3y &\geq 7 \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

O gráfico da figura 4.14 mostra a região viável do problema de dois níveis linear com a restrição no primeiro nível.

Conjunto solução do problema seguidor.

$$Y(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2} & , \text{ se } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

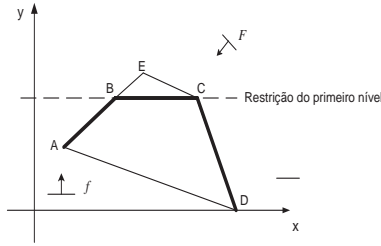


Figura 4.14: Conjunto viável do problema de dois níveis linear

Conjunto viável do problema de dois níveis linear.

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2}, 5 \leq x \leq 7\}$$

A solução ótima encontra-se no ponto  $A = (1, 2)$ .

Observe que  $\Psi$  é desconexo e de fato  $B_1 \neq 0$ , conforme o resultado proposto por Benson.

Considere o exemplo 4.5.10 com a restrição  $y \leq 3$  transferida para o problema do seguidor.

O gráfico da figura 4.15 mostra a região viável do problema de dois níveis com essa mudança.

Conjunto solução do problema seguidor.

$$Y(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 & , \text{ se } 2 \leq x \leq 5 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2} & , \text{ se } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Conjunto viável do problema de dois níveis linear.

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3, 2 \leq x \leq 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2}, 5 \leq x \leq 7\}$$

A solução ótima do problema de dois níveis encontra-se no ponto  $A(1,2)$ .

Verifica-se que  $\Psi$  volta a ser conexo quando é realizada a transferência do primeiro nível para o segundo. Observa-se, também, que a transferência de uma restrição do primeiro nível para o segundo aumenta a região viável do problema.

Vicente [22] apresenta um teorema que mostra a relação existente entre a região viável do problema e as restrições, quando estão no primeiro ou segundo nível do problema. O resultado, de fato, se aplica ao caso mais geral do problema de dois níveis linear definido em 3.4.3.

**Teorema 4.6** *Sejam  $\Psi$  e  $\Psi'$  dois conjuntos definidos do seguinte modo:*

$$\Psi = \{(x, y) : G(x, y) \leq 0, a(x, y) \leq 0, y \in \operatorname{argmin}\{f(x, y) : g(x, y) \leq 0\}\}$$

$$\Psi' = \{(x, y) : G(x, y) \leq 0, y \in \operatorname{argmin}\{f(x, y) : g(x, y) \leq 0, a(x, y) \leq 0\}\}$$

Se  $a(x, \cdot)$ ,  $f(x, \cdot)$  e  $g(x, \cdot)$  são funções convexas e diferenciáveis em  $y$  para todo  $x$  e se é verificada uma restrição de qualificação adequada para o problema do segundo nível então  $\Psi \subseteq \Psi'$ .

Observamos que o conjunto viável do problema relaxado permanece inalterado mesmo quando uma restrição é transferida de um nível para o outro. Se for considerado nos exemplos 2.5.6 e 2.5.7, as regiões viáveis dos problemas como sendo  $\Psi$  e  $\Psi'$  respectivamente, observa-se que  $\Psi \subseteq \Psi'$ .

## 4.6 Algumas Aplicações da Programação de Dois Níveis Linear

É grande a aplicabilidade dos problemas de dois níveis linear. Na literatura muitos problemas já foram formulados como problemas de dois níveis linear, e a lista de aplicações continua crescendo. Agora são apresentadas algumas das aplicações.

Destaca-se, nesta lista de aplicações, os trabalhos de Falk [37]. Eles investigaram problemas no setor militar que poderiam ser formulados como problemas de dois níveis,

por apresentarem uma estrutura hierárquica. Nesse tipo de aplicação um dos objetivos era estabelecer uma estrutura ótima para alocação tática de aeronaves para missões, assim como determinar uma estratégia ótima de bombardeio.

Os trabalhos de Friezz e Tobin [42] se destacam, no que diz respeito ao uso dos problemas de dois níveis para encontrar um local ótimo para instalação de uma nova fábrica/firma, assim como calcular o nível de produção dessa nova instalação entre outros objetivos traçados.

Outrata, A.Migdalas, P. Ferrari [76] e O.Ben-Ayed [14] apresentaram aplicações voltadas para o planejamento e melhoria do sistema de transporte. Considera-se não só a melhoria dos caminhos já existentes, mas também a criação de outros. Um exemplo é dado se o agente do nível superior deseja equilibrar o transporte através de investimentos, manutenção de custos ou impondo taxas de pedágios e preços de ticket. Os usuários seriam considerados como agentes do nível inferior, e esses por vez apresentariam um certo comportamento em relação às medidas tomadas pelo agente do nível superior.

G.Anandalingam [84] aplica a programação de dois níveis em resoluções de conflitos internacionais. Ele cita o caso da Índia e Bangladesh, que dividem as águas do Rio Ganges. Os dois têm disponível, em função disso, energia elétrica, água para irrigação, proteção contra enchentes pelo uso de uma série de barragens para ambos. Tanto a Índia quanto Bangladesh fazem investimentos na represa e decidem sobre o tamanho das barragens, nível d'água usado na irrigação e energia elétrica. Em situações como essa um dos dois países é o líder.

Modelos para agricultura foram propostos por Candler e Norton [24]. Nessa área as aplicações ocorrem na política de agricultura, modelos para fornecimento de fertilizadores, modelos para abastecimento d'água. Ele apresentaram um modelo para agricultura mexicana.

Cassidy, Kirby e Raike [27] destacam-se na área governamental com formulações de dois níveis envolvendo a distribuição de recursos governamentais.

Na área econômica temos o trabalho de J. Bisschop, W.Candler, J.Duloy e G.O'Mara [20]. Muitas são as aplicações na área econômica, tais como determinar prognósticos de fracasso, prevenção de prejuízos, evolução de crédito, estabelecer limites de preços na indústria de petróleo. Destaca-se, também, F.A.Parraga [71] entre outros na área de administração; com trabalhos voltados para gestão financeira.

## 4.7 Considerações sobre o Problema de Dois Níveis Linear

Bialas e Karwan [19], Júdice e Faustino, White e Anandalingam [84], Dempe [32], Candler e Towsley [24] reformularam do problema de dois níveis, com a aplicação das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker(KKT), para o caso linear. Considere inicialmente a formulação do problema de dois níveis linear 4.2.1.

Aplicando as condições de Karush-Kuhn-Tucker(KKT) ao referido problema seguidor, obtém-se a seguinte formulação:

$$\text{Min}_{x,y} c_1^T x + c_2^T y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y &\leq b_1 \\ d_2 + B_2^T \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda^T (A_2 x + B_2 y - b_2) &= 0 \\ \mu^T y &= 0 \\ A_2 x + B_2 y &\leq b_2 \\ x, y, \lambda, \mu &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

onde  $\lambda \in \Re^{m_2}$  é o vetor dos multiplicadores deLagrange associados às restrições do seguidor e  $\mu$  é um vetor  $n_2$ -dimensional cujas componentes são os multiplicadores

de Lagrange associados às restrições de não-negatividade das variáveis do problema do seguidor.

Considerando-se que o problema seguidor é convexo para um dado  $x$ , verifica-se que o problema 4.7.10 é equivalente ao problema de dois níveis, e essa equivalência ocorre em função das condições de KKT serem necessárias e suficientes para o problema linear do segundo nível (problema seguidor). No entanto, o fato do problema de dois níveis linear ter sido reduzido a um único nível não significa que ele apresente uma resolução simples, pois os métodos utilizados para sua resolução não são tão eficientes. Isso ocorre devido à não convexidade apresentada pelo conjunto viável do problema 4.7.10, gerada pelas restrições de complementaridade. Isso dificulta a determinação de ótimos globais. Para contornar o problema foram apresentadas algumas alternativas, apresentadas a seguir.

Bard e Falk [12] fazem uso de um modelo separável, isto é, eles fazem com que a função objetivo do líder e as restrições possam ser escritas na forma de funções separáveis. Falk e Liu [36] desenvolveram um algoritmo para programas separáveis não convexos. Esse algoritmo utiliza um processo tipo "Branch and Bound". Vários testes numéricos foram realizados para analisar o comportamento do método. Verificou-se que a convergência do método é lenta para determinados problemas, isso devido ao elevado número de nós explorados pelo processo "Branch and Bound".

Também para contornar o problema gerado pelas condições de complementaridade pode-se destacar a abordagem de Fortuny e McCarl [41]. Eles apresentaram uma formulação do problema de dois níveis linear com restrições de complementaridade num programa linear inteiro misto. Isso seria uma outra forma de representar as restrições de complementaridade, pois ela consiste da introdução de variáveis binárias 0 – 1, que acabam simulando as restrições de complementaridade. Eles não apresentaram resultados computacionais que comprovem a eficiência desta abordagem. Önal [69] realizou testes, porém as respostas não foram satisfatórias, pois na maioria dos casos o método assegurou apenas a determinação de mínimos locais.

Uma outra abordagem sugerida na literatura seria o modelo de penalidade. Pode-se



destacar os trabalhos apresentados por Bard [4], Anandalingam e White [2], Onal [70] e Campelo [23]. Esse modelo consiste de introduzir as restrições de complementaridade na função objetivo do problema líder com um termo de penalidade. O modelo penalizado pode ser apresentado da seguinte maneira:

$$\text{Min}_{x,y,\lambda} (c_1^T x + c_2^T y) + K(-\lambda^T(b_2 - A_2x + 2B_2y) + d_2^T y)$$

sujeito a

$$A_1x + B_1y \leq b_1$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2$$

$$B_2^T \lambda \geq -d_2$$

$$x, y, \lambda \geq 0$$

Considere, para o modelo acima apresentado, o parâmetro de penalidade  $K \geq 0$ . Observe que a não convexidade do conjunto viável do problema formulado foi transferida para a função objetivo do problema do líder. Esse modelo gera um problema bilinear para cada  $K$  fixo. O algoritmo que resolve esse problema busca um ótimo global para  $K$  fixo e vai aumentando o valor de  $K$  até que seja encontrado o menor valor possível que satisfaça as condições de otimalidade do problema do seguidor. Resultados foram apresentados por Bard [9].

