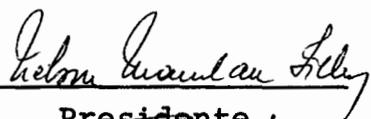


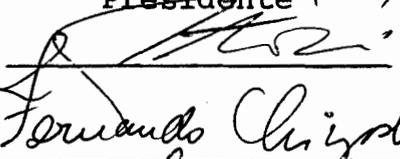
"UMA APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA: OCUPAÇÃO
ÓTIMA DE UMA INSTALAÇÃO"

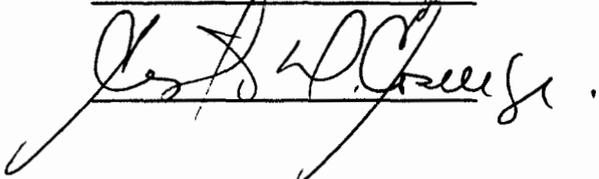
Oswaldo Nelson Chaves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.) .

Aprovada por:



Presidente :


Fernando Crispini


O. N. Chaves

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
OUTUBRO DE 1973

I

DEDICATÓRIA

À

CEIÇA

AGRADECIMENTOS

Nelson Maculan Filho
Professor e Amigo

RESUMO

A tese tem por objetivo fornecer Metodologias alternativas para enquadramento do problema da ocupação funcional de instalações numa empresa.

Desenvolve modelos determinísticos na área de Programação Quadrática e Programação Linear Mista, bem como um algoritmo específico de resolução do problema, através dos métodos de Enumeração Implícita.

Incorpora, ainda, programas computacionais de montagem desses modelos, em paralelo com o desenvolvimento de rotina de "Branch and Bound", para resolução do PPLI a partir do Simplex Primal (duas fases).

ABSTRACT

The objective of this thesis was to offer alternative methodologies for solving the problem of functional occupation of the physical facilities existing in a building.

Deterministic models for "Quadratic Programming" and "Mixed Programming", as well as a specific algorithm for solving the problem through the "Implicit Enumeration" method were developed. Computer programs for the establishment of these models, as well as routine of Branch and Bound for "MP" solving starting from Simplex Primal were also studied.

INDICE

I.	Introdução	1
II.	Definição do Problema	7
III.	Metodologias de Equacionamento	
	III.1. "Um Modelo Simplificado"	11
	III.2. Custos de Instalação	31
	III.3. Custos de Espera	40
IV.	Restrições Especiais	53
V.	Programação bivalente	60
VI.	Extensões do Modelo	71

APÊNDICE:

I.	Metodologia de Enquadramento do Problema à Programação Quadrática	82
II.	Um Processo de Enumeração Implícita	94

I - INTRODUÇÃO

I.1 - ÁREAS DE APLICAÇÃO DO MODELO

À medida em que se tornam mais complexas as estruturas administrativo-produtivas das grandes empresas, maiores se tornam as dificuldades em compatibilizar suas disponibilidades de área, e as reais necessidades de ocupação e comunicação inerentes a cada uma delas.

Em termos gerais, o problema pode ser pôsto na forma seguinte:

- i) - "Para a ocupação de suas novas instalações, que distribuição funcional deve uma empresa promover a fim de obter-se a "situação - ideal", relativa às suas necessidades de ocupação e comunicação inter-setorial"?
- ii) - "Para uma dada disposição já implantada, que benefícios podem advir de sua re-distribuição funcional, ponderados os gastos e ganhos decorrentes dessa mudança"?

Três aspectos sobressaem das proposições acima:

- i) - Trata-se de problema que, por natureza, abrange grande número de variáveis exógenas, em maioria com difícil relacionamento.
- ii) - O problema presta-se a mais de um tipo de solução, e tôdas os fatores restritivos podem ser matematicamente expressáveis.
- iii) - É possível definir critérios de avaliação que diferenciam as soluções entre si, bem como associa-las a valores numéricos, que representarão uma medida (relativa) de "qualidade" de cada solução.

Está caracterizado, evidentemente, um problema típico de pesquisa operacional, cujos campos de aplicação, entre outros, podem ser :

- i) - Reformulação e racionalização de lay-outs industriais.
- ii) - Distribuição setorial de hospitais e clínicas de grande porte.
- iii) - "Distribuição ideal", em Faculdades e Institutos, de disciplinas/salas disponíveis, com vistas a uma minimização do deslocamento global dos alunos*.
- iv) - "Distribuição ideal" dos departamentos ou setores de uma Empresa, pelas instalações disponíveis na Sede.**

O presente modelo desenvolve metodologias de enquadramento orientadas para esse último aspecto, visando uma distribuição específica de um edifício-sede, que minimize sua quantidade de esforço-deslocamento (inter-departamental).*** e assim, o tempo total de espera por elevadores, também demandado pelos respectivos fluxos.

- (*) - Oriundos de cursos diversos e para os quais uma mesma disciplina pode constituir requisito obrigatório.
- (**) - Com vistas à "otimização" de suas necessidades de ocupação e comunicação inter-setorial.
- (***) - Com base nos fluxos associados.

I.2 - PROCESSOS DE SOLUÇÃO

Foi elaborado um modelo de Programação Linear Mista*, e o trabalho será desenvolvido de um caso mais simples para a situação generalizada, em que são abordados, simultaneamente, tempos de "espera" e esforço deslocamento, nos sentidos vertical e horizontal.

Alem das facilidades didáticas de uma exposição progressiva, o trabalho incorpora, a cada etapa, um conjunto de restrições e componentes da função-objetivo, que representam problemas práticos específicos. Assim, considerando tais situações, (que não reúnem todos os fatores introduzidos no modelo mais generalizado), um problema de alocações seria processado de forma mais eficiente, tendo em vista o menor desgaste computacional e a desconsideração de restrições eventualmente supérfluas.

Nêsses têrmos, o plano de trabalho discriminado a seguir, arrola, em cada item, um estágio completo do desenvolvimento do modelo, podendo ser implementado sempre que uma situação específica recomende o seu a proveitamento.

I.3 - PLANO DE TRABALHO

I - INTRODUÇÃO

- I-1. Áreas de Aplicação do Modelo.
- I-2. Processos de Solução utilizados.
- I-3. Plano de Trabalho.

II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

- II.1. "Esforço-Deslocamento".
- II.2. Formalização do Problema.

(*) - A título ilustrativo, é ainda anexada uma metodologia de enquadramento à programação quadrática.

II.3. "Condições Especiais".

III - METODOLOGIA DE EQUACIONAMENTO

III.1. Um Modelo Simplificado

1. Variáveis básicas do Problema
2. Expressão da distância média dos departamentos ao solo.
3. Ocupação total dos pavimentos pelas parcelas de departamentos.
4. Função - Objetivo.
5. Escopo de Restrições
 - 5.1. Equilíbrio dos Departamentos
 - 5.2. Equilíbrio dos Andares
 - 5.3. "Restrições Modulares"
 - 5.3.1. Alternativa das "distâncias menores"
 - 5.3.2. Alternativa das "variáveis simétricas".
6. Resumo da estrutura do Modelo.
7. Dimensionamento.
8. Sub - rotina de montagem das restrições e F.O.
9. Caso - Exemplo.

III.2. CUSTOS DE INSTALAÇÃO

1. Instalação Inicial.
2. Re - Instalação.
3. Alterações na Estrutura do Modelo (F.O.)
4. Sub - rotina para geração da função - objetivo modificada.
5. Casos - Exemplos :
 - 5.1. Instalação Inicial
 - 5.2. Re - Instalação.

III.3. Custos de Espera

1. Premissas
2. Variáveis Adicionais.

3. Restrições Adicionais.
4. Componente Adicional da Função-Objetivo.
5. Resumo da Nova Estrutura do Modelo.
6. Sub-rotina de montagem das restrições.

IV - RESTRIÇÕES ESPECIAIS

- IV.1. Justificativa.
- IV.2. Restrições Especiais.
- IV.3. Sub-rotina de geração das restrições "especiais".

V - PROGRAMAÇÃO BIVALENTE

- V.1. Re-definição das variáveis.
- V.2. Resumo da estrutura do Modelo Modificado.
- V.3. Sub-rotina de montagem do Modelo "binário".

VI - EXTENSÕES DO MODELO

- VI.1. Conceito de Módulo e Deslocamento Horizontal.
- VI.2. Re-definição do Modelo.
 - VI.2.1. Variáveis básicas e auxiliares
 - VI.2.2. Função-Objetivo
 - VI.2.3. Escopo de restrições.
- VI.3. Deslocamento pela distância (física) entre módulos
 - VI.3.1. Premissas
 - VI.3.2. Restrições Auxiliares
 - VI.3.3. Resumo da estrutura do Modelo
 - VI.3.4. Sub-rotina de montagem, na forma atual.

ANEXOS :

- i) Metodologia de enquadramento do problema à Programação Quadrática.

iii) Um processo de enumeração implícita.

II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

II.1. ESFORÇO - DESLOCAMENTO

Define-se como uma unidade de esforço - deslocamento, ao deslocamento vertical, em elevadores, de um indivíduo padrão*, por um andar das instalações em estudo.

II.2. FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de alocação ideal dos departamentos de uma unidade operativa qualquer, com vistas à minimização de sua quantidade de esforço - deslocamento, é definido, na forma mais simples, como se segue :

1. Objetivos

$$\min z = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} f_{ij} y_{ij} \right], \text{ onde } j=\phi \text{ ou } j < i, \text{ e}$$

f_{ij} - é o fluxo provável do departamento i para o departamento j , (ou para o andar térreo das instalações), numa unidade de tempo considerada.

q_{ij} - é o custo (qualificado) do deslocamento unitário**.

(*) - Vide "qualificação dos fluxos", a seguir.

(**) - Tomando-se como base uma unidade de deslocamento - padrão. A partir de sua importância funcional na organização, atribui-se um custo diferenciado para seu deslocamento.

(Ex: 1 servente = 1 U.D. ; 1 diretor = 100 U.D.)

y_{ij} - é a distância projetada, em andares, do departamento i para o departamento j ou pavimento térreo.

n - é o número total de departamentos e/ou andares da instalação em estudo.

2. Restrições

2.1. Todos os andares devem ser ocupados, e os departamentos completamente alocados.

2.2. A ocupação de um andar i pelo departamento j qualquer, implicará na exclusão obrigatória de outras alocações, para esse pavimento, de todos os demais departamentos.

$$y_{jo} \neq y_{j'o} \neq y_{j''o} \dots \text{ para} \\ j \neq j' \neq j''$$

2.3. Os valores assumidos por y_{jk} , para todo j ou k , serão inteiros e positivos.

$$[(y_{jo} - n) \dots (y_{jo} - 1)] \neq \phi , \\ \text{para } j \in [1, n]$$

2.4. A função-módulo da diferença entre a distância ao térreo de dois departamentos quaisquer, implica necessariamente

na medida da distância entre ambos*.

$$\| y_{jo} - y_{ko} \| = y_{jk}, \text{ para}$$

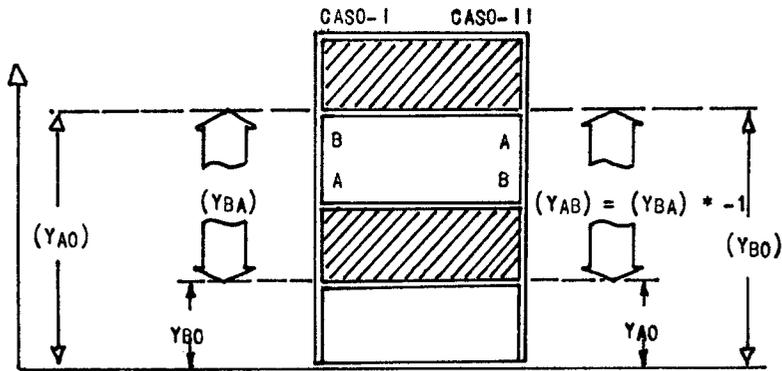
$$j = [1, n], k = [1, n], j \neq k$$

II.3. CONDIÇÕES ESPECIAIS DO PROBLEMA

Embora o problema possa ser, como se viu, perfeitamente caracterizado, são evidentes os embargos à aplicação direta dos algoritmos de programação linear, tendo em vista os três impedimentos básicos a seguir:

1. Os valores de y_{jk} , pela natureza do problema real, devem ser inteiros e positivos, o que vai de encontro aos requisitos da P.L. "contínua".
2. A condição de mútua-exclusividade necessária ao processo ($y_{jo} \neq y_{jo}' \neq y_{jo}'' \dots$), não é pertinente, por tratar-se de restrição não linear.
3. A condição de equilíbrio entre as diferenças (o módulo da diferença de distância entre dois andares e o termo, deve necessariamente corresponder à medida da distância entre ambos), também não pode assumir representação linear, já que se trata de espaço orientado.

(*) - Esse tipo de restrição, no decorrer do trabalho, será referida simplifcamente como "restrição - Modular".



Com efeito, tendo em vista os requisitos da P.L. para valores não-negativos da variável, ($y_{jk} \geq 0$ em qualquer j ou k), a expressão $y_{jk} = y_{jo} - y_{ko}$, nos casos em que y_{ko} seria maior que y_{jo} torna-se incompatível. A restrição demanda $\|y_{jo} - y_{ko}\| = y_{jk}$, ou $[y_{jo} - y_{ko}]^2 = y_{jk}^2$ e, por decorrência, programação não-linear. Problemas complexos ou muito densos, fazem impraticável esse tipo de tratamento.

III - METODOLOGIAS DE EQUACIONAMENTO

III.1. UM MODELO SIMPLIFICADO

Tendo em vista os aspectos supra enumerados, o processo presentemente desenvolvido utiliza uma metodologia que, a partir de nova conceituação da variável básica, mantém a natureza linear das restrições e função - objetivo, convergindo para uma solução ótima compatível com os requisitos inteiros e mutuamente exclusivos do problema dado.

1. Variáveis básicas

1.1. Admite-se, em princípio, que um departamento (j) possa ser distribuído pelos diferentes andares (i) da instalação, tal que x_{ij} represente a parcela do departamento j alocada no pavimento i qualquer.

1.2. Igualmente ao que se estabeleceu na caracterização inicial do problema, y_{jk} é a distância em andares do departamento j ao departamento k.

Um requisito $j < k$ é introduzido para eliminar o simétrico da distância entre andares, desde que, se y_{AB} é a distância do departamento A para o departamento B, y_{BA} (distância de B para A) é redundante.

