



O NÚMERO DE HELLY NA CONVEXIDADE GEODÉTICA EM GRAFOS

Moisés Teles Carvalho Junior

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter
Mitre Costa Dourado

Rio de Janeiro
Maio de 2016

O NÚMERO DE HELLY NA CONVEXIDADE GEODÉTICA EM GRAFOS

Moisés Teles Carvalho Junior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.

Profª. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc.

Profª. Renata Raposo Del-Vecchio, D.Sc.

Prof. Danilo Artigas da Rocha, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MAIO DE 2016

Carvalho Junior, Moisés Teles

O Número de Helly na Convexidade Geodética em
Grafos/Moisés Teles Carvalho Junior. – Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2016.

X, 64 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia de Sistemas e Computação, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 61 – 64.

1. Convexidade.
 2. Geodética.
 3. Número de Helly.
- I. Szwarcfiter, Jayme Luiz *et al.* II. Universidade Federal
do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de
Sistemas e Computação. III. Título.

*À minha sempre amada,
idolatrada, salve, salve mãe
"Dona" Maria.*

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer à minha mãe ”dona” Maria. Definitivamente não há como traduzir em palavras todo o apoio e dedicação dispensado para que houvesse condições de se realizar este trabalho.

Agradeço especialmente aos meus orientadores Jayme Luiz Szwarcfiter e Mitre Costa Dourado pela imensa paciência e dedicação. Inúmeras vezes me ajudaram a transformar as pedras no caminho no caminho das pedras.

Agradeço também aos professores Nélon Maculan Filho e Isabel Lugão Rios por acreditarem em mim e me recomendarem para o doutorado. A responsabilidade de não os decepcionar sempre foi a principal mola propulsora nos momentos mais difíceis.

Aos inúmeros amigos do LAC, laboratório de Algoritmos e Combinatória. Graças a ajuda deles encontrei diversos atalhos pelo caminho.

Aos membros da banca, professores Marcia Helena Costa Fampa, Renata Raposo Del-Vecchio e Danilo Artigas da Rocha por avaliarem e contribuírem com este trabalho.

A todos os professores que convivi durante toda minha vida acadêmica. Cada palavra de incentivo (e alguns ”puxões de orelha”) de alguma forma resultaram neste momento.

A todos que da alguma forma torceram ou contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho obtivesse sucesso.

À Capes pelo apoio financeiro.

1 > 2.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

O NÚMERO DE HELLY NA CONVEXIDADE GEODÉTICA EM GRAFOS

Moisés Teles Carvalho Junior

Maio/2016

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um subconjunto de vértices S de um grafo G é geometricamente convexo se todos os vértices de qualquer caminho mínimo entre dois vértices de S pertencem a S . O parâmetro conhecido como número de Helly de um grafo G na convexidade geodética é o menor inteiro k para o qual toda família \mathcal{C} de conjuntos geometricamente convexos k -intersectantes de G , possui um vértice comum a todos os conjuntos de \mathcal{C} . Neste trabalho determinamos o número de Helly de algumas classes de grafos, como árvores, ciclos, grafos k-partidos completos, grades completas de dimensão d e grafos prisma. Mostramos também uma caracterização para grafos completos K_n , um limitante inferior e superior para o parâmetro e também que decidir se um grafo é p -Helly é co- \mathcal{NP} -completo para p variável. Além disso, apresentamos também alguns teoremas cuja aplicação possibilita a eliminação de subgrafos que facilitem o cálculo para grafos com características específicas. Finalmente, são apresentados teoremas que permitem a decomposição do grafo onde ao menos uma das componentes conexas herda o número de Helly geodético do grafo original.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THE HELLY NUMBER IN THE GEODETIC CONVEXITY ON GRAPHS

Moisés Teles Carvalho Junior

May/2016

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Department: Systems Engineering and Computer Science

A subset of vertices S of a graph G is geodetically convex if all the vertices of any shortest path between two vertices of S lie on S . The parameter known as Helly number of a graph G in the geodetic convexity is the smallest integer k such that any family \mathcal{C} of k -intersecting geodetically convex sets of G contains a common vertex. In this work we determine the Helly number for some classes of graphs, such as trees, cycles, complete k -partite graphs, complete grids of dimension d and prism graphs. We also show a characterization of complete graphs K_n with lower and upper bounds on the parameter, and that deciding whether a graph is p -Helly is co- \mathcal{NP} -complete for a variable p . Moreover, we present some theorems whose application allows the elimination of subgraphs to facilitate the calculation for graphs with specific characteristics. Finally, we presents theorems that allow the decomposition of the graph such that at least one of the connected components inherits the geodetic Helly number of the original graph.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Aplicações	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização do texto	3
2 Definições	4
2.1 Conceitos básicos sobre grafos	4
2.2 Classes de grafos	6
2.3 Hipergrafos	8
2.4 Convexidades	8
2.4.1 Convexidades em grafos	9
2.4.2 A convexidade P_3	9
2.4.3 A convexidade monofônica	9
2.4.4 A convexidade geodética	9
2.5 Parâmetros de convexidades em grafos	10
2.5.1 Posto	10
2.5.2 O número de Carathéodory	10
2.5.3 O número de Radon	10
2.5.4 O número de Helly	11
3 O número de Helly na convexidade geodética	13
3.1 Resultados preliminares	13
3.1.1 Árvores	14
3.1.2 Grafos completos	14
3.1.3 Ciclos	15
3.2 Limite inferior para o número de Helly	16
3.3 Outras classes de grafos	18
3.3.1 Grafos k -partidos completos	18
3.3.2 Grades completas	20

3.3.3	Grafos prisma	22
3.4	Resultados existentes para o número de Helly	24
3.5	Complexidade computacional	26
4	Arca da aliança	28
4.1	Vértice universal	29
4.2	Eliminando vértices simpliciais restritos	30
4.3	Decomposição por separadores de gêmeos	35
4.3.1	Grafos não biconexos	40
4.4	Grafos prisma generalizados	42
4.5	Eliminando subgrafos prisma generalizados	46
4.6	Decomposição por separadores geodéticos	49
4.6.1	Decomposição por subgrafos prisma generalizados	54
5	Considerações finais	57
5.1	Possibilidades a explorar	58
Referências Bibliográficas		61

Lista de Figuras

2.1	Contraexemplo e exemplo de conjunto geodeticamente convexo	10
3.1	Grafo com ciclo geodético onde $h(G) \geq 3$	18
3.2	Grafo sem ciclo geodético onde $h(G) = 3$	18
3.3	Grafo grade e um de seus subgrafos	21
3.4	Grafo grade e um subgrafo induzido	21
3.5	Grafos prisma	22
3.6	Grafo G_4	25
4.1	Grafo com vértice universal	30
4.2	Exemplo de um vértice simplicial restrito em um grafo	31
4.3	Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.4	34
4.4	Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.3	34
4.5	Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.3	34
4.6	Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.9	35
4.7	Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.8 e 4.5	39
4.8	Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.8 e 4.5	40
4.9	Grafo resolvido pela aplicação do Corolário 4.9	42
4.10	Grafo resolvido pela aplicação do Teorema 4.9 e do Corolário 4.5 . . .	42
4.11	Grafo prisma generalizado	45
4.12	Grafo resolvido pela aplicação do Teorema 4.5, 4.11 e 4.12	48
4.13	Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.14, 4.5 e 4.1	54
4.14	Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.16, 4.5, 4.11 e 4.12 . .	56

Capítulo 1

Introdução

I have a dream...

Martin Luther King

1.1 Aplicações

Imaginemos uma empresa que almeja tornar conhecido seu produto ou serviço, ou até mesmo um grupo artístico que deseja divulgar seu trabalho, é desejável que se atinja um determinado número de pessoas para que estas, de alguma forma, influenciem seus amigos e familiares a conhecer e, com boa probabilidade, a também consumir seu produto ou serviço.

Este problema pode ser modelado por uma estrutura conhecida por grafos, em que as pessoas são representadas por pontos, ou também chamados de vértices, e as relações de amizades, ou de convívio, entre eles são representadas por linhas unindo os vértices com alguma relação. Tais linhas são chamadas arestas. Neste trabalho utilizaremos invariavelmente os termos vértices e arestas para nos referirmos aos pontos e as linhas, respectivamente.

Fazendo uma analogia com o conceito de convexidade da Geometria Euclidiana, quando se tem um grupo de amigos em comum, podemos pensar nesse grupo como um conjunto convexo, e então, nesse contexto, ao conseguir que alguns destes integrantes do grupo consumam tal produto, é de se esperar que os demais também venham a se interessar em, ao menos, conhecê-lo.

Um campo fértil para exemplificar tais conceitos são as redes sociais na internet, onde é bastante fácil encontrarmos exemplos nos dias atuais dos chamados fenômenos da internet, ou seja, pessoas, artistas ou grupos de artistas que conquistaram certa notoriedade inicialmente na rede mundial de computadores. Recentemente vimos a ascensão desses inúmeros artistas que surgiram na mídia tradicional

através do grande sucesso alcançado nas redes sociais. Tal fato ocorre justamente pela velocidade que a informação atinge nas redes através de compartilhamentos.

Baseado nesse conceito de convexidade, existem algumas características interessantes sobre o assunto e estudaremos em grafos, mais especificamente em convexidades em grafos, uma dessas características associada com um parâmetro no contexto de conjuntos, conhecido como o número de Helly .

1.2 Objetivos

Neste trabalho o principal objetivo foi estudar, num contexto de uma estrutura conhecida como grafos, uma característica conhecida como convexidade, baseada no conceito de mesmo nome da Geometria Euclidiana, associada ao número de Helly, um parâmetro que já foi objeto de inúmeros estudos em teoria dos grafos.

Um grafo, que denotaremos em geral por $G = (V, E)$, ou de maneira ainda mais simples apenas por G , é uma estrutura formada por um par não ordenado de conjuntos V e E , onde V é o conjunto de vértices e E um conjunto de arestas do grafo G .

Nessa estrutura existem inúmeras características interessantes envolvendo os caminhos entre os vértices do grafo. O nosso foco foi concentrado no estudo de convexidades em grafos pois está relacionada exatamente com os caminhos entre os vértices do grafo.

O estudo de convexidades em grafos encontra aplicações nas redes sociais [33, 35, 41], por meio das relações de amizade, além de estratégias de marketing [16, 35], computação distribuída [6, 36, 37, 39], entre outras.

Existem alguns tipos de convexidades sendo estudadas atualmente como a convexidade monofônica, a convexidade P_3 , a convexidade geodética, entre outras. Especificamente neste trabalho buscamos desenvolver estudos sobre a convexidade que trata dos caminhos mínimos entre os vértices de um grafo conhecida como convexidade geodética. Nesta convexidade um conjunto de vértices S será convexo se todos os vértices pertencentes ao caminho mínimo entre cada par de vértices de S , também pertencem ao conjunto S .

Como um conjunto convexo é um subconjunto do conjunto de vértices do grafo G , toda convexidade é um caso particular de um hipergrafo onde os conjuntos convexos são as hiperarestas desse hipergrafo e, nesse contexto, buscamos estudar nas classes de grafos, ou em determinadas condições, qual o número de Helly dessa família de hiperarestas [3, 17, 19].

Entre os nossos resultados mais interessantes, obtivemos um limitante inferior para o problema de encontrar o valor de tal parâmetro, uma caracterização para o número de Helly em grafos completos, determinamos o número de Helly para

algumas classes de grafos e, além disso, obtivemos também algumas condições para decomposição do grafo em subgrafos de modo a facilitar o cálculo do número de Helly na convexidade geodética nas componentes conexas resultantes desta decomposição.

Alguns resultados aqui obtidos foram submetidos para revistas [10, 11] e apresentados em congressos [9, 10]. O artigo *O número de Helly na convexidade geodética* foi apresentado no congresso *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SBPO - 2014* em Salvador, Bahia. Para a revista *Matemática Contemporânea* o artigo *O número de Helly geodético em grafos* [10] foi aceito em 2015 para publicação após ser apresentado no congresso *Latin American Workshop on Cliques in Graphs, Law-cliques - 2014* em Pirenópolis, Goiás. Para a revista *Discrete Mathematics* o artigo *Reductions theorems for the geodetic Helly number of a graphs* [11] foi submetido em 2016. Por fim, em 2016 foi submetido o artigo *Sobre o número de Helly geodético em grafos* [8] para a conferência *Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research, CLAIO - 2016* a ser realizada em Santiago, Chile.

1.3 Organização do texto

No segundo capítulo apresentaremos algumas definições básicas de grafos, a definição de convexidade, de conjuntos convexos, do conceito de hipergrafos e do número de Helly. Além disso, definiremos cada uma das classes de grafos estudadas para facilitar a compreensão dos resultados obtidos.

O capítulo três será dedicado à determinar o valor do parâmetro para algumas classes de grafos como árvores, grafos completos, ciclos, entre outras. Também será apresentado um limitante inferior e um superior para o número de Helly para um grafo qualquer. Além disso, mostramos que o problema de decidir se um grafo é p -Helly é co- \mathcal{NP} -completo para p variável.

No quarto capítulo, mostraremos os resultados obtidos para grafos com características específicas, onde podemos eliminar vértices ou subgrafos de um grafo ou também decompor um grafo em subgrafos menores de modo a facilitar o cálculo do valor do número de Helly na convexidade geodética, sendo este cálculo efetuado nas componentes resultantes da decomposição.

Por fim, no último capítulo, apresentaremos os resultados obtidos e teremos também as considerações finais sobre o trabalho aqui apresentado. Também discutiremos algumas ideias sobre o problema e possíveis direcionamentos para novos estudos do parâmetro nesta ou em outras convexidades.

Capítulo 2

Definições

Be water, my friend.

Bruce Lee

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições que visam facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos, tanto nas suas caracterizações quanto nas demonstrações dos resultados obtidos neste estudo. Em geral, como tais definições são muito básicas, então não nos atemos a uma explicação maior com exemplos.

Para as definições mais complexas, que não são encontradas em um livro introdutório de teoria de grafos, apresentaremos ao longo do trabalho exemplos ou figuras para um melhor entendimento.

Em todo esse estudo, somente consideraremos grafos simples, ou seja, grafos sem laços (aresta ligando um vértice nele mesmo) ou mais de uma aresta ligando dois vértices.

2.1 Conceitos básicos sobre grafos

Um *grafo* G é um conjunto finito não vazio $V(G)$ e um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ são ditos vértices de G , enquanto os elementos de $E(G)$ são as arestas de G .

Uma aresta e pertencente a $E(G)$ é denotada pelo par de vértices (v, w) , ou simplesmente vw , que a forma. Neste caso v e w são vértices adjacentes e são as extremidades de e . Diz-se que a aresta e é *incidente* a v e w . Denotamos $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$.

Duas arestas e e f são ditas *adjacentes* quando possuem alguma extremidade comum, ou seja, um vértice v é um extremo de e e f .

Os grafos geralmente são visualizados através de uma representação geométrica na qual cada vértice é representado por um ponto distinto, e cada aresta é representada através de uma linha ligando os pontos correspondentes as suas extremidades.

Em geral confundiremos o grafo com sua representação geométrica e serão denominados indistintamente grafos.

Dado um grafo G , e um vértice $v \in V(G)$, o grafo $G \setminus \{v\}$ é obtido a partir de G retirando-se o vértice v de seu conjunto de vértices, e retirando-se também todas as arestas de $E(G)$ incidentes a v .

Dada uma aresta e , o grafo $G \setminus \{e\}$ é o grafo obtido retirando-se de G a aresta e de $E(G)$.

Um *subgrafo* G' de um grafo G é um subconjunto V' de seu conjunto de vértices V e um subconjunto $E' \subseteq E$ de arestas incidentes apenas aos vértices de V' .

Quando o subgrafo G' contém todas as arestas de E cujas extremidades estão contidas em V' , então G' é o *subgrafo induzido* em G por V' .

Uma sequência de vértices v_0, \dots, v_i tal que $(v_j, v_{j+1}) \in E(G)$ é um *caminho* entre v_0 e v_i . Se os vértices v_j são distintos, então trata-se de um caminho simples. O valor i é o comprimento do caminho.

A *distância* $d(v, w)$ entre dois vértices $v, w \in G$ é o comprimento de um caminho mínimo entre v e w em G . Quando não existe um caminho entre v e w , então $d(v, w)$ é considerada infinita.

Um *passeio* é um grafo G é uma sequência de vértices u_1, u_2, \dots, u_k tal que um vértice u_i é adjacente a u_{i+1} , para $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Um *caminho* num grafo G é um passeio $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ onde todos os vértices são dois a dois distintos e $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Uma *corda* em P é uma aresta que une dois vértices não-consecutivos de P . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e P_k denota o caminho induzido por k vértices.

Um *ciclo*, que denotaremos por C_n , é um caminho v_1, \dots, v_n, v_1 , onde $n \geq 3$. Se v_1, \dots, v_n é um caminho simples, então o ciclo também é dito simples. Todos os ciclos que consideramos são simples, a não ser que o contrário seja dito de forma expressa. Um grafo que não possui ciclos é dito acíclico.

Um grafo G é *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G .

Um grafo é uma *árvore* quando é acíclico e conexo. Um subgrafo conexo de uma árvore é dito subárvore.

Um conjunto S é *maximal* em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S não satisfaz P .

Uma componente conexa de um grafo G é um *subgrafo maximal conexo* de G .

Uma *articulação* ou *vértice de corte* em um grafo é um vértice cuja remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Um grafo G é completo quando contém uma aresta entre cada par dos vértices de G . O grafo completo com n vértices é designado por K_n .

Um conjunto de vértices V' contido em $V(G)$ que induz um subgrafo completo é

dito uma *clique*. Uma clique que não está propriamente contida em nenhuma outra clique constitui uma clique maximal de G .

Um *conjunto independente* de vértices é um conjunto de vértices não-adjacentes dois a dois.

O conjunto $\text{Adj}(v)$, ou também $N(v)$, denota os vértices adjacentes a v e pertencentes a $V(G)$, e é dito *vizinhança aberta* de v . Analogamente, a *vizinhança fechada* de v , denotada por $N[v]$, é definida como $\text{Adj}(v) \cup \{v\}$.

Um grafo é *cordal* quando qualquer ciclo com pelo menos quatro vértices possui uma corda, isto é, existe uma relação de adjacência entre um par de vértices não consecutivos no ciclo.

O *produto cartesiano* dos grafos G e H é o grafo denotado por $G \square H$ tal que o conjunto de vértices de $G \square H$ é o produto cartesiano $V(G) \times V(H)$; e quaisquer dois vértices (v_1, v_2) e (w_1, w_2) são adjacentes em $G \square H$ se, e somente se, ou $v_1 = w_1$ e v_2 é adjacente a w_2 em H , ou $v_2 = w_2$ e v_1 é adjacente a w_1 no grafo G .

Um subconjunto $S \subset V(G)$ é um *conjunto separador* para vértices a e b não adjacentes (ou um *a - b separador*) se a remoção de S do grafo separa a e b em componentes conexas distintas; diz-se também que S separa o grafo. O conjunto S é um *separador* minimal de G se S é um separador e nenhum subconjunto próprio de S separa o grafo. Quando o par de vértices não é identificado, S é chamado separador minimal de vértices. Observe que, um separador minimal de G é um separador minimal de vértices, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

Dizemos que um vértice v *domina* o vértice u quando $N[u] \subseteq N[v]$.

Um grafo \overline{G} é dito *grafo complementar* de G quando possui o mesmo conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas complementares de G , ou seja, se a aresta vw existir em G , os vértices v e w não são adjacentes em \overline{G} , porém, se os vértices v e w não são adjacentes em G , a aresta vw pertence ao grafo \overline{G} .

Um vértice v é dito simplicial em um grafo G quando $N(v)$ induz uma clique em G .

O *intervalo fechado* entre dois vértices u e v é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v , incluindo u e v . Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S] = \bigcup_{u, v \in S} I[u, v]$. De maneira análoga, o *intervalo aberto* é o conjunto $I(u, v)$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v , porém sem os vértices u e v , em outras palavras, $I(u, v) = I[u, v] \setminus \{u, v\}$.

2.2 Classes de grafos

Existem características muito específicas em alguns tipos de grafos. Tais características por serem bem definidas possibilitaram a diferenciação entre os grafos de

acordo com elas. A essa diferenciação dá-se o nome de classe de grafos. Neste trabalho estudamos qual o número de Helly na convexidade geodética para algumas classes de grafos mais estudadas.

Antes de apresentar tais resultados definiremos as classes trabalhadas, e além disso, em alguns casos relataremos os teoremas que, em algum momento, nos levaram ao resultado do número de Helly.

Algumas classes já foram definidas na seção 2.1 então definiremos as demais cujos resultados do número de Helly apresentaremos nos próximos capítulos.

Um grafo é dito *k-partido* quando o conjunto de seus vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes. Se os vértices de cada conjunto independente forem adjacentes a todos os demais vértices, exceto de seu conjunto independente, então dizemos que o grafo é *k-partido completo*. Um grafo 2-partido é também conhecido por *bipartido*.

Já a classe de grafos de *partição*, ou *split*, é definida quando o conjunto de vértices do grafo pode ser totalmente particionado em um conjunto independente e uma clique. Existem duas formas de partitionar tal grafo, uma separando a clique máxima dos demais vértices e outra com um dos vértices da clique máxima no conjunto independente.

Um grafo do tipo *grade*, denotado por $G(m, n)$, ou $G_{m \times n}$, é o produto cartesiano dos grafos P_m e P_n .

Já um grafo $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, onde G é do tipo *d-grade* (grade de dimensão d , onde $2 \leq d < \infty$) é o produto cartesiano de d caminhos $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_d}$.

Um grafo é dito de *distância hereditária* quando em qualquer subgrafo induzido H de G , a distância entre dois vértices em H é a mesma que em G .