# Capítulo 5

## Condições de Otimalidade

### 5.1 Introdução

Observa-se que em qualquer problema de otimização existe a necessidade de estabelecer condições de existência de solução, e esse fato também ocorre com a programação de dois níveis. De forma superficial foram abordadas tais condições no capítulo três, assim como foi verificado que o problema de Stackelberg tem uma relação de equivalência com o problema de dois níveis, porém essa relação depende da unicidade das soluções do problema seguidor. Verifica-se na literatura a presença de diferentes formulações para um problema de dois níveis. Essas formulações são utilizadas para desenvolver, de modos diferentes, métodos de resolução para o problema de dois níveis através da transformação do problema de dois níveis num único nível. Verifica-se também que através dessas diferentes formulações é possível apresentar de diferentes formas as condições de otimalidade para o problema de dois níveis. Nesse capítulo serão apresentadas algumas dessas formas.

Como já dito anteriormente, as diferentes formulações do problema de dois níveis são de grande importância e desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de algoritmos para a resolução de problemas de dois níveis. Pode-se observar que a grande dificuldade em se trabalhar com os problemas de dois níveis ocorre devido ao fato de que parte de suas restrições é dada implicitamente pelo conjunto solução do segundo problema de otimização. Uma forma de sair dessa estrutura hierárquica seria justamente

através das formulações.

## 5.2 Formulação 1 de Bard

Bard [10] utiliza um modelo de programação semi-infinita para apresentar uma outra formulação para o problema de dois níveis. Isso ocorre devido ao fato de que existe uma relação entre a programação semi-infinita e a programação de dois níveis. Essa relação é explorada nos trabalhos apresentados por Stein e Still [81]. Bard considera o problema de dois níveis sem restrições no primeiro nível.

A programação semi-infinita é um modelo de otimização onde existe um número infinito de restrições descritas parametricamente. Bard verifica que o conjunto solução do problema do seguidor em 3.4.3 pode ser representado por um número infinito de desigualdades paramétricas, ou seja:

$$Y(x) = \{y \in \mathfrak{R}^2 : f(x, y) \leq f(x, t), \forall t \in S(x)\}$$

Tem-se então a seguinte formulação do problema de dois níveis:

$$\begin{aligned} & \text{(PDN)} \min_{x,y} F(x, y) \\ & \text{sujeito a} \\ & f(x, y) - f(x, t) \leq 0, \forall t \in S(x) \\ & g(x, y) \leq 0 \\ & (x, y) \in X \times Y \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

A primeira tentativa de estabelecer condições necessárias de otimalidade para o problema de dois níveis foi dada por Bard a partir da formulação 5.2.1. Ele mostrou que se  $X = \mathfrak{R}^n, Y = \mathfrak{R}^m$ , o conjunto viável do problema relaxado é não vazio e compacto,  $Y(\cdot)$  é uma aplicação unívoca e  $F, f, g$  são continuamente diferenciáveis e se  $(x_0, y_0)$  é

um mínimo local para o problema de dois níveis sem restrições no primeiro nível , então existem multiplicadores  $u \in \mathfrak{R}^{n+m}$  e  $v \in \mathfrak{R}$  tais que

$$\begin{aligned} \nabla_x F(x_0, y_0) + \nabla_x g(x_0, y_0)^T u &= 0 \\ \nabla_y F(x_0, y_0) + \nabla_y g(x_0, y_0)^T u + v \nabla_y f(x_0, y_0) &= 0 \\ f(x_0, y_0) - f(x_0, t) &\leq 0, \forall t \in S(x) \\ u^T g(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &\leq 0, u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$

Entretanto, Clarke e Westerberg [28] apresentaram um contra exemplo para estas condições. A origem do erro de Bard foi o de estabelecer as condições de KKT aplicando-as diretamente no conjunto infinito de restrições. Bard ignorou que este conjunto estava parametrizado.

### 5.3 Formulação 2 de Bard

Em [10], Bard apresenta uma formulação que consiste em transformar o problema de dois níveis num único nível substituindo o problema do seguidor pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Bard apresenta o seguinte Teorema que caracteriza a formulação 3.4.3 para o problema de dois níveis.

**Teorema 5.1** *Sejam as funções do problema de dois níveis continuamente diferenciáveis. As funções  $f$  e  $g$  são funções convexas em  $y$  para todo  $y \in S(x)$ . Assuma que as restrições de qualificação de Mangasarian-Fromowitz [7] sejam satisfeitas para o problema do seguidor em  $x = x^*$ . Então uma condição necessária e suficiente para que  $(x^*, y^*)$  solucione o problema de dois níveis é que exista um  $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$  tal que  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  solucione o seguinte problema:*

(PDN)  $\min_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y)$

sujeito a

$$\begin{aligned}\nabla_y f(x, y) + \sum \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) &= 0 \\ \lambda^T g(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &\leq 0 \\ \lambda &\geq 0\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

Este teorema será utilizado adiante no desenvolvimento do algoritmo proposto nesta tese.

## 5.4 Formulação de Chen e Florian

A próxima formulação foi sugerida por Chen e Florian [39]. Eles utilizam a função marginal associada ao problema do seguidor, e essa por sua vez assume o valor ótimo do problema seguidor, quando ele existe.

A função marginal de Chen e Florian é definida por:

$$v : \mathfrak{R}^{n_1} \mapsto \mathfrak{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$v(x) = \inf_{y \in S(x)} f(x, y) \quad S(x) \neq \phi$$

$$v(x) = +\infty \quad S(x) = \phi$$

Segue, então a formulação do problema de dois com a função marginal:

$$\begin{aligned}
& \min_{x,y} F(x,y) \\
& \text{sujeito a} \\
& G(x,y) \leq 0 \\
& f(x,y) - v(x) = 0 \\
& g(x,y) \leq 0 \\
& (x,y) \in X \times Y
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

A restrição  $f(x,y) - v(x) = 0$  assegura que  $y$  é a solução ótima do problema do seguidor dado que a variável  $x$  foi fixada pelo líder. Observe que essa restrição é dada de forma implícita.

O conjunto solução do problema do seguidor, com a formulação marginal, poder ser escrito da seguinte forma:

$$Y(x) = \{y \in S(x) \mid f(x,y) = v(x)\}$$

Observa-se que a função marginal não apresenta um bom comportamento, pois em geral as propriedades apresentadas para o problema do seguidor não são refletidas na função marginal, isto é, o problema do seguidor pode apresentar funções diferenciáveis e a função marginal ser não diferenciável, o seguidor ser convexo em na variável  $y$  e a função marginal ser não convexa. Devido a esse fato a formulação sugerida por Chen e Florian [39] é feita de acordo com as seguintes condições de limitação inferior.

A abordagem de Chen e Florian foi feita mediante as seguintes hipóteses:

1. Todas as funções envolvidas são semi-contínuas inferiores

$$(x_n \rightarrow x, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \Rightarrow l \geq f(x))$$

2. Para cada  $x' \in X$  e  $c \in \Re$ , existe um  $\epsilon > 0$  tal que o seguinte conjunto é limitado:

$$\{(x,y) \in X \times Y : \|x - x'\| \leq \epsilon, f(x,y) \leq c, \|g(x,y)\| \leq \epsilon\} \tag{5.4.4}$$

3. Para cada  $x \in X$  tal que  $S(x) \neq \emptyset$ , o problema seguidor satisfaz a restrição de qualificação na solução ótima  $y(x)$ .

A partir dessas condições verifica-se que se o problema de dois níveis original 3.4.3 possui solução, então o problema 5.4.3 é equivalente ao problema de dois níveis com a formulação da função marginal. Chen e Florian apresentaram o seguinte Lema que mostra a relação entre os dois problemas no que diz respeito a solução encontrada.

**Lema 5.1** *Se  $f(.,.)$  e  $g(.,.)$  são convexas em  $y$  para um  $x$  fixo, então, a formulação marginal do problema de dois níveis 5.4.3 é idêntica a formulação KKT 5.3.2:*

$$\begin{aligned}
 \min_{(x,y) \in X \times Y} & F(x, y) \\
 \text{sujeito a} & G(x, y) \geq 0 \\
 & \nabla_y f(x, y) + u^T \nabla_y g(x, y) = 0 \\
 & u^T g(x, y) = 0 \\
 & g(x, y) \leq 0 \\
 & u \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

onde  $u$  são os multiplicadores de Lagrange associados a  $y$  para um  $x$  fixo.

# Capítulo 6

## Algoritmos para o problema de dois níveis linear

### 6.1 Introdução

Problemas de programação em dois níveis fazem parte de uma classe bem difícil de problemas de otimização global. O problema seguidor é definido implicitamente, fazendo com que o conjunto de restrições do problema de dois níveis possua uma certa dificuldade geométrica. A implementação de métodos diretos de descida, portanto, não representa uma tarefa muito fácil. Determinar a direção de descida mesmo no caso linear, é um problema NP difícil. De uma forma geral, isso significa que não é provável que exista um algoritmo que encontre uma solução em tempo polinomial.

Existem vários critérios para classificarmos os diversos tipos de métodos de resolução de problemas de dois níveis linear. Um método pode estar incluído em mais de uma classe. Destacamos três classes de algoritmos encontrados na literatura: Métodos de enumeração de pontos extremos, Métodos baseados nas condições de otimalidade, Métodos do tipo Branch-and-bound. De todos os métodos destacados, todos produzem ótimo global, com exceção do método de penalidade, que obtém um ótimo local faremos um breve comentário sobre os métodos destacados.



### 6.1.1 Métodos de enumeração de pontos extremos

Os algoritmos deste método exploram de uma forma enumerativa os pontos extremos do conjunto viável do problema de dois níveis relaxado, uma vez que uma solução, se existir, encontra-se num ponto extremo do conjunto viável  $\Psi$ , conforme os teoremas 4.2 e 4.3. Os algoritmos, de uma maneira geral, diferem entre si na ordem pela qual percorrem os pontos extremos.