2. Expressão da distância média dos departamentos ao solo

Considerando o princípio de que um departamento é distribuído em parcelas pelos diversos andares, a medida de seu afastamento ao solo será dada pela média ponderada entre a altura do pavimento (distância), e a quantidade de departamento que êle apropria :

$$(p_i) = \sum_{j=i}^n (x_{ij}), \text{ onde } j=[1,n] \quad (I)$$

3. Ocupação total dos pavimentos, pelas parcelas de departamento

Tendo em vista que apenas uma fração do departamento j é alocada em i , o espaço excedente (complemento), será preenchido com parcelas de outros departamentos, tal que a ocupação total do andar se represente por :

$$(p_i) = \sum_{j=1}^n (x_{ij}), \text{ onde } j = [1, n]$$

4. Função - Objetivo

Embora o objetivo do problema seja o mesmo especificado na sua formulação inicial, a nova conceituação de variáveis básicas, desenvolvida na presente metodologia, implica em alterações de forma, para a componente da F.O. que reúne as distâncias do departamento ao térreo.

Tomando-se f_{j0} * como o fluxo provável do departamento j para o andar térreo das instalações, e f_{jk} como o movimento inter-departamental de j para k , assume-se :

$$\min Z = \left[\sum_{j=1}^n (f_{j0} d_j) \right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (f_{jk} y_{jk}) \right],$$

onde D_j é a distância do departamento j ao pavimento térreo.

- Substituindo-se D_j pelo equivalente em (I)

$$\min Z = \left[\sum_{j=1}^n f_{j0} \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) \right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n f_{jk} y_{jk} \right]$$

(*) Já inclui o custo qualificado (q_{j0}) do deslocamento

- Reagrupando :

$$\min z = \sum_{j=1}^n [f_{jo} + \sum_{i=1}^n (x_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} y_{jk}] ,$$

onde f_{ij} é variável exógena (pré-determinada)

5. Escopo de Restrições

- 5.1. . A soma em i das diversas parcelas de um departamento j qualquer, será sempre igual à unidade.

Desde que se consideram todos os departamentos com um tamanho padrão, embora admita-se, até o presente, uma sua partição segundo os andares, é manifesto que o somatório dessas parcelas, (tomadas em relativo), deverá corresponder à unidade.

$$\sum_{i=j}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } j= 1, n$$

- 5.2. . A soma em j das diversas partições de um pavimento i qualquer, será também igual à unidade.

Como já observado para o tamanho dos departamentos, se todos os andares têm igual medida de área, e existe uma relação lógica de ocupação (1 departamento $\hat{=}$ 1 andar), a soma das

diferentes parcelas de departamento, num mesmo andar, corresponderá à ocupação unitária desse pavimento.

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } i = (1, n)$$

5.3.

- Restrições modulares de compatibilização das distâncias entre os departamentos, ou suas distâncias ao térreo.

Como observado inicialmente, a programação linear é desenvolvida num espaço vetorial, onde o valor assumido, para qualquer variável, deve ser não - negativo.

Assim, a restrição $[y_{jo} - y_{ko}] = y_{jk}$, que compatibilizaria a distância entre departamentos, (restrição modular), com base na diferença de suas distâncias ao andar térreo, exclui a possibilidade de y_{ko} * assumir maior valor que y_{jo} .

Por outro lado, essa formalização no Modelo é imprescindível, desde que pretende-se minimizar o conjunto de fluxos ponderados entre cada departamento e o andar térreo, e também dos departamentos entre si. Em adição, a relação física de diferença entre y_{jo} e y_{ko} , implicará, efetivamente, em $|| y_{jk} ||$

A identificação das distâncias absolutas entre dois departamentos quaisquer, sem violentar requisitos da programação linear, pode ser atendida através dos dois processos alternativos seguintes:

$$(*) - y_{ko} = \sum_{i=j}^n (ix_{ik})$$

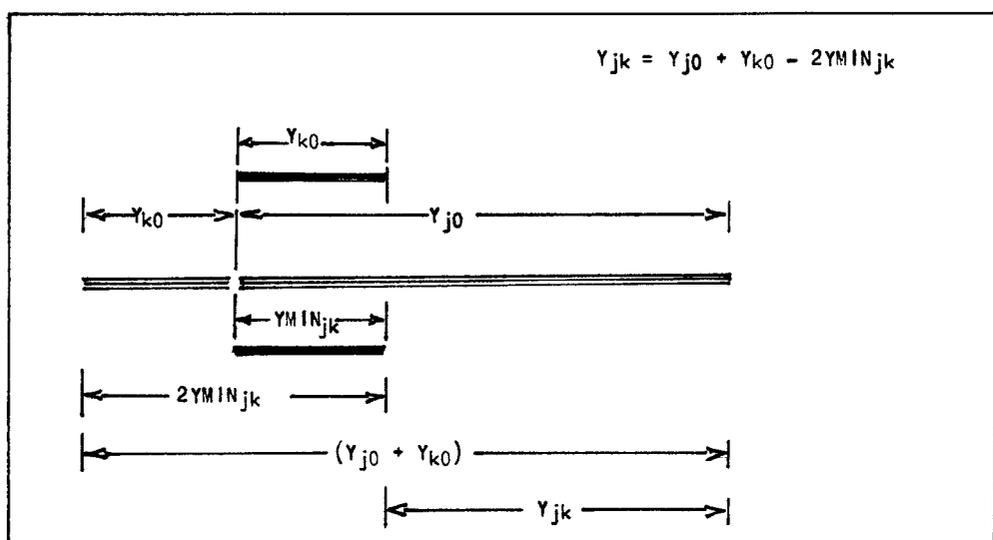
5.3.1. Alternativa das "distâncias menores"

Pela análise do problema descrito, infere-se que a dificuldade básica em determinar as distâncias inter-departamentais repousa no fato de que não se conhece, a priori, qual das distâncias ao solo é dominante. Assim, pode-se criar uma variável auxiliar y_{jk}^{MIN} , limitada superiormente em $y_{jo} = y_{ko}$, de forma a que represente, no máximo, o menor dos valores de y .

$$y_{jk}^{MIN} \leq y_{jo}$$

$$y_{jk}^{MIN} \leq y_{ko}$$

Desde que a distância inter-departamental apropriará uma diferença entre a soma de suas distâncias ao solo e o menor desses afastamentos*, assume-se:



(*) Supondo y_{jo} dominante em relação a y_{ko} , (sem perda de generalidade)

$$y_{jk} = y_{jo} - y_{ko} \quad \therefore \quad y_{jk} = y_{jo} - y_{ko} + y_{ko} - y_{ko} \quad \therefore$$

$$y_{jk} = (y_{jo} + y_{ko}) - 2 \times y_{ko}$$

Uma vez que a função - utilidade é induzida à minimização dos y , o limite inferior de y_{jk} , com base nas restrições I e II, ocorrerá para y_{jk}^{MIN} máximo, ou seja,
 $y_{jk}^{MIN} = \min \{ y_{j0}, y_{k0} \}$, ou ainda, para o verdadeiro valor do afastamento entre os departamentos j e k.

Embora mantendo os requisitos da programação linear, o processo acima descrito implicará na criação de $2 \cdot \binom{n}{2}$ variáveis adicionais, e, paralelamente, $3 \cdot \binom{n}{2}$ novas restrições*.

5.3.2. Alternativa das "variáveis simétricas"

Pelo uso dessa segunda alternativa, são criadas as novas variáveis auxiliares, referidas, daqui por diante, como "simétricas"**, às quais estarão atribuídos, na F.O., os mesmos pesos originalmente considerados para os y_{jk} .

$$\min Z \left\{ \sum_{j=1}^n f_{j0} \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) \right\} + \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n f_{jk} y_{jk} \right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n f_{jk} y_{kj} \right] \right\}$$

- Reagrupando

$$\min Z = \sum_{j=1}^n \left[f_{j0} \cdot \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk}^* (y_{jk} + y_{kj}) \right],$$

(*) - Três a cada combinação de departamentos.

(**) - O termo é apenas didático, não ocorrendo necessariamente numa simetria.

As restrições "modulares" podem agora ser introzidas na forma seguinte:

$$d_j - d_k = y_{jk} - y_{kj}$$

Considerando a "forma" das variáveis de distância ao solo,

$$\sum_{i=1}^n i x_{ij} - \sum_{i=1}^n i x_{ik} = y_{jk} - y_{kj} \quad \therefore$$

$\sum_{i=1}^n i (x_{ij} - x_{ik}) = [y_{jk} - y_{kj}] ,$	$j = [1; n-1]$ $k = [j+1; n]$
--	----------------------------------

Três aspectos sobressaem da expressão acima:

1. Quaisquer que sejam os valores de y_{j_0} e y_{k_0} , existem sempre valores de y_{jk} e y_{kj} que atendem à igualdade estabelecida.
2. Mesmo para y_{k_0} maior que y_{j_0} (ou seja, para um resultado negativo da diferença), as variáveis y_{jk} e y_{kj} podem sempre assumir valôres não-negativos.
3. A diferença entre y_{j_0} e y_{k_0} , ao contrário da situação real, implica em infinitas combinacões de valôres para y_{jk} e y_{kj} , embora mantendo-se, entre eles, uma relação única.

No sentido de contornar-se essa indiferença

de valores para y_{jk} e y_{kj} , foram introduzidos, na F.O., as variáveis "simétricas" (y_{kj}), com os mesmos coeficientes atribuídos às variáveis iniciais (y_{jk})*.

Desde que a otimização do Modelo, com vistas a esse aspecto, corresponde a uma análise isolada para cada par de variáveis (y_{jk} e y_{kj}), é conclusivo que o programa assumirá sempre o valor da diferença em uma das variáveis (no termo à esquerda - RHS), anulando a segunda variável.

Exemplos :

Suposta uma "alocação - ideal" em que $y_{30} = 4$ e $y_{50} = 7$ ** , é o seguinte o comportamento da "restrição modular" $[D_3 - D_5] = [y_{35} - y_{53}]$

- Combinações Possíveis

y_{53}	y_{35}	Efeito na F.O.
7	4	11
6	3	9
4	1	5
3	0	3
2	- 1	*
1	- 2	*

(*) Inviável, por não atender $y_{ij} > 0$

(*) - f_{jk}

(**) - $x_{43} = 1$; $x_{75} = 1$, $x_{i3} = 0$ para $i \neq 4$
 $x_{i5} = 0$ para $i \neq 7$

- Efeito mínimo viável : 3

para : $y_{35} = 0$ e $y_{53} = 3$

Do exemplo acima depreende-se que a afirmação anterior é realmente válida, ou seja:

- para as diversas combinações de y_{jk} e y_{kj} que decorrem em $[D_j - D_k]$, o efeito, na F_0 , será mínimo viável sempre que qualquer das variáveis for nula*.

Mesmo considerando a incorporação da terceira restrição, (descrita na alternativa anterior), à função-objetivo**, é evidente que o uso das variáveis "simétricas" decorrerá em menor desgaste computacional, (durante a resolução do algoritmo), daí eleger-se, para efeito de estruturação do modelo nos itens seguintes, esse conjunto de restrições modulares como alternativa em uso.

5.4.

. A ocupação de um andar (i) pelo departamento (j) qualquer, implicará na exclusão obrigatória de outras alocações, para esse

(*) - Por tratar-se de comportamento evidente, não se promove sua demonstração teórica.

(**) - $\min Z \dots + [(y_{jo} + y_{ko}) - 2 y_{MIN_{jk}}] + \dots$

Sujeito a $y_{MIN_{jk}} < y_{jo}$

$y_{MIN_{jk}} < y_{ko}$

pavimento , de todos os demais departamen-
tos.

Essa restrição de mútua exclusividade, repre^sentando o verdadeiro elemento de ligação entre o conjunto de equa^ções e função utilidade anteriores, e o comportamento discreto que caracteriza o problema real, decorre em :

$$\sum_{i=1}^n (ix_{ij}) \neq \sum_{i=1}^n (ix_{ik}), \text{ para } j= [1,n] , k= [1,n] \text{ e } j \neq k$$

A introdução dos requisitos de programação in
teira para todas as variáveis x_{ij} , associada às restrições 5.1 e 5.2., que definem limites unitários na composição de um pavimento, ou departamento, asseveram o requisito de mútua exclusividade em pauta.

6. Resumo da Estrutura do Modelo

6.1. Função - Objetivo

$$\min Z = \sum_{j=1}^n [f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})]$$

6.2. Restrições

6.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } j=[1,n]$$

6.2.2. Equilíbrio da ocupação dos andares pelas parcelas de de departamento

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } i = [1, n]$$

6.2.3. Restrições Modulares

$$\sum_{i=1}^n [i(x_{ij} - x_{ik})] = [y_{jk} - y_{kj}], \text{ para}$$

$$j = [1, n-1], \quad k = [j+1, n]$$

6.3. Tipos de variáveis: Discretas

7. Dimensionamento do Modelo*

7.1. Número de Restrições

7.1.1. Tipo 6.2.1.	n
7.1.2. Tipo 6.2.2.	n
7.1.3. Tipo 6.2.3.	$n(n-1)/2$
7.1.4. Total	$n(n+3)/2$

7.2. Densidade da matriz**

7.2.1. Número de Variáveis	$n(2n-1)$
7.2.2. Número de celas da matriz***	$n^2(2n^2+5n-3)/2$

(*) - Durante o processo de "solução contínua"

(**) - Relativa às variáveis originais

(***) - (7.1.4) x (7.2.1)

7.2.3. Ocorrências não-nulas

7.2.3.1.	n^2
7.2.3.2.	n^2
7.2.3.3.	$n(n^2-1)$
Total	$n(n^2+2n-1)$

7.2.4. Densidade $[2(n^2+2n-1)]/n(2n^2+5n-3)$

8. Montagem das Restrições

Tendo em vista o número de variáveis e restrições da presente metodologia, a composição das equações e função-objetivo é atendida através de um programa computacional de montagem (programa montador -I), cujos dados de entrada são os fluxos ao solo e inter-departamentais, e a saída é o próprio modelo P.L., já nos formatos requeridos pelo MPSX/MIP, ou pelo otimizador anexado ao trabalho.

Seu fluxograma geral está desenvolvido a seguir:

- CódigosVariáveisRestriçõesa - Parcela do dp j no andar i

$X*II*JJ*$ onde II = and.
JJ = dep.

a - Equilíbrio dos departam.