Grafos *desmontáveis* são definidos recursivamente da seguinte forma: o grafo trivial é desmontável, e um grafo finito G com mais de um vértice é desmontável quando existe um vértice dominado v em G cuja remoção resulta em um grafo desmontável.

Um grafo G é chamado de *fortemente desmontável* se existe uma ordenação \leq dos vértices de G com um maior elemento m tal que, para todo vértice $x \neq m$ existe um incremento estrito na sequência finita $x = x_0 < \dots < x_n = m$, onde para $0 \leq i < n$ o vértice x_i é dominado por x_{i+1} no subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{z \in V(G) : x_i \leq z\}$.

Um grafo G é dito *pseudo-modular* se para cada tripla de vértices u , v e w , existem ou um vértice x tal que $x \in I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)$ ou um triângulo $\{x, y, z\}$ tal que suas três arestas estão nos seguintes intervalos: $(x, y) \subseteq I(u, v)$, $(y, z) \subseteq I(v, w)$ e $(x, z) \subseteq I(u, w)$.

Um grafo é chamado de *prisma*, e denotado por Y_n , quando é obtido através do produto cartesiano de um grafo ciclo C_n com um grafo caminho de comprimento P_2 .

Quando o produto cartesiano é efetuado entre os grafos C_n e P_m , o grafo prisma é denotado por $Y_{n,m}$, onde $3 \leq n < \infty$ e $2 \leq m < \infty$.

Seja G um grafo e \overline{G} o seu grafo complementar, o *grafo prisma complementar* $G\overline{G}$ de G é o grafo formado a partir da união disjunta de $G \cup \overline{G}$, adicionando as arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes, ou seja, de mesmo rótulo de G e \overline{G} .

Grafos de *limiar*, ou também conhecidos como *threshold*, são grafos livres de $2K_2$, C_4 e P_4 , ou seja, não admitem tais grafos como subgrafos induzidos.

2.3 Hipergrafos

Um hipergrafo \mathcal{H} é um par ordenado $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$, onde $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \dots, v_n\}$, com $n < \infty$, e $E(\mathcal{H}) = \{E_1, \dots, E_m\}$, onde cada E_i , $1 \leq i \leq m$, e $E_i \subseteq V(\mathcal{H})$.

Os elementos de $V(\mathcal{H})$ são os vértices do hipergrafo e os conjuntos E_1, E_2, \dots, E_m são chamadas hiperarestas, onde $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{E_i \in E(\mathcal{H})} E_i$. O *núcleo* de \mathcal{H} é definido como $núcleo(\mathcal{H}) = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_m$.

Um hipergrafo é dito *k-uniforme* se todas as suas hiperarestas possuem exatamente k vértices. Assim definido, todo grafo G é um hipergrafo \mathcal{H} *2-uniforme*. Um conjunto S é um *q-conjunto* se $|S| = q$, S é um *q⁻-conjunto* se $|S| \leq q$ e S é um *q⁺-conjunto* se $|S| \geq q$.

Um hipergrafo \mathcal{H}' é um hipergrafo parcial de \mathcal{H} se $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$.

Um hipergrafo \mathcal{H} é dito *p-intersectante* se todo *p⁻*-hipergrafo parcial de \mathcal{H} possui núcleo não vazio.

2.4 Convexidades

Dado um conjunto finito V , uma família \mathcal{C} de subconjuntos de V é dita uma *convexidade* em V [24, 43, 44]:

- (1) O conjunto vazio e V pertencem a \mathcal{C} .
- (2) \mathcal{C} é fechado para interseção.

Os subconjuntos de V em \mathcal{C} são chamados conjuntos convexos e dado $X \subseteq V$, o menor conjunto convexo contendo X é chamado *envoltória convexa* de X [46].

Exemplo 2.1 Dados o conjunto $V = \{a, b, c, d, e\}$ e a família de conjuntos $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d, e\}\}$, então \mathcal{C} satisfaçõs as condições mencionadas anteriormente, ou seja, \mathcal{C} é uma convexidade em V .

2.4.1 Convexidades em grafos

Inspirado no conceito de convexidade definido anteriormente, estudaremos tal conceito em grafos.

Existem diversas convexidades relevantes em grafos sendo amplamente estudadas atualmente, como por exemplo a convexidade P_3 , que trata de caminhos de tamanho dois (com três vértices), convexidade monofônica, que é sobre caminhos induzidos, entre outras [14, 15, 21, 22]. Apresentaremos os conceitos das convexidades P_3 e monofônica, porém o foco deste trabalho foi estudar uma convexidade em grafos conhecida como geodética [20].

2.4.2 A convexidade P_3

A convexidade P_3 é conhecida como a convexidade que trata de caminhos de tamanho dois. De modo mais formal, dado um grafo G , temos que um conjunto S é dito convexo em G na *convexidade P_3* se para todo par de vértices u e v em S , todo vértice w pertencente a todo caminho de tamanho dois entre eles está em S [12].

2.4.3 A convexidade monofônica

A convexidade monofônica trata de caminhos induzidos, ou seja, dado um grafo G , um conjunto S é dito convexo na *convexidade monofônica* se para todo par de vértices u e v em S , todo vértice w pertencente a algum caminho induzido P , mesmo que este não seja mínimo, w pertence a S [38].

2.4.4 A convexidade geodética

Uma *geodésica* entre dois vértices u e v de um grafo é um caminho entre u e v com comprimento $d(u, v)$. A partir dessa definição, é fácil perceber que uma geodésica entre dois vértices u e v é um caminho mínimo entre u e v , ou seja, sinônimo para caminho mínimo.

Nesta convexidade, dados um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, um conjunto S é dito *convexo* se, para quaisquer dois vértices em S , todos os caminhos mínimos entre esses dois vértices estão em S .

Podemos definir também conjunto convexo utilizando o conceito de intervalo da seguinte forma: Dados um grafo G e $S \subseteq V(G)$, então S é dito convexo em G se $I[S] = S$. Denotamos por $\langle S \rangle$ o menor conjunto convexo em G que contém S e denominamos $\langle S \rangle$ por *fecho convexo* de S em G . Se $\langle S \rangle = V(G)$, então S é chamado *conjunto envoltório* de G . O *número envoltório* de G é a cardinalidade do menor conjunto envoltório de G .

Na Figura 2.1, no grafo à esquerda os vértices marcados em negrito não formam um conjunto convexo, pois o vértice a pertence ao caminho mínimo entre os vértices b e f , já no grafo à direita os vértices em negrito formam um conjunto convexo.

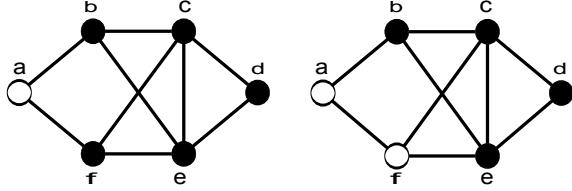


Figura 2.1: Contraexemplo e exemplo de conjunto geodeticamente convexo

2.5 Parâmetros de convexidades em grafos

Quando estudamos convexidades em grafos, existem algumas características bem definidas que são os de parâmetros de convexidades. Cada um desses parâmetros, em geral, são inspirados em resultados clássicos no espaço euclidiano.

2.5.1 Posto

Dado um grafo $G = (V, E)$ e dado o conjunto S , tal que $S \subseteq V(G)$, S é convexo independente se, para todo $v \in S$, tem-se que $v \notin \langle S \setminus \{v\} \rangle$. Caso contrário, dizemos que S é um conjunto convexo dependente.

A cardinalidade do maior conjunto convexo independente do grafo G é o *Posto* de G , em geral, denotado por $rk(G)$

2.5.2 O número de Carathéodory

Dado um grafo $G = (V, E)$, se para todo subconjunto S de $V(G)$ e todo elemento $v \in \langle S \rangle$ existir um subconjunto F de S tal que $v \in \langle F \rangle$ e $|F| \leq k$, o *número de Carathéodory* de G é o menor valor possível para k .

Tal conceito foi inspirado no teorema de Carathéodory que diz que todo ponto da envoltória convexa de um conjunto de pontos S em \mathbb{R}^d está também na envoltória de um subconjunto de S de ordem não superior a $d + 1$.

2.5.3 O número de Radon

Dado um conjunto R , uma *partição de Radon* é uma divisão de R em dois subconjuntos $R_1 \cup R_2 = R$ tal que $\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \neq \emptyset$. Caso não seja possível tal partição, R é dito um conjunto *anti-Radon*.

O *número de Radon*, denotado por $r(G)$, é a cardinalidade do maior conjunto anti-Radon $R \subseteq V(G)$, adicionado a uma unidade, isto é, $r(G) = \max\{|R| \mid R \text{ é anti-Radon}\} + 1$.

2.5.4 O número de Helly

A propriedade de Helly tem esse nome graças ao teorema proposto pelo matemático austríaco Eduard Helly, em 1923 [17, 30]. O teorema diz que dados n subconjuntos convexos de um espaço euclidiano de dimensão d , para $n \geq d+1$, se existe um ponto comum a cada $d+1$ desses subconjuntos, então existe um ponto em comum a todos os n subconjuntos [19, 25].

Tal teorema originou a conhecida propriedade que diz que uma família \mathcal{C} de subconjuntos de um conjunto atende a *propriedade de Helly* se toda subfamília formada por subconjuntos dois a dois intersectantes, então existe um elemento comum a todos os subconjuntos.

A propriedade de Helly possui aplicações em diversas áreas. Em otimização em problemas de localização [23] e programação linear [1], na ciência da computação possui aplicação em biologia computacional [42], banco de dados [27, 28], processamento de imagens[7], entre outras. Além disso, motivou o estudo de diversas classes de grafos, como os grafo clique-Helly, disk-Helly e hipergrafos Helly entre outros.

Um família \mathcal{C} de conjuntos é dita k -intersectante quando toda subfamília de \mathcal{C} com k conjuntos possui o núcleo não vazio.

Um hipergrafo \mathcal{H} é dito k -Helly quando toda família k -intersectante de subconjuntos de $V(\mathcal{H})$ possui o núcleo não vazio. O *número de Helly* de um hipergrafo \mathcal{H} é o menor inteiro k' para o qual o hipergrafo é k' -Helly. Denotaremos o número de Helly de \mathcal{H} por $h(\mathcal{H})$. Quando $k' = 2$, dizemos que o hipergrafo \mathcal{H} atende a propriedade de Helly [19, 25].

Exemplo 2.2 Seja a família de conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ onde:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{1, 2, 4, 5\}, S_3 = \{1, 3, 4, 5\} \text{ e } S_4 = \{2, 3, 4, 5\}, \text{ assim:}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{1, 2, 4\}, S_1 \cap S_3 = \{1, 3, 4\}, S_1 \cap S_4 = \{2, 3, 4\}, S_2 \cap S_3 = \{1, 4, 5\}, \\ S_2 \cap S_4 = \{2, 4, 5\} \text{ e } S_3 \cap S_4 = \{3, 4, 5\}.$$

Logo, essa família é 2-intersectante, pois toda subfamília de \mathcal{C}_1 com dois conjuntos possui interseção não vazia. Além disso o *núcleo*(\mathcal{C}_1) = {4}, pois $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{4\}$, ou seja, $h(\mathcal{C}_1) = 2$, ou ainda, \mathcal{C}_1 é uma família de conjuntos k -Helly, para $k \geq 2$.

Exemplo 2.3 Seja a família de conjuntos $\mathcal{C}_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ onde:

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2, 4\}, S_3 = \{1, 3, 4\} \text{ e } S_4 = \{2, 3, 4, 5\}, \text{ assim:}$$

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{1\}, S_1 \cap S_2 \cap S_4 = \{2\}, S_1 \cap S_3 \cap S_4 = \{3\} \text{ e } S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{4\}.$$

Logo, essa família é 3-intersectante, pois toda subfamília de \mathcal{C}_2 com três conjuntos possui interseção não vazia. Porém, o *núcleo* (\mathcal{C}_2) é vazio, pois $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \emptyset$, ou seja, $h(\mathcal{C}_2) \geq 4$. Como não existe em \mathcal{C}_2 uma subfamília k -intersectante para $k \geq 4$, então $h(\mathcal{C}_2) = 4$, ou ainda, \mathcal{C}_2 é uma família de conjuntos k -Helly, para $k \geq 4$.

Como todo conjunto convexo de um grafo G é um subconjunto de $V(G)$, então toda família de conjuntos convexos de um grafo é um caso particular de um hipergrafo, onde cada conjunto convexo é uma hiperaresta.

O teorema sobre hipergrafos de Berge e Duchet apresentado a seguir será muito útil em nossos estudos pois mostra uma caracterização para um hipergrafo ser k -Helly.

Teorema 2.4 (Berge e Duchet [4, 5]) *Um hipergrafo H é k -Helly se, e somente se, para todo conjunto A de vértices com $|A| = k + 1$, a interseção das hiperarestas S_j , com $|S_j \cap A| \geq k$, é não vazio.*

Este teorema nos permite, para demonstrar se um grafo G é k -Helly, considerar apenas conjuntos convexos com cardinalidade maior ou igual a k , uma vez que a interseção de todo conjunto convexo S_j com o conjunto A deve ter cardinalidade maior ou igual a k .

Berge, Duchet e Calder mostraram o seguinte lema que também será bastante utilizado nas demonstrações ao longo desse estudo:

Lema 2.5 (Berge, Duchet e Calder [25, 26]) *Em toda convexidade (V, \mathcal{C}) , o número de Helly é o menor número inteiro k , tal que todo conjunto $S \subseteq V$, com $k + 1$ elementos, tem a propriedade $\bigcap_{v \in S} \langle S \setminus \{v\} \rangle \neq \emptyset$.*

Este lema nos permite, para demonstrar se o número de Helly de um grafo G é igual a k , considerar famílias com exatamente $k + 1$ conjuntos convexos, uma vez que $|S| = k + 1$. Ao longo deste trabalho o conjunto S foi chamado de V_k (ou V_{k+1}) nas demonstrações de acordo com cada situação específica.

Especificamente em grafos, consideraremos uma família $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ de conjuntos geometricamente convexos não vazios onde cada conjunto convexo S_i , para $i = 1, 2, \dots, p$; é tal que $S_i \subseteq V(G)$. Denotaremos o número de Helly na convexidade geodética de um grafo G por $h(G)$.

Capítulo 3

O número de Helly na convexidade geodética

A dúvida é o preço da pureza.

Jean-Paul Sartre

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos no estudo do número de Helly na convexidade geodética para algumas classes de grafos mais básicas, como árvores e ciclos, e também mostraremos uma caracterização para grafos completos em que o valor do parâmetro é igual ao número de vértices do grafo apenas para esta classe. Além disso, apresentaremos um limitante inferior e um superior para o número de Helly em um grafo qualquer e mostramos que o problema de decidir se um grafo é p -Helly é co- \mathcal{NP} -completo para p variável. Em seguida, apresentaremos resultados para o parâmetro para algumas outras classes de grafos não tão simples quanto as iniciais, como grafos k -partidos completos, d -grades e grafos prisma.

Em todas as demonstrações deste estudo o grafo trivial não será considerado, uma vez que o seu número de Helly seria igual a um. Também só consideraremos neste trabalho grafos e conjuntos convexos conexos.

3.1 Resultados preliminares

Iniciaremos esta seção apresentando os resultados, e suas respectivas demonstrações, para o número de Helly para algumas classes de grafos mais simples, como árvores, ciclos, grafos completos e também grafos k -partidos completos.

A partir de algumas dessas classes mais conhecidas, foi possível detectar limitantes inferiores para o parâmetro, então determinamos uma característica única para tais limitantes. Em seguida, teremos os resultados para classes mais específicas, como grafos k -partidos completos, d -grades e grafos prisma. Por fim, mostraremos

os resultados obtidos para o número de Helly na convexidade geodética existentes na literatura.

Todo grafo tem como limitante superior natural a quantidade de seus vértices para o número de Helly.

Teorema 3.1 *Seja G um grafo. Então $h(G) \leq |V(G)|$.*

Demonstração.

Seja G um grafo com $|V(G)| = n$. Supondo, por contradição, que $h(G) > n$.

Pelo Lema 2.5, existe uma família \mathcal{C} de $n+1$ conjuntos convexos, n -intersectante, com o núcleo vazio.

Com efeito, cada conjunto convexo da família \mathcal{C} tem pelo menos n vértices, o que implica em o grafo ter pelo menos $n+1$ vértices, mas $|V(G)| = n$.

Assim, temos que para qualquer grafo G , $h(G) \leq |V(G)|$.

□

Na seção 3.1.2, mostraremos que somente para grafos completos é garantida a igualdade $h(G) = |V(G)|$.

3.1.1 Árvores

Teorema 3.2 (Árvores) *Seja G um grafo do tipo árvore. Então $h(G) = 2$.*

Demonstração.

Seja G um grafo do tipo árvore.

Todo conjunto convexo em um grafo do tipo árvore é uma subárvore, e sabe-se que subárvores de uma árvore atendem à propriedade de Helly [29].

Logo, $h(G) = 2$.

□

3.1.2 Grafos completos

Teorema 3.3 (Completos) *Seja G um grafo com n vértices. O grafo G é completo se, e somente se, $h(G) = n$.*

Demonstração.

Seja $G = K_n$ um grafo completo com n vértices.

Tomando no grafo K_n a família de conjuntos $S_1 = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$, $S_2 = \{v_1, v_3, \dots, v_n\}$, ..., $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, constata-se facilmente que estes formam uma família de conjuntos convexos, $(n-1)$ -intersectante, com núcleo vazio, ou seja, $\bigcap_{i=1}^n S_i = \emptyset$. Assim, G não é $(n-1)$ -Helly, ou seja, $h(G) > n-1$.

Com efeito, n é um limite superior para o número de Helly para qualquer grafo, então $n - 1 < h(G) \leq n$, assim, segue o resultado.

Logo $h(G) = n$.

Supondo $h(G) = n$ e, supondo por contradição, que G é um grafo não completo, ou seja, existem ao menos dois vértices não adjacentes em G .

Tomemos os conjuntos $A_1 = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$, $A_2 = \{v_1, v_3, \dots, v_n\}$, \dots , $A_n = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Tais conjuntos são claramente $(n - 1)$ -intersectantes.

Tomando o fecho convexo de cada um desses conjuntos, temos os conjuntos convexos $S_1 = \langle A_1 \rangle$, $S_2 = \langle A_2 \rangle$, \dots , $S_n = \langle A_n \rangle$. Assim, cada conjunto convexo S_j , para $j = 1, 2, \dots, n$; terá ao menos $n - 1$ elementos.

Como o grafo G não é completo, porém conexo, existe um vértice v_i , para algum i , $1 \leq i \leq n$, tal que dois de seus vizinhos não são adjacentes, vizinhos estes que pertencem a A_i . Desse modo, $v_i \in \langle A_i \rangle$, e como $v_i \in A_j$, para todo $j \neq i$, então $v_i \in \langle A_j \rangle$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Logo $v_i \in S_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Pelo Teorema 2.4 temos que, dado o conjunto $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, ou seja, $|A| = n$, a interseção dos conjuntos convexos S_j , com $|S_j \cap A| \geq n - 1$ é não vazio, pois $v_i \in S_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, G é $(n - 1)$ -Helly, ou seja, $h(G) \leq n - 1$, uma contradição.

Logo G é um grafo completo.

□

3.1.3 Ciclos

Teorema 3.4 (Ciclos) *Seja G um grafo do tipo ciclo com n vértices denotado por C_n , com $n \geq 4$. Então o grafo G é 3-Helly na convexidade geodética.*

Demonstração.

Suponhamos, por contradição, que C_n não é 3-Helly.

Pelo Teorema 2.4, existem vértices $v_1, \dots, v_4 \in V(C_n)$ e conjuntos convexos $S_1, \dots, S_4 \subseteq V(C_n)$ tal que $v_j \in S_i$, para $1 \leq i, j \leq 4$ se, e somente se, $i \neq j$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que existe um caminho de v_1 até v_3 , contendo v_2 e não contendo v_4 . Além disso, podemos assumir que o fecho convexo de v_1 e v_3 contém v_2 . Mas S_2 contém v_1 e v_3 , e não contém v_2 , uma contradição.

Logo, o grafo G é 3-Helly.

□

O Teorema 3.4 nos garante que $h(C_n) \leq 3$, para $n \geq 4$.

Para ciclos C_n , com $n \geq 5$, é sempre possível encontrar uma família de conjuntos convexos 2-intersectantes com o núcleo vazio, basta tomar caminhos P_t no ciclo, tal

que $t = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. Isso garante que tais grafos não atendem à propriedade de Helly, ou seja, para $n \geq 5$, temos $h(C_n) > 2$, assim, $2 < h(C_n) \leq 3$, logo $h(C_n) = 3$.

Pelo Teorema 3.3, temos que o ciclo de tamanho três, ou seja, C_3 possui o número de Helly igual a três, pois o ciclo de tamanho três é também um grafo completo.

Para ciclos com quatro vértices, denotado por C_4 , o número de Helly será igual a dois. Os conjuntos convexos num grafo C_4 com dois ou mais vértices são somente os vértices que compõem as suas quatro arestas e $V(G)$. Assim, toda família 2-intersectante é formada pelos vértices de duas arestas adjacentes ao mesmo vértice v e o próprio $V(G)$, ou seja, o vértice v pertence ao núcleo. Logo, $h(C_4) = 2$.

3.2 Limite inferior para o número de Helly

Apresentaremos nesta seção um limitante inferior para o número de Helly em um grafo qualquer.

Existe uma relação entre os valores do parâmetro em dois grafos distintos se houver relação entre o conjunto dos conjuntos convexos de ambos como mostraremos.

Lema 3.5 *Sejam G e G' dois grafos e \mathcal{M}_G e $\mathcal{M}_{G'}$ seus conjuntos de todos os conjuntos convexos, respectivamente. Se $\mathcal{M}_{G'} \subseteq \mathcal{M}_G$, então $h(G') \leq h(G)$.*

Demonstração.