Citamos como exemplo dessa classe de algoritmos o algoritmo k-ésimo melhor de Bialas e Karwan [19] e Candler e Towsley [24].

Bialas e Karwan relataram poucas experiências computacionais com problemas gerados aleatoriamente e Candler e Towley não apresentaram experiências computacionais com o algoritmo.

### 6.1.2 Métodos baseados nas condições de otimalidade

Uma vez que o problema de dois níveis linear é um caso particular de um problema de dois níveis convexo, podemos substituir o seguidor pelas suas condições de Karush-Kuhn-Tucker e escrever, desta forma, o problema de dois níveis com um único nível, mas com restrições de complementaridade. Podemos obter algumas aproximações de soluções utilizando as condições de Karush-Kuhn-Tucker do problema seguidor. A dificuldade desses métodos está relacionada às restrições de complementaridade que é um termo não linear e não convexo.

Uma forma de resolver a questão do termo não linear seria suavizando ou penalizando este termo. Quando penalizamos o termo de complementaridade, um problema de otimização não convexo e não diferenciável é produzido, mas que pode ser tratado por técnicas especializadas. No entanto, mesmo sob fortes condições de regularidade, só conseguimos a garantia de convergência para pontos estacionários. Podemos citar, como exemplo de algoritmo baseado nas condições de otimalidade e métodos de penalidade, Fortuny e McCarl [41], White e Anandaligam [84] e Bi, Calamai e Conn [17].

Podemos citar também o algoritmo proposto por Herkovits e Leontiev, que resolvem o problema de um nível resultante do uso das condições de Karush-Kuhn-Tucker utilizando métodos de pontos interiores.

### **6.1.3 Métodos do tipo Branch-and-bound**

Os algoritmos desta classe utilizam o processo clássico de ramificações em árvores, típico dos algoritmos branch and bound. Neste algoritmo, o conjunto viável é dividido em nós. Em cada nó da árvore podem aparecer condições próprias que, quando verificadas, interrompem a ramificação. Recomeça-se o processo em um nó ainda não explorado e termina-se quando não existem mais nós a serem verificados.

No processo branch-and-bound o nó inicial é associado ao problema principal e os descendentes de um nó correspondem a subproblemas definidos pela partição do conjunto viável relativo a este nó.

Podemos citar como exemplos o algoritmo de Hansen, Jaumard e Savard [49] e Bard e Moore [11]

Neste trabalho, o algoritmo proposto é inspirado na técnica branch-and-bound de Bard e Moore, que descreveremos na próxima seção.

## **6.2 O algoritmo de Bard e Moore**

### **6.2.1 Introdução**

O algoritmo apresentado por Bard e Moore [11] foi originalmente desenvolvido para o problema de dois níveis linear/quadrático, o qual difere do problema de dois níveis linear por admitir função objetivo quadrática para o problema seguidor

Nesta seção estudaremos a aplicação deste algoritmo que se enquadra na categoria dos métodos de branch-and-bound ao problema de dois níveis linear.

## 6.2.2 Problemas

Consideremos neste e no próximo capítulo o seguinte problema de dois níveis linear:

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad & \text{(PDN)} \max_{x,y} c_1^T x + c_2^T y \\
 (1b) \quad & A_1 x \leq b_1 \\
 (1c) \quad & \text{sujeito a} \quad x \geq 0 \\
 (1d) \quad & \max_y d_2^T y \\
 (1e) \quad & \text{sujeito a} \quad A_2 x + B_2 y \leq b_2 \\
 (1f) \quad & y \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Converteremos o problema 6.2.1 em um problema de programação matemática em um único nível. Substituiremos o problema seguidor (1d) – (1f) pelas condições de KKT, e daremos o controle de todas as variáveis ao líder, como em Simaan e Cruz [78]. Teremos portanto, o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad & \text{(PDN)} \max_{x,y,\lambda,\mu} c_1^T x + c_2^T y \\
 (2b) \quad & A_1 x \leq b_1 \\
 (2c) \quad & \text{sujeito a} \quad -B_2^T \lambda + I \mu = -d_2 \\
 (2d) \quad & (A_2 x + B_2 y - b_2) \circ \mu = 0 \\
 (2e) \quad & y \circ \lambda = 0 \\
 (2f) \quad & A_2 x + B_2 y \leq b_2 \\
 (2g) \quad & x, y, \lambda, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Onde  $\lambda$  é o multiplicador de lagrange  $m_2$ -dimensional e  $\mu$  é o multiplicador de lagrange  $n_2$ -dimensional,  $I$  é a matriz identidade e  $\circ$  é o produto Hadamard definido por  $[y \circ \lambda]_j = y_j \lambda_j$ ,  $[y \circ \lambda] \in R^{m_2}$ .

Esta reformulação do problema é possível devido ao resultado do Teorema 5.1.

As restrições (2b),(2c), (2d), (2e) e (2f) podem ser interpretadas como uma representação explícita da região induzida. Entretanto, o problema 6.2.2 é não convexo e pode

não ser necessariamente resolvido por um algoritmo padrão de programação não linear.

Como foi sugerido por Fortuny-Amat e McCarl [41] a idéia básica do algoritmo de Bard e Moore é suprimir o termo de complementaridade (2d) e resolver o problema linear resultante. A cada iteração, verifica-se se (2d) é satisfeita. Se (2d) estiver sendo satisfeita, o ponto está na região induzida, e portanto, é um candidato a solução para 6.2.1. Se (2d) não se verifica, um algoritmo do tipo branch-and-bound é utilizado para examinar implicitamente todas as combinações das folgas complementares.

### 6.2.3 Algoritmo de Bard e Moore

Notação utilizada:

- $u = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$
- $u \in R^{m_2+n_2}$
- $g = \begin{pmatrix} A_2x + B_2y - b_2 \\ y \end{pmatrix}$
- $W = \{1, \dots, m_2 + n_2\}$  conjunto de índices para os termos em (2c)
- $\underline{F}$  limite inferior para a função objetivo do líder
- $W_k \subseteq W$  subconjunto de índices
- $P_k$  caminho( com  $|W_k|$  componentes não nulas ) corresponde à atribuição  $u_i = 0$  ou  $g_i = 0$  para  $i \in W_k$  .
- $S_k^+ = \{i : i \in W_k \text{ e } u_i = 0\}$
- $S_k^- = \{i : i \in W_k \text{ e } g_i = 0\}$
- $S_k^0 = \{i : i \notin W_k\}$

Observe que podemos escrever (2d) e (2e):  $(A_2x + B_2y - b_2) \circ \mu = 0$  e  $y \circ \lambda = 0$  como  $u \circ g = 0$ .

Para  $i \in S_k^0$ , as variáveis  $u_i$  e  $g_i$  são livres para assumir qualquer valor não negativo na solução de (2a)-(2e) com (2d) omitido, assim, (2d) não será necessariamente satisfeita.

## 6.2.4 Algoritmo de Bard e Moore

PASSO 0	Inicialização	Faça $k = 0$ , $S_k^+ = \emptyset$ , $S_k^- = \emptyset$ , $S_k^0 = \{1, \dots, m + n_2\}$ , $\underline{F} = -\infty$
PASSO 1	Iteração $k$	Faça $u_i = 0$ para $i \in S_k^+$ e $g_i = 0$ para $i \in S_k^-$ Tente resolver (2a)-(2e) sem (2c). Se o subproblema resultante é inviável, vá para PASSO 5; Caso contrário, faça $k \leftarrow k + 1$ e marque a solução $(x^k, y^k, u^k)$
PASSO 2	Aprofundando	Se $F(x^k, y^k) \leq \underline{F}$ , vá para PASSO 5
PASSO 3	Ramificando	Se $u_i \cdot g_i(x^k, y^k) = 0$ , $i = 1, \dots, m + n_2$ vá para PASSO 4; Caso contrário, escolha $i$ de modo que $u_i \cdot g_i(x^k, y^k)$ seja grande e chame-o $i_1$ Faça $S_k^+ \leftarrow S_k^+ \cup \{i_1\}$ , $S_k^0 \leftarrow S_k^0 \setminus \{i_1\}$ , $S_k^- \leftarrow S_k^-$ , acrescente $i_1$ em $P_k$ , e vá para o PASSO 1.
PASSO 4	Atualizando	$\underline{F} = F(x^k, y^k)$
PASSO 5	Backtracking	Se não existirem mais nós, vá para o PASSO 6; Caso contrário ramifique o novo nó e atualize $S_k^+$ , $S_k^-$ , $S_k^0$ e $P_k$ , como discutido acima Vá para o PASSO 1.
PASSO 6	Terminando	Se $\underline{F} = -\infty$ , não ha solução viável para (1a)- (1e); Caso contrário, declare o ponto viável associado a $\underline{F}$ como solução ótima.

O PASSO 1 do algoritmo de Bard e Moore a cada iteração encontra um novo ponto candidato a viável do problema de dois níveis. Se não existe solução ou se a solução não oferece melhora ( PASSO 2), o algoritmo vai para o PASSO 5, retrocedendo então.

No PASSO 3 o algoritmo verifica se a condição de folgas complementares é satisfeita. Na prática, se  $u_i \cdot g_i(x^k, y^k) \leq \epsilon$ , para um dado  $\epsilon > 0$ , então  $u_i \cdot g_i(x^k, y^k)$  é considerado zero. A confirmação indica que uma solução viável do problema de dois níveis foi encontrada, e no PASSO 4 é atualizado um limite inferior para a função objetivo.

Se a condição de folgas complementares não é satisfeita, o termo com o maior produto é usado no PASSO 3 para fornecer a variável ramificada. A ramificação é sempre feita nos multiplicadores de KKT.