$EQ*DP*JJ$ onde JJ = dp.

b - Equilíbrio dos andares

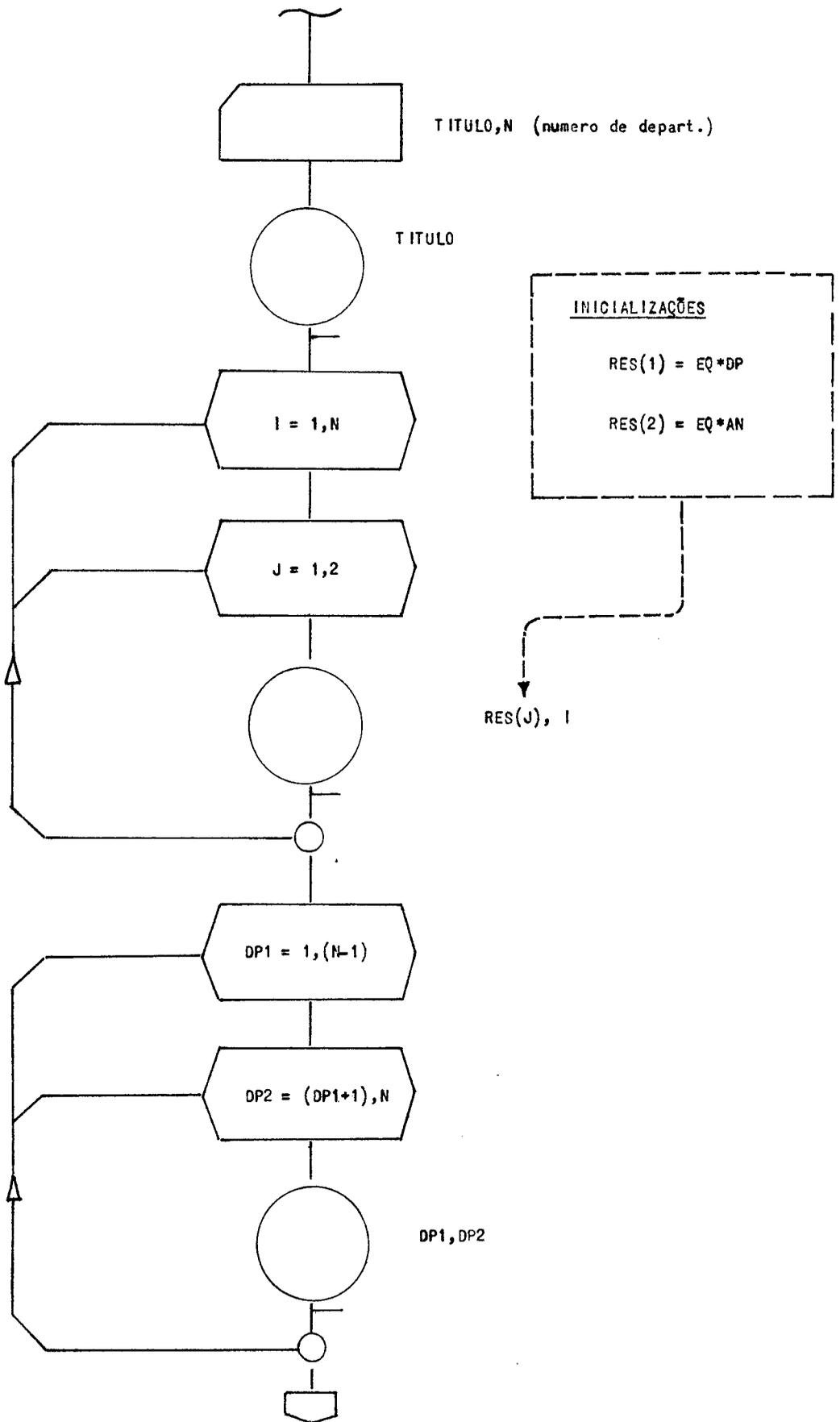
$EQ*AN*II$ onde II = andar

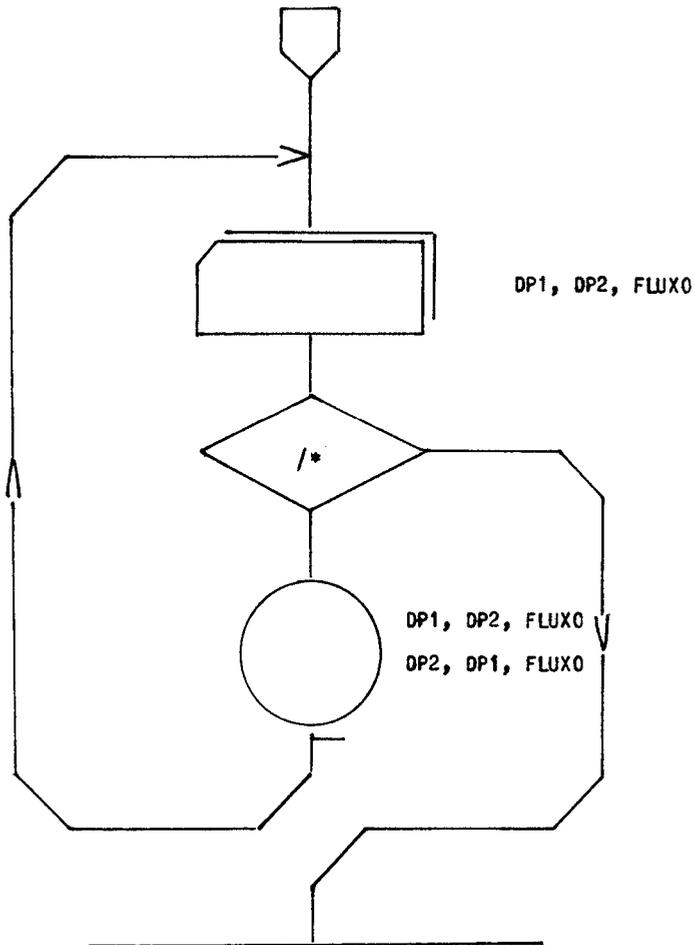
b - Distância do dp j ao dp k

$Y*JJ*KK*$ onde JJ = dep.
KK = dep.

c - Restrições modulares

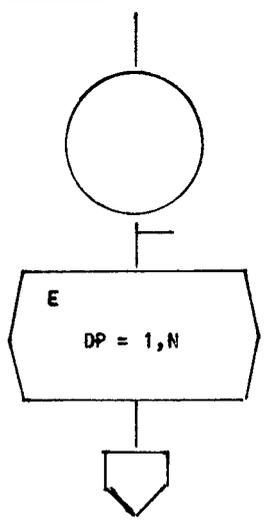
$MD*JJ*KK$ onde JJ = dep.
KK = dep.

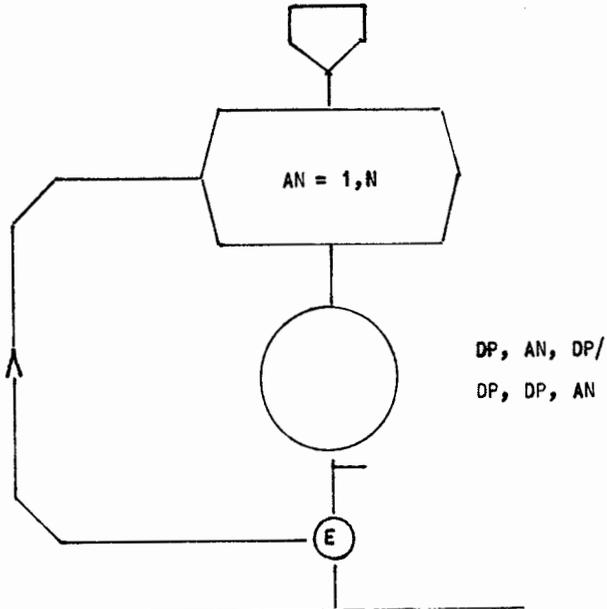




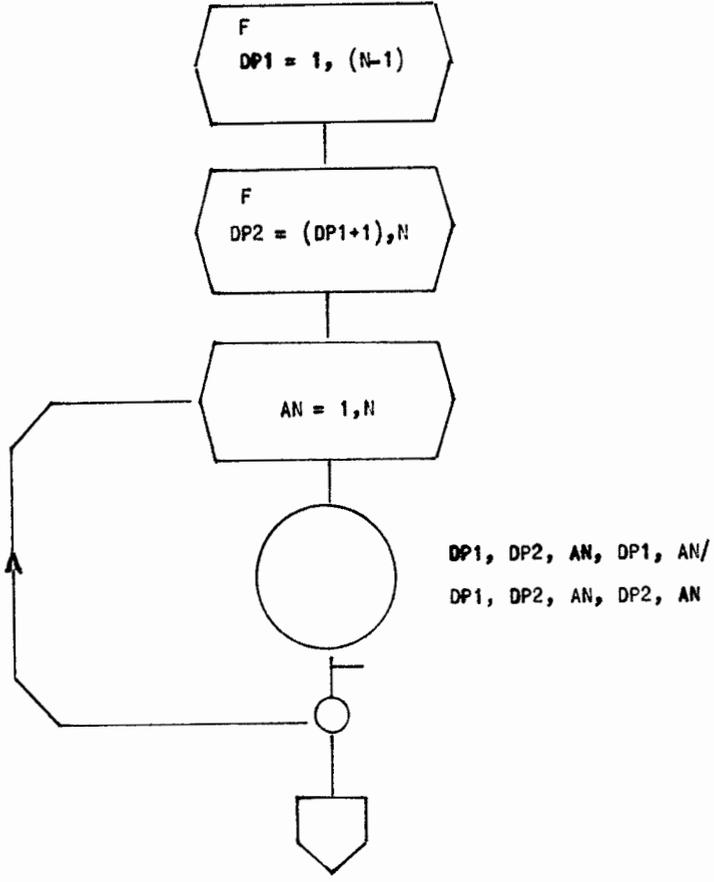
C. ---- MONTAGEM DA SEÇÃO "COLUMNS"

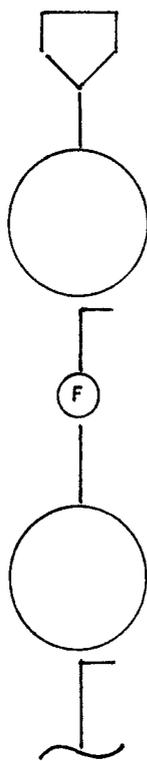
C1. --- RESTRIÇÕES TIPOS-1 E 2 ----





G. --- RESTRIÇÕES MODULARES





DP1, DP2, DP1, DP2,
DP1, DP2, DP2, DP1,

'END'

9. Caso - Exemplo

Foi desenvolvido, para efeito de avaliação, um exemplo-base em que se considera a ocupação funcional das novas instalações de uma empresa, admitida a organização composta de seis departamentos, e com o edifício-sede apropriando igual número de andares.*

As matrizes de suporte, para o problema, estão detalhadas nas tabelas seguintes:

9.1. Matriz de fluxos ao solo

Nº do Departam.	Fluxo (qualificado)
1	6
2	5
3	11
4	4
5	8
6	7

(*) - Esse exemplo - base será expandido para todas as situações gerais desenvolvidas nos capítulos posteriores.

i) - Número de Variáveis	66
ii) - Celas da Matriz	1782
iii) - Ocorrências não-nulas	282
iv) - Densidade	<u>.15</u>

III.2. CUSTOS DE INSTALAÇÃO

1. INSTALAÇÃO INICIAL

Paralelamente à minimização do esforço - deslocamento, que se constitui no objetivo inicial do presente modelo, é possível influenciar a solução quanto aos custos de instalação da unidade i , num pavimento i qualquer.

Considerando-se custos diferenciados de instalação, segundo o andar e o departamento, novos parâmetros (c_{ij}) podem ser atribuídos à função - objetivo, os quais, expressos em unidade comum aos demais, orientam a solução para um valor mínimo de ocorrências dessa grandeza.

Dois aspectos sobressaem no exposto acima:

- 1.1. Diferentemente de uma análise isolada dos deslocamentos, cujos fluxos independem da unidade padrão*, um objetivo composto (fluxos + instalações) demanda o estabelecimento preliminar de um fator de conversão, que associará "lógicamente" as unidades de deslocamento e de instalações.

Assim, se há fluxos inter - departamentais tomados em homens/mês, e há custos de instalação em cruzeiros, é necessário o fator de conversão que, aplicado ao primeiro, expresse o fenômeno em unidade comum ao segundo.

- 1.2. A consideração da ocupação dos andares pelos departamentos não pode, de per si, definir uma solução ótima para o Modelo, desde que os fluxos de deslocamento são permanentes (renováveis), enquanto a instalação das unidades é

(*) - Desde que são sempre mantidas as proporções de medida.

instantanea.

Com efeito, uma situação extrema de ocupação, por um período de apenas um dia, orientará a solução para a distribuição dos departamentos que represente o Custo Mínimo de Instalações, sem qualquer influência dos fluxos de deslocamento. Se, ao contrário, é atribuído ao Modelo um período de 200 anos, os custos de instalação inicial não influenciam significativamente o vetor - ótimo, que representará a medida mínima dos fluxos de deslocamento.

A função - objetivo, para o caso presente, assume :

$$\min z = \sum_{j=1}^n [f_{j0} \cdot \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})] + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (c_{ij} x_{ij}) \quad *$$

- Reagrupando :

$$\min z = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (c_{ij} + if_{j0}) * x_{ij} + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} * (y_{jk} + y_{kj}) \right]$$

1.3. Dimensionamento de períodos

É evidente que os diversos critérios de dimensionamento do t, não serão necessariamente ideais para a maioria dos casos. De fato, cada situação particular recomendará um critério de tratamento específico, mais adequado às características individuais do dado problema, daí porque, nesse trabalho, não se desenvolvem processos de determinação do período.

2. Custos de Re - Instalação

(*) - Com c_{ij} e f_{ij} em unidade comum.

O Modelo pode ainda ser aproveitado para re distribuição de Unidades já instaladas, desde que os custos de ocupação, no andar que o departamento já apropria, sejam considerados nulos.

A questão é:

- i) - "Para uma situação de ocupação já implantada, até que ponto justifica-se a redistribuição dos departamentos (para um esforço-deslocamento menor), tendo em vista os custos de instalação inerentes à mudança"?