Supondo, por contradição, que $h(G') > h(G) = k$.

Desse modo, existe uma família de conjuntos convexos \mathcal{C}' em G' , onde $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{M}_{G'}$, k -intersectante, com núcleo vazio.

Como $\mathcal{M}_{G'} \subseteq \mathcal{M}_G$, então também existe uma família de conjuntos convexos \mathcal{C} em G , a saber $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, k -intersectante, com núcleo vazio, ou seja, $h(G) > k$, uma contradição.

Logo $h(G') \leq h(G)$.

□

Dado um grafo G , quando o conjunto dos vértices do subgrafo induzido H de G é um conjunto convexo em G , todos os conjuntos convexos em H também serão em G , ou seja, o número de Helly deste subgrafo H é um limitante inferior para o número de Helly do grafo G . Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.6 *Seja G um grafo e H um subgrafo induzido de G . Se $V(H)$ é um conjunto convexo em G , então $h(H) \leq h(G)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo e H um subgrafo induzido de G , tal que $V(H)$ é um conjunto convexo em G .

Como $V(H)$ é um conjunto convexo, temos que $\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{M}_G$, onde \mathcal{M}_H é o conjunto de todos os conjuntos convexos do subgrafo H e \mathcal{M}_G é o conjunto de todos os conjuntos convexos do grafo G . Assim, pelo Lema 3.5, segue o resultado.

Logo $h(H) \leq h(G)$.

□

Teorema 3.7 *Seja \mathcal{C}_G uma família $(k - 1)$ -intersectante de G com núcleo vazio, S um conjunto convexo em G e $h(G) = k$. Se $\mathcal{C}_G \subseteq \mathcal{M}_{G[S]}$ então $h(G[S]) = h(G)$.*

Demonstração.

Seja \mathcal{C}_G uma família $(k - 1)$ -intersectante de G com núcleo vazio, S um conjunto convexo em G e $h(G) = k$.

Supondo que $\mathcal{C}_G \subseteq \mathcal{M}_{G[S]}$.

Assim, como existe uma família $(k - 1)$ -intersectante em $G[S]$ com núcleo vazio, temos que $h(G[S]) \geq k$, então pelo Teorema 3.6, temos que $h(G[S]) \leq h(G) = k$.

Logo $h(G[S]) = h(G)$.

□

Uma consequência direta do Teorema 3.6 é que o tamanho da clique máxima de um grafo G , que denotamos por $\omega(G)$, é um limitante inferior para o número de Helly.

Corolário 3.8 *Seja G um grafo. Então $h(G) \geq \omega(G)$.*

Demonstração.

Como toda clique é um subgrafo induzido e, além disso, o conjunto dos vértices de uma clique sempre formam um conjunto geometricamente convexo em qualquer grafo, então $h(G) \geq \omega(G)$.

□

Apresentaremos a seguir a definição de um ciclo no grafo com uma característica específica que chamaremos de ciclo geodético.

Dado um grafo G , um ciclo induzido C_l em G , com $l \neq 4$, é chamado de *ciclo geodético* se o conjunto dos vértices de C_l formam um conjunto convexo em G . Assim definido, todo ciclo geodético em um grafo G é um subgrafo induzido e seu conjunto de vértices formam um conjunto convexo em G , ou seja, o número de Helly do ciclo é um limitante inferior para o parâmetro de G .

Com efeito, se um grafo possuir um ciclo geodético, temos que o número de Helly será necessariamente igual ou superior a três, ou seja, $h(G) \geq 3$.

Na figura 3.1, temos dois ciclos geodéticos no grafo G , o primeiro composto pelos vértices a, b, c, d e e , e o segundo pelos vértices f, g, h, i e j . Como G possui um ciclo geodético como subgrafo induzido, então $h(G) \geq 3$. Em particular, G é um grafo prisma, e na subseção 3.3.3 mostraremos que para todo grafo prisma com base C_n para $n \neq 4$, temos que $h(G) = 3$.

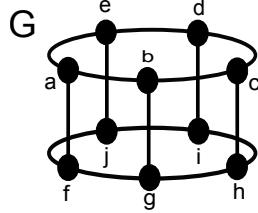


Figura 3.1: Grafo com ciclo geodético onde $h(G) \geq 3$

Na Figura 3.2 temos um grafo sem ciclos geodéticos com número de Helly igual a três. Tomando os conjuntos convexos $S_1 = \{a, b, f, g\}$, $S_2 = \{b, c, d, h\}$ e $S_3 = \{d, e, f, i\}$, temos que tais conjuntos são 2-intersectantes mas tal família de conjuntos possui o núcleo vazio. Para um conjunto $S \subseteq V(G)$, tal que $|S| \geq 5$, temos que $\langle S \rangle = V(G)$. Logo $h(G) = 3$.

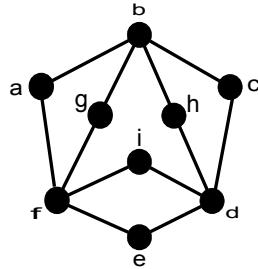


Figura 3.2: Grafo sem ciclo geodético onde $h(G) = 3$

3.3 Outras classes de grafos

Nesta seção estudaremos o número de Helly para algumas classes de grafos não tão simples quanto as já vistas anteriormente. Estudamos o valor do parâmetro para grafos k -partidos completos, grades completas para qualquer dimensão d ($d < \infty$) e também grafos prisma.

3.3.1 Grafos k -partidos completos

Apresentaremos agora a demonstração de que o número de Helly para grafos k -partidos completos é igual a k . Tais grafos possuem uma característica específica que ajuda a determinar o valor do parâmetro, em um grafo k -partido completo G

todo conjunto geometricamente convexo não vazio ou é formado pelo conjunto de vértices de uma clique de G ou é o próprio $V(G)$.

Teorema 3.9 (k -partido) *Seja G um grafo k -partido completo. Então $h(G) = k$.*

Demonastração.

Seja G um grafo k -partido completo. Temos no grafo G então k conjuntos independentes, a saber $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_k$, onde $\mathcal{I}_i \subseteq V(G)$, para $i = 1, 2, \dots, k$.

Como todo grafo completo é também um grafo k -partido completo, pelo Teorema 3.3, seu número de Helly é igual a $|V(G)|$. Assim, vamos considerar apenas grafos k -partidos completos cujo número de vértices é diferente do tamanho de sua clique máxima.

Como G é k -partido completo, cada vértice de \mathcal{I}_i é adjacente a todos os vértices dos conjuntos \mathcal{I}_j , para $i \neq j$. Além disso, como G não é completo, existe ao menos um conjunto independente $\mathcal{I}_{i'}$, tal que $|\mathcal{I}_{i'}| \geq 2$. Assim, dados dois vértices v_1 e v_2 no mesmo conjunto independente $\mathcal{I}_{i'}$, todos os demais vértices de $V(G) \setminus \mathcal{I}_{i'}$ pertencem aos caminhos mínimos entre eles, ou seja, $\langle \{v_1, v_2\} \rangle = V(G)$. Então, temos que os conjuntos convexos de G são formados pelos vértices de suas cliques, variando a cardinalidade desses conjuntos de 1 até k (as de tamanho k são as cliques máximas de G), e também o próprio conjunto de vértices do grafo.

Supondo, por contradição, que $h(G) > k$.

Assim, pelo Lema 2.5, existe uma família \mathcal{C} de $k + 1$ conjuntos convexos, k -intersectante, com o núcleo vazio, ou seja, pelo Teorema 2.4 a família $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_{k+1}\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} S_1 &\supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_k, v_{k+1}\} \not\ni \{v_1\}, S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_k, v_{k+1}\} \not\ni \{v_2\}, \\ S_3 &\supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_k, v_{k+1}\} \not\ni \{v_3\}, \dots, S_k \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}\} \not\ni \{v_k\}, \\ S_{k+1} &\supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\ni \{v_{k+1}\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^{k+1} S_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Isso implica que cada um dos $k + 1$ conjuntos convexos de \mathcal{C} tenha cardinalidade maior ou igual a k .

Como G é k -partido completo, então os conjuntos convexos em G , tal que $|S_i| \geq k$, serão o conjunto de vértices das cliques máximas de G ou o próprio $V(G)$. Então, a cardinalidade de cada conjunto convexo S_i , para $i = 1, 2, \dots, k + 1$; será igual a k ou n . Temos então dois casos:

Caso 1: Um dos conjuntos convexos de \mathcal{C} é o $V(G)$.

Sem perda de generalidade, tomemos S_{k+1} o conjunto convexo formado por todos os vértices de G . Assim, todos os demais k conjuntos convexos são formados pelos vértices das cliques máximas de G , ou seja, $|S_j| = k$, para $j = 1, 2, \dots, k$. Desse modo, como \mathcal{C} é k -intersectante, o núcleo de S_1, S_2, \dots, S_k é não vazio, e como $S_{k+1} = V(G)$, então $\bigcap_{i=1}^{k+1} S_i \neq \emptyset$, o que implica que $h(G) \leq k$, uma contradição.

Caso 2: Todo os conjuntos convexos de \mathcal{C} são formados pelos vértices das cliques máximas de G , todas com cardinalidade igual a k , com $k < |V(G)| = n$.

Como todo conjunto convexo S_i , para $i = 1, 2, \dots, k+1$ de \mathcal{C} é formado pelos vértices de uma clique de tamanho k , então:

$S_1 = \{v_2, v_3, \dots, v_{k+1}\}$, $S_2 = \{v_1, v_3, \dots, v_{k+1}\}$, ..., $S_{k+1} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ são vértices de cliques. Assim, para todo vértice do conjunto $V_{k+1} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$, temos que $d(v_i, v_j) = 1$, para $i, j = 1, 2, \dots, k+1$; com $i \neq j$. Então temos que os vértices de V_{k+1} formam uma clique de tamanho $k+1$, uma contradição, pois $\omega(G) = k$.

Assim, $h(G) \leq k$, mas como o tamanho da clique máxima do grafo é um limite inferior para o número de Helly, temos que $h(G) \geq k$.

Logo $h(G) = k$.

□

3.3.2 Grades completas

Nesta seção, apresentaremos o número de Helly para a classe de grafos conhecida por grades, em especial, estudamos as d -grades completas, ou seja, grades de dimensão d , para $d \geq 2$.

Teorema 3.10 (d-Grades) *Dado um grafo $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ onde G é do tipo d -grade completa, finita, (grade de dimensão d , $2 \leq d < \infty$) então $h(G) = 2$.*

Demonstração.

Seja G um grafo do tipo d -grade completa.

Representaremos cada vértice v de G como pontos de coordenadas inteiras positivas no espaço d -dimensional, com $2 \leq d < \infty$, e cada dois vértices u e w são adjacentes se, e somente se, a distância euclidiana entre u e w é igual a um [31].

Assim, $V(G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)) = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \mid 1 \leq v_1 \leq \alpha_1, 1 \leq v_2 \leq \alpha_2, \dots, 1 \leq v_d \leq \alpha_d\}$.

Dados três vértices $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ e $c = (c_1, c_2, \dots, c_d)$ em G , tomaremos os conjuntos $S_1 = \langle\{b, c\}\rangle$, $S_2 = \langle\{a, c\}\rangle$ e $S_3 = \langle\{a, b\}\rangle$. Tais conjuntos são claramente 2-intersectantes. Como todo conjunto convexo em uma d -grade completa é uma d -subgrade completa então cada conjunto convexo S_i , para $i = 1, 2, 3$; é uma d -subgrade completa de G . Assim, cada S_i , para $i = 1, 2, 3$; é da forma:

$$S_1 = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \mid \min\{b_1, c_1\} \leq u_1 \leq \max\{b_1, c_1\}, \min\{b_2, c_2\} \leq u_2 \leq \max\{b_2, c_2\}, \dots, \min\{b_d, c_d\} \leq u_d \leq \max\{b_d, c_d\}\}$$

$$S_2 = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \mid \min\{a_1, c_1\} \leq v_1 \leq \max\{a_1, c_1\}, \min\{a_2, c_2\} \leq v_2 \leq \max\{a_2, c_2\}, \dots, \min\{a_d, c_d\} \leq v_d \leq \max\{a_d, c_d\}\}$$

$$S_3 = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_d) \mid \min\{a_1, b_1\} \leq w_1 \leq \max\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\} \leq w_2 \leq \max\{a_2, b_2\}, \dots, \min\{a_d, b_d\} \leq w_d \leq \max\{a_d, b_d\}\}$$

Tomando um vértice $e = (e_1, e_2, \dots, e_d)$, de modo que cada uma de suas coordenadas $e_k = mediana\{a_k, b_k, c_k\}$, $1 \leq k \leq d$, verifica-se que $e \in S_1$, $e \in S_2$ e $e \in S_3$, ou seja, o vértice $e \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, assim $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$.

Assim, temos que toda d -grade é 2-Helly, ou seja, $h(G) \leq 2$.

Como somente o grafo trivial possui o número de Helly igual a um, temos garantido o resultado.

Logo, $h(G) = 2$.

□

Como um grafo do tipo grade completa atende à propriedade de Helly, vale ressaltar o fato de que o número de Helly não necessariamente é herdado para todos os subgrafos (induzidos ou não) de um grafo. Subgrafos H de um grafo G não possuem número de Helly necessariamente menor, assim podemos ter o número de Helly estritamente maior no subgrafo, ou seja, $h(G) < h(H)$.

Na Figura 3.3, temos um grafo do tipo grade que é sabido que o número de Helly é igual a dois, porém ao retirarmos a aresta be obtemos um grafo do tipo ciclo C_n , com $n \neq 4$, cujo número de Helly é igual a três.

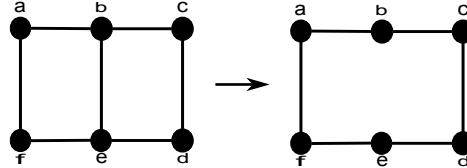


Figura 3.3: Grafo grade e um de seus subgrafos

Na Figura 3.4 temos um grafo do tipo grade completa, cujo número de Helly é igual a dois e, ao retirarmos o vértice e , temos o subgrafo induzido do tipo ciclo, cujo número de Helly é igual a três.

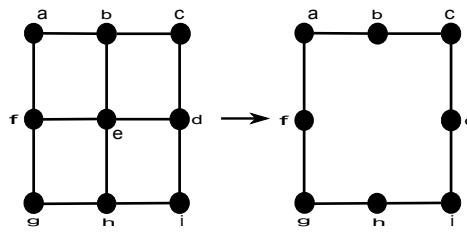


Figura 3.4: Grafo grade e um subgrafo induzido

É interessante observar que na Figura 3.4 o conjunto dos vértices do subgrafo resultante da retirada do vértice e não forma um conjunto convexo do grafo original, ou seja, não contraria o Teorema 3.6.

3.3.3 Grafos prisma

Nesta seção iremos estudar o número de Helly para grafos prisma.

A seguir, temos a Figura 3.5, exemplo de um grafo prisma $G = Y_{5,3}$ e de um grafo prisma $H = Y_{5,4}$.

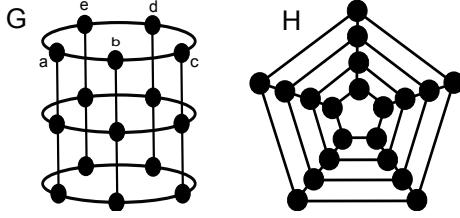


Figura 3.5: Grafos prisma

Teorema 3.11 (Prismas) Seja $Y_{n,m}$ um grafo prisma, com $n \neq 4$. Então $h(Y_{n,m}) = 3$.

Demonstração.

Seja $Y_{n,m}$ um grafo prisma com $n \neq 4$.

Os conjuntos geometricamente convexos em grafos prisma são grades completas $G(p,q)$ de dimensão dois, com $1 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $1 \leq q \leq m$, ciclos ou subprismas (subgrafos prisma de um grafo prisma).

Para efeito de demonstração, consideraremos indistintamente ciclos como subprismas do grafo, ou seja, $Y_{n,1}$.

Representaremos cada vértice v do grafo como pontos de coordenadas inteiras positivas em um gráfico de coordenadas polares, onde a distância entre dois vértices adjacentes de um caminho P_m do produto cartesiano que o forma será definido como uma unidade radial, e a distância entre dois vértices adjacentes num ciclo C_n será definido por uma unidade angular. Assim, o conjunto dos vértices do grafo $Y_{n,m}$ será da seguinte forma:

$V(Y_{n,m}) = \{v = (v_1, v_2) \mid 1 \leq v_1 \leq m \text{ e } 1 \leq v_2 \leq n\}$, onde v_1 é a coordenada radial e v_2 é a coordenada angular.

Dados os vértices $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ e $d = (d_1, d_2)$ em $Y_{n,m}$, tomaremos os conjuntos $S_1 = \langle \{b, c, d\} \rangle$, $S_2 = \langle \{a, c, d\} \rangle$, $S_3 = \langle \{a, b, d\} \rangle$ e $S_4 = \langle \{a, b, c\} \rangle$. Assim, dados os conjuntos convexos S_i , para $i = 1, \dots, 4$, no grafo $Y_{n,m}$, onde cada conjunto contém ao menos três dos vértices de $\{a, b, c, d\}$, temos cinco possibilidades para tais conjuntos convexos: quatro subprismas; três subprismas e uma grade; dois subprismas e duas grades; um subprisma e três grades e, por fim, quatro grades. Analisaremos os cinco casos:

Caso 1: Os quatro conjuntos convexos S_i , para $i = 1, \dots, 4$, são subprismas.

Desse modo, temos os seguintes conjuntos convexos:

$$S_1 = \{u = (u_1, u_2) \mid \min\{b_1, c_1, d_1\} \leq u_1 \leq \max\{b_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_2 = \{v = (v_1, v_2) \mid \min\{a_1, c_1, d_1\} \leq v_1 \leq \max\{a_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_3 = \{w = (w_1, w_2) \mid \min\{a_1, b_1, d_1\} \leq w_1 \leq \max\{a_1, b_1, d_1\}\}$$

$$S_4 = \{z = (z_1, z_2) \mid \min\{a_1, b_1, c_1\} \leq z_1 \leq \max\{a_1, b_1, c_1\}\}$$

Tais conjuntos convexos são obviamente 3-intersectantes, e tomando um vértice $e = (e_1, e_2)$, de modo que sua coordenada $e_1 = \lceil \text{mediana}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rceil$, verifica-se que $e \in \bigcap_{i=1}^4 S_i$, ou seja, o vértice e pertence ao núcleo, o que prova este caso.

A partir de agora, tomaremos os vértices do conjunto convexo grade no gráfico de coordenadas polares, ou da união destes conjuntos convexos grade, de modo que estejam dispostos dentro do intervalo $[1; n]$ na coordenada angular. Isso é sempre possível uma vez que um conjunto convexo grade em $Y_{n,m}$ é uma grade completa $G(p, q)$ de dimensão dois, com $1 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $1 \leq q \leq m$, e tais conjuntos convexos são 3-intersectantes.

Caso 2: Três dos conjuntos convexos são subprismas e um conjunto convexo é uma grade.

Sem perda de generalidade, tomemos S_1, S_2 e S_3 subprismas e S_4 uma grade.

Assim, temos os seguintes conjuntos convexos:

$$S_1 = \{u = (u_1, u_2) \mid \min\{b_1, c_1, d_1\} \leq u_1 \leq \max\{b_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_2 = \{v = (v_1, v_2) \mid \min\{a_1, c_1, d_1\} \leq v_1 \leq \max\{a_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_3 = \{w = (w_1, w_2) \mid \min\{a_1, b_1, d_1\} \leq w_1 \leq \max\{a_1, b_1, d_1\}\}$$

$$S_4 = \{z = (z_1, z_2) \mid \min\{a_1, b_1, c_1\} \leq z_1 \leq \max\{a_1, b_1, c_1\} \text{ e } \min\{a_2, b_2, c_2\} \leq z_2 \leq \max\{a_2, b_2, c_2\}\}$$

Esses conjuntos convexos são 3-intersectantes, e tomando um vértice $e = (e_1, e_2)$, de modo que sua coordenada $e_1 = \lceil \text{mediana}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rceil$, e $e_2 = \lceil \text{mediana}\{a_2, b_2, c_2\} \rceil$, verifica-se que $e \in S_i$, para $i = 1, \dots, 4$, ou seja, o vértice e pertence ao núcleo.

Caso 3: Dois dos conjuntos convexos são subprismas e dois conjuntos convexos são grades.

Sem perda de generalidade, tomemos S_1 e S_2 subprismas e, S_3 e S_4 grades.

Desse modo, temos os seguintes conjuntos convexos:

$$S_1 = \{u = (u_1, u_2) \mid \min\{b_1, c_1, d_1\} \leq u_1 \leq \max\{b_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_2 = \{v = (v_1, v_2) \mid \min\{a_1, c_1, d_1\} \leq v_1 \leq \max\{a_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_3 = \{w = (w_1, w_2) \mid \min\{a_1, b_1, d_1\} \leq w_1 \leq \max\{a_1, b_1, d_1\} \text{ e } \min\{a_2, b_2, d_2\} \leq w_2 \leq \max\{a_2, b_2, d_2\}\}$$

$$S_4 = \{z = (z_1, z_2) \mid \min\{a_1, b_1, c_1\} \leq z_1 \leq \max\{a_1, b_1, c_1\} \text{ e } \min\{a_2, b_2, c_2\} \leq z_2 \leq \max\{a_2, b_2, c_2\}\}$$

Tomando um vértice $e = (e_1, e_2)$, de modo que sua coordenada $e_1 = \lceil \text{mediana}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rceil$, e $e_2 = \lceil \text{mediana}\{a_2, b_2, c_2, d_2\} \rceil$, verifica-se que $e \in S_i$, para $i = 1, \dots, 4$, ou seja, o vértice e pertence ao núcleo.