No PASSO 5, faz-se o Backtracking. Note que o nó atual é associado ao subproblema que não foi descartado nem no PASSO 1, devido à inviabilidade, nem no PASSO 2 devido ao limite, e cuja solução viola pelo menos uma condição de folgas complementares. Para facilitar o armazenamento, o caminho  $P_k$  na árvore do branch-and bound é representado por um vetor 1-dimensional, onde  $l$  é a profundidade atual da árvore. A ordem das componentes de  $P_k$  é determinada pelo nível da árvore. Os índices só aparecem em  $P_k$  se estão em  $S_k^+$  ou  $S_k^-$  com as entradas sublinhadas se estão em  $S_k^-$ . Como o algoritmo ramifica primeiro no multiplicador de KKT, a ramificação é concluída quando encontramos o componente de  $P_k$  não sublinhado mais a direita, sublinhamos ele e apagamos todas as entradas a direita. A nova entrada sublinhada é retirada de  $S_k^+$  e adicionada a  $S_k^-$ ; as entradas apagadas são retiradas de  $S_k^-$  e adicionadas a  $S_k^0$ .

Se chegamos ao PASSO 6 e  $\underline{F} = -\infty$ , então concluímos que a região original de restrição(1d) e (1e) é vazia. Este fato só ocorrerá se, no PASSO 1, o primeiro subproblema for inviável. O algoritmo termina com a otimalidade sendo estabelecida.

**Proposição 6.1** *Supondo que  $Y(x)$  é mapeamento ponto-ponto, o algoritmo termina com um ótimo global para o problema de dois níveis 6.2.1.*

*Prova:*

O algoritmo faz com que as condições de folgas complementares sejam satisfeitas no problema 6.2.2, que por sua vez, é uma representação equivalente de 6.2.1. Como consideramos todas as combinações de  $u_i \cdot g_i(x^k, y^k)$  nos PASSOS 3 e 5, a solução ótima estará entre elas.

## 6.2.5 Exemplo

$$\max_x F(x, y) = 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 40y_2 + 4y_3$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \max_y f(x, y) &= -x_1 - 2x_2 - y_1 - y_2 - 2y_3 \\ \text{sujeito a} \quad &y_1 - y_2 - y_3 \geq -1 \\ &-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 \geq -1 \\ &-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 \geq -1 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Este exemplo foi extraído de Candler e Towsley (1982) .

Reescreveremos, então, o exemplo dado como um problema de um único nível, substituindo o problema seguidor pelas suas condições de KKT.

Calculando os gradientes:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_4 = \\ &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Condições de KKT:**

$$\begin{aligned} -1 + u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 &= 0 \\ -1 - u_1 - 2u_2 + u_3 + u_5 &= 0 \\ -2 - u_1 + 0.5u_2 + 0.5u_3 + u_6 &= 0 \end{aligned}$$

Complementaridade

$$\begin{aligned} u_1 (y_1 - y_2 - y_3 + 1) &= 0 \\ u_2 (-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 + 1) &= 0 \\ u_3 (-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 + 1) &= 0 \\ u_4 y_1 &= 0 \\ u_5 y_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$u_6 y_3 = 0$$

Não negatividade

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0, u_6 \geq 0$$

Viabilidade primal

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$$

$$-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 \geq -1$$

$$-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 \geq -1$$

O problema fica então da seguinte forma:

$$\max_x F(x, y) = 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 40y_2 + 4y_3$$

sujeito a

$$-1 + u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 = 0$$

$$-1 - u_1 - 2u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

$$-2 - u_1 + 0,5u_2 + 0,5u_3 + u_6 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$$

$$-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 \geq -1$$

$$-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 \geq -1$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0, u_6 \geq 0$$

$$u_1 (y_1 - y_2 - y_3 + 1) = 0$$

$$u_2 (-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 + 1) = 0$$

$$u_3 (-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 + 1) = 0$$

$$u_4 y_1 = 0$$

$$u_5 y_2 = 0$$

$$u_6 y_3 = 0$$

Resolvemos o problema sem as condições de complementaridade.

$$\begin{aligned}
\max_x F(x, y) &= 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 40y_2 + 4y_3 \\
\text{sujeito a} \quad &-1 + u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 = 0 \\
&-1 - u_1 - 2u_2 + u_3 + u_5 = 0 \\
&-2 - u_1 + 0.5u_2 + 0.5u_3 + u_6 = 0 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\
&y_1 - y_2 - y_3 \geq -1 \\
&-2x_1 + y_1 - 2y_2 + 0,5y_3 \geq -1 \\
&-2x_2 - 2y_1 + y_2 + 0,5y_3 \geq -1 \\
&u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0, u_6 \geq 0
\end{aligned}$$

**Iteração Zero:**  $k = 0$

O algoritmo encontra uma solução viável para o problema acima :

$$\begin{aligned}
x^0 &= (0, 0) \\
y^0 &= (1.5, 1.5, 1) \\
u^0 &= (0, 0, 0, 1, 1, 2) \\
F(x^0, y^0) &= 58
\end{aligned}$$

**Primeira Iteração:**  $k = 1$

Na primeira iteração, o algoritmo resolverá o problema acrescido de uma nova restrição:  $u_6 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$\begin{aligned}
x^1 &= (0, 0) \\
y^1 &= (1.5, 1.5, 1) \\
u^1 &= (0, 1, 3, 6, 0, 0) \\
F(x^1, y^1) &= 58
\end{aligned}$$

Este ponto não satisfaz as condições de complementaridade. Assim, ramificamos, selecionando uma variável  $u_5$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$\begin{aligned}
S_1^+ &= \{6\} \\
S_1^- &= \emptyset \\
S_1^0 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}$$

$$P_1 = \{6\}$$

**Segunda Iteração:**  $k = 2$

Nesta iteração, a segunda, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $u_6 = 0, u_5 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^2 = (0, 0)$$

$$y^2 = (1.5, 1.5, 1)$$

$$u^2 = (0, 1, 3, 6, 0, 0)$$

$$F(x^2, y^2) = 58$$

Este ponto ainda não satisfaz as condições de complementaridade. Assim, ramificamos, selecionando uma variável  $u_4$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$S_2^+ = \{6, 5\}$$

$$S_2^- = \emptyset$$

$$S_2^0 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P_2 = \{6, 5\}$$

**Terceira Iteração:**  $k = 3$

Na terceira, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $u_6 = 0, u_5 = 0, u_4 = 0$ . O problema se torna inviável. Precisamos fazer, portanto, o backtracking. Selecionamos uma variável  $g_4$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$S_3^+ = \{6, 5\}$$

$$S_3^- = \{4\}$$

$$S_3^0 = \{1, 2, 3\}$$

$$P_3 = \{6, 5, \underline{4}\}$$

**Quarta Iteração:**  $k = 4$

Nesta iteração, a quarta, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $u_6 = 0, u_5 = 0, g_4 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^4 = (0, 0.9)$$

$$y^4 = (0, 0.6, 0.4)$$

$$u^4 = (0, 1, 3, 6, 0, 0)$$

$$F(x^4, y^4) = 29.2 = \underline{F}$$

Encontramos um limite inferior. Faremos o backtracking, selecionamos uma variável  $g_5$  e atualizamos os conjuntos de índices.

$$S_4^+ = \{6, 5\}$$

$$S_4^- = \{4\}$$

$$S_4^0 = \{1, 2, 3\}$$

$$P_4 = \{6, \underline{5}\}$$

#### **Quinta Iteração: $k = 5$**

Nesta iteração, a quinta, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $u_6 = 0, g_5 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^5 = (1.5, 0)$$

$$y^5 = (1, 0, 2)$$

$$u^5 = (0, 1, 3, 6, 0, 0)$$

$$F(x^5, y^5) = 16$$

Encontramos um limite inferior, no entanto, este limite não é melhor que o limite encontrado anteriormente. Faremos mais uma vez o backtracking, selecionamos uma variável  $g_6$  e atualizamos os conjuntos de índices.

$$S_5^+ = \{6\}$$

$$S_5^- = \{5\}$$

$$S_5^0 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P_5 = \{\underline{6}\}.$$

#### **Sexta Iteração: $k = 6$**

Nesta iteração, a sexta, o algoritmo resolverá o problema acrescido da restrição:  $g_6 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^6 = (0, 0)$$

$$y^6 = (1, 1, 0)$$

$$u^6 = (0, 0, 0, 1, 1, 2)$$

$$F(x^6, y^6) = 36$$

Este ponto ainda não satisfaz as condições de complementaridade. Assim, ramificamos, selecionando uma variável  $u_4$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$S_6^+ = \emptyset$$

$$S_6^- = \{6\}$$

$$S_6^0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P_6 = \{6\}.$$

### **Sétima Iteração:** $k = 7$

Nesta iteração, a sétima, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $g_6 = 0, u_4 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^7 = (0, 0)$$

$$y^7 = (1, 1, 0)$$

$$u^7 = (1, 0, 0, 0, 2, 3)$$

$$F(x^7, y^7) = 36$$

Este ponto ainda não satisfaz as condições de complementaridade. Assim, ramificamos, selecionando uma variável  $u_5$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$S_7^+ = \{4\}$$

$$S_7^- = \{6\}$$

$$S_7^0 = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$P_7 = \{6, 4\}.$$

### **Oitava Iteração:** $k = 8$

Na oitava iteração, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $g_6 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$ . O problema se torna inviável. Precisamos fazer, portanto, o backtracking. Selecionamos uma variável  $g_5$  e atualizamos os conjuntos de índices.

$$S_8^+ = \{4\}$$

$$S_8^- = \{6\}$$

$$S_8^0 = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$P_8 = \{6, 4\}.$$

**Nona Iteração:**  $k = 9$

Nesta iteração, a oitava, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $g_6 = 0, u_4 = 0, g_5 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^9 = (0.5, 0.5)$$

$$y^9 = (0, 0, 0)$$

$$u^9 = (1, 0, 0, 0, 2, 3)$$

$$F(x^9, y^9) = 6$$

Encontramos um limite inferior. No entanto, este limite não é melhor que o limite encontrado anteriormente. Faremos mais uma vez o backtracking, selecionamos uma variável  $g_4$  e atualizando os conjuntos de índices.