E em paralelo,

- ii) - que nova distribuição ideal corresponde a uma redução dos deslocamentos* a pouco custo**, de forma a obter-se um vetor ótimo, representativo da minimização conjunta "Deslocamento/Reinstalação"?

Depreende-se, do exposto, que a solução do Modelo, nos casos de ocupação inicial, caracteriza uma e somente uma distribuição ótima para o problema***; enquanto os casos de re-instalação estarão influenciados pela distribuição anterior, e pela redução do Esforço-Deslocamento/Custos de Mudança, agregados à nova ocupação dos andares pelos Departamentos.

Assim, é possível que uma mesma matriz de fluxos de deslocamento e de custos de instalação, converjam para "ótimos" diferentes, a partir de duas distribuições iniciais diversas, e, ainda, que nenhum desses "ótimos" represente solução ideal para uma primeira ocupação das instalações.

(*) - Que não necessariamente decorrerão num valor mínimo.

(**) - Que, igualmente, não deve corresponder à distribuição de menor custo de instalações.

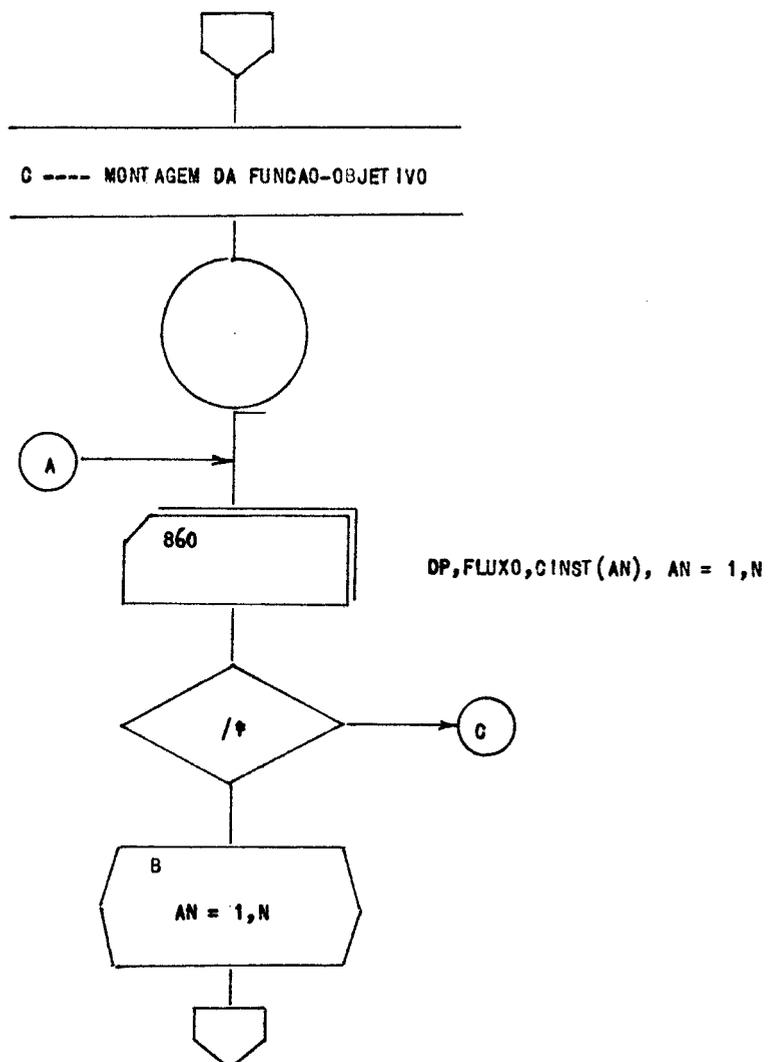
(***) - Sem considerar soluções indiferentes do simplex.

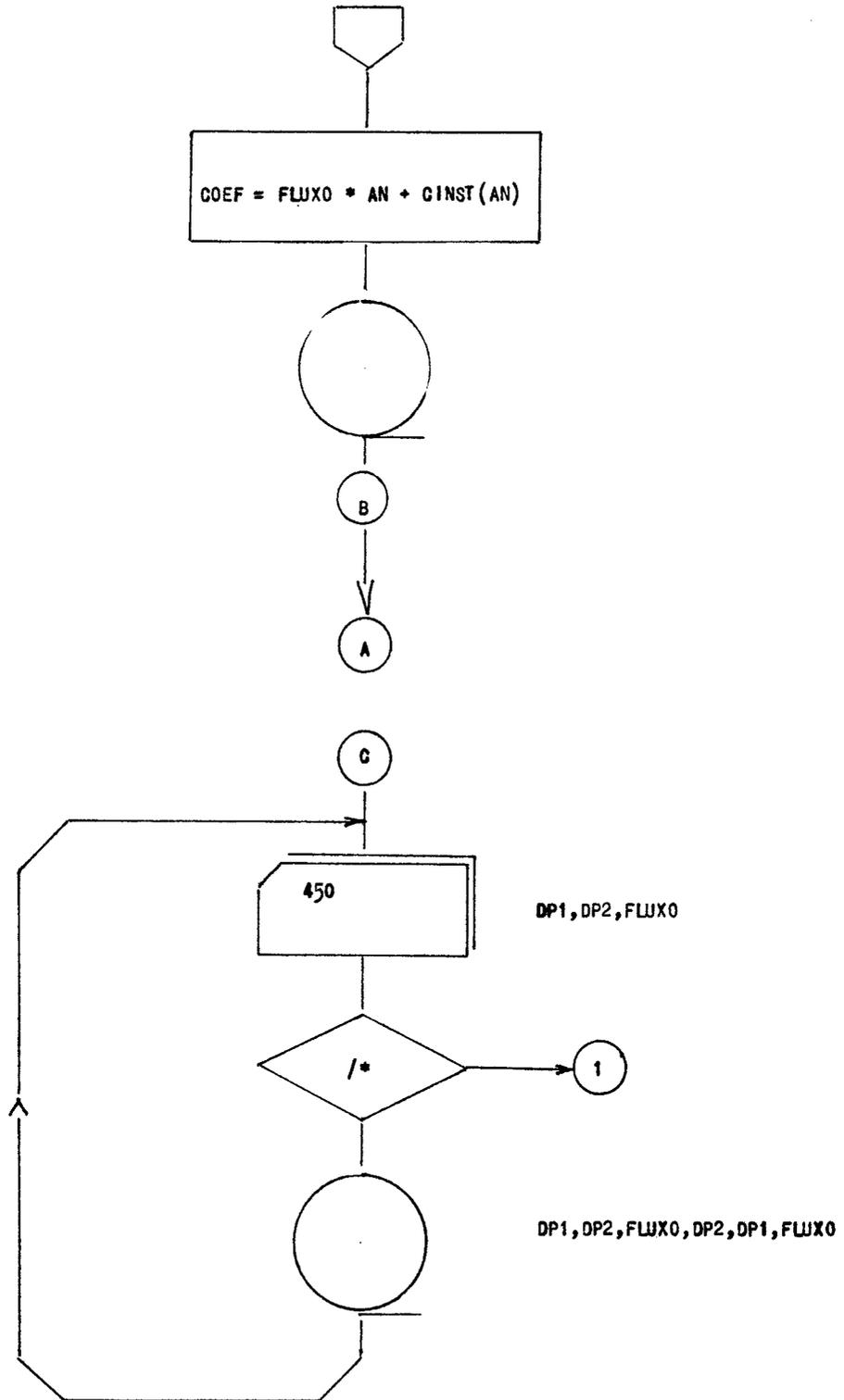
3. Alterações na Estrutura do Modelo

Tendo em vista os novos conceitos introduzidos junto aos custos de Instalação/Re-Instalação, a função-objetivo é expandida, pela anexação dos parâmetros C_{ij} , decorrendo em:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (c_{ij} + if_{io}) * x_{ij} + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} * (y_{jk} + y_{kj}) \right],$$

4. Sub-Rotina para geração da função-objetivo modificada





- ① - ROTINA DE MONTAGEM DA SEÇÃO COLUMNS - (Idem à apresentada no item
8)

5. Casos - Exemplos

5.1. Instalação Inicial

Pode ser utilizado, para efeito de comparação, o mesmo exemplo desenvolvido no processo de solução anterior, em que se considerava a minimização isolada do esforço-deslocamento.

A matriz de custos de instalação, a ser agregada, está representada a seguir :

DEP AND	1	2	3	4	5	6
1	2	3	1	2	5	4
2	4	5	3	2	9	2
3	4	7	6	8	3	1
4	3	5	9	1	7	2
5	1	1	6	5	4	7
6	6	2	3	9	7	2

5.2. Re-Instalação

Supondo que os custos de mudança do departamento j , (de um andar i para o departamento i'), correspondam ao custo inicial da instalação desse departamento no pavimento i' *, que são mantidas as matrizes de suporte utilizadas no exemplo-base do presente trabalho (fluxos-deslocamento), e considerando-se ainda a distribuição inicial abaixo, assume-se uma matriz de custos como apresentado em 5.2.2.

5.2.1. Distribuição Inicial dos Departamentos

ANDAR	DEPARTAMENTO
1	4
2	1
3	3
4	6
5	2
6	5

5.2.2. Custos de Re - Instalação

(*) - Esse disposto não necessariamente ocorre para todos os casos.

DEP AND	1	2	3	4	5	6
1	2	3	1		5	4
2		5	3	2	9	2
3	4	7		8	3	1
4	3	5	9	1	7	
5	1		6	5	4	7
6	6	2	3	9		2

III.3. CUSTOS DE ESPERA

1. PREMISSAS

O problema da alocação dos departamentos, pode ainda ser abordado a partir de uma redefinição dos condicionantes da decisão, ou seja, considerando-se uma minimização do tempo de espera por elevadores, independentemente do tempo de deslocamento, ou número de andares percorridos.

De fato, desde que os elevadores, em termos gerais, percorrem a distância total dos andares (qualquer que seja o número de pessoas transportadas), e tendo em vista as velocidades crescentes dos equipamentos mais modernos, o tempo de deslocamento, nos elevadores, seria pouco representativo em relação ao tempo de espera por elevadores.

O Modelo pode então ser reformulado, considerando idêntico efeito para um deslocamento de m pessoas por k ou j pavimentos da instalação.

Como, na maioria dos problemas, é possível associar-se ambos os aspectos (tempo de deslocamento e tempo de espera), a reestruturação do Modelo, com vistas ao tratamento atual, assume:

- i) - Andares adjacentes não implicam em tempo de espera e/ou deslocamento (uso de escadas)
- ii) - A utilização dos elevadores decorrerá sempre nos seguintes efeitos:
 - a) Tempo de Espera, que independe do número de andares a percorrer.
 - b) Tempo de deslocamento, que representa a medida do esforço-deslocamento analisada nas hipóteses anteriores desse trabalho.

2. Variáveis Adicionais

A fim de estabelecer-se os novos efeitos do Modelo, foram introduzidas as variáveis auxiliares w_{jk} , onde w assume a ocorrência de espera e deslocamento (zero ou valores inteiros e positivos)*, e jk corresponde ao índice dos departamentos onde ocorre o fluxo jk , ou fluxo ao solo ($k = 0$).

3. Restrições Adicionais

Desde que departamentos adjacentes são considerados sem efeito de espera ou deslocamento, é lícito introduzir restrições em que w_{jk} será azerada sempre que

$$[(y_{jk} + y_{kj}) - 1] = 0$$

A restrição, para fluxos departamentais, assume:

$$(I) \quad [(y_{jk} + y_{kj}) - 1] \leq n w_{jk}, \text{ onde}$$

$$j = [1, n-1], \quad k = [j+1, n]$$

Em se tratando de movimento ao solo, e tendo o primeiro pavimento como de acesso pela escada, as restrições, no caso, apresentam-se por:

$$\left[\sum_{i=1}^n (ix_{ij}) - 1 \right] \leq n w_{j0}, \text{ onde } j = [1, n]$$

(*) - Desenvolvimento posterior demonstra a assunção de valores binários para w_{jk} .

Re-agrupando :

$$(I) \quad y_{jk} + y_{kj} - nw_{jk} \leq 1, \quad \text{para } j = \{1, n-1\} \\ k = \{j+1, n\}$$

$$(II) \quad \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) - nw_{jo} \leq 1 \quad \text{para } j = \{1, n\}$$

Não é necessária a definição de limites superiores para w_{jk} ou w_{jo} (< 1), tendo em vista que o próprio objetivo (minimização) e os requisitos de programação inteira para a variável em epígrafe, implicam na assunção dos valores 0 e 1 pretendidos.

4. Componente Adicional da F.O.

Pelo novo conceito de otimização presente considerado, a função-objetivo receberá novos parâmetros (tempos de espera), e será alterada nos parâmetros de esforço-deslocamento, pela exclusão do efeito atribuído ao departamento locado no primeiro andar, ou aos departamentos adjacentes.

Para uma melhor percepção das alterações, a função-utilidade é distribuída (didaticamente) como se segue:

i) Componente "Deslocamento"

(*) - O MPSX, que demanda "BOUNDS" para as variáveis inteiras, receberá êsses limites formalizados.

$$\min Z' = D \cdot \sum_{j=1}^n [f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})]$$

ii) Componente "Espera" (A introduzir)

$$\min Z'' = E \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n [f_{jo} w_{jo}] + \sum_{k=j+1}^n [f_{jk} w_{jk}] \right\}$$

A criação dos parâmetros D e E, permite correlacionar, em unidade comum, o Tempo Unitário de Espera (por elevadores), e o Tempo Unitário de Deslocamento (por andar percorrido).

Depreende-se, das expressões acima, que o efeito-deslocamento atribuído aos fluxos do departamento no primeiro andar, bem como dos departamentos adjacentes, ainda permanecem considerados, o que vai de encontro aos requisitos da atual metodologia.

Como a minimização incorrerá sempre na asunção de 1 (w_{jk}) para as adjacências, e 0 para os demais casos, é lícito agregar o complemento da variável à componente (I) da F.O., conforme desenvolvido a seguir :

$$\min Z' = D \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n [f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})] \right\} -$$

$$- D \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n [f_{jo} (1-w_{jo})] + \sum_{k=j+1}^n [f_{jk} (1-w_{jk})] \right\}$$

(I) (II)

Pode-se observar que, ocorrendo adjacência, $w_{jk} = 0$ e $[-f_{jk}(1-w_{jk})] = -f_{jk}$. Desde que, em tais casos, o efeito-deslocamento anteriormente atribuído representava f_{jk}^* , a componente (II) estará anulando o efeito acima verificado.