Caso 4: Apenas um dos conjuntos convexos é um subprisma e três conjuntos convexos são grades.

Sem perda de generalidade, tomemos S_1 subprisma e, S_2, S_3 e S_4 grades.

Temos então os seguintes conjuntos convexos:

$$S_1 = \{u = (u_1, u_2) \mid \min\{b_1, c_1, d_1\} \leq u_1 \leq \max\{b_1, c_1, d_1\}\}$$

$$S_2 = \{v = (v_1, v_2) \mid \min\{a_1, c_1, d_1\} \leq v_1 \leq \max\{a_1, c_1, d_1\} \text{ e } \min\{a_2, c_2, d_2\} \leq v_2 \leq \max\{a_2, c_2, d_2\}\}$$

$$S_3 = \{w = (w_1, w_2) \mid \min\{a_1, b_1, d_1\} \leq w_1 \leq \max\{a_1, b_1, d_1\} \text{ e } \min\{a_2, b_2, d_2\} \leq w_2 \leq \max\{a_2, b_2, d_2\}\}$$

$$S_4 = \{z = (z_1, z_2) \mid \min\{a_1, b_1, c_1\} \leq z_1 \leq \max\{a_1, b_1, c_1\} \text{ e } \min\{a_2, b_2, c_2\} \leq z_2 \leq \max\{a_2, b_2, c_2\}\}$$

Como o **caso 3**, esses conjuntos convexos são 3-intersectantes, e tomando um vértice $e = (e_1, e_2)$, de modo que sua coordenada $e_1 = \lceil \text{mediana}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rceil$, e $e_2 = \lceil \text{mediana}\{a_2, b_2, c_2, d_2\} \rceil$, verifica-se que $e \in S_i$, para $i = 1, \dots, 4$, ou seja, o vértice e pertence ao núcleo.

Caso 5: Todos os quatro conjuntos convexos são grades.

Como tais grades $G(p, q)$ de dimensão dois, tem tamanho máximo limitado, $1 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $1 \leq q \leq m$, pelo Teorema 3.10, temos que estas atendem à propriedade de Helly, ou seja, é 2-Helly, logo é também 3-Helly.

Assim, temos que $h(Y_{n,m}) \leq 3$. Como grafos prisma possuem ciclos geodélicos (qualquer uma das bases do prisma), e como ciclos geodélicos são limitantes inferiores para o parâmetro, então $h(Y_{n,m}) \geq 3$.

Logo, $h(Y_{n,m}) = 3$.

□

Para o caso do grafo prisma $Y_{4,m}$, ou seja, possuir base C_4 , temos que tal grafo é uma grade completa de dimensão três cujo resultado para o número de Helly já foi definido na seção 3.3.2 sendo este igual a dois, ou seja, tal grafo atende a propriedade de Helly.

Um fato interessante para esta classe de grafos é que, exceto para os prismas com bases C_4 , o número de Helly não é igual ao tamanho da sua clique máxima. Para esses grafos a clique máxima tem tamanho igual a dois e como tal classe possui ciclos geodélicos (suas bases), pela seção 3.2 esta classe já apresenta inicialmente um limite inferior para o valor do parâmetro.

3.4 Resultados existentes para o número de Helly

Alguns resultados muito significativos para o número de Helly na convexidade geodética em grafos são encontrados na literatura.

Para grafos cordais, em 1986, Chepoi provou que para esta classe o número de Helly será sempre igual ao tamanho de sua clique máxima [13]. Tal resultado foi generalizado em 1990, por Bandelt e Mulder através de uma superclasse de cordais chamada de grafos desmontáveis, ou seja, o número de Helly será igual ao tamanho de sua clique máxima [2]. Mostraram também neste artigo o mesmo resultado para o parâmetro para grafos pseudo-modulares.

Posteriormente, em 1995, Nobert Polat mostrou que o resultado também é igual o tamanho de sua clique máxima para grafos fortemente desmontáveis [40]. Em seu artigo é mostrado também um resultado para grafos distância hereditária, pois Duchet [24], e em paralelo, também Jamison e Nowakowski [32], mostraram que na convexidade monofônica, para qualquer grafo, o número de Helly será sempre igual ao tamanho da clique máxima do grafo e para grafos distância hereditária, os conjuntos convexos são idênticos, tanto para a convexidade geodética quanto para a convexidade monofônica.

Além do resultado para ciclos 3.1.3 e para grafos prisma 3.3.3, onde o número de Helly é diferente do tamanho de sua clique máxima, Jamison e Nowakowski mostraram que o valor do parâmetro pode diferir tanto quanto se queira do tamanho da clique máxima de um grafo bipartido específico [32].

Tomando uma família da classe de grafos bipartidos definidos da seguinte forma: dada uma família de grafos $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\}$, tal que para todo $k \geq 1$, definimos $G_k \in \mathcal{G}$ como $V(G_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \cup \{v_{ij} : 1 \leq i < j \leq k\}$, e $E(G) = \{v_i v_{ij} \text{ e } v_j v_{ij} : 1 \leq i < j \leq k\}$. Tal grafo também pode ser construído fazendo uma subdivisão de um grafo completo K_k adicionando um vértice em cada uma de suas arestas, obtendo assim um grafo bipartido.

Para tal família, o resultado do número de Helly é igual a k porém o tamanho da clique máxima de G é igual a dois, ou seja, o valor do parâmetro depende do tamanho do grafo completo inicial (antes da subdivisão) e não do tamanho de sua clique máxima.

A Figura 3.6 nos mostra um exemplo de um grafo bipartido $G_4 \in \mathcal{G}$ cujo número de Helly é igual a quatro.

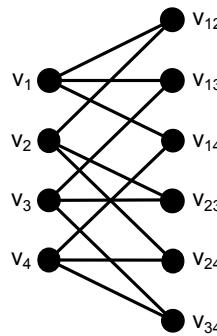


Figura 3.6: Grafo G_4

3.5 Complexidade computacional

Nesta seção apresentaremos a demonstração de que o problema de decidir se um grafo é p -Helly na convexidade geodética é co- \mathcal{NP} -completo para p variável.

Consideramos o problema de determinar se G é p -Helly.

O seguinte lema será útil na demonstração.

Lema 3.12 *Toda clique de um grafo G é um conjunto geometricamente convexo.*

GRAFO p -HELLY

Entrada: Um grafo G e um número inteiro qualquer $p \geq 3$.

Questão: O Grafo G é p -Helly?

Teorema 3.13 *O problema GRAFO p -HELLY é co- \mathcal{NP} -completo para p variável.*

Demonstração.

Um certificado para um grafo G não ser p -Helly pode ser uma família de conjuntos convexos p -intersectante com o núcleo vazio. Nos restringimos a famílias minimais, ou seja, tomamos uma família \mathcal{C} de conjuntos convexos p -intersectantes e não p -Helly, mas que, ao se excluir qualquer conjunto de \mathcal{C} a torna p -Helly.

Se G não é p -Helly, pelo Lema 2.5, existe uma família \mathcal{C} em G com $p+1$ conjuntos convexos, onde para cada $S_i \in \mathcal{C}$ existe um vértice $w_i \notin S_i$, satisfazendo $w_i \in S_j$, para $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, p+1$.

Claramente, o tamanho de \mathcal{C} é polinomial no tamanho de G . Assim, \mathcal{C} pode ser reconhecida como p -intersectante e não p -Helly em tempo polinomial, portanto GRAFO p -HELLY \in co- \mathcal{NP} .

A redução é a partir do problema CLIQUE, que é sabido ser \mathcal{NP} -completo [34]. Dado um grafo G' e um número inteiro $k \geq 3$, CLIQUE pergunta se G' contém uma clique de tamanho maior que k . Claramente, podemos assumir que G' não é um grafo completo. Dado G' , construímos um grafo G adicionando em G' dois vértices não adjacentes u e v , tais que u e v são adjacentes a todos os vértices de G' . Defina $p := k$. Seja G e p uma instância de GRAFO p -HELLY. Mostraremos que G' tem uma clique de tamanho maior ou igual a k se, e somente se, G não é p -Helly.

Primeiramente, examinaremos o grafo G . Afirmamos que um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo em G se, e somente se, $S = V(G)$ ou S é uma clique de G . Se S é uma clique de G , então, pelo Lema 3.12, este é um conjunto convexo. Por outro lado, se S não é uma clique de G então este contém um par de vértices não adjacentes $x, y \in V(G)$. Se $\{x, y\} = \{u, v\}$, isto segue que $S = V(G)$, pois $\langle\{u, v\}\rangle = V(G)$. Caso contrário, se $x, y \neq u, v$, isto implica que $\{u, v\} \subseteq \langle\{x, y\}\rangle$, e consequentemente

$S = V(G)$. Assim, se S é um conjunto convexo e não é uma clique de G , a única possibilidade é que $u, v \in S$, o que implica que $S = V(G)$.

Assim, assumimos que G tem uma clique $S = \{w_1, \dots, w_k\}$, $k \geq 3$. Tomemos, sem perda de generalidade, $w_{k+1} = u$. Então $S \cup \{w_{k+1}\}$ é uma clique de G de tamanho $k + 1$. Então a família $S \setminus \{w_i\}$, $1 \leq i \leq k + 1$ é k -intersectante com o núcleo vazio. Sendo $p = k$, isto segue que G não é p -Helly.

Por outro lado, supondo G não é p -Helly, ou seja, pelo Lema 2.5 existe em G uma família \mathcal{C} de $p + 1$ conjuntos convexos p -intersectante com o núcleo vazio. Então, existe um subconjunto $W \subseteq V(G)$, $|W| = p + 1$ tal que para cada $S_i \in \mathcal{C}$, existe um vértice distinto $w_i \in W$ tal que $w_i \notin S_i$ e $w_i \in S_j$ para todo $S_j \in \mathcal{C}$. Isto implica que $V(G) \notin \mathcal{C}$.

Considere as seguintes alternativas:

Caso 1: $u, v \in W$:

Uma vez que $p \geq 3$, existe algum $S_i \in \mathcal{C}$, tal que $u, v \in S_i$. Assim, $S_i = V(G)$, logo esse caso não ocorre.

Caso 2: $u \in W$ e $v \notin W$:

Seja S_i o único conjunto de \mathcal{C} que não contém u . Se $v \notin S_i$ então S_i é uma clique em G' . Como pelo Teorema 2.4 o tamanho de cada conjunto de \mathcal{C} é pelo menos p , isto segue que G' tem uma clique de tamanho maior ou igual a p . Se $v \in S_i$, removendo v de $S'_i = S_i \setminus \{v\}$, a família de subconjuntos obtida trocando S_i por S'_i em \mathcal{C} é ainda p -intersectante com núcleo vazio. Como $u, v \notin S'_i$, segue que S'_i é uma clique de tamanho maior ou igual a p em G' .

Caso 3: $u, v \notin W$:

Escolhendo qualquer $S_i \in \mathcal{C}$, sabemos que simultaneamente $u, v \notin S_i$, caso contrário $S_i = V(G)$, uma contradição. Se $u \in S_i$ e $w \notin S_i$ então, como no caso 2, removendo u de S_i temos uma clique em G' de tamanho maior ou igual a p . \square

Este resultado poderia também ser determinado usando o fato de que encontrar a clique máxima em grafos desmontáveis é um problema \mathcal{NP} -completo, pois dado um grafo G qualquer, adicionando um vértice universal u a G obtendo assim o grafo G' , u domina v para todo vértice v em G' , temos então que G' é desmontável. Assim, decidir se G' possui uma clique de tamanho $k + 1$ equivale a decidir se G possui uma clique de tamanho k , e decidir se G possui uma clique de tamanho k é \mathcal{NP} -completo [34]. Além disso, para esta classe o número de Helly na convexidade geodética é sempre igual ao tamanho da clique máxima do grafo [2].

Capítulo 4

Arca da aliança

Não cobiçarás o teorema do próximo.

Moisés

Neste capítulo apresentaremos alguns teoremas interessantes cuja aplicação para grafos com características específicas serão de extrema utilidade para determinar o número de Helly na convexidade geodética.

Devido a algumas particularidades de algumas classes de grafos, o foco principal neste capítulo não foi encontrar o valor exato do parâmetro, e sim teoremas que auxiliem neste cálculo, como por exemplo, eliminação de vértices, de subgrafos ou decomposição de grafos por conjuntos separadores que atendam a uma determinada condição específica.

O primeiro teorema nos permite determinar o número de Helly de um grafo G de maneira direta, bastando que haja no mesmo um vértice universal, ou seja, um vértice que é vizinho a todos os demais vértices de G .

O segundo teorema trata da possibilidade de eliminar de um grafo G um vértice simplicial com uma característica específica, que chamaremos de vértice simplicial restrito, de modo que após sua eliminação, o parâmetro número de Helly para G não se altera.

O terceiro teorema nos permite, em grafos que possuam um ou mais conjuntos separadores compostos por vértices gêmeos, decompô-los em componentes conexas e pesquisar o número de Helly nas mesmas, sendo que o maior resultado encontrado nas componentes será o valor do parâmetro para o grafo original. Este teorema possui um corolário onde o conjunto separador de gêmeos se reduz a apenas um único vértice, ou também chamado de articulação, ou seja, o grafo passa a ser não biconexo. Nestas condições, também é possível decompor o grafo e calcular o número de Helly nos blocos resultantes.

Na sequência, apresentamos teoremas envolvendo grafos prisma generalizados. Para o próprio, mostramos que basta calcular o valor do parâmetro para uma de suas bases (todas isomorfas) para saber o valor do número de Helly do grafo original. Nesta mesma linha, mostramos também que é possível eliminar do grafo subgrafos prisma generalizados desde que todas as suas bases sejam conjuntos convexos do grafo e que uma das bases seja o conjunto separador do prisma e o restante do grafo.

Por último, mostramos um teorema que permite calcular o valor do número de Helly do grafo decompondo o mesmo por conjuntos separadores que, além de separadores, sejam também conjuntos convexos do grafo, e os chamamos de conjuntos separadores geodélicos. Da mesma forma, mostramos que é possível decompor um grafo por conjuntos separadores prisma generalizados e, em ambos os casos, encontrar o valor do parâmetro nas componentes resultantes.

4.1 Vértice universal

É definido como *universal* o vértice de um grafo G que é adjacente a todos os demais vértices do grafo, e nesta seção mostraremos que todo grafo G que possuir um vértice com essa característica, o número de Helly de G é igual ao tamanho de sua clique máxima.

Teorema 4.1 (Vértice universal) *Se um grafo G contém um vértice universal, então $h(G) = \omega(G)$.*

Demonstração.

Sejam v_1, v_2, \dots, v_r vértices universais em um grafo G cuja clique máxima tem tamanho igual a k . Como v_1, v_2, \dots, v_r são vértices universais em G , estes pertencem também a toda clique máxima de G .

Seja $\mathcal{M} = \{S_1, S_2, \dots, S_p, S_{p+1}, \dots, S_t\}$ o conjunto de todos os conjuntos convexos do grafo G . Dessa forma, particionaremos \mathcal{M} em $\mathcal{M}_1 = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$, composto por todos os conjuntos convexos que não contém vértices universais, e $\mathcal{M}_2 = \{S_{p+1}, S_{p+2}, \dots, S_t\}$, composto por todos os conjuntos convexos que contém algum vértice universal de G .

Como os vértices v_1, v_2, \dots, v_r são universais, então todos os conjuntos convexos que não contém ao menos um deles são cliques, pois caso contrário teríamos um conjunto凸 com ao menos um par de vértices não adjacentes, dessa forma o caminho mínimo entre eles conteria todos os vértices universais. Além disso, os conjuntos convexos de \mathcal{M}_1 possuem tamanho menor ou igual a $k-1$, pois toda clique máxima do grafo, que tem tamanho igual a k , contém todos os vértices universais.

Assim, todo conjunto convexo S_i de tamanho maior ou igual a k , contém todos os vértices universais. Isso é sempre verdade, caso contrário, se existisse um conjunto convexo $S_{i'}$, onde $|S_{i'}| \geq k$, e existisse um vértice universal \bar{v} , tal que $\bar{v} \notin S_{i'}$, então $S_{i'}$ seria uma clique, o que implicaria que $S_{i'} \cup \{\bar{v}\}$ seria uma clique de tamanho maior que k , o que por hipótese não ocorre. Então para todo conjunto A de vértices, com $|A| = k + 1$, a intersecção dos conjuntos convexos S_i , tal que $|S_i| \geq k$, é não vazio, pois cada conjunto convexo S_i , tal que $|S_i| \geq k$, contém todos os vértices universais, logo, pelo Teorema 2.4, temos que G é k -Helly, ou seja, $h(G) \leq k$. Como o tamanho da clique máxima é um limitante inferior, temos que $h(G) \geq k$.

Logo $h(G) = k$.

□

Na Figura 4.1, temos um grafo G com um vértice universal, a saber o vértice em destaque b , e de acordo com o Teorema 4.1, tal fato nos fornece o número de Helly igual ao tamanho de sua clique máxima, ou seja, igual a quatro.

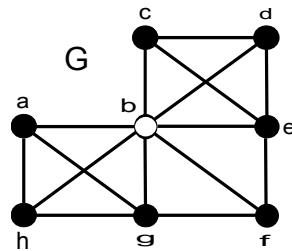


Figura 4.1: Grafo com vértice universal

O fato de podermos determinar o número de Helly a partir dessa característica nos permite encontrar o parâmetro para diversos grafos, inclusive algumas classes de grafos, como por exemplo os grafos de limiar, ou também conhecido como grafos *threshold*.

Corolário 4.2 *Seja G um grafo de limiar. Então $h(G) = \omega(G)$.*

Uma característica da classe de grafos de limiar é que estes sempre possuem ao menos um vértice universal, assim a demonstração desse corolário é uma aplicação direta do Teorema 4.1.

4.2 Eliminando vértices simpliciais restritos

Teremos nesta seção um resultado de grande utilidade baseado na eliminação de vértices simpliciais com uma característica específica. Este resultado poderá determinar o número de Helly para algumas classes de grafos, além de alguns grafos que possuam a característica de que, ao eliminarmos tais vértices simpliciais, o grafo

resultante pertença a alguma classe com um resultado conhecido para o valor do parâmetro.

Dado um grafo G , definimos a como *vértice simplicial restrito* se a for um vértice cuja vizinhança aberta induz uma clique não maximal em $G \setminus \{a\}$.

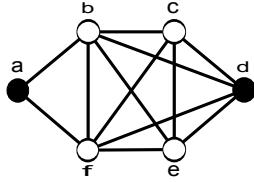


Figura 4.2: Exemplo de um vértice simplicial restrito em um grafo

Na Figura 4.2, o vértice a é simplicial restrito, pois sua vizinhança aberta em $G \setminus \{a\}$, composta pelos vértices b e f induzem uma clique não maximal, já o vértice d é um vértice simplicial não restrito, pois sua vizinhança aberta em $G \setminus \{d\}$, composta pelos vértices b , c , e e f , induzem uma clique maximal.

Para demonstrarmos o resultado principal, onde podemos extrair de um grafo G seus vértices simpliciais restritos, mostraremos antes dois lemas que expõem a relação entre os conjuntos convexos de G e do grafo $G \setminus \{a\}$, onde a é um vértice simplicial restrito.

Lema 4.3 *Seja G um grafo, a um vértice simplicial em G e $G' = G \setminus \{a\}$. Todo conjunto convexo S em G' é também convexo em G .*

Demonstração.

Seja S um conjunto convexo em G' .

Suponhamos, por contradição, que S não é um conjunto convexo em G .

Assim, para algum par de vértices u e v em S , existe um caminho mínimo P em G , entre u e v , passando por algum vértice em $V(G) \setminus S$.

Logo P deverá conter o vértice a , caso contrário este caminho existiria em G' , o que implicaria em S não ser um conjunto convexo em G' .

Como a pertence à P , então ao menos dois de seus vértices vizinhos em P não são adjacentes, logo o vértice a não é simplicial, uma contradição.

Logo S é um conjunto convexo em G .

□

Lema 4.4 *Se S é um conjunto convexo em um grafo G , a um vértice simplicial em G e $G' = G \setminus \{a\}$, então $S \setminus \{a\}$ é um conjunto convexo em G' .*

Demonstração.

Seja S um conjunto convexo em G .

Como o vértice a é simplicial, então para quaisquer dois vértices em S , o vértice a não pertence ao caminho mínimo entre eles.

Logo $S \setminus \{a\}$ é um conjunto convexo em G' .

□

Vale ressaltar que os Lemas 4.3 e 4.4 também são válidos para vértices simpliciais restritos.

Uma consequência muito importante e bastante útil dos Lemas 4.3 e 4.4 é o teorema apresentado a seguir:

Teorema 4.5 (Eliminando vértices simpliciais restritos) *Se a é um vértice simplicial restrito em um grafo G e $G' = G \setminus \{a\}$ então $h(G) = h(G')$.*

Demonstração.

Seja G um grafo e $G' = G \setminus \{a\}$, onde a é um vértice simplicial restrito.

Seja $h(G) = k$, ou seja, G é k -Helly na convexidade geodética e supondo, por contradição, que $h(G') \neq k$.

Como pelo Lema 4.3 todo conjunto convexo em G' é também um conjunto convexo em G , temos que $\mathcal{M}_{G'} \subseteq \mathcal{M}_G$, onde $\mathcal{M}_{G'}$ e \mathcal{M}_G são os conjuntos de todos os conjuntos convexos de G' e G , respectivamente. Desse modo, pelo Teorema 3.5, temos que $h(G') \leq h(G)$. Então basta verificar o caso para $h(G') < k$, ou seja, $h(G') \leq k - 1$, assim, G' é $(k - 1)$ -Helly.