$$S_9^+ = \{4, 5\}$$

$$S_9^- = \{6\}$$

$$S_9^0 = \{1, 2, 3\}$$

$$P_9 = \{6, 4, 5\}.$$

**Décima Iteração:**  $k = 10$

Nesta iteração, a décima, o algoritmo resolverá o problema acrescido das restrições:  $g_6 = 0, g_4 = 0$ , encontrando uma nova solução:

$$x^{10} = (0, 0.75)$$

$$y^{10} = (0, 0.5, 0)$$

$$u^{10} = (0, 0, 0, 1, 1, 2)$$

$$F(x^{10}, y^{10}) = 23$$

Encontramos um limite inferior, o qual não é melhor que o limite encontrado anteriormente.

$$S_{10}^+ = \{4\}$$

$$S_{10}^- = \{6, 5\}$$

$$S_{10}^0 = \{1, 2, 3\}$$

$$P_{10} = \{6, 4, 5\}.$$

Chegamos, portanto, a solução ótima, obtida na quarta iteração, a saber:

$$x^* = (0, 0.9)$$

$$y^* = (0, 0.6, 0.4)$$

$$u^* = (0, 1, 3, 6, 0, 0)$$

$$F^* = 29.2$$

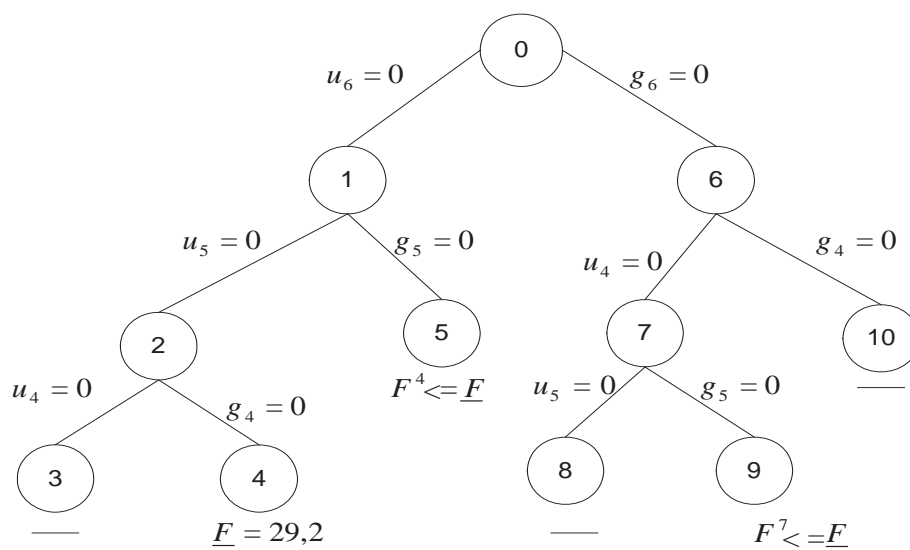


Figura 6.1: Árvore de Branch-and-bound

# Capítulo 7

## Relaxação Semidefinida para o Problema de dois Níveis Linear

### 7.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos uma relaxação de programação semidefinida para o problema de dois níveis linear. Este estudo foi motivado pelo trabalho desenvolvido por Bard e Moore [11]. Estes propuseram, como foi visto no capítulo anterior, um algoritmo do tipo “branch-and-bound” (B&B) para resolver o problema. É sabido que um dos maiores desafios associados ao desempenho de algoritmos B&B é a obtenção de bons limites superiores (problemas de maximização) para os subproblemas correspondentes aos nós da árvore de enumeração. Esses limites são obtidos com a resolução de relaxações dos subproblemas.

Formas clássicas de obter tais limites são a utilização de relaxação de programação linear e de relaxação lagrangeana. Mais recentemente, o uso de programação semidefinida (SDP) foi utilizado para fornecer novas relaxações. O desenvolvimento de algoritmos de pontos interiores para SDP no final da década de 1980 [66] tornou possível a resolução destas relaxações em tempo polinomial e impulsionou a pesquisa nesta área. A idéia básica de tais relaxações foi introduzida em 1991 com o trabalho de Lovasz e Schrijver [60]. Eles apresentam formulações para problemas de otimização 0-1, utilizando



programação semidefinida. Esta idéia foi estendida a outros problemas de otimização combinatória, conforme apresentado, por exemplo, nas revisões bibliográficas de Gomans [48] e Helmberg [51] e nas referências nelas contidas.

Burer e Vandembusshe [21] apresentaram recentemente um algoritmo do tipo B&B para programação quadrática não convexa, o qual é baseado na resolução de relaxações semidefinidas em cada nó da árvore de enumeração. Neste trabalho, os autores baseiam-se na reformulação das restrições de integralidade de variáveis binárias por SDP, para reformular restrições de complementaridade. Resultados numéricos apresentados comprovam a força do uso de relaxações semidefinidas na resolução de problemas de otimização global.

Neste capítulo apresentaremos uma relaxação semidefinida para o problema de dois níveis linear com base nos trabalhos acima mencionados. Proporemos a utilização destas relaxações na obtenção de limites superiores para os subproblemas associados aos nós da árvore de enumeração no algoritmo B&B apresentado por Bard e Moore [12]. Através de resultados numéricos preliminares, comparamos o número de nós na árvore de enumeração obtida com o uso da relaxação semidefinida com o número de nós gerados quando os limites são obtidos com o uso da relaxação linear proposta em [11].

## 7.2 Modelagem de variáveis binárias e restrições de complementaridade por programação semidefinida

A principal idéia utilizada no desenvolvimento de relaxações semidefinidas para otimização 0-1 foi introduzida por Lovasz e Schrijver [60] e consiste basicamente na reformulação das restrições de integralidade  $x_i \in \{0, 1\}$ , para  $i = 1, \dots, n$  através das restrições quadráticas  $x_i^2 = x_i$ , isto é  $x = x \circ x$ . A restrição quadrática é então escrita em função da matriz simétrica e semidefinida positiva

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \quad x^T) = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix},$$

com a utilização das restrições

$$\begin{aligned} \text{diag}(Y) - Y e_0 &= 0 \\ Y &\succeq 0 \end{aligned}$$

onde  $e_0$  é o primeiro vetor unitário  $(1, 0, \dots, 0)^T$ .

Baseado na reformulação apresentada acima para variáveis binárias, Burer e Vandebusshe [21] propuseram a reformulação das restrições de complementaridade para o problema de programação quadrática não convexa. A idéia básica desta reformulação será apresentada a seguir. Consideremos as seguintes restrições lineares sobre a variável  $x \in \mathfrak{R}^n$

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Consideremos também  $y$  e  $z$ , como os multiplicadores de Lagrange não negativos associados a estas restrições, e as restrições de complementaridade

$$(b - Ax) \circ y = 0, \quad x \circ z = 0.$$

As restrições de complementaridade acima podem ser reescritas em função da matriz simétrica e semidefinida positiva

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T & y^T & z^T \\ x & xx^T & xy^T & xz^T \\ y & yx^T & yy^T & yz^T \\ z & zx^T & zy^T & zz^T \end{pmatrix}. \quad (7.2.1)$$

com a utilização das seguintes restrições

$$\begin{aligned} \text{diag}(AY_{xy}) &= b \circ y, \\ \text{diag}(Y_{xz}) &= 0, \\ Y &\succeq 0, \end{aligned}$$

onde  $Y_{xy}$  e  $Y_{xz}$  denotam, respectivamente, as submatrizes de  $Y$  definidas por  $xy^T$  e  $xz^T$ . Neste caso, temos, por exemplo,  $\text{diag}(Y_{xz}) = (x_1 z_1, \dots, x_n z_n)$ .

Estenderemos na próxima seção as idéias apresentadas acima para reformular o problema de dois níveis linear como um problema de programação semidefinida. Esta reformulação dará origem a relaxação semidefinida a ser proposta para o problema.

### 7.3 Modelagem do problema de dois níveis linear por programação semidefinida

Consideremos a reformulação (6.2.2) do problema de dois níveis linear (6.2.1) em único nível. Reapresentaremos a reformulação abaixo para maior clareza.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \text{maximize}_{x,y,\lambda,\mu} \quad c_1^T x + d_1^T y \\
 & \text{sujeito a} \\
 (b) \quad & A_1 x \leq b_1 \\
 (c) \quad & A_2 x + B_2 y \leq b_2 \\
 (d) \quad & -B_2^T \mu + \lambda = -d_2^T \tag{7.3.2} \\
 (e) \quad & (A_2 x + B_2 y - b_2) \circ \mu = 0 \\
 (f) \quad & y \circ \lambda = 0 \\
 (g) \quad & x, y, \lambda, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

Sejam

$$P := \{(x, y) \geq 0 : A_1 x \leq b_1, A_2 x + B_2 y \leq b_2\}, \tag{7.3.3}$$

$$G_{xy} := \{(\lambda, \mu) \geq 0 : -B_2^T \mu + \lambda = -d_2\}, \tag{7.3.4}$$

$$C_{xy} := \{(\lambda, \mu) \geq 0 : (A_2 x + B_2 y - b_2) \circ \mu = 0, y \circ \lambda = 0\}. \tag{7.3.5}$$

Notamos que  $G_{xy}$  é o conjunto de multiplicadores não negativos para os quais o gradiente do Lagrangeano associado ao problema seguidor em (6.2.1) se anula, ao passo

que  $C_{xy}$  é o conjunto dos multiplicadores não negativos que satisfazem as condições de complementaridade para uma dada solução  $(x, y)$ . Se  $(x, y)$  é uma solução ótima do problema de dois níveis (6.2.1) então  $G_{xy} \cap C_{xy} \neq \emptyset$ ,

Utilizando as notações introduzidas, podemos reescrever o problema (7.3.2) como

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x + d_1y \\ & (x, y) \in P \\ & (\lambda, \mu) \in G_{xy} \cap C_{xy} \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

A seguir reformularemos o problema (7.3.6) como um problema de programação semidefinida.