Por outro lado, nos casos da não-adjacência, incorre-se $w_{jk} = 1$, e $[-f_{jk}(1-w_{jk})] = 0$, ou seja, apenas a componente verdadeira $[f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})]$ desse deslocamento, assumirá seu real efeito na função minimizante.

Caso se pretenda atribuir um novo custo ao deslocamento pelas escadas, basta introduzir o elemento $G * f_{jk}(w_{jk})$. Se G for representativo, é necessário amarrar w_{jk} em 0 nas adjacências, e não apenas induzi-lo na F.O., como se vem observando.

Há que considerar, nessa hipótese, o desgaste computacional decorrente da criação de novas restrições associadas a esse aspecto.

Reagrupando a Função Objetivo, em sua forma modificada, tem-se:

$$\min Z = D \left\{ \sum_{j=1}^n [f_{jo} * \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=2}^n f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})] - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n [f_{jk}(1-w_{jk})] \right\} + E \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n (f_{jk} w_{jk}) \right\} \quad . .$$

(*) - Pelo evento da adjacência, $y_{jk} + y_{kj} = 1$, e $[f_{jk} y_{jk} + f_{jk} y_{kj}] = f_{jk}$.

$$\begin{aligned} \min z = & \left\{ D \sum_{j=1}^n \left[f_{j0} \sum_{i=1}^n (ix_{j0}) + \sum_{k=2}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj}) \right] \right\} - \\ & - D \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n (f_{jk}) \right\} + D \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n f_{jk} w_{jk} \right\} + \\ & + E \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n (f_{jk} w_{jk}) \right\}, \text{ onde } k=0 \text{ ou } k=j \end{aligned}$$

Para $\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n (f_{jk})$ constante, e por decorrência, sem capacidade de efeito na condução da solução-ótima, a função-objetivo assume :

$$\begin{aligned} \min z = & D \left\{ \sum_{j=1}^n \left[f_{j0} * \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj}) \right] \right\} + \\ & + \{ (D+E) \left[\sum_{j=1}^n (f_{j0} w_{j0} + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} w_{jk}) \right] \} \end{aligned}$$

É evidente que, segundo cada problema específico, os parâmetros D ou E podem ser azerados, quando então a solução será conduzida para a ocorrência mínima do Tempo de Espera ou do Esfôrço-Deslocamento Total, considerados isoladamente.

5. Resumo da nova estrutura do Modelo

5.1. Função-Objetivo.

$$\min z = D \left\{ \sum_{j=1}^n (f_{j0} \sum_{i=1}^n (ix_{ij})) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} (y_{jk} + y_{kj}) \right\} +$$

$$+ \{ (D+E) \left(\sum_{j=1}^n (f_{j0} w_{j0} + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} w_{jk}) \right) \}$$

5.2. Restrições

5.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos:

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij}) = 1, \quad \text{para } j = [1, n]$$

5.2.2. Equilíbrio da Ocupação dos Andares

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij}) = 1, \quad \text{para } i = [1, n]$$

5.2.3. Restrições Modulares

$$\sum_{i=1}^n (i(x_{ij} - x_{ik})) = (y_{jk} + y_{kj}), \quad \text{para}$$

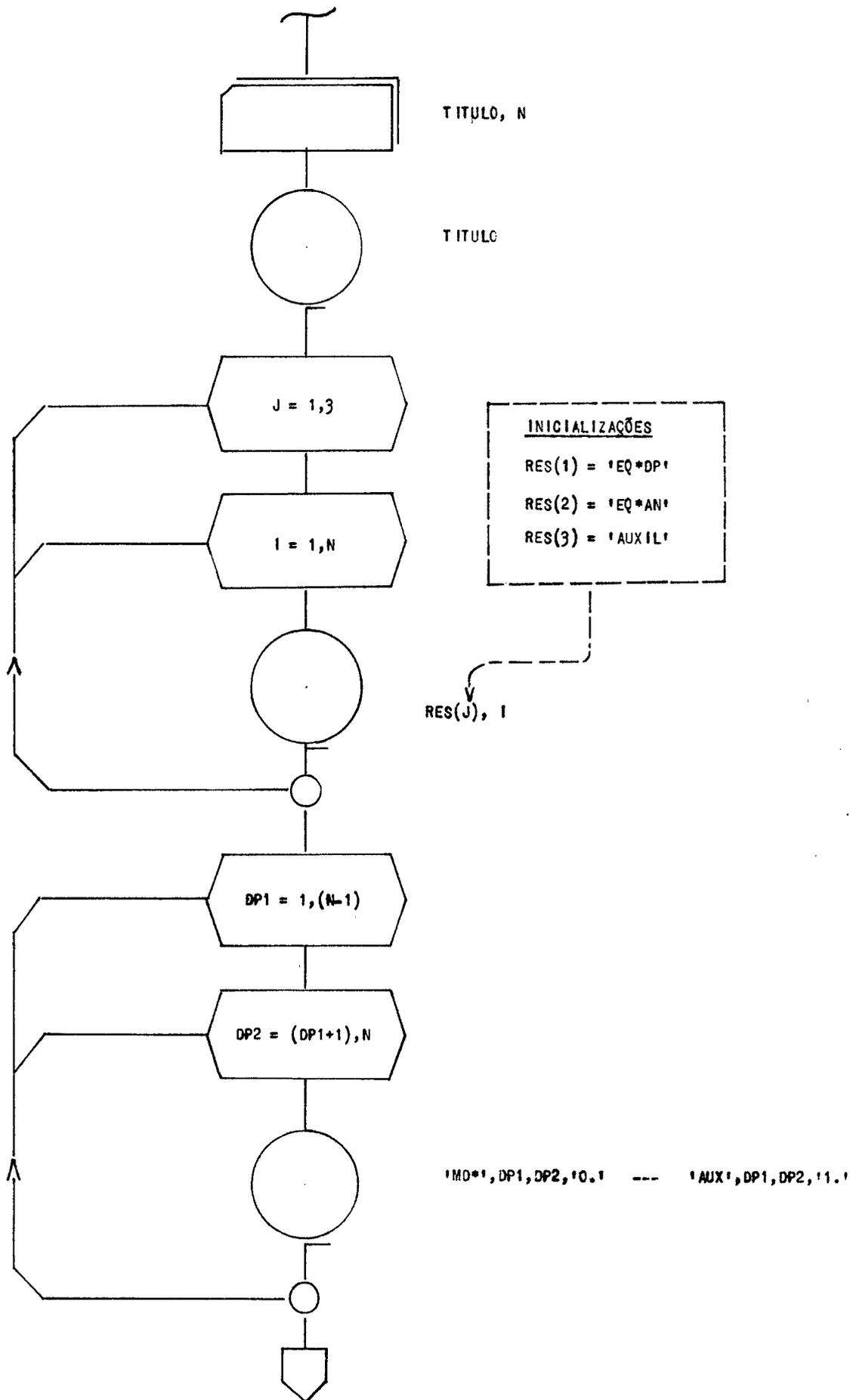
$$j = [1, n-1], \quad k = [j+1, n]$$

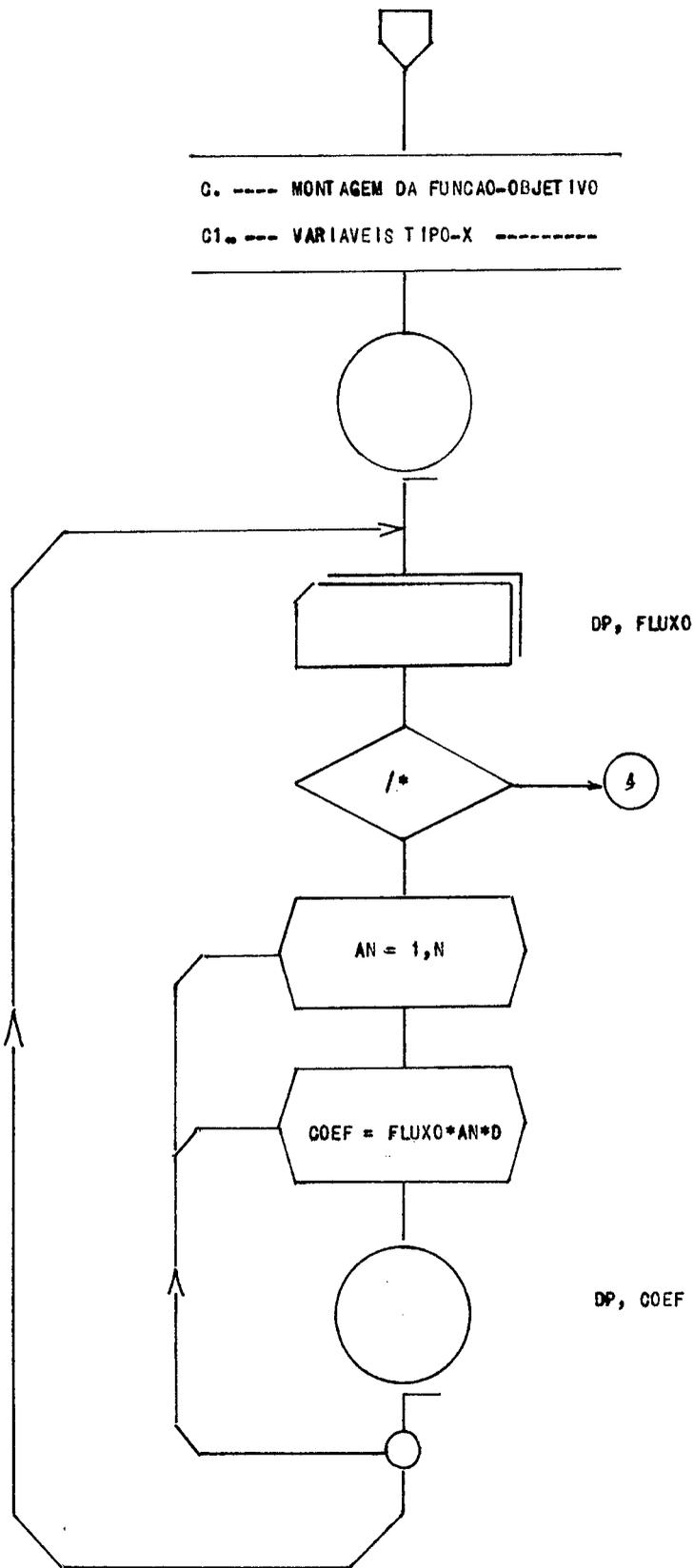
5.2.4. Restrições Auxiliares

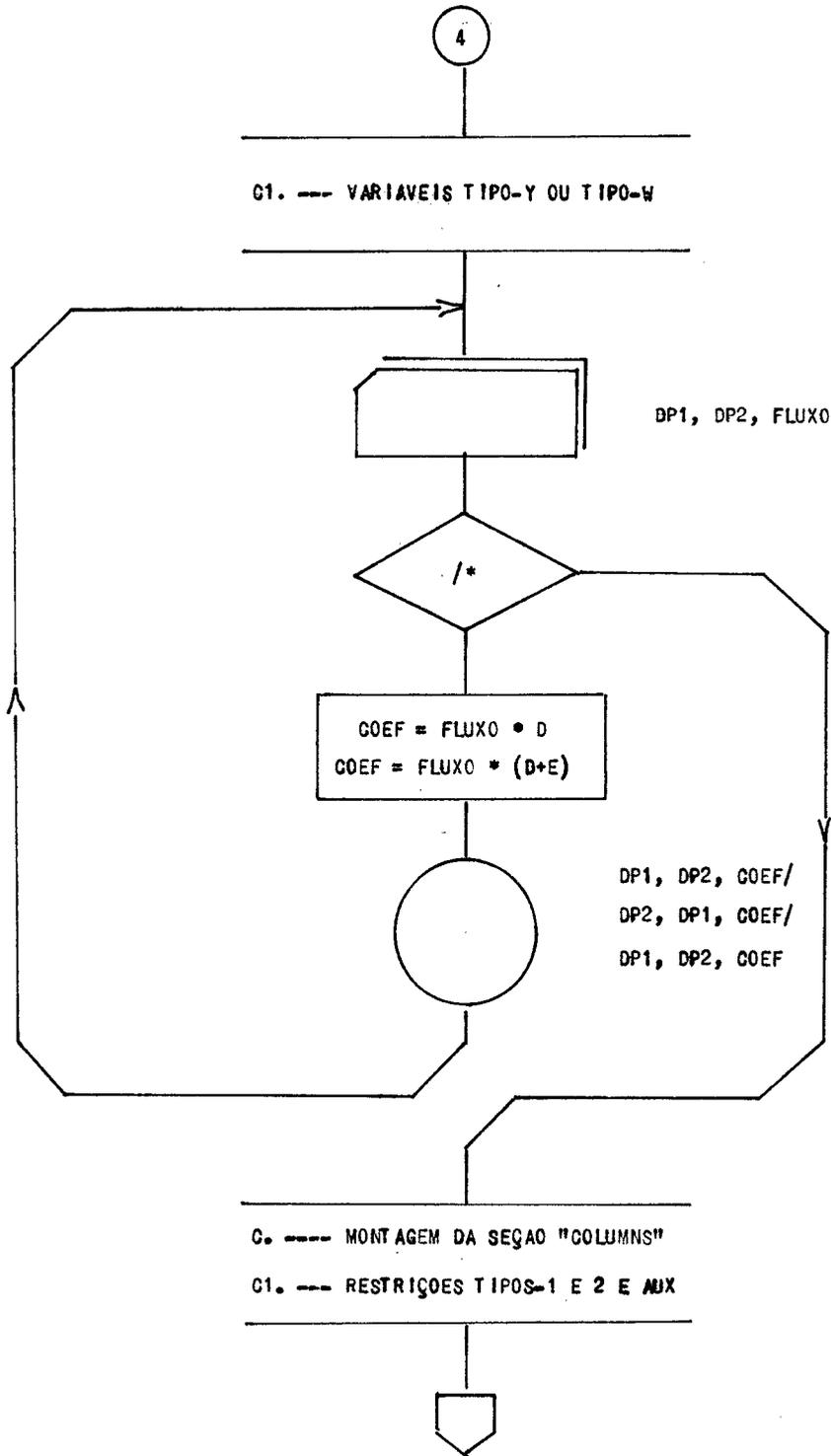
$$(I) \quad y_{jk} + y_{kj} - nw_{jk} \leq 1, \quad \text{para } j = [1, n-1] \\ k = [j+1, n]$$