Como $h(G) = k$, então G não é $(k - 1)$ -Helly, ou seja, pelo Lema 2.5, existe em G uma família \mathcal{C} de k conjuntos convexos, $(k - 1)$ -intersectante, com o núcleo vazio, ou seja, pelo Teorema 2.4, $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, S_k\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} S_1 &\supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\supseteq \{v_1\}, S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\supseteq \{v_2\}, \\ S_3 &\supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\supseteq \{v_3\}, \dots, S_{k-1} \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\supseteq \{v_{k-1}\}, \\ S_k &\supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}\} \not\supseteq \{v_k\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Temos que $a = v_i$, para algum i , pois caso contrário tal família de conjuntos convexos estaria também em G' , o que implicaria em G' não ser $(k - 1)$ -Helly. Sem perda de generalidade, tomemos $a = v_1$. Temos que $I(a, v_i) \cap I(a, v_j) = \emptyset$, para todo $2 \leq i < j \leq k$. Para demonstrar tal fato vamos supor o contrário, ou seja, que exista um vértice w em G , tal que $w \in I(a, v_i) \cap I(a, v_j)$, para algum i e para algum j . Assim, a e w pertenceria a todo conjunto convexo S_t , para $t \neq 1$.

Tomando em G' a família de conjuntos convexos $\mathcal{C}'_{G'} = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_k\}$, onde $S'_t = S_t \setminus \{a\}$, para $t = 1, 2, \dots, k$; pelo Lema 4.4, temos que os conjuntos S'_t são também conjuntos convexos no grafo G' . Como a família \mathcal{C}_G é $(k - 1)$ -intersectante, temos que $\mathcal{C}'_{G'} = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_k\} = \{S_1, S_2 \setminus \{a\}, \dots, S_k \setminus \{a\}\}$ também será $(k - 1)$ -intersectante, pois $w \in S_t$, para todo $t \neq 1$, e como $S'_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$;

a família \mathcal{C}_G possuir o núcleo vazio implica que a família $\mathcal{C}'_{G'}$ também possuirá o núcleo vazio, o que acarretaria existir em G' uma família $(k - 1)$ -intersectante com núcleo vazio, ou seja, G' não é $(k - 1)$ -Helly, uma contradição, pois G' é, por hipótese, $(k - 1)$ -Helly.

Assim, como $I(a, v_i) \cap I(a, v_j) = \emptyset$, para todo $2 \leq i < j \leq k$, existe na clique, para cada vértice v_i , um vértice exclusivo no caminho mínimo entre v_i e a , e como consequência, temos que existe na clique do grafo $k - 1$ vizinhos do vértice a . Como a é um vértice simplicial restrito, implica que a clique possui tamanho maior ou igual a k em G . Como o tamanho de uma clique é um limitante inferior para o número de Helly, temos que G' não é $(k - 1)$ -Helly, uma contradição.

Logo, $h(G') = h(G)$.

□

A simples aplicação do Teorema 4.5 nos fornece resultados para o parâmetro para algumas classes de grafos, como grafos de partição, ou também conhecidos como grafos *split*.

Corolário 4.6 *Seja G um grafo de partição. Então $h(G) = \omega(G)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo de partição.

Todo grafo de partição admite uma separação dos vértices por sua clique máxima e um conjunto independente, onde tal conjunto independente será composto apenas vértices simpliciais restritos. Assim, eliminando tais vértices, restará apenas a clique máxima, cujo tamanho é um limitante inferior do parâmetro.

Logo $h(G) = \omega(G)$.

□

Esse resultado também nos fornece, além dos grafos de partição, resultado para o parâmetro para muitos exemplos de grafos cuja simples remoção de tais vértices simpliciais restritos resultam em grafos cujas classes já possuímos resultados anteriores para o número de Helly.

Além disso, podemos verificar que este resultado também nos fornece o número de Helly para uma parte dos grafos cordais, quando estes possuem uma ordem de eliminação perfeita onde todos os vértices, na ordem, são simplicias restritos, exceto os vértices da clique máxima do grafo. Assim, para os grafos cordais que possuam tal característica, o número de Helly também será igual ao tamanho da sua clique máxima.

O Teorema 4.5 corrobora alguns dos resultados obtidos anteriormente, como árvores, onde o número de Helly é igual a dois (tamanho da clique máxima de uma

árvore) e também para grafos de limiar, ou *threshold*, pois é uma subclasse de grafos *split*.

Na Figura 4.3, temos à esquerda um grafo com vértices simpliciais restritos g, h, i e j , e à direita o grafo após a aplicação do Teorema 4.5 que recai em um grafo do tipo ciclo, cuja classe já é conhecido o valor do parâmetro, ou seja, para o grafo da figura o número de Helly é igual a três.

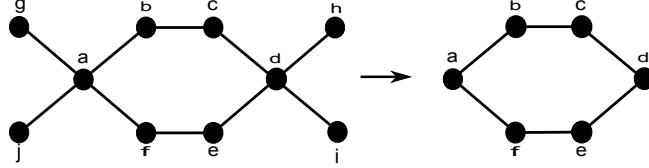


Figura 4.3: Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.4

Na Figura 4.4, temos à esquerda um grafo de partição, ou *split*, e ao eliminarmos seus vértices simpliciais restritos a e d , obtemos um grafo completo. Assim, o número de Helly desse grafo é igual quatro, ou seja, igual ao tamanho de sua clique máxima.

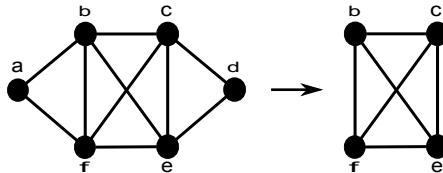


Figura 4.4: Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.3

O grafo da Figura 4.5 é cordal e possui uma ordem de eliminação perfeita, além disso, nessa ordem de eliminação os vértices são simpliciais restritos exceto os vértices da clique máxima. Sendo assim, tal grafo é resolvido pela aplicação do Teorema 4.5, ou seja, o número de Helly também é igual ao tamanho de sua clique máxima.

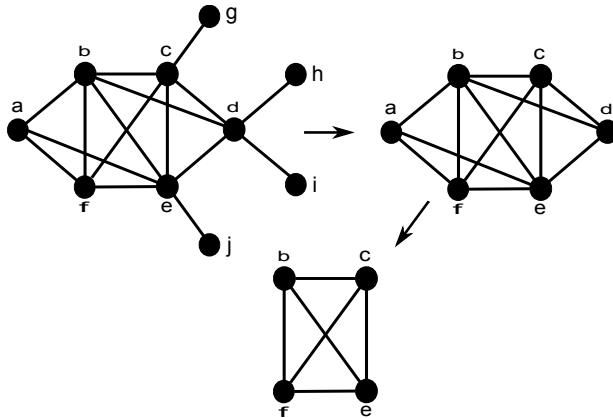


Figura 4.5: Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.3

Na Figura 4.6, temos um grafo que, ao eliminarmos seus vértices simpliciais restritos, chegamos em um grafo tripartido completo, ou seja, o número de Helly

será igual ao tamanho de sua clique máxima e como um grafo k -partido completo o tamanho de sua clique máxima é igual k , então $h(G) = 3$.

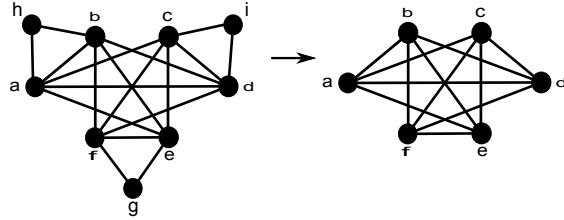


Figura 4.6: Grafo resolvido pelos Teoremas 4.5 e 3.9

É interessante destacar que tal teorema nos permite retirar, dentro das condições estabelecidas, vértices do grafo independente se este é cordal ou não, ou seja, apesar de ser bastante útil para resolver inúmeros grafos cordais, podemos aplicar o teorema em quaisquer grafos que possuam vértices simpliciais restritos.

4.3 Decomposição por separadores de gêmeos

Nesta seção apresentaremos um teorema que permitirá decompor um grafo a partir de seus conjuntos separadores desde que tais conjuntos tenham uma característica específica. Chamaremos tais conjuntos de conjuntos separadores de gêmeos.

Definimos por *conjunto separador de gêmeos* o conjunto separador C de um grafo G onde para quaisquer dois vértices u e v pertencentes ao conjunto C , temos que $N[u] = N[v]$.

Definimos como *bloco geminiano* o subgrafo maximal H de G tal que H não possui um conjunto separador de gêmeos. Nesse contexto, dados dois ou mais vértices em G , estes são ditos *geminianos entre si* quando pertencem ao mesmo conjunto separador de gêmeos de G .

Neste trabalho, em toda decomposição de um grafo a partir de um conjunto separador, cada componente resultante da decomposição herdará o conjunto separador, ou seja, todo bloco resultante da decomposição por um conjunto separador C conterá os vértices de C .

Lema 4.7 *Sejam C_1 e C_2 conjuntos separadores de gêmeos distintos de um grafo G . Então $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.*

Demonstração.

Sejam C_1 e C_2 conjuntos separadores de gêmeos distintos de um grafo G .

Supondo, por contradição, que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Assim, existe um vértice v , tal que $v \in C_1 \cap C_2$. Como C_1 e C_2 são distintos, existe um vértice u em $(C_1 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_1)$.

Sem perda de generalidade, tomemos $u \in C_1 \setminus C_2$, ou seja, $u \in C_1$ e $u \notin C_2$. Como $N[u] = N[v]$ em $G \setminus C_1$, temos que $N[u] = N[v]$ em $G \setminus (C_1 \cup C_2)$. De modo geral, para todo vértice w , tal que $w \in C_2$, temos que $N[v] = N[w]$ em $G \setminus (C_1 \cup C_2)$. Assim, para todo vértice $w \in C_2$, temos que $N[u] = N[w]$ em $G \setminus (C_1 \cup C_2)$.

Como o vértice u possui vértices adjacentes em ambas as componentes conexas separadas por C_2 (os mesmos vértices adjacentes ao vértice v) mas $u \notin C_2$, então C_2 não é um conjunto separador do grafo G , uma contradição.

Logo, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

□

O Lema 4.7 nos mostra que dados dois conjuntos separadores de gêmeos num grafo, eles são sempre disjuntos.

A seguir vamos mostrar que, dado um grafo G que contenha conjuntos separadores de gêmeos, podemos decompor tal grafo a partir desses conjuntos e calcular o número de Helly de cada um de seus blocos geminianos e o parâmetro do grafo G será o maior valor encontrado entre os seus blocos geminianos, ou seja, vamos mostrar que toda decomposição de um grafo por seus conjuntos separadores de gêmeos, ao menos um bloco geminiano herda o número de Helly do grafo G inicial.

Teorema 4.8 (Decomposição por conjuntos separadores de gêmeos)

Seja G um grafo e $G_1, G_2, \dots, G_\alpha$ seus blocos geminianos. Então $h(G) = \max\{h(G_1), h(G_2), \dots, h(G_\alpha)\}$.

Demonstração.

Seja G um grafo e C_1, C_2, \dots, C_l os conjuntos separadores de gêmeos de G . Seja também $G_1, G_2, \dots, G_\alpha$ os blocos geminianos resultantes da decomposição do grafo G por esses conjuntos separadores de gêmeos e \mathcal{M}_G o conjunto de todos os conjuntos convexos do grafo G .

Seja $h(G) = k$ e $h(G_p) \geq h(G_j)$, para $j = 1, 2, \dots, \alpha$. Seja também \mathcal{M}_{G_p} o conjunto de todos os conjuntos convexos do bloco geminiano G_p .

Supondo, por contradição, que $h(G) \neq h(G_p)$.

Dessa forma, temos duas possibilidades, ou $h(G) > h(G_p)$ ou $h(G) < h(G_p)$.

Como todo bloco geminiano herda o conjunto separador de gêmeos, então é fácil ver que cada bloco geminiano é também um conjunto geometricamente convexo em G , uma vez que, dados dois vértices num bloco, os caminhos mínimos entre eles estarão no mesmo bloco, pois todo par de vértices geminianos entre si, estes são adjacentes e possuem a mesma vizinhança em cada bloco geminiano. Assim, $\mathcal{M}_{G_j} \subseteq \mathcal{M}_G$, para $j = 1, 2, \dots, \alpha$.

Como $\mathcal{M}_{G_p} \subseteq \mathcal{M}_G$, pelo Lema 3.5 temos que $h(G_p) \leq h(G)$, assim sendo, basta analisar o caso $h(G_p) < h(G)$.

Por outro lado, o grafo G não é $(k-1)$ -Helly, ou seja, pelo Lema 2.5, existe em G uma família \mathcal{C}_G com k conjuntos convexos, $(k-1)$ -intersectante, com núcleo vazio, ou seja, pelo Teorema 2.4, a família $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, S_k\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} S_1 &\supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\ni \{v_1\}, \quad S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\ni \{v_2\}, \\ S_3 &\supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_{k-1}, v_k\} \not\ni \{v_3\}, \dots, \quad S_{k-1} \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\ni \{v_{k-1}\}, \\ S_k &\supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}\} \not\ni \{v_k\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Seja $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$.

Seja G' o subgrafo induzido de G construído da seguinte forma: um bloco geminiano folha G_β , onde $1 \leq \beta \leq \alpha$, deve ser removido se $G_\beta \setminus C_f$, $1 \leq f \leq l$; não possui vértices de V_k , onde C_f é o conjunto separador de gêmeos que conecta G_β a G . Assim, todos os blocos geminianos folha terão pelo menos um vértice v_i de V_k .

O grafo G' é um subgrafo induzido e $V(G')$ um conjunto convexo em G , e como $\mathcal{C}_G \subseteq \mathcal{M}_{G'}$, temos então pelo Teorema 3.7 que $h(G) = h(G')$.

Dessa forma, temos então os casos a analisar:

Caso 1: ao menos um dos vértices de V_k pertence a algum conjunto separador de gêmeos.

Sem perda de generalidade, tomemos v_1 um vértice em um conjunto separador de gêmeos C_f de G . Como todo bloco geminiano folha contém ao menos um vértice de V_k que não pertence a C_f , então existem ao menos dois vértices de V_k tal que todos os caminhos mínimos entre eles passam por C_f que contém o vértice v_1 . Desse modo, temos que existem vértices v_r e v_s , ambos em V_k , tal que todos os caminhos mínimos entre v_r e v_s passam por C_f .

Assim, existe ao menos um caminho mínimo entre v_r e v_s que passa por C_f , e em particular, passa por v_1 , uma vez que todos os vértices do conjunto C_f são gêmeos. Assim sendo, como tanto o vértice v_r quanto o vértice v_s pertencem a S_1 , então $v_1 \in S_1$, pois $v_1 \in I(v_r, v_s)$, uma contradição.

Caso 2: nenhum dos vértices pertencentes a V_k pertence a um conjunto separador de gêmeos.

Assim, teremos os subcasos:

Caso 2.1: dois ou mais vértices de V_k pertencem ao mesmo bloco geminiano folha.

Seja G_t um bloco geminiano folha que contém pelo menos dois vértices de V_k e C_f o conjunto separador de gêmeos que conecta o bloco G_t ao grafo. Sem perda de generalidade, tomemos v_1 e v_2 tais vértices em G_t . Assim, todos os vértices do conjunto separador C_f pertencem aos caminhos mínimos entre v_1 e os demais vértices de V_k que não pertencem a G_t , ou seja, $V(C_f) \in S_2$, pois $v_1 \in S_2$. Analogamente, os vértices de C_f também pertencem ao conjunto S_1 , pois $v_2 \in S_1$. Como os vértices de C_f também pertencem aos demais conjuntos convexos de \mathcal{C}_G ; então pertencem

ao núcleo, uma contradição, pois supomos que o núcleo era vazio.

Caso 2.2: dois ou mais blocos geminianos folha possuem o mesmo conjunto separador de gêmeos que os conecta ao grafo G' .

Seja C_f um conjunto separador de gêmeos que conecta os blocos geminianos folha $G_{m'}, \dots, G_{r'}$ ao grafo G' . Como cada bloco geminiano folha contém exatamente um vértice de V_k , tomemos então os vértices $v_{p'}$ e $v_{q'}$ de V_k , tal que $v_{p'}$ pertence ao bloco geminiano $G_{p'}$ e $v_{q'}$ pertence ao bloco $G_{q'}$.

Assim, todos os vértices do conjunto separador de gêmeos C_f pertencem a $S_{p'}$ pois estes pertencem aos caminhos mínimos entre o vértice $v_{q'}$ e os demais vértices de V_k que não estão em $G_{q'}$. Analogamente, os vértices de C_f também pertencem a $S_{m'}$, e como pertencem aos demais conjuntos convexos de \mathcal{C}_G , então $V(C_f)$ está contido no núcleo, uma contradição.

Caso 2.3: Para todo conjunto separador de gêmeos que conecta algum bloco geminiano folha ao grafo G' , este bloco folha é único.

Temos então em G' que todo bloco geminiano folha contém apenas um único vértice de V_k , e cada um dos separadores de gêmeos que conecta algum bloco folha ao grafo G' , esse bloco é único.

Desse modo, excluiremos de G' todos vértices que estão nos blocos geminianos folha que não estão em conjuntos separadores de gêmeos. Como, neste caso, a quantidade de conjuntos separadores que conectam blocos geminianos folha ao grafo é igual a quantidade de blocos geminianos folha, tomaremos, sem perda de generalidade, a rotulação para os conjuntos separadores correspondente a dos respectivos blocos geminianos folha que este conecta, ou seja, o conjunto separador $C_{j'}$ conecta o bloco geminiano $G_{j'}$ ao grafo G' . Seja $D = \bigcup_{j'=1}^{\bar{\alpha}} V(G_{j'} \setminus C_{j'})$, para algum $\bar{\alpha}$, tal que $\bar{\alpha} \leq \alpha$, onde cada $G_{j'}$ é um bloco geminiano folha de G' e $C_{j'}$ o conjunto separador de gêmeos que o conecta a G' , construindo assim o grafo G'' .

Com efeito, tomaremos os conjuntos $\bar{S}_i = S_i \setminus D$. Claramente tais conjuntos \bar{S}_i são convexos em G'' , pois todo par de vértices geminianos entre si são vizinhos e têm vizinhança comum em G'' . Formam também uma família $(k-1)$ -intersectante, pois de cada bloco geminiano folha excluído havia apenas um vértice de V_k e para todo vértice w no conjunto separador de gêmeos pertencente ao conjunto S_i também pertence ao conjunto \bar{S}_i . Pelo Lema 4.7, tal família tem o núcleo vazio (também porque $\bar{S}_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$), ou seja, se $\mathcal{C}_{G''}$ tivesse núcleo não vazio, \mathcal{C}_G também teria. Assim construído, temos então que $h(G'') = h(G') = h(G)$.

Como o grafo G é finito, repetindo o mesmo argumento num número finito de vezes, ou ocorrerá um dos casos analisados anteriormente durante a demonstração, ou então reduziremos o grafo G original a um único bloco geminiano onde existirá uma família de conjuntos convexos $\mathcal{C}_{G_z} = \{S_{z,1}, S_{z,2}, \dots, S_{z,k-1}, S_{z,k}\}$, $(k-1)$ -

intersectante, com o núcleo vazio, o que implica G_z não ser $(k - 1)$ -Helly, ou seja, $h(G_z) \geq k$, uma contradição, pois temos, por hipótese, que $h(G_p) \geq h(G_j)$, para $j = 1, 2, \dots, \alpha$; e que G_p é $(k - 1)$ -Helly, ou seja, $h(G_p) \leq k - 1$.

Logo existe um bloco geminiano em G cujo número de Helly é maior ou igual ao de G . Como temos que $k = h(G) \geq h(G_p) \geq h(G_j)$, para $j = 1, 2, \dots, \alpha$; então segue que ao menos um bloco geminiano herdará o valor do parâmetro de G , ou seja, $h(G) = h(G_p)$.

Logo, $h(G) = \max\{h(G_1), h(G_2), \dots, h(G_\alpha)\}$.

□

Na Figura 4.7, o grafo é decomposto em dois blocos através do conjunto separador de gêmeos formado pelos vértices **c** e **g**, onde cada um dos blocos resultantes possui um vértice simplicial restrito, o vértice **a** em um bloco, e o vértice **e** no outro bloco, podemos então aplicar o Teorema 4.5 para eliminarmos esses vértices, e restando então duas cliques de tamanho quatro, o que nos fornece, pelo Teorema 3.3, o número de Helly é igual a quatro.

Poderíamos aplicar o Teorema 4.8 também no segundo passo, uma vez que o vértice **b** e o vértice **h** formam um conjunto separador de gêmeos no primeiro bloco resultante da primeira decomposição, e o vértice **d** e o vértice **f** formam um conjunto separador de gêmeos no segundo bloco. Em tal caso, teríamos nessa segunda decomposição dois blocos resultantes, um grafo completo K_3 e um grafo completo K_4 , o que implicaria que o número de Helly do grafo seria igual a quatro, confirmando o resultado obtido através da estratégia de eliminar os vértices simpliciais restritos.

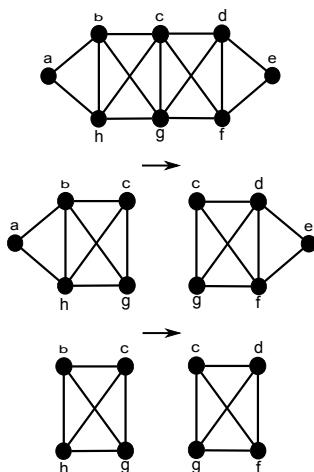


Figura 4.7: Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.8 e 4.5

Na Figura 4.8 temos um grafo em que existe um conjunto separador de gêmeos formado pelos vértices **d** e **g**. Ao aplicarmos o Teorema 4.8, o grafo se decompõe

em quatro blocos, sendo dois blocos geminianos, a saber as duas cliques de tamanho quatro, e outros dois blocos em que aparecem vértices simpliciais restritos, o vértice i e o vértice l . Ao serem eliminados tais vértices simpliciais restritos, obtemos o número de Helly para este grafo igual a quatro, pois temos quatro cliques de tamanho quatro.