Consideremos

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T & y^T & \lambda^T & \mu^T \\ x & xx^T & xy^T & x\lambda^T & x\mu^T \\ y & yx^T & yy^T & y\lambda^T & y\mu^T \\ \lambda & \lambda x^T & \lambda y^T & \lambda\lambda^T & \lambda\mu^T \\ \mu & \mu x^T & \mu y^T & \mu\lambda^T & \mu\mu^T \end{pmatrix}. \tag{7.3.7}$$

Observamos que  $Z$  é simétrica e semidefinida positiva, i.e.,  $Z \in \mathcal{S}_+^{1+n}$ , onde  $n := n_1 + 2n_2 + m_2$ .

Se multiplicarmos as restrições  $A_1x \leq b_1$  e  $A_2x + B_2y \leq b_2$  de  $P$  e as restrições  $-B_2^T\mu + \lambda = -d_2^T$  de  $G_{xy}$  por algum  $\nu \geq 0$  obtemos as desigualdades quadráticas  $A_1x\nu \leq b_1\nu$  e  $A_2x\nu + B_2y\nu \leq b_2\nu$ , que são válidas para  $P$ , e  $-B_2^T\mu\nu + \lambda\nu = -d_2^T\nu$ , que são válidas para  $G_{xy}$ . Desta forma, se definirmos

$$K := \left\{ \begin{array}{l} A_1x \leq x_0b_1 \\ (x_0, x, y, \lambda, \mu) \in \mathfrak{R}_+^{1+n} : A_2x + B_2y \leq x_0b_2 \\ -B_2^T\mu + \lambda = -x_0d_2^T \end{array} \right\}, \tag{7.3.8}$$

então o seguinte conjunto representa um conjunto de desigualdades quadráticas válidas para (7.3.6), escritas em função da matriz  $Z$ ,

$$M_+ := \{Z \succeq 0 : Ze_i \in K, i = 1, \dots, n\},$$

onde  $e_i \in \mathfrak{R}^{1+n}$  é o vetor unitário que tem todas as componentes nulas exceto a componente  $1 + i$ , que é igual a um.

Consideremos agora  $Z_{x\mu}$ ,  $Z_{y\mu}$  e  $Z_{y\lambda}$  como as submatrizes de  $Z$  definidas, respectivamente, por  $x\mu^T$ ,  $y\mu^T$  e  $y\lambda^T$ . Desta forma, as condições de complementaridade

$$(A_2x + B_2y - b_2) \circ \mu = 0 \quad \text{e} \quad y \circ \lambda = 0$$

em  $C_{xy}$  podem ser reescritas também em função da matriz  $Z$ , respectivamente, por

$$\text{diag}(A_2Z_{x\mu} + B_2Z_{y\mu}) = b_2 \circ \mu \quad \text{e} \quad \text{diag}(Z_{y\lambda}) = 0.$$

A função objetivo de (7.3.6) também pode ser modelada em função da matriz  $Z$  da seguinte forma

$$c_1x + d_1y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ c_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T & y^T & \lambda^T & \mu^T \\ x & xx^T & xy^T & x\lambda^T & x\mu^T \\ y & yx^T & yy^T & y\lambda^T & y\mu^T \\ \lambda & \lambda x^T & \lambda y^T & \lambda\lambda^T & \lambda\mu^T \\ \mu & \mu x^T & \mu y^T & \mu\lambda^T & \mu\mu^T \end{pmatrix},$$

onde  $A \bullet B := \text{traço}(A^T B)$  e  $\text{traço}(\cdot)$  denota a soma dos elementos da diagonal da matriz no argumento.

Por conveniência, definimos então

$$Q := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ c_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, apresentamos a seguinte reformulação do problema (7.3.6) como um problema de programação semidefinida definido em função da variável  $Z \succeq 0$ ,

maximizar  $Q \bullet Z$

subject to

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & x^T & y^T & \lambda^T & \mu^T \\ x & xx^T & xy^T & x\lambda^T & x\mu^T \\ y & yx^T & yy^T & y\lambda^T & y\mu^T \\ \lambda & \lambda x^T & \lambda y^T & \lambda\lambda^T & \lambda\mu^T \\ \mu & \mu x^T & \mu y^T & \mu\lambda^T & \mu\mu^T \end{pmatrix} \in M_+ \quad (7.3.9)$$

$$(x, y) \in P$$

$$(\lambda, \mu) \in G_{xy}$$

$$\text{diag}(A_2 Z_{x\mu} + B_2 Z_{y\mu}) = b_2 \circ \mu$$

$$\text{diag}(Z_{y\lambda}) = 0$$

## 7.4 Relaxando o problema de dois níveis linear

Como já mencionado, o desempenho de algoritmos do tipo B&B está fortemente associado à geração de bons limites superiores para os subproblemas definidos nos nós da árvore de enumeração. Estes limites são obtidos por meio da resolução de relaxações para os

subproblemas. Espera-se que estas relaxações sejam o mais justas possível, isto é, o mais próximas dos subproblemas, e ao mesmo tempo possam ser resolvidas em tempo polinomial.

No algoritmo B&B de Bard e Moore para o problema de dois níveis linear, os subproblemas definidos a cada nó da árvore de enumeração correspondem ao problema (7.3.2) acrescido das seguintes restrições:

$$\begin{aligned} u_i &= 0, & \text{para } i \in S_k^+, \\ g_i &= 0, & \text{para } i \in S_k^-, \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}, & g &= \begin{pmatrix} -A_2x - B_2y + b \\ y \end{pmatrix}, \\ S_k^+ \cap S_k^- &= \emptyset, & S_k^+ \cup S_k^- &\subseteq \{1, \dots, m_2 + n_2\}, \end{aligned}$$

como definido no capítulo 6.

No nó raiz da árvore de enumeração,  $S_k^+ = S_k^- = \emptyset$ , ou seja, nenhuma complementaridade é imposta. A cada geração de descendentes do nó raiz, um número maior de complementaridades é imposto através da adição de índices aos conjuntos  $S_k^+$  e  $S_k^-$ . Por fim, em cada folha da árvore, temos  $S_k^+ \cup S_k^- = \{1, \dots, m_2 + n_2\}$ , ou seja, todas as complementaridades são impostas através de diferentes combinações de índices pertencentes aos conjuntos.

No trabalho de Bard e Moore, os autores propuseram a obtenção de limites superiores para os sub-problemas associados aos nós da árvore de enumeração por meio da resolução da relaxação linear obtida quando as condições de complementaridade em (7.3.6), representadas por  $C_{xy}$ , são omitidas. A relaxação que gera o limite no nó raiz da árvore é dada então pelo seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x + d_1y \\ & (x, y) \in P \\ & (\lambda, \mu) \in G_{xy} \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

Nos demais nós da árvore, restrições como as apresentadas em (7.4.10) são incorporadas a (7.4.11).

Nesta tese, propomos uma diferente relaxação para o problema considerando a formulação de programação semidefinida (7.3.9) introduzida na seção anterior.

Observamos que o problema (7.3.9) é um problema de programação semidefinida não linear. A não linearidade é introduzida pelas  $n$  últimas colunas de  $Z$ . Eliminando então as  $n$  últimas colunas da equação (7.3.7), obtemos a seguinte relaxação de programação semidefinida linear para o problema (7.3.6):

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} && Q \bullet Z \\
& \text{sujeito a} && \\
& && Z \in M_+ \\
& && Ze_0 = (1; x; y; \lambda; \mu) \\
& && (x, y) \in P \\
& && (\lambda, \mu) \in G_{xy} \\
& && \text{diag}(A_2 Z_{x\mu} + B_2 Z_{y\mu}) = b_2 \circ \mu \\
& && \text{diag}(Z_{y\lambda}) = 0
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

Propomos o uso desta relaxação para obter um limite superior no nó raiz da árvore de enumeração de Bard e Moore. Como anteriormente, às relaxações consideradas nos demais nós, acrescentamos restrições como as apresentadas em (7.4.10). Este acréscimo é realizado através da substituição dos conjuntos  $K, P$  e  $G_{xy}$  definidos em (7.3.8), (7.3.3), (7.3.4), respectivamente, pelos conjuntos:



$$K^+ := \left\{ (x_0, x, y, \lambda, \mu) \in \mathfrak{R}_+^{1+n} : \begin{array}{ll} A_1 x \leq x_0 b_1 & \\ A_2 x + B_2 y \leq x_0 b_2 & \\ -B_2^T \mu + \lambda = -x_0 d_2^T & \\ A_{2_i} x + B_{2_i} = x_0 b_{2_i}, & \forall i \in S_k^{++} \\ \mu_i = 0, & \forall i \in S_k^{-+} \\ y_i = 0, & \forall i \in S_k^{+-} \\ \lambda_i = 0, & \forall i \in S_k^{--} \end{array} \right\}, \quad (7.4.13)$$

$$P^+ := \left\{ (x, y) \geq 0 \begin{array}{ll} A_1 x \leq b_1 & \\ A_2 x + B_2 y \leq b_2 & \\ A_{2_i} x + B_{2_i} = b_{2_i} & \forall i \in S_k^{++} \\ y_i = 0, & \forall i \in S_k^{+-} \end{array} \right\} \quad (7.4.14)$$

$$G_{xy}^+ := \left\{ (\lambda, \mu) \geq 0 \begin{array}{ll} -B_2^T \mu + \lambda = -d_2^T & \\ \mu_i = 0, & \forall i \in S_k^{-+} \\ \lambda_i = 0, & \forall i \in S_k^{--} \end{array} \right\}$$

onde  $S_k^{++} := \{i \in S_k^+ : i \leq m_2\}$ ,  $S_k^{+-} := \{i \in S_k^+ : i > m_2\}$ ,  $S_k^{-+} := \{i \in S_k^- : i \leq n_2\}$ ,  $S_k^{--} := \{i \in S_k^- : i > n_2\}$ .