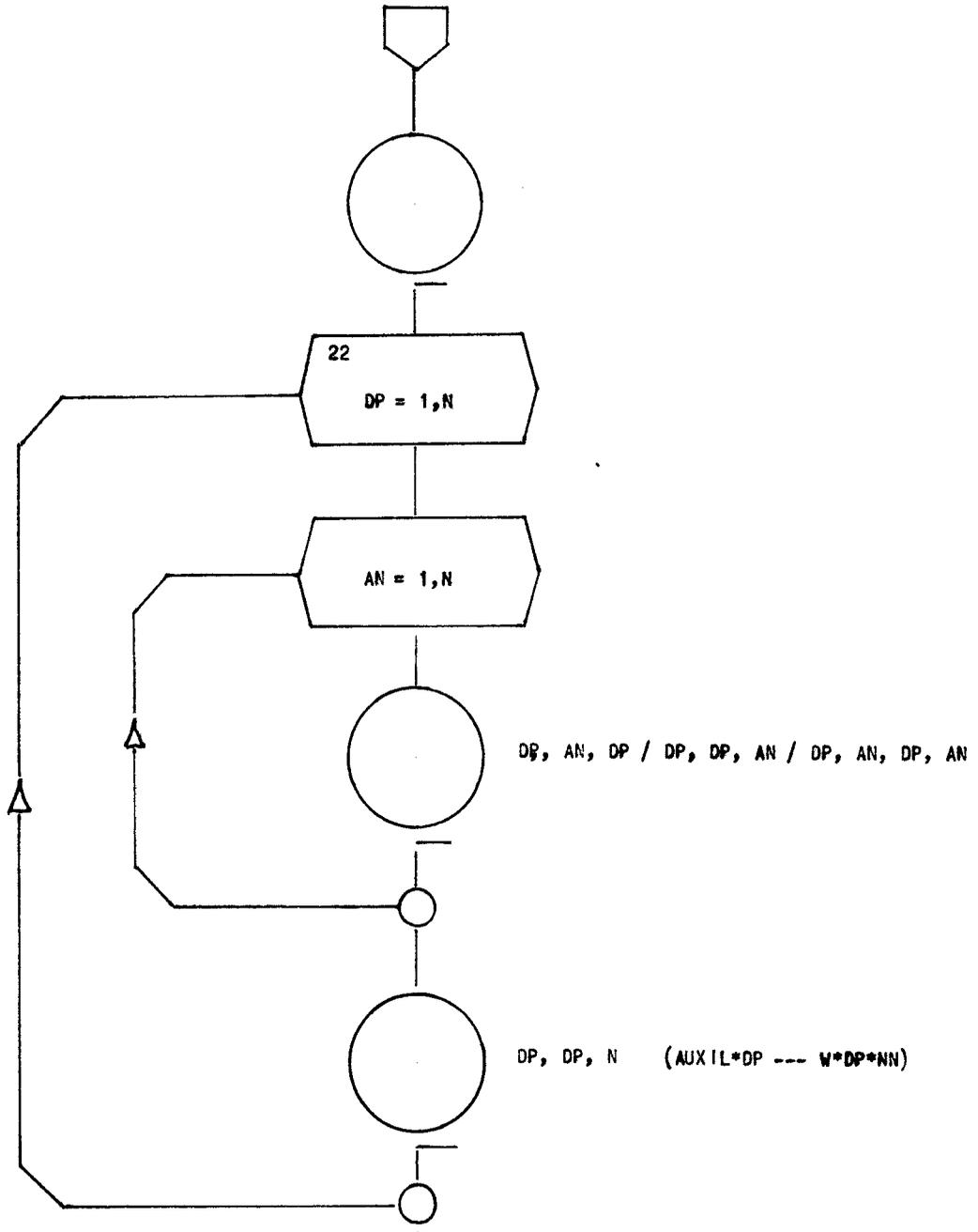
$$(II) \quad \sum_{i=1}^n (ix_{ij}) - nw_{jo} \leq 1, \quad \text{para } j = [1, n]$$

6. MONTAGEM DAS RESTRIÇÕES E FUNÇÃO OBJETIVO

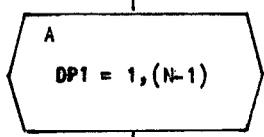


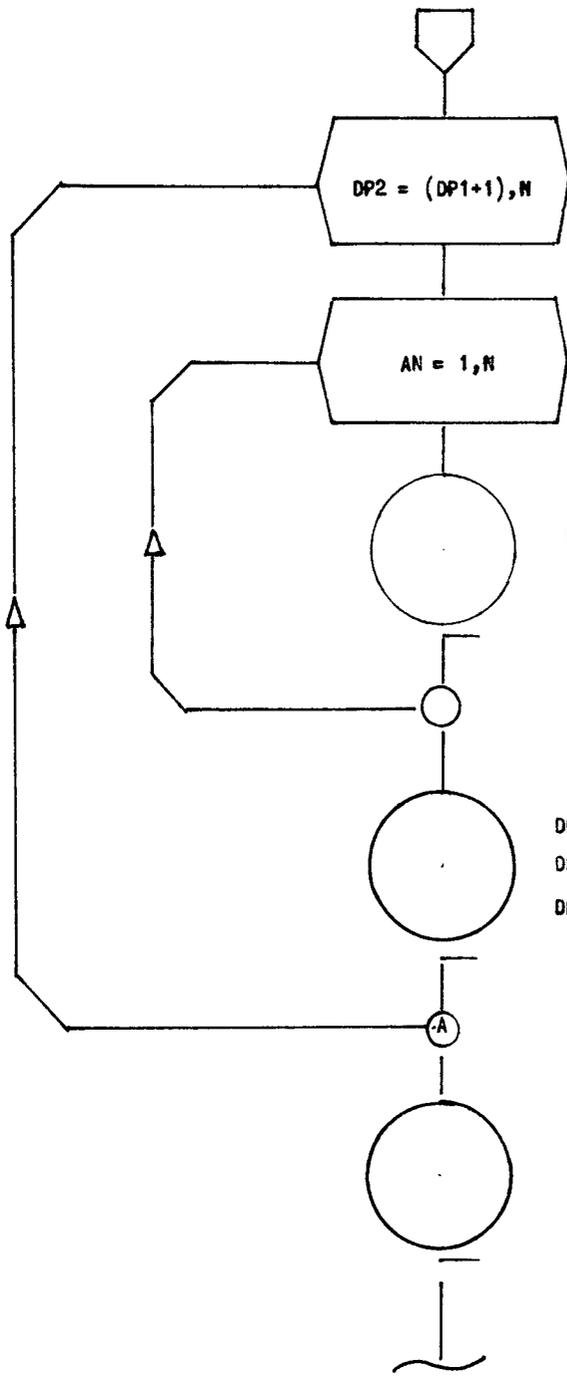






C1. --- RESTRIÇÕES MODULARES E AUXILIAR (P/VAR Y)





DP1, DP2, AN, DP1, AN / DP1, DP2, AN, DP2, AN

DP1, DP2, DP1, DP2, DP1, DP2, DP2, DP1 /
 DP1, DP2, DP2, DP1, DP1, DP2, DP2, DP1 /
 DP1, DP2, DP1, DP2, N

IV - RESTRIÇÕES ESPECIAIS

IV.1. JUSTIFICATIVA

Embora o escôpo de restrições apresentadas no ítem III.2.5. anterior já seja suficiente à viabilização das soluções do problema, é possível ainda influenciar o tempo de seu processamento em computador, pela introdução de novas expressões restritivas, que implicarão numa menor defasagem entre o "ótimo-contínuo" e o "ótimo-inteiro" efetivamente produzido.

De fato, a própria observação dos exemplos já desenvolvidos até o momento, permite estabelecer que o vetor-ótimo, atingido

no processo de solução "contínua", está orientado para uma distribuição fracionária dos departamentos, (segundo os andares), que implique em distâncias médias do solo* minimamente dispersas. O exemplo a seguir, ilustra formalmente a tendência em discussão.

SOLUÇÃO - I	SOLUÇÃO - II
$x_{11} = .5$	$x_{11} = 1.$
$x_{13} = .5$	$x_{22} = 1.$
$x_{31} = .5$	$x_{33} = 1.$
$x_{33} = .5$	
$x_{22} = 1.$	

Ambas as composições listadas no exemplo, representam soluções viáveis do simplex "contínuo", desde que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ \bullet x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ \bullet x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{array} \right\} \text{Eq. dos dep. é atendido}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ \bullet x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ \bullet x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{array} \right\} \text{Eq. dos and. é atendido}$$

(*) - Distância Média = $\sum_{i=1}^n (ix_{ij})$

Entretanto, pode-se observar que as distâncias médias ao solo, na Solução-I, coincidem com um mesmo valor, dado que:

$$D_1 = 1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} = .5 + 1.5 = 2$$

$$D_2 = 1x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} = 2$$

$$D_3 = 1x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} = .5 + 1.5 = 2$$

Considerando-se a segunda componente da F. O. que avalia os efeitos dos fluxos e distâncias dos departamentos entre si, e ainda, que essa medida representa o módulo da diferença de seus afastamentos ao solo, é conclusivo:

$$i) \sum_{i=1}^n i(x_{ij} - x_{ij}) = (y_{jk} - y_{kj}) = \phi$$

$$ii) f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})^* = \phi, \text{ ou seja:}$$

- No processo de solução "contínua", o Modelo é conduzido a um vetor onde os fluxos inter-departamentais não são considerados, pela atribuição de valores a x_{ij} que implicam numa mesma distância média do solo, para todo departamento j.

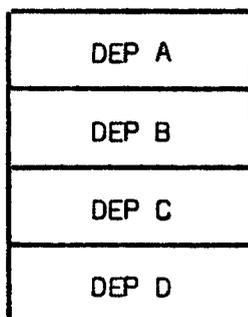
Pretende-se, com a introdução de "restrições indutivas", reduzir essa defazagem entre o vetor ótimo "contínuo" e a solução inteira posterior, i.e., melhorar a eficiência global do programa, pela a-

(* - Por indução de mínimo.

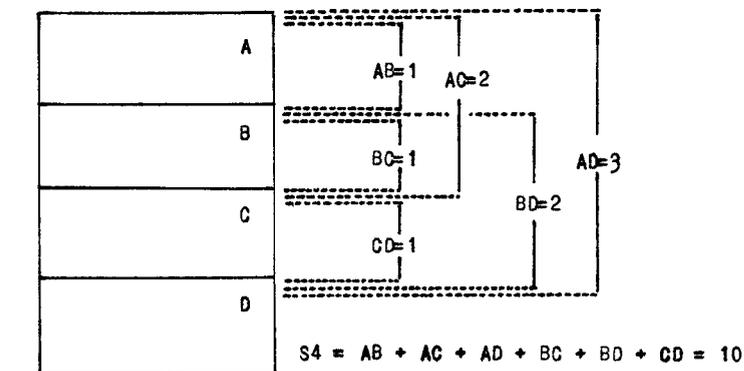
proximação dos dois "ótimos".*

Assim, o desenvolvimento a seguir procura estabelecer relações que, embora não necessárias ao cerceamento do Modelo, re-
presentem uma tendência de seu comportamento, com vistas à solução ótima inte-
ra.

Considerou-se, em princípio, um vetor solu-
ção viável no problema contínuo, e que atenda aos requisitos de programação dis-
creta para uma instalação de quatro pavimentos quaisquer. (Essa associação, a
um exemplo, permite a percepção mais imediata do fato).



A soma dos afastamentos inter-setoriais
(desconsiderados os fluxos), é uma medida constante (e igual a 10 para o caso
em estudo - $n = 4$).



(*) - Desde que, como se sabe, a convergência do processo contínuo é mais acele-
rada que a do caso discreto.

A expressão da soma (por reagrupamento), é também definida como

$$S_4 = 1(3) + 2(3-1) + 3(3-2)$$

Generalizando-se* e induzindo para n pavimentos:

$$S_n = 1(n-1) + 2(n-2) + \dots + (n-1)(n-n+1)$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) \quad (I)$$

2. Restrições Adicionais:

Com base na expressão (I) acima,

$$S = [(y_{12} - y_{21}) + \dots + (y_{1n} - y_{n1})] + [(y_{23} - y_{32}) + \dots + (y_{2n} - y_{n2})] + \dots + [(y_{n-1,n} - y_{n,n-1})], \text{ ou}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (y_{jk} - y_{kj}) = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)$$

|←const.→|

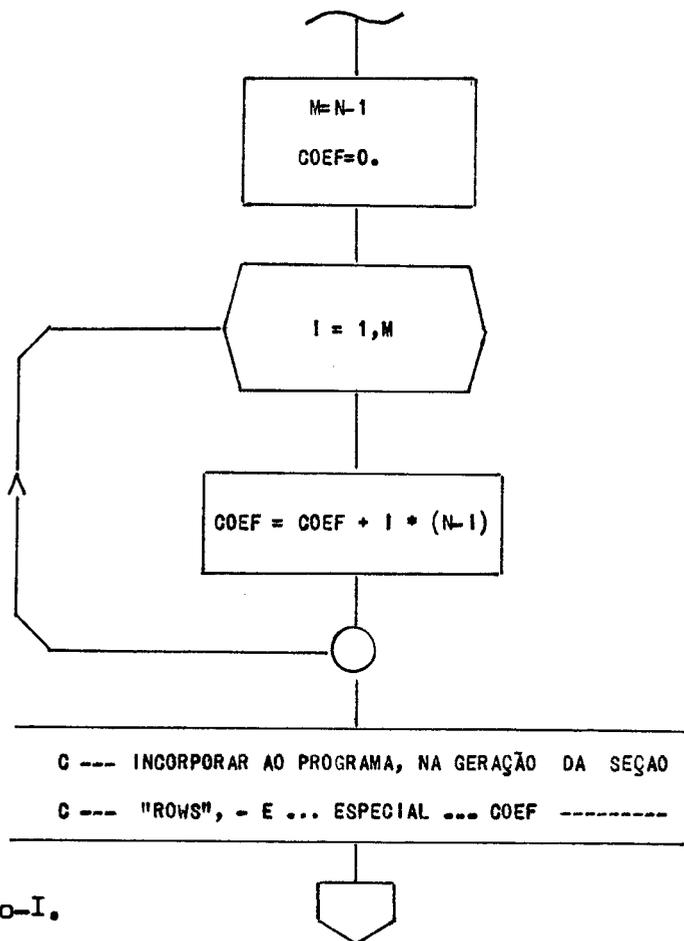
Por outro lado, os conceitos emitidos na

(*) - Por tratar-se de comportamento evidente, não será promovida a respectiva demonstração teórica.