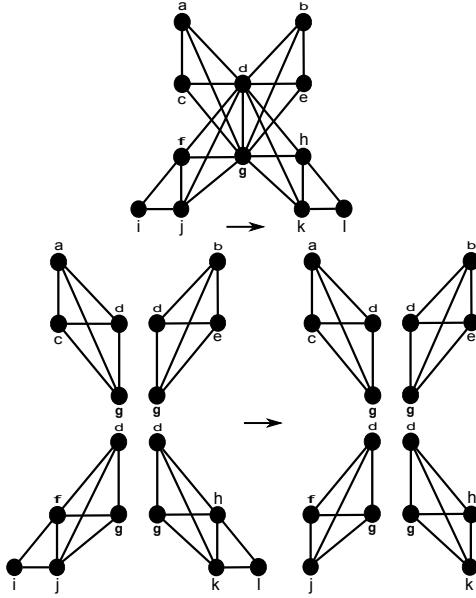


Figura 4.8: Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.8 e 4.5

É interessante ressaltar que nesse exemplo também poderíamos usar outra estratégia para resolver o valor do parâmetro do grafo original. É fácil visualizar que existem dois blocos não geminianos após a primeira decomposição, uma vez que o vértice f e o vértice j formam também um conjunto separador de gêmeos em um dos blocos, e analogamente o vértice h e o vértice k também formam um conjunto separador de gêmeos em outro bloco.

Desse modo, poderíamos aplicar nestes dois blocos o Teorema 4.8 e, obteríamos então outras duas cliques de tamanho quatro, ou seja, pelo Teorema 3.3 o número de Helly deste grafo é igual a quatro. Poderíamos também aplicar o Teorema 4.8 em todos os separadores de uma única vez decompondo o grafo em cliques de tamanho três e de tamanho quatro.

4.3.1 Grafos não biconexos

Nesta subseção apresentaremos um corolário do Teorema 4.8 bastante útil que possibilitará a decomposição de grafos não biconexos em componentes biconexas. Quando o conjunto separador de gêmeos se reduz a um único vértice, tal conjunto é chamado simplesmente de articulação e os blocos também são chamados componentes biconexas.

A partir da decomposição destes grafos não biconexos por essas articulações, da mesma forma que ocorre com o teorema do conjunto separador de gêmeos, o resultado do número de Helly será o maior valor encontrado para o parâmetro entre os blocos resultantes, ou seja, o esforço de calcular o número de Helly do grafo original pode ser facilitado por se trabalhar apenas com subgrafos do grafo original.

Corolário 4.9 (Decomposição de grafos não biconexos) *Dado um grafo G não biconexo e B_1, B_2, \dots, B_p suas componentes biconexas. Então $h(G) = \max\{h(B_1), h(B_2), \dots, h(B_p)\}$.*

A demonstração deste corolário é análoga a do Teorema 4.8, onde as componentes biconexas, ou blocos, são os chamados blocos geminianos do grafo G e as articulações são os conjuntos separadores de gêmeos.

Como consequência do Corolário 4.9, podemos decompor um grafo que não seja biconexo em blocos biconexos pelas suas articulações e, em alguns casos, tal divisão nos permite calcular de modo mais fácil o número de Helly de cada componente biconexa, ou se utilizando de algum teorema já visto, ou quando da divisão, o bloco é um grafo cuja classe já temos o resultado para o valor do parâmetro.

O Corolário 4.9 também nos fornece resultado para a classe de grafos bloco. Um grafo G é chamado de *bloco* quando toda componente biconexa em G é uma clique.

Corolário 4.10 *Seja G um grafo bloco. Então $h(G) = \omega(G)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo bloco.

Decompondo G por suas articulações, temos que seus blocos biconexos resultantes da decomposição são grafos completos. Assim, o número de Helly é o maior resultado para o parâmetro encontrado nos grafos completos, que por sua vez, são cliques maximais de G . Então, como o tamanho da clique máxima de um grafo é um limite inferior, pelo Teorema 4.8, o número de Helly de G é igual ao tamanho da maior clique maximal do grafo.

Logo, $h(G) = \omega(G)$.

□

Na Figura 4.9, temos o grafo G não biconexo e, ao decompormos o grafo em componentes biconexas temos o bloco B_1 , grafo completo de tamanho quatro, o bloco B_2 , grafo completo de tamanho dois e o bloco B_3 , grafo completo de tamanho quatro. O número de Helly já é conhecido para cada um dos blocos por resultados anteriores, ou seja, temos que $h(B_1) = 4$, $h(B_2) = 2$ e $h(B_3) = 4$, desse modo, pelo Corolário 4.9, o número de Helly de G é igual ao $\max\{4, 2, 4\}$, ou seja, é igual a quatro.

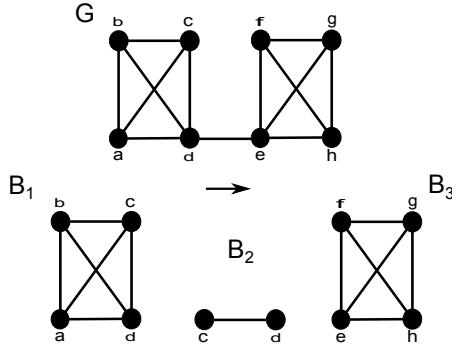


Figura 4.9: Grafo resolvido pela aplicação do Corolário 4.9

Na Figura 4.10, temos o grafo G não biconexo e, ao decompormos o grafo em componentes biconexas temos o bloco B_1 , que possui dois vértices simpliciais restritos, a saber, os vértices a e d , e o bloco B_2 , um ciclo de tamanho seis. Como o bloco B_1 possui vértices simpliciais restritos, pelo Teorema 4.5 podemos eliminá-los. Desse modo o número de Helly também é conhecido para cada um dos blocos resultantes. Assim, temos que $h(B_1) = 4$ e $h(B_2) = 3$. A aplicação direta do Corolário 4.9 nos fornece o número de Helly do grafo G igual a quatro.

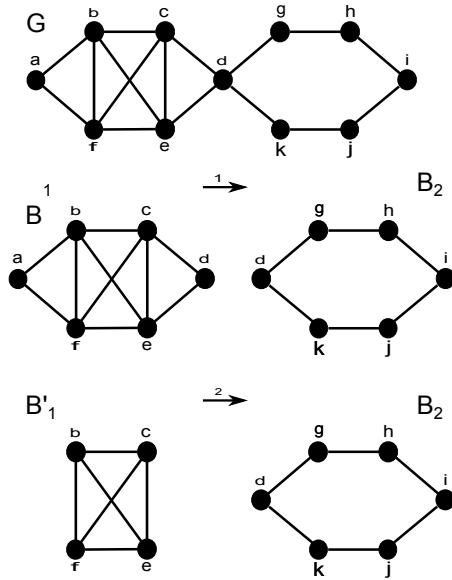


Figura 4.10: Grafo resolvido pela aplicação do Teorema 4.9 e do Corolário 4.5

4.4 Grafos prisma generalizados

Um grafo G é chamado de *prisma generalizado* quando é o resultado do produto cartesiano efetuado entre um grafo G' qualquer e um grafo caminho P_m . Assim, cada uma das m cópias de G' , a saber $G_1, G_2, G_3, \dots, G_m$, chamaremos de *base* de G , ou seja, o grafo prisma generalizado possui m bases isomórficas. Chamaremos de

pilar um subgrafo caminho P_m de G , tal que para todo par de vértices distintos de P_m , tais vértices pertencem a bases distintas de G .

Apresentaremos um teorema que permitirá calcular o número de Helly de qualquer grafo prisma generalizado, desde que se saiba calcular o valor do parâmetro para qualquer uma de suas m bases G_α . Em outras palavras, mostraremos que o número de Helly de um grafo prisma generalizado é exatamente igual ao de qualquer uma de suas m bases.

Ao contrário do grafo prisma, não é possível determinar o valor do parâmetro para todos os grafos prisma generalizados, uma vez que este depende do valor encontrado em qualquer uma de suas bases, que pode ser um grafo qualquer, desde que este seja conexo e não trivial. Caso cada base fosse o grafo trivial, então o grafo prisma generalizado seria um grafo árvore, caso já estudado na seção 3.1.1.

Teorema 4.11 (Grafos prisma generalizados) *Seja G um grafo prisma generalizado e G_p uma de suas bases. Então $h(G) = h(G_p)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo prisma generalizado e G_1, G_2, \dots, G_m suas bases, assim ordenadas, formadas pelos vértices $\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,l}\}$, $\{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,l}\}$, \dots , $\{v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,l}\}$, respectivamente, ou seja, $v_{\alpha,\beta} \in G_\alpha$ e $|V(G_\alpha)| = l$. Assim, G_1 e G_m são as bases extremas do grafo G .

Seja $\mathcal{M}_{G_\alpha} = \{S_{G_\alpha,1}, S_{G_\alpha,2}, \dots, S_{G_\alpha,t}\}$ o conjunto de todos os conjuntos convexos do grafo G na base α , para $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Como a base G_r é isomorfa a G_s , temos que $\mathcal{M}_{G_r} \cong \mathcal{M}_{G_s}$, o que implica que $|\mathcal{M}_{G_r}| = |\mathcal{M}_{G_s}|$, para $1 \leq r < s \leq m$.

Claramente todo conjunto convexo contendo vértices de mais de uma base será um subprisma generalizado de G , uma vez que, caso o conjunto convexo contenha os vértices $v_{1,1}, v_{2,4}, v_{3,5}$, conterá obrigatoriamente também os vértices $v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,1}, v_{2,5}, v_{3,1}, v_{3,4}$. Além disso, é fácil ver que o conjunto dos vértices que compõem as bases de tais conjuntos convexos subprismas também serão convexos no grafo G .

Seja G_p uma das bases do grafo G .

Seja $h(G) = k$ e, supondo por contradição, $h(G_p) \neq k$.

Como $\mathcal{M}_{G_p} \subseteq \mathcal{M}_G$, pelo Lema 3.5, temos que $h(G_p) \leq h(G)$, ou seja, basta analisarmos o caso em que $h(G_p) < k$. Assim, temos que $h(G_p) \leq k - 1$, ou seja, G_p é $(k - 1)$ -Helly. Assim, toda família \mathcal{C}_{G_p} de conjuntos convexos em G_p , $(k - 1)$ -intersectante, o núcleo é não vazio. Como a base G_p é isomorfa a qualquer outra base G_α de G , para $\alpha = 1, 2, \dots, m$; temos que toda família \mathcal{C}_{G_α} de conjuntos convexos em G_α , $(k - 1)$ -intersectante, também possui o núcleo não vazio.

Por outro lado, pelo Lema 2.5, existe uma família \mathcal{C}_G com k conjuntos convexos em G , $(k - 1)$ -intersectante, com núcleo vazio, pois o grafo G é k -Helly.

Como a família \mathcal{C}_G de conjuntos convexos de G é $(k - 1)$ -intersectante com o núcleo vazio, então, pelo Teorema 2.4, $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} S_1 &\supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_1\}, S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_2\}, \\ S_3 &\supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_3\}, \dots, S_{k-1} \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\supseteq \{v_{k-1}\}, \\ S_k &\supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}\} \not\supseteq \{v_k\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Seja $V_k = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$.

Claramente, ao menos um dos conjuntos convexos em \mathcal{C}_G conterá vértices de mais de uma base, ou seja, serão subprismas generalizados.

Vamos mostrar que não ocorre de termos dois vértices de V_k num mesmo pilar que denotaremos por π . Sem perda de generalidade, tomemos v_1 e v_2 vértices de V_k num mesmo pilar π . Então temos os casos:

Caso 1: $V_k \cap \pi = \{v_1, v_2\}$.

Assim, temos os subcasos:

Caso 1.1: Existe um vértice de V_k que não está numa base intermediária dos vértices v_1 e v_2 .

Vamos considerar a ordenação das bases definida anteriormente. Sem perda de generalidade, tomemos $v_3 \in V_k$ tal que $v_1 \in G_a$, $v_2 \in G_b$ e $v_3 \in G_c$, onde $a < b < c$. Assim, $v_2 \in S_2$, pois $v_2 \in I(v_1, v_3)$, o que não ocorre. Analogamente, se $v_3 \in G_a$, $v_1 \in G_b$ e $v_2 \in G_c$, teríamos que $v_1 \in I(v_2, v_3)$, uma contradição.

Caso 1.2: Todo vértice de V_k está numa base intermediária às de v_1 e de v_2 .

Sem perda de generalidade, tomemos $v_1 \in V(G_a)$, $v_2 \in V(G_b)$ e $v_q \in V(G_c)$, para $q = 3, 4, \dots, k$; onde $a \leq c \leq b$. Assim, existe $v_j \in \pi \cap G_c$, e tal vértice pertence ao núcleo de \mathcal{C}_G , pois $v_j \in I(v_1, v_2) \cap I(v_1, v_q) \cap I(v_2, v_q)$, uma contradição.

Caso 2: Existe ao menos um vértice do conjunto $V_k \setminus \{v_1, v_2\}$ no mesmo pilar π , tal que $\pi \supseteq \{v_1, v_2\}$.

Assim, existem em π dois vértices extremos e ao menos um vértice de V_k intermediário entre estes vértices em π . Sem perda de generalidade, tomemos v_1 e v_2 os vértices extremos e v_3 um vértice intermediário. Dessa forma, $v_3 \in I(v_1, v_2)$, e assim temos que $v_3 \in S_3$, o que implica em $\bigcap_{i=1}^k S_i \neq \emptyset$, uma contradição.

Logo não ocorre dois vértices de V_k num mesmo pilar π , assim, tomaremos $v_1 \in \pi_1, v_2 \in \pi_2, \dots, v_k \in \pi_k$, onde $\pi_i \neq \pi_j$ se, e somente se, $i \neq j$.

Dado um conjunto convexo S_i em um grafo prisma generalizado G , chamamos de *topo* de S_i , denotado por $Tp(S_i)$, o maior índice das bases de G com interseção não vazia com S_i , ou seja, $Tp(S_i) = \max\{\theta \mid S_i \cap G_\theta \neq \emptyset\}$.

Como todo conjunto da família \mathcal{C}_G é um subprisma generalizado e \mathcal{C}_G é uma família $(k - 1)$ -intersectante, tomaremos a base G_z tal que $z = \min\{Tp(S_1), Tp(S_2), \dots, Tp(S_k)\}$. Assim, $V(G_z) \cap S_i \neq \emptyset$.

Com efeito, para cada vértice v_i de V_k , existe um vértice w_i que será a projeção

de v_i na base G_z por π_i , ou seja, em $G_z \cap \pi_i$. Eventualmente, se para algum \bar{z} , tivermos $v_{\bar{z}} \in G_z$, então $v_{\bar{z}} = w_{\bar{z}}$. Seja $W_k = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$.

Assim, a base de cada conjunto convexo S_i , pertencente à \mathcal{C}_G , corresponde a um conjunto em G_z (sub-base de G_z) contendo pelo menos $k - 1$ dos vértices de W_k .

Tomemos $\mathcal{C}_{G_z} = \{S_{z,1}, \dots, S_{z,k}\}$ tal que $S_{z,i} = G_z \cap S_i$, para $i = 1, \dots, k$.

Como $S_{z,i} = G_z \cap S_i$, e S_i e G_z são conjuntos convexos em G e toda convexidade é fechada para interseção, temos que os conjuntos de \mathcal{C}_{G_z} são geodeticamente convexos.

Afirmamos que \mathcal{C}_{G_z} é uma família $(k - 1)$ -intersectante, pois para todo $S_{z,i}$, claramente temos que $S_{z,i} \supseteq \{w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_k\}$. Também afirmamos que \mathcal{C}_{G_z} possui o núcleo vazio. Como $S_{z,i} \subseteq S_i$, se existir um vértice u no núcleo de \mathcal{C}_{G_z} , então u pertencerá ao núcleo de \mathcal{C}_G , o que não ocorre.

Assim, temos que G_z não é $(k - 1)$ -Helly, ou seja, $h(G_z) \geq k$. Assim, $k \leq h(G_z) \leq h(G) = k$. Como a base G_z é isomorfa a toda base G_p , segue o resultado.

Logo, $h(G) = h(G_p)$.

□

Este resultado mostra que para calcular o número de Helly de um grafo prisma generalizado basta calcular o valor do parâmetro em qualquer uma de suas m bases e corrobora o resultado que obtivemos no capítulo anterior para grafos prisma onde o valor do parâmetro foi igual a três. Como grafos prisma possuem ciclos C_n como base, se $n \neq 4$, então o número de Helly é igual a três, Seção 3.3.3, e igual a dois para grafos prisma com base C_4 , o mesmo resultado obtido para grades de dimensão igual a três, Seção 3.3.2.

Na Figura 4.11 temos um grafo prisma generalizado cuja base G_1 é formada pelos vértices a, b, c e d . O número de Helly deste grafo é igual a três pois sua base G_1 é um grafo diamante, ou seja, aplicamos nele o Teorema 4.5 para eliminar o vértice simplicial restrito d (ou b) e obtemos uma clique de tamanho três, como o tamanho de cliques maximais são limitantes inferiores naturais do número de Helly em qualquer grafo, então temos que o valor do parâmetro para o grafo G é igual a três.

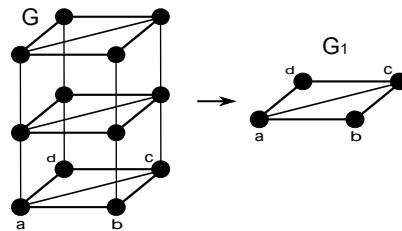


Figura 4.11: Grafo prisma generalizado

4.5 Eliminando subgrafos prisma generalizados

Nesta seção apresentaremos um teorema que permitirá eliminar de um grafo G qualquer subgrafo induzido prisma generalizado Pr , sob algumas condições, para calcular o número de Helly no grafo original através do valor do parâmetro do grafo resultante.

É sempre interessante poder diminuir o grafo ao qual desejamos calcular o número de Helly, uma vez que diminui a quantidade de conjuntos convexos, além do que, quanto menor o grafo, maior a possibilidade de recair numa classe que já tenhamos estudado, ou recair num grafo em que se possa aplicar outros teoremas apresentados neste capítulo.

Dado um grafo G , para ser possível aplicar este teorema será necessário que se tenha um subgrafo induzido prisma generalizado Pr e um conjunto separador que desconectará o subgrafo desde que tal separador seja, ao mesmo tempo, um conjunto convexo do grafo G e uma das bases do subgrafo prisma generalizado H .

Para facilitar o entendimento na demonstração, eventualmente denotaremos grafos prisma generalizados também como a união de suas m bases, ou seja, $Pr = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$.

Teorema 4.12 (Eliminando subgrafos prisma generalizados) *Seja G um grafo tal que $G = G' \cup Pr$, onde G' e Pr são subgrafos induzidos de G , e $Pr = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$ um grafo prisma generalizado. Se $G_p = G' \cap Pr$, $1 \leq p \leq m$, é um conjunto convexo em G , então $h(G) = h(G')$.*

Demonstração.

Seja G um grafo tal que $G = G' \cup Pr$, onde G' e Pr são subgrafos induzidos de G e Pr um grafo prisma generalizado.

Supondo $G_p = G' \cap Pr$ um conjunto convexo em G , para algum p , tal que $1 \leq p \leq m$.

Seja $h(G) = k$ e, supondo por contradição, que $h(G') \neq k$.

Como G' é um subgrafo induzido e também um conjunto convexo em G , pelo Teorema 3.6, temos que $h(G') \leq h(G) = k$, ou seja, basta analisar $h(G') < h(G)$, assim, $h(G') \leq k - 1$, ou ainda, o grafo G' é $(k - 1)$ -Helly.

Como $h(G) = k$, temos que o grafo G não é $(k - 1)$ -Helly, ou seja, pelo Lema 2.5, existe uma família $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, onde $S_i = S_i \cup S_{Pr,i}$, $i = 1, 2, \dots, k$; de k conjuntos convexos, $(k - 1)$ -intersectante, com núcleo vazio.

Como a família \mathcal{C}_G de conjuntos convexos de G é $(k - 1)$ -intersectante com o núcleo vazio, então, pelo Teorema 2.4, temos que $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ é tal que:

$$S_1 \supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_1\}, S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_2\}, \\ S_3 \supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_3\}, \dots, S_{k-1} \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\supseteq \{v_{k-1}\},$$

$$S_k \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}\} \not\supseteq \{v_k\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset.$$

Seja $V_k = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$.

Ao menos um conjunto convexo de \mathcal{C}_G possui interseção não vazia com $Pr \setminus G_p$, ou seja, $V_k \cap (Pr \setminus G_p) \neq \emptyset$, caso contrário \mathcal{C}_G seria uma família de conjuntos convexos em G' , contrariando o fato de que G' é $(k-1)$ -Helly.

Temos também que, para ao menos um conjunto convexo de \mathcal{C}_G possui interseção não vazia com $G' \setminus G_p$, ou seja, $V_k \cap (G' \setminus G_p) \neq \emptyset$, caso contrário todos os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G estariam contidos em Pr , o que, pelo Teorema 4.11 implicaria existir na base G_p , e consequentemente em G' , uma família de conjuntos convexos $(k-1)$ -intersectante com núcleo vazio, o que contrariaria o fato de que G' é $(k-1)$ -Helly.

Sendo assim, existe ao menos um vértice do conjunto V_k em $Pr \setminus G_p$ e ao menos um vértice de V_k em $G' \setminus G_p$, o que implica que, ao menos $k-1$ conjuntos convexos de \mathcal{C}_G possuem interseção não vazia com $Pr \setminus G_p$, e $k-1$ conjuntos convexos possuem interseção não vazia com $G' \setminus G_p$, pois cada um dos dois vértices pertence a $k-1$ conjuntos convexos de \mathcal{C}_G . Sem perda de generalidade, tomemos v_1 em $G' \setminus G_p$ e existirá ao menos um vértice v_j em $Pr \setminus G_p$, onde $2 \leq j \leq k$.