A relaxação semidefinida (7.4.12) é pelo menos tão forte quanto a relaxação linear (7.4.11), já que toda solução  $(x, y, \mu, \lambda)$ , que satisfaz as restrições de (7.4.12) satisfaz também as restrições de (7.4.11). Podemos ainda ver o potencial da relaxação semidefinida em fortalecer a relaxação linear através da incorporação das duas últimas restrições em (7.4.12), que representam as complementaridades. Incorporando estas restrições, fortalecemos indiretamente as restrições  $(\lambda, \mu) \in G_{xy}$ , de forma a melhor aproximar  $G_{xy} \cap C_{xy}$ .

## 7.5 Resultados Numéricos

A tabela 7.1 resume nossa experiência computacional com o algoritmo para problemas-teste obtidos na literatura e comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo proposto por Bard and Moore [11]. Ambos os algoritmos foram implementados em MATLAB. A medida de desempenho inclui o número de nós na árvore de branch-and-bound e o nó no qual a solução ótima é encontrada (nó ótimo). Foram apresentados também o número de variáveis e restrições em cada nível dos problemas-teste. Os problemas-teste 1-11 na tabela 7.1 foram obtidos no capítulo nove do *Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization* [40]. Estes problemas-teste estão disponíveis também em <http://titan.princeton.edu/TestProblems>. O último problema-teste (12) foi obtido em [21]. As referências onde os problemas-teste foram obtidos estão em [40].

Observe na tabela de resultados, que o algoritmo de Bard e Moore precisou analisar em todos os problemas-teste um total de 98 nós, ao passo que nosso algoritmo, usando a relaxação semidefinida positiva, precisou analisar apenas 31 nós, havendo uma redução de aproximadamente 68,4% no total de nós analisados. Note também que Bard e Moore encontraram o nó ótimo de todos os problemas-teste depois de analisar 68 nós, ao passo que nosso algoritmo encontrou o nó ótimo após a análise de 23 nós, obtendo uma redução de aproximadamente 66,2%.

Tabela 7.1: Resultados Numéricos

P	n1	n2	m1	m2	lp		sdp	
					nós	nó ótimo	nós	nó ótimo
1	1	3	0	4	5	3	3	2
2	1	1	0	3	13	11	1	1
3	2	3	0	3	5	3	1	1
4	1	1	0	3	9	7	3	2
5	1	2	0	3	5	4	3	2
6	1	1	0	5	13	9	1	1
7	2	3	0	3	7	5	3	3
8	2	2	1	2	5	4	1	1
9	1	1	0	4	9	6	2	2
10	2	2	1	2	5	4	1	1
11	2	2	1	4	9	5	3	2
12	3	2	0	9	13	7	9	5
Total					98	68	31	23

# Capítulo 8

## Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, fizemos um estudo sobre o problema de dois níveis, de uma maneira geral e mais especificamente do problema de dois níveis linear. Um breve estudo sobre Teoria dos Jogos foi feito, destacando o seu caráter motivador para a programação em dois níveis. Descrevemos o problema de dois níveis na sua forma geral, suas principais características e propriedades.

O problema de dois níveis linear é o caso mais simples de programação em dois níveis. Abordamos este tipo de problema, que possui interessantes e importantes particularidades, principalmente com respeito a sua geometria. Apresentamos propriedades particulares e aplicações práticas e resultados teóricos do problema de dois níveis linear.

Pode-se observar, após o estudo feito, que a grande dificuldade em se trabalhar com os problemas de dois níveis ocorre devido ao fato de que parte de suas restrições é dada implicitamente pelo conjunto solução do problema seguidor. Uma forma de contornar essa estrutura hierárquica é justamente através das diferentes formulações que podem ser estabelecidas para o problema de dois níveis. Através dessas formulações, é possível apresentar diferentes formas as condições de otimalidade para o problema, que foram estudadas neste trabalho.

As diversas formulações do problema de dois níveis são de grande importância e desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de algoritmos para a resolução

de problema. Essas formulações são utilizadas para desenvolver métodos de resolução para o problema de dois níveis através da transformação do problema de dois níveis num único nível.

Destacamos três classes de algoritmos encontrados na literatura para resolver o problema de dois níveis linear: Métodos de enumeração de pontos extremos, Métodos baseados nas condições de otimalidade e Métodos do tipo branch-and-bound. A partir daí fizemos um estudo detalhado do método de branch-and-bound baseado no trabalho de Bard e Moore.

Sabe-se que um dos maiores desafios associados ao desempenho de algoritmos branch-and-bound é a obtenção de bons limites para os subproblemas correspondentes aos nós da árvore de enumeração. Esses limites são obtidos com a resolução de relaxações dos subproblemas. Formas clássicas de obter tais limites são a utilização de relaxação de programação linear e de relaxação lagrangeana. Ultimamente, a programação semidefinida (SDP) tem sido utilizada para gerar novas relaxações com limites mais fortes. Assim, adaptamos o algoritmo do tipo branch-and-bound proposto por Bard e Moore para o caso linear, propondo uma relaxação semidefinida positiva para o problema.

Através de resultados numéricos preliminares observamos que os resultados obtidos com a relaxação de programação semidefinida mostram a sua eficiência para os 12 problemas-teste e comprovam a força do uso de tais relaxações na resolução de problemas de dois níveis, sendo melhores do que aqueles encontrados pela relaxação proposta por Bard e Moore.

Como proposta para trabalhos futuros, dando continuidade a esta pesquisa, sugerimos melhorar a implementação dos algoritmos com o intuito de viabilizar a solução de problemas maiores bem como investigar e comparar o tempo computacional dos algoritmos. Sugerimos também estender o algoritmo para resolver o problema de dois níveis linear/quadrático uma vez que toda a metodologia apresentada pode ser facilmente estendida para tal caso.

# Referências Bibliográficas

- [1] Annandalingam,G., A mathematical programming model of decentralized multi-level systems, Journal of the Operational Researches Society, Vol. 39, 1021-1033, 1988.
- [2] Annandalingam,G.,White,D., A solution method for the linear static Stackelberg problem using penalty functions, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, 1170-11173, 1990.
- [3] Annandalingam,G.,Friesz,T., Hierarchical optimization: an introduction, Annals of Operation Research, Vol. 34, 1-11, 1992.
- [4] Bard,J., An Efficient Point Algorithm for a Linear Two-Stage Optimization Problem, Operations Research, Vol. 31, No. 4,671-684, 1983.
- [5] Bard,J.; Edmunds,T.,Algorithm for Nonlinear Bilevel Mathematical Programs, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 21, No. 1,83-89, january/february 1991.
- [6] Bard,J., Coordination of a Multidivisional Organization Through Two Levels of Management,OMEGA, Vol.11, No. 5, 457-467, 1983.
- [7] Bazaara,M., Sherali,H., Shetty,C. Nonlinear programming: theory and algorithms. John Wiley and Sons, Inc. , New York, 1993.
- [8] Bard,J., Some Properties of the Bilevel Programming Problem,Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 68, No. 2, 371-378, 1993.

- [9] Bard,J., An Algorithm for Solving the General Bilevel Programming Problem,Mathematics of Operations Research, Vol. 8, No. 2, 260-272, 1983.
- [10] Bard,J., Optimality Conditions for the Bilevel Programming Problem, Naval Research Logistics Quartely, Vol. 31, 13-26, 1984.
- [11] J. F. Bard and J. T. Moore, “A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem,” SIAM J.Scientific and Statistical Computing vol. 11, No. 2, pp. 281-292,1990.
- [12] Bard,J., Falk,J., An explicit solution to the multi-level programming problem. Computers and Operations Research, 9:77-100,1982.
- [13] Bard,J.,Practical Scientific and Statistical Computing vol. 11, No. 2, pp. 281-292, bilevel optimization - algorithms and applications, Kluwer academic publishers, 1990.
- [14] Ben-Ayed,O.; Blair,C.; Computational Difficulties of Bilevel Linear Programming, Technical Note, 557-559, 1989.
- [15] Ben -Ayed O.; Bilevel linear Programming, Computers and Operations Research 20, 485-501, 1993.
- [16] Benson,H.P., On the Structure and Proprieties of a Linear Multilevel Programming Problem, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 60, No. 3,354-373, March 1989.
- [17] Bi,Z.,Calamai,P.,Conn,A., An exact penalty function approach for the linear bilevel programming Problem, Technical report 167-O-310789, Departament of System Design Engeneering,University of Waterloo, 1991.
- [18] Bi,Z.,Calamai,P.,Conn,A., An exact penalty function approach for the nonlinear bilevel programming Problem, Technical report 180-O-170591, Departament of System Design Engeneering,University of Waterloo, 1991.

- [19] Bialas,W.; Karwan,M., Two-Level Linear Programming, Management Science, Vol. 30, No. 8,1004-1020, 1984.
- [20] Bisschop,J., Candler,W., Dulcoy,J.,O'Mara,G., The indus basin model: a special application of two linear programming, Mathematical Programming Study, Vol. 20, 30-38, 1982.
- [21] Burer,S., Vandebussche,D.,Semidefinite-based branch-and-bound for nonconvex quadratic programming <http://dollar.biz.uiowa.edu/~sburer/papers/017-qpbb.pdf>.
- [22] Calamai,P.;Vicente,L., Generating Linear and Linear-Quadratic Bilevel Programming Problems, Siam J. Sci. Comput. vol.14,No. 4, 770-782, july 1993.
- [23] Campelo,M., A Note on a Penalty Functions Approach for Solving Bilevel Linear Programs, Journal of Global Optimization 16, 245-255, 2000.
- [24] Candler,W.; Townsley,R., A Linear Two-Level Programming Problem, Computers and Operations Research 9 , 59-76, 1982.
- [25] Candler,W., Norton,R., Multilevel Programming, Tech. Rep. 20, World Bank Development Research Center, WashingtonD.C., 1977.
- [26] Cao,D.; Leung,C., A Partial Cooperation Model for Non-Unique Linear Two-Level Decision Problems, European Journal of Operational Research, Vol. 140,Issue 1,134-141, July 2002.
- [27] Cassidy,R.,Kirky,M.Raike,W., Efficient distribution of resources through three level of government, Management Science, Vol. 17, 462-473, 1971.
- [28] Clark,P.A.; Westerberg,A.W., A Note on the Optimality Conditions for the Bilevel Programming Problem, Naval Research Logistics Quartely, Vol. 35, 413-418, 1988.
- [29] Dempe,S., Computing Optimal Incentives Via Bilevel Programming, Optimization, Vol. 33, 29-42, 1995.