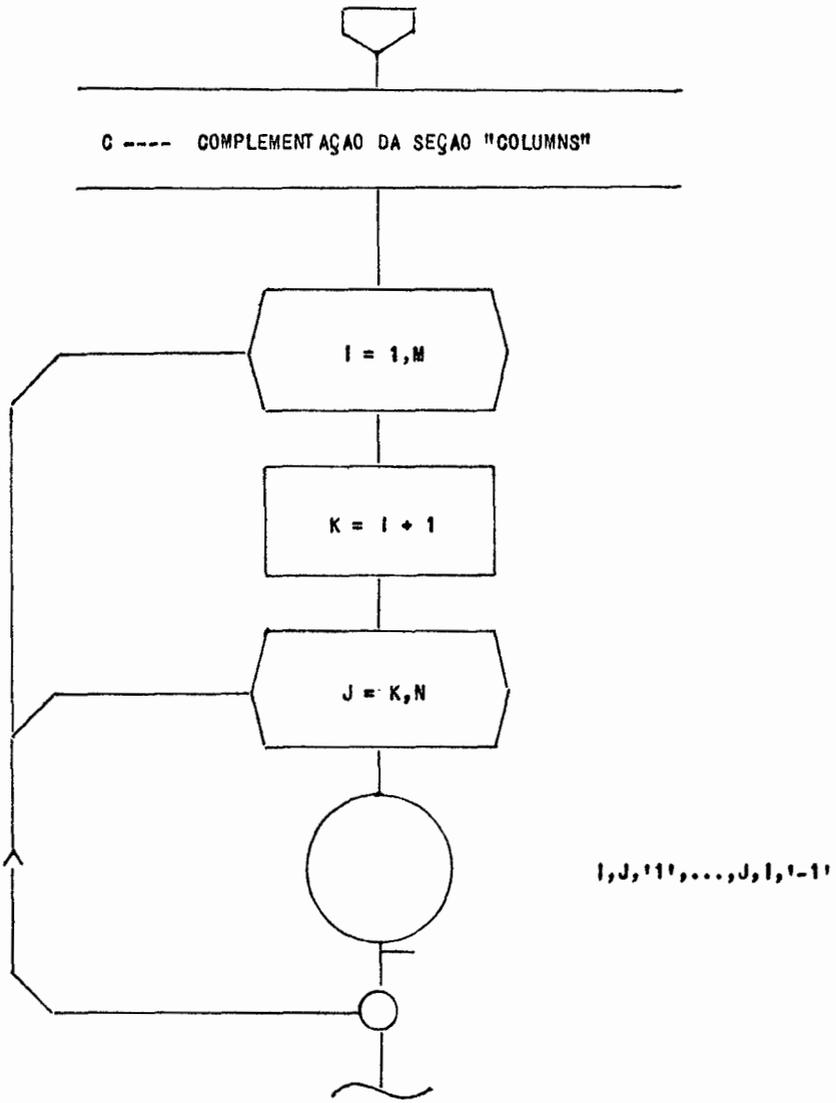
Metodologia de Enquadramento do Problema à Programação Quadrática*, no que refere às suas "restrições cumulativas", também são válidas como processo de aproximação dos dois "ótimos", e podem, de acordo com as características individuais de cada situação, ser aproveitados.

3. Sub-rotina de geração das restrições-especiais

No fluxograma a seguir, está considerada apenas a geração da restrição especial-II, dado que as demais serão englobadas na sub-rotina de montagem do problema-quadrático.



(*) - Vide Anexo-I.



V) - PROGRAMAÇÃO-BIVALENTE

1. Tendo em vista os frequentes aperfeiçoamentos de alguns algoritmos de resolução da P.I., é possível reformular o Modelo de Alocações, pela utilização de processos específicos de programação-binária (Ballas), cuja convergência é comprovadamente mais rápida.

Assim, de acordo com o "hardware" e o "software" disponível a um usuário do Modelo, as variáveis serão introduzidas na forma binária, ou discreta em geral, sendo que, no primeiro caso, devem ser consideradas as alterações seguintes:

1.2. Alterações do Modelo

Atribuindo a uma classificação das variáveis de decisões anteriores os tipos I e II, (distâncias dos departamentos ao solo e distâncias dos departamentos entre si), é evidente que as primeiras já atendem aos requisitos de programação bi-valente, dado que assumem apenas os valores 1 (ocupação do andar pelo departamento) e 0 (caso contrário).

As variáveis tipo-II, embora não restringidas de forma direta, são também induzidas, pelo escopo de restrições, a um comportamento discreto. Especificamente, seu campo de variação é o intervalo inteiro entre 1 e (n-1).

Pode-se substituir cada par de variáveis (y_{de} e y_{ed}), pelo conjunto de alternativas bivalentes, y'_{dei} , y'_{edi} , onde $i = 1, \dots, (n-1)$, significativas da assunção, (ou não), de uma distância de terminada (constante), para cada par de departamentos.

Exemplificando, $y_{bc7} = 1^*$ indica que, para os departamentos B e C, a distância de 7 andares foi assumida. Igualmente,

(*) - Por facilidade didática, a partir desse ponto todos os y' são descritos como y , considerando-se ressalvada a diferença entre ambos,

$y_{bc3} = \emptyset$, indica que não ocorre uma distância de 3 pavimentos entre os departamentos BC.

As "restrições-modulares" de distância interdepartamental, representariam então :

$$\sum_{i=1}^n i(x_{ij} - x_{ki}) = \{(y_{jk1} - y_{kj1}) + 2(y_{jk2} - y_{kj2}) + \dots + (n-1)(y_{jk(n-1)} - y_{kj(n-1)})\} \quad \therefore$$

$\sum_{i=1}^n (i(x_{ji} - x_{ki})) = \sum_{i=1}^n (i(y_{jki} - y_{kji})) \quad , \quad \text{para}$ $j = [1, n-1] \quad , \quad k = [j+1, n]$

4. Restrições Adicionais

Novamente seriam necessárias restrições aditivas, que garantissem a característica de mútua exclusividade, inerente a cada uma das igualdades acima. De fato, se num exemplo $y_{ao} = 7$ e $y_{bo} = 1$, o vetor $y'_{abl} = 1$, $y'_{ab2} = 1$ e $y_{ab3} = 1$, satisfaz ao conjunto de restrições enumeradas, desde que

$$1(y_{abl}) + 2(y_{ab2}) + 3(y_{ab3}) = 1 * 1 + 2 * 1 + 3 * 1 = 6$$

Depreende-se a necessidade, também nesse caso, dos requisitos de mútua exclusividade já introduzidos para as variáveis x_{ij} .

A restrição, necessária e suficiente, representar-se-ia, então, por :

$$\sum_{i=1}^n (y_{jki}) = 1, \text{ para } j = [\bar{1}, n-1], k = [\bar{j}+1, n]$$

Há que considerar, entretanto :

- i) - que o efeito, na função utilidade, é idêntico para ambos os procedimentos, ($y_{ab1} = 0 ; y_{ab2} = 0 ; \dots y_{ab7} = 1$ e $y_{ab1} = 1 ; y_{ab2} = 1 ; y_{ab3} = 1 ; \dots ; y_{ab7} = 0$), e assim, não se justificam essas restrições aditivas.
- ii) - uma carga adicional de variáveis, decorrente da substituição de cada y_{jp} por n variáveis tipo y'_{jkm} ou seja; a expansão do modelo em cerca de n vezes o número de colunas originais.

5. Redefinição das variáveis y_{abi}

Pretende-se, pois, utilizar um processo auxiliar de composição da variável, similar à representação binária dos números inteiros em computador. Se y_{jk} pode assumir valores discretos entre 1 e 15, por exemplo, definimos

$$y_{jk} = \sum_{m=1}^4 (2^{m-1} x_{mjk})$$

Assim,

	m = 4	m = 3	m = 2	m = 1
$y_{jk} = 1$	0	0	0	1
$y_{jk} = 2$	0	0	1	0
$y_{jk} = 3$	0	0	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$y_{jk} = 14$	1	1	1	0
$y_{jk} = 15$	1	1	1	1

As restrições-modulares estão pois reformuladas para

$$\sum_{i=1}^n (i(x_{ji} - x_{ki})) = \sum_{i=1}^t (2^{i-1}(y'_{jki} - y'_{kji}))$$

onde t é a menor potência de 2 que satisfaz a $2^t \geq n^*$

As restrições de mútua-exclusividade, no caso, passam a redundantes, e podem ser eliminadas.

5. Função-Objetivo

A função-objetivo, ajustada para a nova caracterização das variáveis y'_{jki} , constitui:

$$\min z = \sum_{j=1}^n (f_{jo} \sum_{i=1}^n (ix_{ij})) + \sum_{k=j+1}^n f_{jk} \sum_{m=1}^t 2^{m-1} (y_{jkm} + y_{kjm})$$

6. Resumo da Estrutura do Modelo

6.1. Função-Objetivo

Idem 5

(*) - Dado que a menor distância entre departamentos é $(n-1)$.

6.2. Restrições

6.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } j = [1, n]$$

6.2.2. Equilíbrio da ocupação dos andares pelas parcelas de departamento

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij}) = 1, \text{ para } i = [1, n]$$