Como visto na demonstração do Teorema 4.11, não ocorre de termos dois vértices do conjunto V_k no mesmo pilar π contido no subgrafo prisma generalizado Pr .

Com efeito, para cada vértice $v_j \in V_k$ em Pr , existe em G_p um vértice w_j equivalente no mesmo pilar π_j (projeção em G_p de v_j por π_j), pilar este que contém o caminho mínimo entre w_j e v_j .

Como $v_1 \in G' \setminus G_p$ e $S_1 \not\supseteq \{v_1\}$, então S_1 pode ter ou não interseção não vazia com G' . Assim, temos dois casos:

Caso 1: $S_1 \cap G' \neq \emptyset$.

Assim, tomemos em G' uma família de conjuntos $\bar{\mathcal{C}}_{G'}$ tal que cada conjunto \bar{S}_i é da forma $\bar{S}_i = S_i \cap G'$, para $i = 1, \dots, k$. Em outras palavras, de cada conjunto convexo de \mathcal{C}_G retiramos de S_i somente os vértices pertencentes a $Pr \setminus G_p$, se existirem. Como S_i e G' são conjuntos convexos em G , então cada \bar{S}_i é um conjunto convexo, pois toda convexidade é fechada para interseção.

Como para cada i , $S_i \cap Pr$ é um subprisma generalizado e $S_1 \cap G' \neq \emptyset$, então $w_j \in \bar{S}_i$, para $i \neq j$, ou seja, $\bar{\mathcal{C}}_{G'} = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k\}$ é tal que:

$$\bar{S}_1 \supseteq \{w_2, w_3, \dots, w_k\}, \bar{S}_2 \supseteq \{w_1, w_3, \dots, w_k\}, \bar{S}_3 \supseteq \{w_1, w_2, w_4, \dots, w_k\}, \dots, \bar{S}_{k-1} \supseteq \{w_1, w_2, \dots, w_{k-2}, w_k\}, \bar{S}_k \supseteq \{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}.$$

Assim, a família $\bar{\mathcal{C}}_{G'}$ é $(k-1)$ -intersectante.

Como $S_1 \cap G' \neq \emptyset$, temos que $\bar{S}_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$; então se a família \mathcal{C}_G possui núcleo vazio em G , então a família $\bar{\mathcal{C}}_{G'}$ também possuirá o núcleo vazio em G' , ou seja, o grafo G' não é $(k-1)$ -Helly, uma contradição.

Caso 2: $S_1 \cap G' = \emptyset$.

Temos então $S_1 \subseteq G_q \cup G_{q+1} \cup \dots \cup G_{q+l}$, sem perda de generalidade, de modo que $p < q \leq q+l \leq m$. Assim, G_q é a base de Pr de menor índice com $G_q \cap S_1 \neq \emptyset$, isso implica que existe um vértice v_j de V_k na base G_q . Assim, existe um pilar π_1 exclusivo para v_1 , tal que $S_{i'} \cap \pi_1 \neq \emptyset$, para $i' = 2, \dots, k$; caso contrário, existiria um vértice $v_{j'} \in (V_k \cap \pi_1)$ e um vértice $w_{j'} \in G_q$, tal que $w_{j'} \in I(v_1, v_{j'}) \cap I(v_{j'}, v_j) \cap I(v_1, v_j)$, o que implicaria $w_{j'}$ pertencer ao núcleo, uma contradição.

Tomemos em G a família de conjuntos $\mathcal{C}'_{G_q} = \{S'_1, \dots, S'_k\}$ onde $S'_i = S_i \cap G_q$. Seja $w_1 = G_q \cap \pi_1$ (o que implica que $w_1 \notin S_1$) e w_j a projeção de $v_j \in V_k$ em G_q por π_j , para $j = 2, \dots, k$. Assim, cada conjunto S'_i é um convexo em G_q , pois é interseção de conjuntos convexos e toda convexidade é fechada por interseção, e \mathcal{C}'_{G_q} é $(k-1)$ -intersectante, pois $S'_i \supseteq \{w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_k\}$, para $i = 1, 2, \dots, k$; e como cada $S'_i \subseteq S_i$, então como o núcleo de \mathcal{C}_G é vazio, \mathcal{C}'_G também possui o núcleo vazio.

Como a base G_p é isomorfa à G_q e $V(G_p)$ é um conjunto convexo em G' , existe em G_p (e consequentemente em G'), uma família em \mathcal{C}'_{G_p} de conjuntos convexos, $(k-1)$ -intersectante com núcleo vazio. Então o subgrafo G' não é $(k-1)$ -Helly, uma contradição.

Logo $h(G) = h(G')$.

□

Na Figura 4.12, temos um grafo G que possui subgrafos prisma generalizados e possuem bases conjuntos separadores. Aplicamos o Teorema 4.12 inicialmente nos subgrafos induzidos pelos vértices e, f, g, h e $a, b, c, d, o, p, r, s, t, u, v$, depois aplicamos o mesmo teorema nos subgrafos induzidos pelos vértices c, d, e, f, k, l, m, n , e posteriormente no grafo resultante aplicamos o Teorema 4.5, em sequência, nos vértices simpliciais restritos (em ordem de eliminação) l, j, k e i , obtemos um grafo completo K_4 , cujo número de Helly é igual a quatro, logo o valor do parâmetro para o grafo G também será igual a quatro.

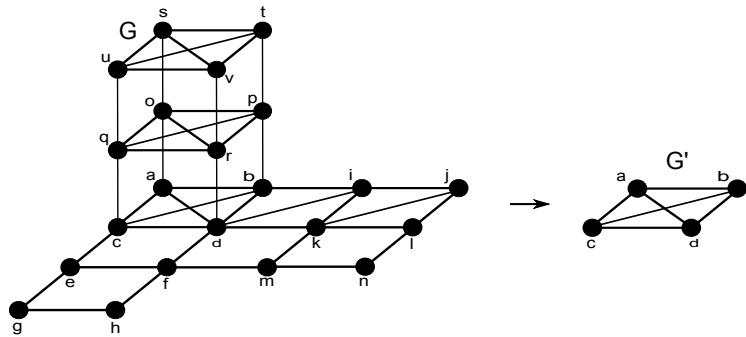


Figura 4.12: Grafo resolvido pela aplicação do Teorema 4.5, 4.11 e 4.12

A partir dos Teoremas 4.11 e 4.12, percebe-se facilmente que independente da

característica de suas bases num grafo prisma generalizado, o número de Helly é herdado por suas bases, ou seja, basta olhar para uma de suas bases para saber o valor do parâmetro. Tais resultados inspiram a possibilidade de se decompor um grafo por conjuntos separadores que sejam subgrafos prisma generalizados com uma ou mais bases. O caso com uma única base será visto em seguida sob o nome de decomposição por conjuntos separadores geodélicos.

4.6 Decomposição por separadores geodélicos

Definiremos por *conjunto separador geodélico* o subconjunto C de vértices de um grafo G tal que C é um conjunto separador minimal e também um conjunto geometricamente convexo em G .

Lema 4.13 *Seja G um grafo, C um conjunto separador geodélico de G , e G_1, \dots, G_t as componentes conexas resultantes da decomposição de G por C . Então $V(G_1), \dots, V(G_t)$ são conjuntos geometricamente convexos em G .*

Demonstração.

Seja G um grafo, C um conjunto separador geodélico de G e G_i , $i = 1, 2, \dots, t$; suas componentes conexas resultantes desta decomposição.

Supondo, por contradição, que existe ao menos uma componente conexa G_l , tal que $V(G_l)$ não é um conjunto geometricamente convexo de G .

Assim, existem em G_l dois vértices v_1 e v_2 tal que $I(v_1, v_2) \not\subseteq G_l$, ou seja, existe ao menos um caminho mínimo entre v_1 e v_2 que contém um vértice w , tal que $w \notin G_l$. Sem perda de generalidade, tomemos o vértice w pertencente a componente conexa $G_j \setminus C$, para $j \neq l$, ou seja, o conjunto C separa o bloco geodélico G_j de G_l .

Como $w \notin G_l$, então existe em $C \cap I(v_1, v_2)$ vértices w_1 e w_2 , tal que $w_1 \in I(v_1, w)$, e $w_2 \in I(w, v_2)$. Como existe um caminho mínimo entre v_1 e v_2 contendo w , isso implica que $w \in I(w_1, w_2)$. Como w não pertence a C , então C não é um conjunto geometricamente convexo, mas o conjunto C é, por hipótese, um separador geodélico, uma contradição. Assim, $V(G_l)$ é um conjunto convexo em G .

Logo, $V(G_1), \dots, V(G_t)$ são conjuntos convexos em G .

□

Chamaremos de *bloco geodélico* o subgrafo induzido de um grafo G que é um conjunto geometricamente convexo de G resultante da decomposição de G por um conjunto separador geodélico.

Dois blocos geodélicos de um grafo G serão chamados de *blocos geodélicos adjacentes* caso contenham o mesmo conjunto separador geodélico C após a decom-

posição de G por C , e um bloco geodético é dito *atômico* quando não há conjunto separador geodético no bloco.

Teorema 4.14 (Decomposição por conjuntos separadores geodéticos)

Seja G um grafo e G_1, G_2, \dots, G_l os blocos geodéticos atômicos de G . Então $h(G) = \max\{h(G_1), h(G_2), \dots, h(G_l)\}$.

Demonstração.

Seja G um grafo, C um conjunto separador geodético de G , e G'_1, G'_2, \dots, G'_t os blocos geodéticos resultantes da decomposição de G por C .

Pelo Lema 4.13, temos que cada bloco geodético G'_{α} de G , $V(G'_{\alpha})$ é um conjunto geometricamente convexo em G , então pelo Teorema 3.6 segue que $h(G'_{\alpha}) \leq h(G)$, para $\alpha = 1, 2, \dots, t$.

Seja G'_p um bloco geodético de G , para algum p , onde $1 \leq p \leq t$, tal que $h(G'_p) \geq h(G'_{\alpha})$, para $\alpha = 1, 2, \dots, t$; e seja \mathcal{M}_G a família de todos os conjuntos convexos do grafo G .

Supondo, por contradição, que $k = h(G) \neq h(G'_p)$. Como $\mathcal{M}_{G'_p} \subseteq \mathcal{M}_G$, pelo Lema 3.5 temos que $h(G'_p) \leq h(G)$, basta então analisar o caso $h(G'_p) < h(G) = k$. Temos então que G'_p é $(k - 1)$ -Helly.

Por outro lado, como o grafo G não é $(k - 1)$ -Helly, então temos pelo Lema 2.5 que existe em G uma família \mathcal{C}_G com k conjuntos convexos, $(k - 1)$ -intersectante, com núcleo vazio, ou seja, pelo Teorema 2.4, $\mathcal{C}_G = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ é tal que:

$$\begin{aligned} S_1 &\supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_1\}, S_2 \supseteq \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_2\}, \\ S_3 &\supseteq \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_3\}, \dots, S_{k-1} \supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\supseteq \{v_{k-1}\}, \\ S_k &\supseteq \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}\} \not\supseteq \{v_k\} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k S_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Seja o conjunto $V_k = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$.

Seja H o subgrafo induzido de G construído da seguinte forma: todo bloco geodético G'_{α} deve ser removido se $G'_{\alpha} \setminus C$ não possui vértices de V_k , onde C é o conjunto separador geodético que decompõe o grafo G em G'_1, G'_2, \dots, G'_t . Assim construído, o conjunto separador geodético C decompõe H em H_1, H_2, \dots, H_r , para $r \leq t$, e todo subgrafo induzido $H_j \setminus C$ de H contém ao menos um vértice do conjunto V_k , para $j = 1, 2, \dots, r$.

Temos que H é um subgrafo induzido e $V(H)$ um conjunto convexo em G , e ainda pelo Lema 4.13, temos também que os conjuntos da família \mathcal{C}_G estão contidos em H , então, pelo Teorema 3.5, segue que $h(H) \leq h(G)$, mas como $h(G) = k$ e H não é $(k - 1)$ -Helly, pois todos os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G estão contidos em H , então $h(H) \geq k$, logo $h(G) = h(H)$.

Existem vértices de V_k em duas ou mais componentes conexas de $H \setminus C$, caso contrário a família \mathcal{C}_G estaria inteiramente contida em algum bloco geodético, o que implicaria tal bloco não ser $(k - 1)$ -Helly.

Como $C \subseteq H_j$, para $j = 1, 2, \dots, r$; temos dois casos:

Caso 1: O separador geodético C não contém nenhum vértice de V_k e decompõe H em apenas dois blocos, sendo que um dos blocos geodéticos contém apenas um vértice de V_k , e um outro bloco geodético contém os demais vértices de V_k .

Temos exatos $k - 1$ conjuntos de \mathcal{C}_G com interseção não vazia com o conjunto separador geodético C . Sem perda de generalidade, tomemos S_1 o conjunto convexo com interseção vazia com C . Assim, temos exatamente $k - 1$ vértices de V_k na mesma componente conexa $H_a \setminus C$ e o vértice v_1 em $H_b \setminus C$, com $a \neq b$.

Os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G são \bar{p} -intersectantes em C , tal que $k - 2 \leq \bar{p} \leq k - 1$, pois os vértices pertencentes ao conjunto $I(v_1, v_{i'}) \cap C$, para $i' = 2, 3, \dots, k$; pertencem a todos os conjuntos convexos quem contêm $\{v_1, v_{i'}\}$, ou seja, todos os vértices no conjunto separador C que pertencem a algum caminho mínimo entre v_1 e $v_{i'}$ pertencem obrigatoriamente também aos conjuntos convexos \bar{S}_q , para $q = 2, 3, \dots, i' - 1, i' + 1, \dots, k$ ($q \neq 1$ e $q \neq i'$), o que garante que $\bar{p} \geq k - 2$. Obviamente tais conjuntos não são k -intersectantes, pois, por hipótese, o núcleo de \mathcal{C}_G é vazio, ou seja, $\bar{p} \leq k - 1$.

Se os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G forem $(k - 1)$ -intersectantes em C , isso implica que existe um vértice w em C , tal que $w \in S_{i'}$, para $i' = 2, 3, \dots, k$. Tomaremos então a família de conjuntos $\bar{\mathcal{C}}_H = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k\}$, onde $\bar{S}_1 = S_1$ e $\bar{S}_{i'} = S_{i'} \cap V(H_a)$, para $i' = 2, 3, \dots, k$; onde H_a é o bloco geodético que contém $V_k \setminus \{v_1\}$. Tais conjuntos são convexos, pois pelo Lema 4.13, $V(H_a)$ é um conjunto convexo e cada conjunto $S_{i'}$, para $i' = 2, 3, \dots, k$; também são conjuntos convexos, e toda convexidade é fechada para interseção.

Assim, teremos $\bar{S}_1 \supseteq \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{w\}$, $\bar{S}_2 \supseteq \{w, v_3, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_2\}$, $\bar{S}_3 \supseteq \{w, v_2, v_4, \dots, v_k\} \not\supseteq \{v_3\}$, ..., $\bar{S}_{k-1} \supseteq \{w, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_k\} \not\supseteq \{v_{k-1}\}$, $\bar{S}_k \supseteq \{w, v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}\} \not\supseteq \{v_k\}$. Dessa forma, a família $\bar{\mathcal{C}}_H$ será $(k - 1)$ -intersectante, e como $\bar{S}_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$; então se o núcleo de \mathcal{C}_G é vazio, então o núcleo de $\bar{\mathcal{C}}_H$ também será. Como os conjuntos convexos de $\bar{\mathcal{C}}_H$ estão todos contidos no bloco geodético H_a , então existe um bloco geodético que não é $(k - 1)$ -Helly, uma contradição, pois $k = h(G) > h(G'_{|p}) \geq h(H_j)$, para $j = 1, 2, \dots, r$.

Se os conjuntos convexos da família \mathcal{C}_G forem $(k - 2)$ -intersectantes em C , então tomado a família de conjuntos $\bar{\mathcal{C}}_H = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k\}$, onde $\bar{S}_1 = C$ e $\bar{S}_{i'} = S_{i'} \cap V(H_b)$, para $i' = 2, 3, \dots, k$; onde $H_b \supseteq \{v_1\}$. Tais conjuntos são convexos, pois C é um conjunto convexo, por hipótese, e os demais são interseções de conjuntos convexos, e toda convexidade é fechada para interseção.

Os conjuntos convexos da família \mathcal{C}_G com interseção não vazia com o conjunto separador geodético são $(k - 2)$ -intersectantes em C , isso implica que existe ao menos um vértice no núcleo para cada combinação de $k - 2$ conjuntos convexos de \mathcal{C}_G no conjunto separador geodético C que não pertencia ao conjunto convexo S_1 , então,

como $\overline{S}_1 = C$, cada um desses vértices passará a pertencer também ao conjunto \overline{S}_1 , ou seja, pertencerá ao núcleo de toda combinação de $k - 1$ conjuntos convexos em C . Como o vértice $v_1 \in \overline{S}_{i'}$, para $i' = 2, 3, \dots, k$, e $v_1 \notin \overline{S}_1$, então v_1 pertencerá ao núcleo de $\overline{S}_2, \overline{S}_3, \dots, \overline{S}_k$, ou seja, a família $\overline{\mathcal{C}}_H$ é $(k - 1)$ -intersectante.

Supondo que existisse um vértice u no núcleo de $\overline{\mathcal{C}}_H$, então tal vértice pertenceria ao conjunto separador C , porém, isso implicaria que tal vértice u pertenceria também aos demais $k - 1$ conjuntos convexos $\overline{S}_{i'}$, (caso anterior) mas como $\overline{S}_{i'} \subseteq S_{i'}$, a família de conjuntos convexos de \mathcal{C}_G com interseção não vazia com o conjunto separador geodético seria $(k - 1)$ -intersectante em C , mas esta família é $(k - 2)$ -intersectante, por hipótese. Então a família de conjuntos convexos $\overline{\mathcal{C}}_H$ possui o núcleo vazio.

Com efeito, existe então o bloco geodético H_B contendo uma família de conjuntos convexos, $(k - 1)$ -intersectante, com o núcleo vazio, ou seja, existe um bloco geodético que não é $(k - 1)$ -Helly, uma contradição.

Caso 2: Todos os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G possuem interseção não vazia com o conjunto separador geodético C .

Tais conjuntos convexos também serão \bar{p} -intersectantes, para $k - 2 \leq \bar{p} \leq k - 1$, em C .

Caso sejam $(k - 1)$ -intersectantes em C , tomaremos a família de conjuntos $\overline{\mathcal{C}}_H = \{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_k\}$, onde $\overline{S}_i = S_i \cap C$, ou seja, todos os conjuntos serão convexos por serem interseção de conjuntos convexos, serão $(k - 1)$ -intersectantes, por hipótese, e como $\overline{S}_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$, então se o núcleo de \mathcal{C}_G é vazio, o núcleo de $\overline{\mathcal{C}}_H$ também o será. Assim, teremos em C , e em particular, em todos os blocos geodéticos que contêm C , uma família de conjuntos convexos $(k - 1)$ -intersectante com o núcleo vazio, ou seja, tais blocos não são $(k - 1)$ -Helly, uma contradição.

Caso tais conjuntos sejam $(k - 2)$ -intersectantes no conjunto separador C , então existe um único conjunto convexo S_f de \mathcal{C}_G (que não contém o vértice v_f de V_k , com $v_f \in V(H_s)$), tal que o núcleo de $S_1, S_2, \dots, S_{f-1}, S_{f+1}, \dots, S_k$ é vazio, caso contrário essa família seria $(k - 3)$ -intersectante em C .

Assim, tomaremos a família de conjuntos $\overline{\mathcal{C}}_H = \{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_k\}$, onde $\overline{S}_i = S_i \cap V(H_s)$, onde H_s é o bloco geodético que contém o vértice v_f . Cada um dos conjuntos \overline{S}_i serão convexos (interseção de conjuntos geometricamente convexos), e como no conjunto separador C , tais conjuntos são $(k - 2)$ -intersectantes, e como $v_f \in V(H_s)$, e também pertence ao núcleo de $S_1, S_2, \dots, S_{f-1}, S_{f+1}, \dots, S_k$, único núcleo vazio de $k - 1$ conjuntos convexos de \mathcal{C}_G em C , tais conjuntos serão $(k - 1)$ -intersectantes em H_s .

Como $\overline{S}_i \subseteq S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$; se o núcleo de \mathcal{C}_G é vazio, então o núcleo de $\overline{\mathcal{C}}_H$ também será. Assim, existe um bloco geodético em H que não é $(k - 1)$ -Helly, uma contradição.

Como todo bloco geodéxico é um subgrafo induzido do grafo H , e consequentemente de G , e seus conjuntos convexos são também de G , então pelo Teorema 3.6, $h(H_j) \leq h(G) = k$, para $j = 1, 2, \dots, r$, o que também implica que $h(G'_{\alpha}) \leq h(G) = k$, para $\alpha = 1, 2, \dots, t$.

Assim, para toda decomposição de um grafo G por conjuntos separadores geodélicos, haverá ao menos um bloco geodéxico resultante que herdará o número de Helly de G .

Como o grafo G é finito, então ao decompor G em um número finito de vezes, esta decomposição resultará em blocos geodélicos atômicos G_1, G_2, \dots, G_l ; e como todo bloco geodéxico é um limitante inferior para o parâmetro, então existirá um bloco geodéxico atômico que herdará o número de Helly do grafo G .

Logo $h(G) = \max\{h(G_1), h(G_2), \dots, h(G_l)\}$.