- [30] Dempe,S., A bundle Algorithm Applied to Bilevel Programming Programs with Non-Unique Lower Level Solutions, Computational Optimization and Applications 15, 145-166, 2000.
- [31] Dempe,S., A Simple Algorithm for the Linear Bilevel Programming Problem, Optimization 18, Vol. 3, 373-385, 1987.
- [32] Dempe,S., A Necessary and A Sufficient Optimality Condition for Bilevel Programming Problems, Optimization, Vol. 25, 341-354, 1992.
- [33] Dempe,S., Foundation of Bilevel Programming Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht et al, 2002.
- [34] Dempe,S., Schmidt,H.,On an algorithm solving two-level programming problems with nonunique lower level solutions, Computational Optimization and applications, Vol. 6, 227-249, 1996.
- [35] Eaton, B. C. and Slade, M. E., Evolutionary Equilibrium in Market Supergames, Discussion Paper, University of British Columbia, November, 1989.
- [36] Falk,J.E., Liu,J., Algorithms for general nonlinear bilevel programming, Central European Journal of Operations Research, Vol. 2, 101-117, 1993.
- [37] Falk,J.E., Liu,J., On bilevel programming, Part I: general nonlinear cases, Mathematical Programming, Vol. 70, 42-72, 1995.
- [38] Fisher, R. A., The Genetic Theory of Natural Selection, Oxford, Clarendon Press, 1930.
- [39] Florian,M.;Chen,Y., The Nonlinear Bilevel Programming Problem: Formulation, Regularity and Optimality Conditions, Optimization, Vol. 32, 193-209, 1995.
- [40] C. A. Floudas, P. M. Pardalos, C. Adjiman, W. Esposito, Z. pGumus, S. Harding, J. Klepeis, C. Meyer, and C. Schweiger, "Handbook of test problems in local and global optimization," volume 33 of Nonconvex Optimization and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1999.

- [41] Fortuny-Amat,J. and McCarl,B., A representation and economic interpretation of a two-level programming problem, *Journal of the Operational Research Society*, 32, 783-792, 1981.
- [42] Friesz,T.,Cho,H.J.,Mehta,N.J.,Tobin,R.L., Anandalingan,G., A simulated annealing approach to the network design problem with variational inequality constraints, *Transportation Science*, Vol. 26, 18-26, 1992.
- [43] Gauvin,J.,Janin,R., Directional behaviour of optimal solutions in nonlinear mathematical programming, *Mathematics of Operations Research*, vol 13, n.4, 629-649, 1988.
- [44] Giannessi,F., Tomasin,E. Nonconvex quadratic programs, linear complementarity problems, and integer linear programs. In *Fifth Conference on Optimization Techniques (Rome, 1973)*, Part I, 437-449, *lectures Notes in Comput. Sci.*, vol3. Springer, Berlin, 1973.
- [45] Gendreau,M., Marcotte,P. and G. Savard, “A hybrid tabu ascent algorithm for the linear bilevel programming problem”, *Journal of Global Optimization* 8, 217-233, 1996.
- [46] M.X. Goemans and D.P. Williamson, Approximation Algorithms for MAX-3-CUT and Other Problems Via Complex Semidefinite Programming, *Proceedings of 33rd STOC, Crete*, 443–452, 2001. (The previous link is slightly different from the one from STOC.) *Journal version in the STOC 2001 Special Issue of Journal of Computer and System Sciences*, 68, 442–470, 2004.
- [47] M.X. Goemans and D.P. Williamson, Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming, *J. ACM*, 42, 1115–1145, 1995.
- [48] M. X. Goemans, “Semidefinite programming in combinatorial optimization,” *Mathematical Programming*, vol. 79, pp.143-161, 1997.

- [49] Hansen,P, Jaumard,B, Savard,G. New branching and bounding rules for linear bilevel programming, SIAM Journal on Statistical and Scientific Computing, 1992.
- [50] Haurie,A.;Savard,G., White,D.J., A Note on: An Efficient Point Algorithm for a Linear Two-Stage optimization Problem,Technical Note, 553-555, 1989.
- [51] C. Helmborg, "Semidefinite Programming," European Journal of Operational Research, vol. 137, pp. 461-482, 2002.
- [52] Herskovits,J., Leontiev,A. An interior point algorithm for convex bilevel program problems. In *Annales 1er Encuentro Iberoamericano de Optimizacion*, 389-390, Concepcio, Chile, 1997.
- [53] Jittorntrum,K.;Solution Point Differentiability without Strict Complementarity in Nonlinear Programming, *Mathematical programming Study* 21, 127-138, 1984.
- [54] Kolstad,C.,A review of the literature on bilevel mathematical programming, Technical Report LA-10284-MS, Los Alamos National Laboratory, 1985.
- [55] Labbé,M.;Marcotte,P.;Savard,G., A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing, *Manegement Science*, vol.44, 1595-1607, 1998.
- [56] Labbé,M.;Marcotte,P.;Savard,G., On a class of bilevel programs, *Nonlinear Optimization and Applications*, di Pillo and Giannessi (eds), Kluwer Academic Publishers, 183-206, 2000.
- [57] Labbé,M.;Marcotte,P.;Savard,G.;Brotcorne,L., A bilevel model and solution algorithm for a freight tariff setting problem, 1999.
- [58] Laurent, M., Poljak,S., Rendl,F.Connections Between Semidefinite Relaxations of the Max-Cut and Stable Set Problems (1995), *Mathematical Programming Series A and B archive*,Volume 77 , Issue 2 ,225 - 246, 1997.
- [59] Lemaréchal,C., Nondifferentiable Optimization, in G.L.Nemhauser,A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J.Todd (eds), *Handbooks in Operations Research and a Manegement Science*,v.1, Optimization, North-Holland, Amsterdam, Chapter VII, 529-572, 1989.

- [60] Lovász, L. e Schrijver, A., Cones of matrices and set functions, and 0-1 optimization. SIAM J. Opt., 1:166–190, 1991.
- [61] Simaan, M., Stackelberg Optimization of two level Systems, IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, V. SMC-7, N.4, 554-556, 1977.
- [62] Smith, J. M., Evolution and the Theory of Games, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1982.
- [63] Mallozi, L., Morgan, J., Weak Stackelberg problems and mixed solutions under data perturbations, Optimization, 32, 269-290, 1995.
- [64] Nash, J. F., Non-Cooperative Games, Annals of Mathematics 54, 286-295, 1951.
- [65] Nash, J. F., Two Person Cooperative Games, Econometrica 21, 128-140, 1953.
- [66] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, “Interior-point polynomial algorithm in convex programming,” SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [67] Neto, M.B.C., Programacao linear em dois niveis: uma abordagem teorica e computacional, tese de doutorado COPPE Sistemas, 1999.
- [68] Neyman, A., Bounded Complexity Jusifies Cooperation in the Finitely Repeated Prisoner’s Dilemma, Economic Letters 19, 227-229, 1985.
- [69] Önal, H., A modified simplex approach for solving bilevel linear programming problems, European Journal of Operational Research, 67, 126-135, 1993.
- [70] Önal, H., Darmawan, D.H., III, S.H.J. A multilevel analysis agriculture credit distribution in East Java, Indonesia, Computers and Operations Research, 22, 227-236, 1995.
- [71] Parraga, F., Hierarchical programming and applications to economic policy, PhD Thesis, Systems and Industrial Engineering Department, University of Arizona, 1981.

- [72] Rockafellar,R.T., Directional Differentiability of the Optimal Value Function in a Nonlinear Programming Problem, *Mathematical Programming Study* 21, 213-226, 1984.
- [73] Rockafellar,R.T., Marginal Value and Second-Order Necessary Conditions for Optimality, *Mathematical Programming* 26, 245-286, 1983.
- [74] Savard,G.; Gauvin,J., The Steep Descent Direction for the Nonlinear Bilevel Programming Problem, *Operations Research Letters* 15, 265-272, 1994.
- [75] Soismaa,M., A Note on Efficient Solutions for the Linear Bilevel Programming, *European Journal of Operational Research*, Vol. 112,Issue 2, 427-431, January 1999.
- [76] Outrata,J.V., Necessary Optimality Conditions for Stackelberg Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 76, No. 2, 304-320, 1993.
- [77] Sherali,H, A Multiple leader Stackelberg Model and Analysis, *Operations Research*, Vol. 32, 390-404, 1984.
- [78] Simaan,M.; Cruz,J., On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, No. 5, 534-555, 1973.
- [79] Simaan,M.; Cruz,J., Additional Aspects of the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, No. 6, 611-626, 1973.
- [80] Stein,O., First Order Optimality Condition for Degenerate Index Sets in Generalized Semi-infinite Optimization, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 26, 565-582, 2001.
- [81] Stein,O.; Still,G., On Generalized Semi-infinite Optimization and Bilevel Optimization, *European Journal of Operational Research* 142, 444-462, 2002.
- [82] Vicente,L.,Programação de dois níveis, Tese de mestrado,Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 1992.

- [83] Wen,U.; Hsu,S., Linear Bilevel Programming Problems-A Review, Journal of the Operational Research Society, Vol. 42, No. 2, 125-133, 1991.
- [84] White,D.J.; Anandalingam,G., A Penalty Function Approach for Solving Bilevel Linear Programs,Journal of Global Optimization 3, 397-419, 1993.
- [85] Yezza,A., First order necessary optimality conditions for general bilevel programming problems,Journal of Optimization Theory and Applications, 89, 189-219, 1996.