□

É natural pensar que uma família de conjuntos convexos \mathcal{C}_G em um grafo G que garanta que $h(G) = k$, ou seja, uma família $(k - 1)$ -intersectante com núcleo vazio, esteja limitada em um bloco geodéxico, pois os conjuntos separadores geodélicos se comportam como um limitador para os conjuntos convexos com interseção não vazia com dois ou mais blocos $G_i \setminus C$.

Assim, para que todos os conjuntos convexos de \mathcal{C}_G tenham interseção não vazia com mais de um bloco $G_i \setminus C$, é necessário que o número de Helly de um conjunto separador C seja maior ou igual a k . Caso $h(C) < h(G)$, teríamos uma família de conjuntos convexos $S_j \cap C$, onde $S_j \in \mathcal{C}_G$, com o núcleo não vazio. Então, \mathcal{C}_G deve ter ao menos um conjunto convexo estritamente contido num dos blocos, contrariando o fato de que todos os conjuntos convexos possuam interseção não vazia com dois ou mais blocos.

Este teorema que permite a decomposição de um grafo por conjuntos separadores geodélicos também nos fornece como corolário o resultado para grafos cordais.

Corolário 4.15 *Seja G um grafo cordal. Então $h(G) = \omega(G)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo cordal.

Numa decomposição por cliques separadoras em grafos cordais, os seus átomos, ou seja, seus subgrafos resultantes sem cliques separadoras, serão sempre grafos completos. Como toda clique separadora é um conjunto separador geodéxico, ao decompor um grafo cordal por suas cliques separadoras, teremos como átomos somente grafos completos [45].

Assim, o número de Helly de um grafo cordal é igual ao valor do maior parâmetro encontrado entre seus átomos resultantes da decomposição, e como todos os seus

átomos são cliques maximais do grafo, o valor do número de Helly será igual ao tamanho da maior clique maximal.

Logo, $h(G) = \omega(G)$.

□

No grafo da Figura 4.13 temos um conjunto separador geodéxico formado pelos vértices b , f e h . Uma vez decomposto por esse conjunto separador, temos que o subgrafo G_1 possui um vértice simplicial restrito, a saber o vértice h , ou seja, ao ser eliminado, resta uma clique de tamanho quatro que é um limitante inferior para o valor do parâmetro, assim, $h(G_1) = 4$.

Já no subgrafo G_2 , temos um vértice universal, o que pelo Teorema 4.1, o número de Helly é igual ao tamanho de sua clique máxima, ou seja, $h(G_2) = 4$.

Em visto disso, pelo Teorema 4.14 o número de Helly do grafo G é igual ao máximo entre os valores encontrados para o parâmetro nos subgrafos G_1 e G_2 , ou seja, $h(G) = 4$.

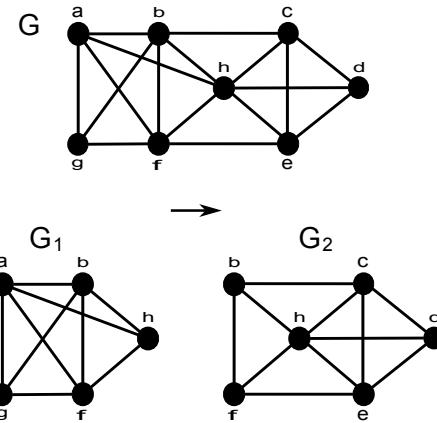


Figura 4.13: Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.14, 4.5 e 4.1

4.6.1 Decomposição por subgrafos prisma generalizados

Definimos por *conjunto separador prisma generalizado* C o subgrafo induzido de um grafo G , tal que C seja um conjunto separador de G e também um prisma generalizado, onde todas as suas bases são conjuntos convexos de G .

Se um grafo G possuir um conjunto separador prisma generalizado, onde todas as suas bases são conjuntos convexos de G , é possível decompor tal grafo a partir desses conjuntos separadores e verificar o número de Helly de G pelas suas componentes conexas resultantes.

Nesta subseção apresentaremos um teorema que nos permitirá decompor um grafo G qualquer, caso ele possua um ou mais conjuntos separadores prisma generalizados desde de que suas bases sejam conjuntos convexos de G .

Corolário 4.16 (Decomposição por separadores prisma generalizados)

Seja G um grafo, $\mathcal{K} = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ uma família de conjuntos separadores prisma generalizados maximais de G tais que suas bases sejam conjuntos convexos em G , e G_1, G_2, \dots, G_t as componentes conexas resultantes. Então $h(G) = \max\{h(G_1), h(G_2), \dots, h(G_t)\}$.

A demonstração deste corolário é uma aplicação direta do Teorema 4.14, onde se pode decompor o grafo G a partir de seus conjuntos separadores prisma generalizados, pois cada uma de suas bases são conjuntos separadores geodélicos.

Pode-se aplicar também nessas componentes conexas resultantes G_1, G_2, \dots, G_t o Teorema 4.12, onde se elimina de cada uma das componentes conexas os conjuntos separadores prisma generalizados herdados na decomposição. Assim, calculando o valor do parâmetro de cada átomo resultante da decomposição, se pode obter o valor do parâmetro do grafo original G .

Na Figura 4.14, temos um grafo que contém um prisma generalizado separador formado pelos vértices b, e, f, g, j, l .

Aplicando o Corolário 4.16 no grafo G , divide-se o mesmo em duas componentes conexas, e logo em sequência, pode-se aplicar o Teorema 4.12 para eliminar os conjuntos separadores prisma generalizados herdados em cada componente conexa da decomposição, ou seja, eliminar o próprio conjunto separador de ambas as componentes.

Este processo resulta nos subgrafos G_1 e G_2 , assim, aplicando o Teorema 4.5 em cada subgrafo nos vértices a, d e c em G_1 e nos vértices h e k em G_2 , resulta em duas cliques, uma clique de tamanho três e outra de tamanho quatro, com isso tem-se que o número de Helly do grafo G original é igual ao valor do parâmetro para o maior valor encontrado nos subgrafos G_1 e G_2 , ou seja, igual a quatro.

É interessante ressaltar que poderíamos também aplicar, no segundo passo, o Teorema 4.14 nos conjuntos separadores geodélicos $\{b, f\}$, $\{b, e\}$ e $\{c, e\}$ na componente conexa à esquerda, e nos conjuntos separadores geodélicos $\{g, i\}$ e $\{l, j\}$ na componente conexa à direita, o que resultaria em grafos completos de tamanho três e quatro, o que também nos daria o valor do parâmetro igual ao tamanho da maior clique, ou seja, o número de Helly de G igual a quatro.

Os resultados obtidos neste trabalho apresentam a possibilidade de se utilizar diversos teoremas no mesmo problema afim de solucioná-lo, ou até mesmo teoremas diferentes para o mesmo problema. Em diversos exemplos aqui mostrados era possível usar mais de uma estratégia para se encontrar o valor do número de Helly na convexidade goedética de um grafo.

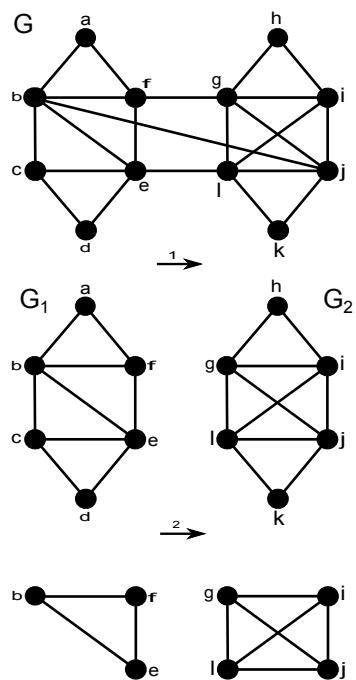


Figura 4.14: Grafo resolvido pela aplicação dos Teoremas 4.16, 4.5, 4.11 e 4.12

Capítulo 5

Considerações finais

No fim tudo dá certo, se não deu certo é porque ainda não chegou ao fim.

Fernando Sabino

Neste trabalho abordamos algumas das classes de grafos mais conhecidas e estudadas. Outras classes de grafos, que são subclasses de alguma classe considerada, não foram analisadas especificamente, uma vez que seus resultados são herdados de sua superclasse. A classe dos cografos, por exemplo, é uma subclass de grafos de distância hereditária, consequentemente, o número de Helly para cografos também será igual ao tamanho de sua clique máxima.

No Capítulo 4 apresentamos alguns resultados interessantes, como o que o grafo que possui um vértice universal o valor do parâmetro é igual ao tamanho de sua clique máxima, e outros também significativos utilizando decomposição de grafos ou eliminação de vértices ou subgrafos, sendo o principal deles o que possibilita a decomposição de um grafo por conjuntos separadores geodélicos.

Os resultados deste capítulo nos permitiu evoluir para além do que existia na literatura pois não foi determinado o valor do parâmetro para nenhuma classe de grafos específica diretamente (apresentamos resultados para algumas classes de grafos como corolários), mas nos permitiu a possibilidade de se encontrar o número de Helly para grafos se utilizando características que podem aparecer em um grafo qualquer.

Além do limitante superior natural (número de vértices do grafo), mostramos também que existe um limitante inferior para o número de Helly. Todo subgrafo induzido de um grafo que seja também um conjunto convexo do mesmo, o número de Helly do subgrafo será um limitante inferior do grafo original. Desse modo, as cliques máximas de um grafo, por exemplo, serão sempre limitantes inferiores naturais, assim como os ciclos geodélicos.

Ao contrário da convexidade monofônica (convexidade de caminhos induzidos) em que para todos os grafos o resultado para o número de Helly é igual ao tamanho de sua clique máxima, na convexidade geodética em algumas classes o resultado pode variar, apesar de que diversas classes estudadas aqui esse resultado se confirmou, porém para ciclos a clique máxima tem tamanho igual a dois e o número de Helly é igual a três, à exceção do ciclo de tamanho quatro, cujo valor do parâmetro é igual a dois.

A classe dos grafos prisma também não confirma tal resultado, a clique máxima tem tamanho igual a dois porém o número de Helly é igual a três. Tal fato se explica pelo Teorema 4.11 onde mostramos que, para grafos prisma generalizados basta saber o valor do parâmetro de qualquer uma das suas bases (todas isomórficas) para saber o valor do número de Helly do grafo todo.

Na tabela 5.1 apresentamos um inventário dos resultados obtidos para algumas classes de grafos que tiveram o valor do número de Helly determinado (ou confirmado por outros caminhos) neste estudo. Apesar de algumas classes apresentadas serem subclasses de outras, mostramos tais resultados na tabela na ordem em que aparecem neste trabalho.

Grafos	Número de Helly
Árvores	$h(G) = 2$
Completos	$h(G) = \omega(G)$
Ciclo C_4	$h(G) = 2$
Ciclos C_n ($n \geq 5$)	$h(G) = 3$
k -Partidos Completos	$h(G) = k$
d -Grades Completas	$h(G) = 2$
Grafos Prisma $Y(n, m)$ ($n \neq 4$)	$h(G) = 3$
Grafos de Limiar	$h(G) = \omega(G)$
Grafos de Partição	$h(G) = \omega(G)$
Grafos Bloco	$h(G) = \omega(G)$
Grafos Cordais	$h(G) = \omega(G)$

Tabela 5.1: Tabela de Resultados

O resultado para grafos completos é uma caracterização, ou seja, somente para esta classe o número de Helly é igual ao número de vértices do grafo.

5.1 Possibilidades a explorar

Neste trabalho, buscamos determinar o número de Helly na convexidade geodética para várias classes de grafos, como grafos do tipo árvores, ciclos, grafos completos, grafos k -partidos, d -grades e grafos prisma. Na literatura há alguns trabalhos envolvendo outras classes, como grafos desmontáveis, pseudo-modulares e distância

hereditária, entre outros. Mesmo com tais resultados, existem ainda muitas classes de grafos que podem ser exploradas afim de determinar o número de Helly.

Encontramos uma condição para determinar do número de Helly aplicando o Teorema 4.5 em grafos que possuem um vértice simplicial com uma característica específica, que chamamos de simplicial restrito. Este Teorema possibilitou determinar o número de Helly para outras classes de grafos, como os grafos de partição, ou *split*, e corroborar o resultado de alguma de suas subclasses, como as árvores e os grafos de limiar.

Encontramos também uma condição que possibilita a eliminação de um subgrafo prisma generalizado do grafo, o que também facilita o cálculo pela possibilidade de se pesquisar o valor do parâmetro em um grafo potencialmente menor. Assim, da mesma forma que encontramos condições para o cálculo do número de Helly excluindo vértices simpliciais restritos e subgrafos prisma generalizados que possibilitou determinar o valor do parâmetro algumas classes e também de alguns grafos aleatórios, então é de se esperar que ainda outras condições similares também existam.

Mostramos também teoremas que permitem a decomposição de um grafo por conjuntos separadores de modo a diminuir o tamanho dos grafos a ser calculado o valor do parâmetro. Assim, é possível que hajam outras condições para decompor de um grafo afim de auxiliar no cálculo do número de Helly nesta convexidade pesquisando o valor do parâmetro de alguns de seus subgrafos.

Como o Teorema 4.14 nos facilita no cálculo do valor do parâmetro se utilizando de conjuntos separadores geodélicos, encontrar tal estrutura no grafo torna-se interessante e estudar tal problema e determinar a complexidade de encontrar tais estruturas também pode ser de bastante interesse, além disso, como tais conjuntos separadores não necessariamente são disjuntos, pesquisar se existe uma ordenação da decomposição que facilite ainda mais o cálculo do número de Helly de um grafo pode ser um excelente campo de trabalho a ser explorado.

Como foi possível encontrar condições para decompor grafos por conjuntos separadores, seria interessante verificar se é possível, e para quais dos teoremas envolvendo conjuntos separadores estudados aqui, generalizar a decomposição de um grafo G por conjuntos separadores de G cujos vértices induzem um subgrafo de G não conexo.

Os resultados obtidos com grafos prisma generalizados e suas consequências inspiram a ideia em trabalhar com grafos prisma complementares devido aos resultados muito interessantes e úteis alcançados neste trabalho. Assim, grafos prisma complementares podem oferecer um vasto campo para um trabalho futuro sobre este parâmetro.

Outra possibilidade de estudos posteriores seria usar alguns dos raciocínios uti-

lizados neste trabalho para determinar o número de Helly em outras convexidades ainda não trabalhadas, como a convexidade P_3 , por exemplo. Nos resultados sobre convexidades e número de Helly utilizados em diversas demonstrações deste trabalho, como o Teorema 2.4 e o Lema 2.5, não foi especificada nenhuma convexidade, então poderão ser explorados em outros trabalhos para determinar o número de Helly em outras convexidades.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Amenta, Helly Theorems and generalized linear programming, In *Symposium on Computacional Geometry*, pp. 63-72, 1993.
- [2] H. -J. Bandelt, H. M. Mulder, Helly Theorems for Dismantlable Graphs and Pseudo-Modular Graphs, *Topics in Combinatorics and Graph Theory*, Physica-Verlag Heidelberg, 1990.
- [3] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Dunod, Paris, 1973.
- [4] C. Berge, *Hypergraphs: Combinatorics of the Finite Set*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, Paris, 1989.
- [5] C. Berge, P. Duchet, A generalization of Gilmore's Theorem, *Recent Advances in Graph Theory* (Fiedler, M., ed.), Acad. Praha, Prague, 1975, 49–55.
- [6] J.-C. Bermond, J. Bond, D. Peleg, S. Perennes. The power of small coalitions in graphs, *Discrete Appl. Math.*, v. 127, pp. 399-414, 2003.
- [7] A. Bretto, J. Azema, H. Cherifi, B. Laget, Combinatorics and image processing, *Grafical Models and image Processing*, 81:55-57, 2002.
- [8] M. T. Carvalho Jr., M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, Sobre o número de Helly geodético em grafos, XVIII Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research, CLAIO, submetido, 2016.
- [9] M. T. Carvalho Jr., M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, O número de Helly na convexidade geodética, XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2998-3006, 2014.
- [10] M. T. Carvalho Jr., M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, O número de Helly geodético em convexidades, Matemática Contemporânea, aceito para publicação, 2015.
- [11] M. T. Carvalho Jr., M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, Reductions theorems for the geodetic Helly number of a graph, *Discrete Mathematics*, submetido, 2016.

- [12] C. C. Centeno, Sobre a convexidade P_3 , *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2012.
- [13] V. C. Cepoj, Some properties of d-convexity in triangulated graphs, *Math. Issledovaniya*, 87, (1986), 167-177 (in Russian).
- [14] M. Changat, S. Klavzar, H. Mulder, On triangle path convexity in graphs, *Discrete Mathematics*, v. 206, pp. 91-95, 1999.
- [15] M. Changat, G. Prasanth, J. Mathews, Triangle path transit functions, betweennes and pseudo-modular graphs, *Discrete Mathematics*, v. 309, pp. 1575-1583, 2009.
- [16] P. Domingos, M. Richardson, Mining the network value of costumers, In: *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, KDD '01, pp. 57-66, New York, NY, USA, August. ACM, 2001.
- [17] M. C. Dourado, Caracterizações e Algoritmos para Generalizações da Propriedade de Helly, *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2005.
- [18] M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti, J. L. Szwarcfiter, On the computation of the hull number of a graph, *Discrete Mathematics*, 309, 2008, 5668–5674.
- [19] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter, Complexity aspects of the Helly property: Graphs and hypergraphs, *The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys*, n. 17, 2009.
- [20] M. C. Dourado, D. Rautenbach, V. G. Sá, J. L. Szwarcfiter, Polynomial time algorithm for the Radon number of grids in the geodetic convexity, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v.44, 2013, 371–376.
- [21] M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, The dynamics of the convex hull of a set of vertices of a graph: a survey, *ICRTGC-2010*, Cochin, Índia, 2010.
- [22] F. F. Dragan, F. Nicolai, A. Brandstädt, Convexity and HHD-free graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics*, v. 12, pp 119-135, 1999.
- [23] F. F. Dragan, C. F. Prisacaru, V. D. Chepoi, Location problems in graphs and the Helly property, *Diskretnája Matematika*, 1992.
- [24] P. Duchet, Convex set in graphs II. Minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory*, séries B 44, 1988, 307–316.

- [25] P. Duchet, Radon and Helly number of segment spaces, Joint Proceedings of the International Workshop on Metric and Convex Graph Theory and International Instructional Workshop on Convexity in Discrete Structures (Kovalam and Barcelona, 2006), *The Ramanujan Mathematical Society Lecture Note Series*, Chennai, India, 2007, 1–12.
- [26] P. Duchet, H. Meyniel, Ensemble Convexes dans les Graphes I Theoremes de Helly et de Radon pour Graphes et Surfaces, *Europ. I. Combinatorics*, 1983, 4, 127-132
- [27] R. Fagin, Acyclic database schemes of various degrees: A painless introduction, In G. Ausioelllo and M. Protasi, editors, *Proceedings of the 8th Colloquium on Trees in Algebra and Programming (CAPP'83)*, v. 159 of *LNCS*, pp. 65-89, L’ Aquila, Italy, mar 1993, Springer.
- [28] R. Fagin, Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30:514-550, 1983.
- [29] M. C. Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, *Academic Press*, New York, 1980.
- [30] E. Helly, Ueber Mengen konvexer Koerper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jahresber, *Math Verein.* v.32, 1923, 175–176.
- [31] A. Itai, C. H. Papadimitriou, J. L. Szwarcfiter, Hamilton paths in grid graphs, *Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Journal on Computing*, v.11, 4, 1982, 676–686.
- [32] R. E. Jamison, R. Nowakowski, A Helly Theorem for Convexity in Graphs, *Discrete Mathematics*, North-Holland, 51, 1984, 35-39.
- [33] P. D. Jr., F. Roberts, Irreversible k -Threshold processes: Graph-theoretical threshold models of spread of disease and of opinion, *Discrete Appl. Math.*, v. 157, pp. 1615-1627, 2009.
- [34] R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds., *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, N. Y., 1972, pp. 85–103.
- [35] D. Kempe, J. Kleinberg, E. Tardos, Maximizing the spread of influence through a social network, In: *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, KDD ’03, pp. 137-146, New York, NY, USA, August, 2003.

- [36] S. Kutten, D. Peleg, Fault-local distributed mending, *J. Algorithms*, v. 30, pp 144-165, 1999.
- [37] N. Mustafa, A. Pekeč, Listen to your neighbors: How (not) to reach a consensus, *SIAM J. Discrete Mathematics*, v. 17, pp. 634-660, 2004.
- [38] M. H. Nielsen, O. R. Ollermann, Helly theorems for 3-Steiner and 3-monophonic convexity in graphs, *Discrete Mathematics*, 311, 2011, 872-880.
- [39] D. Peleg, Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: A review, *Theor. Comput. Sci.*, v. 282, pp. 231-257, 2002.
- [40] N. Polat, A Helly theorem for geodesic convexity in strongly dismantlable graphs, *Discrete Mathematics*, 140, 1995, 119-127.
- [41] S. Poljak, M. Suura, On periodical behaviour in societies with symmetric influences, *Combinatorica*, v. 3, pp. 119-121, 1983.
- [42] T. M. Przytycka, G. Davis, N. Song, D. Durand, Graph Theoretical insights into evolution of multidomain proteins, In *Proceedings of the 9th Research in Computational Molecular Biology (RECOMB' 2005)*, v. 3500 Of LNBI, pp. 311-325.
- [43] D. A. Rocha, Partições Convexas Geodésicas e Contornos em Grafos, *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2010.
- [44] V. F. Santos, Convexidades em Grafos: Intermediações, Parâmetros e Conversões, *Tese de doutorado*, UFRJ/COPPE, 2013.
- [45] R. E. Tarjan, Decomposition by clique separators, *Discrete Mathematics* 55, North-Holland, 1985, 221–232.
- [46] M. L. J. Van de Vel, *Theory of Convex Structures*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, Amsterdan, London, New York, Tokyo, 1993.