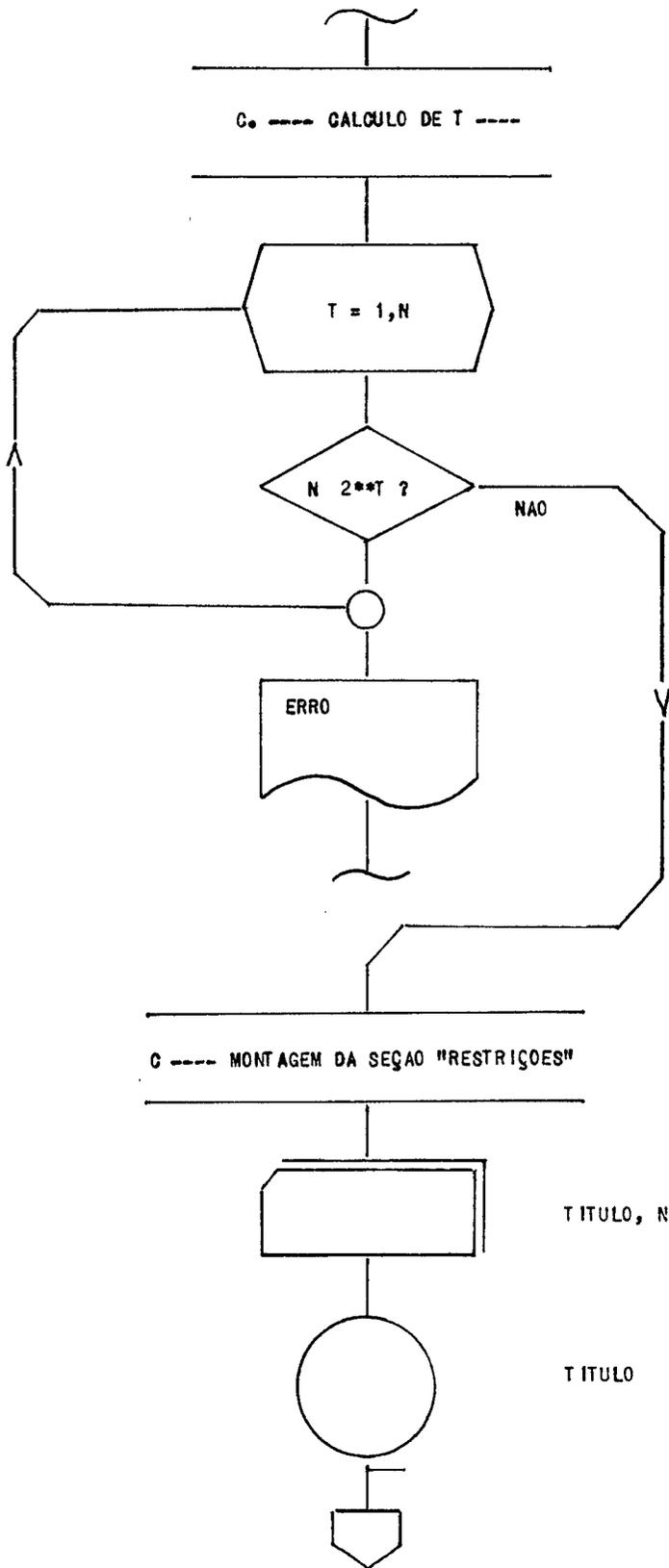
6.2.3. Restrições Modulares

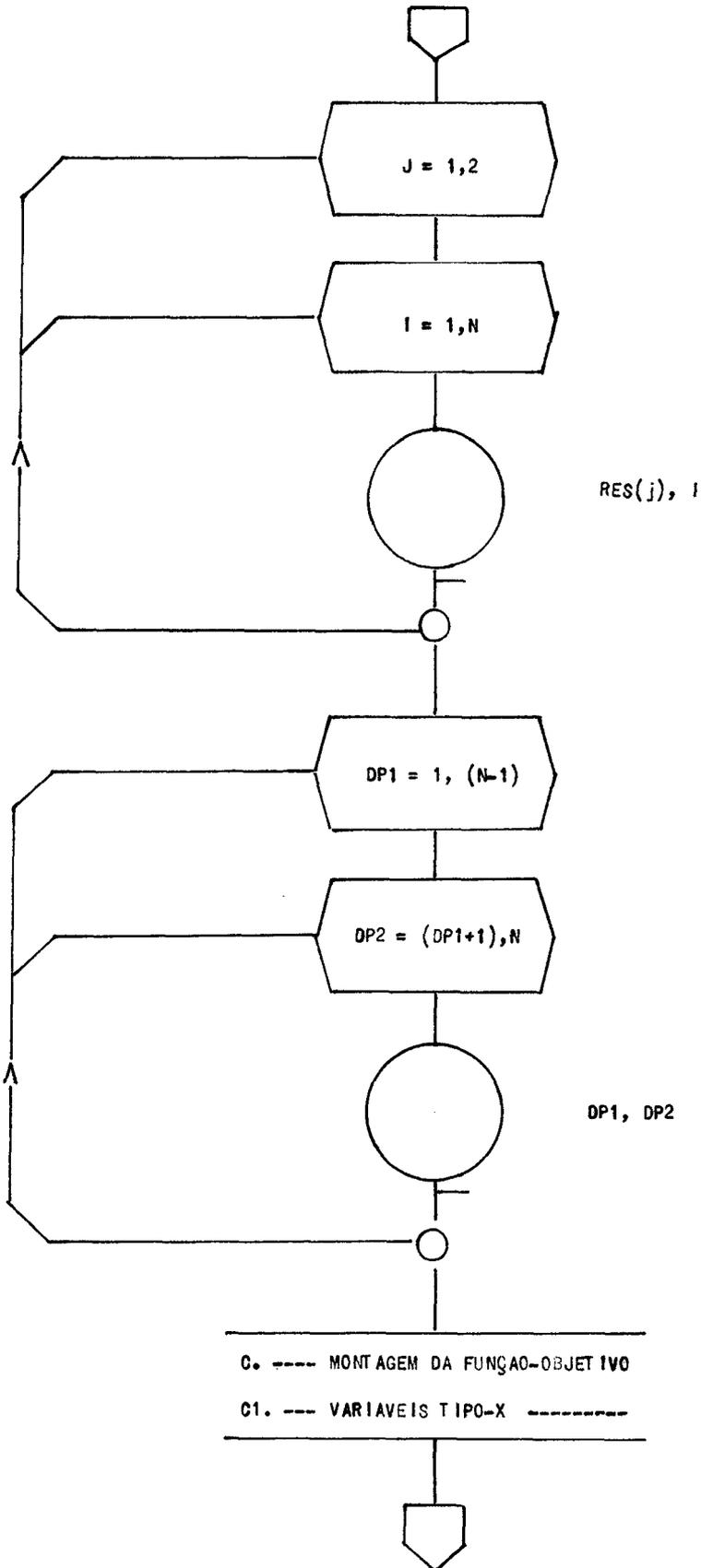
$$\sum_{i=1}^n (i(x_{ji} - x_{ki})) = \sum_{m=1}^t (2^{m-1} (y_{jkm} - y_{kjm})) , \text{ para}$$

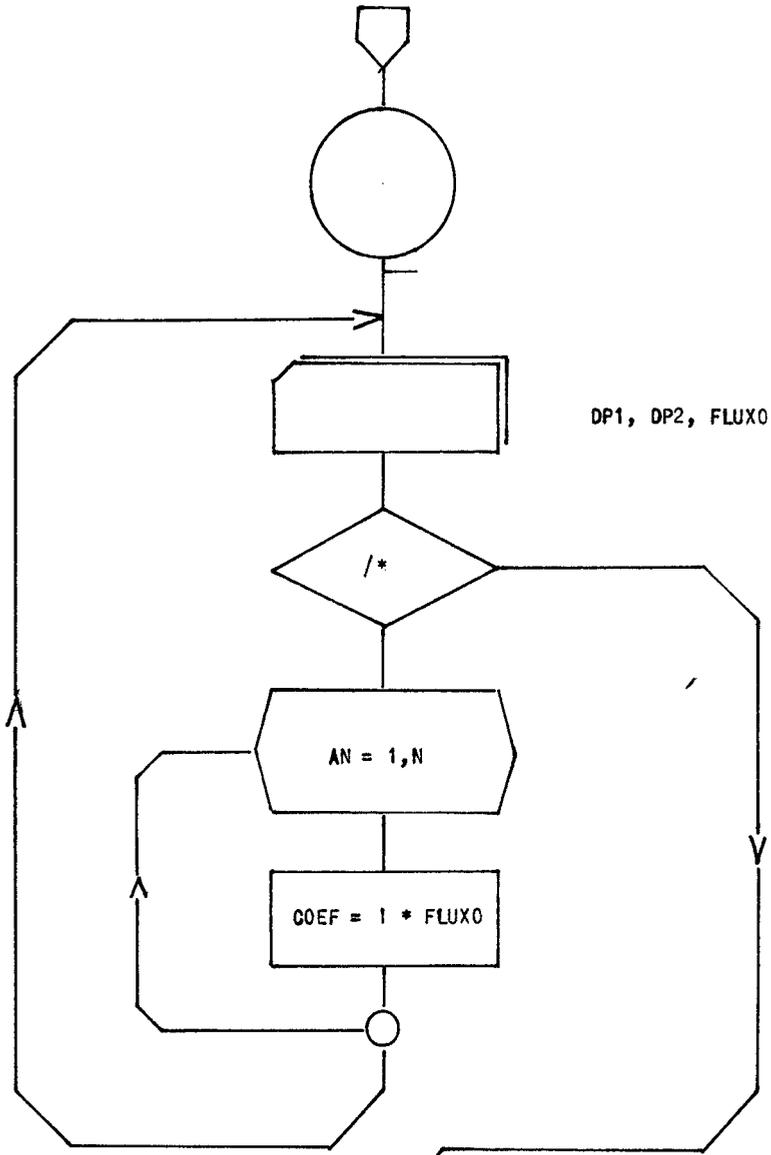
$$j = [1, n-1] ; k = [j+1, n]$$

6.3. Tipos de variáveis: Bivalentes

7. Sub-rotina de montagem das restrições, na forma atual

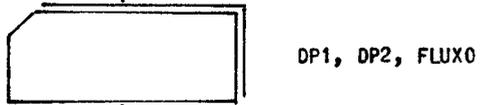


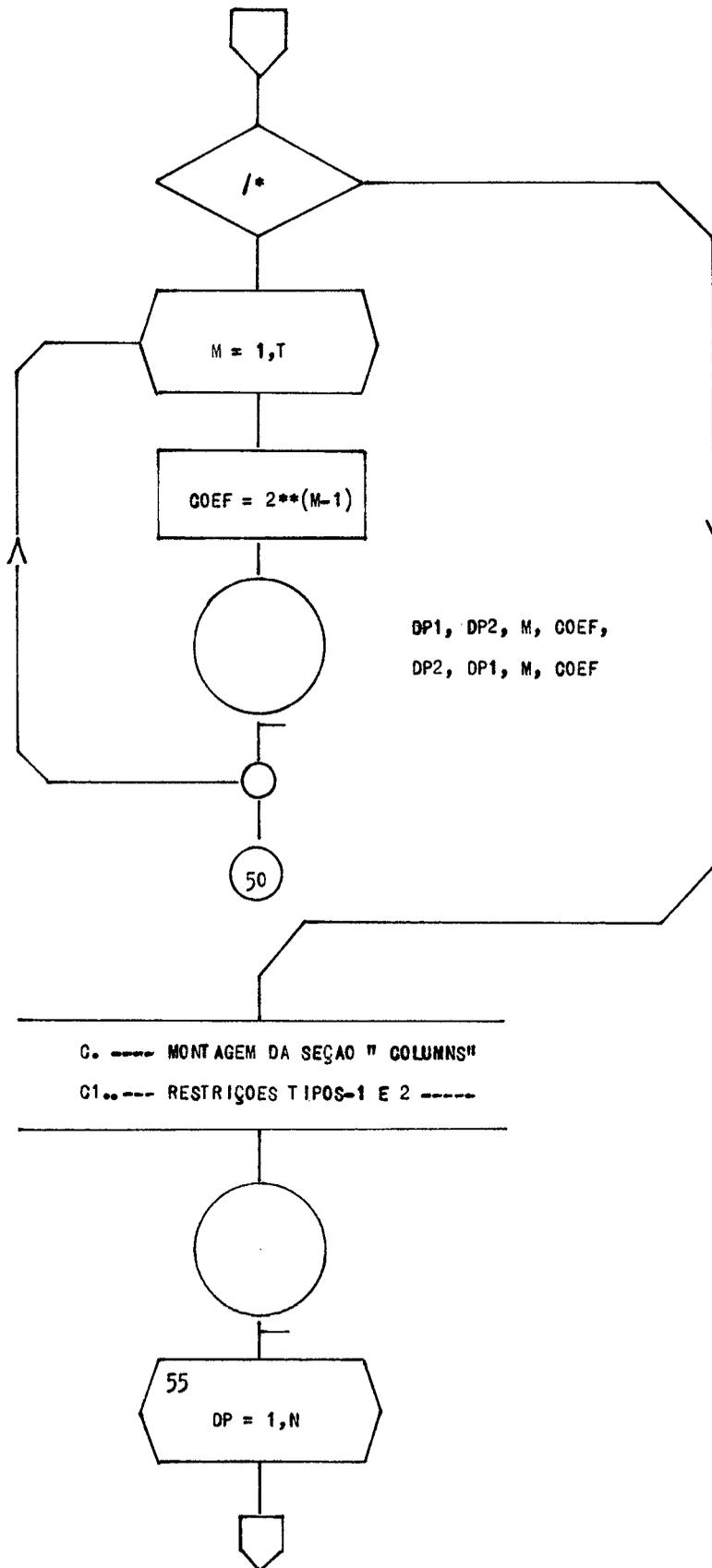


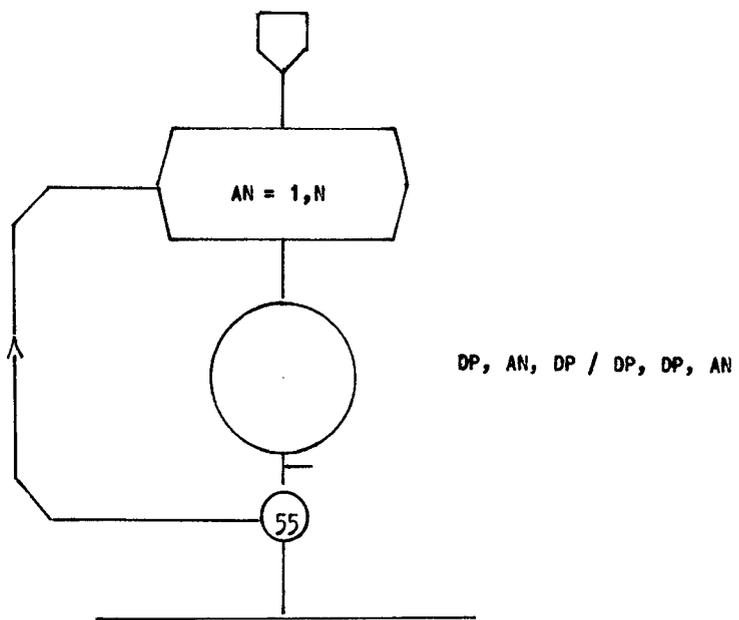


C2. --- VARIAVEIS TIPO-Y

48

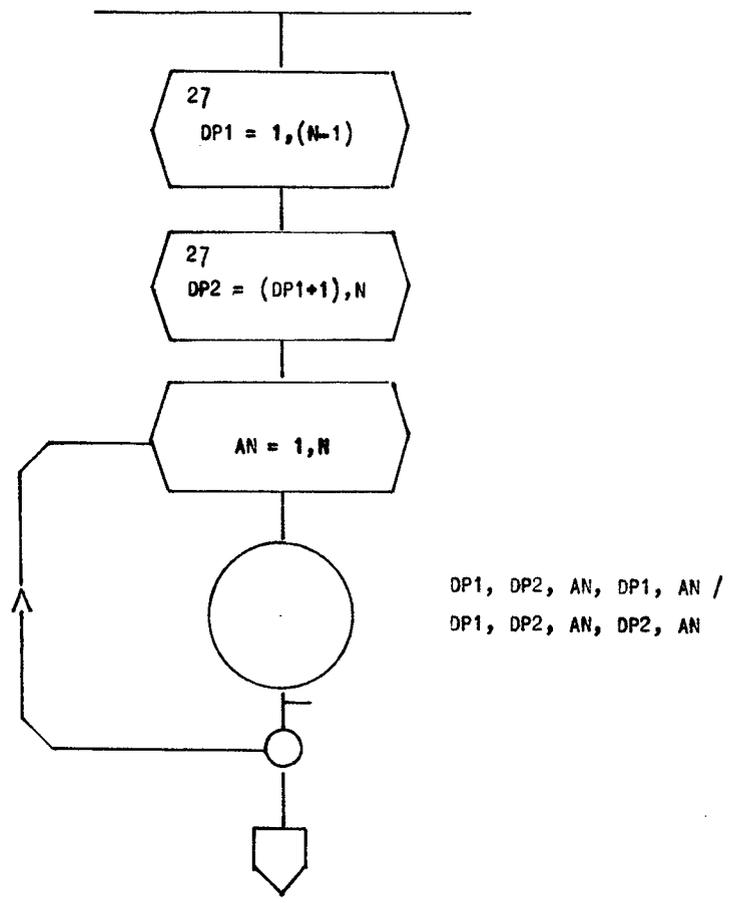




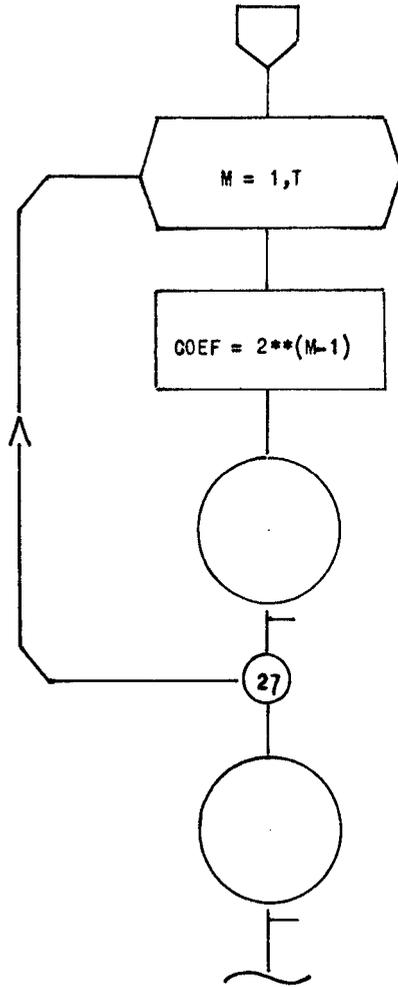


DP, AN, DP / DP, DP, AN

Q2. ----- RESTRICÖES MODULARES



DP1, DP2, AN, DP1, AN /
DP1, DP2, AN, DP2, AN



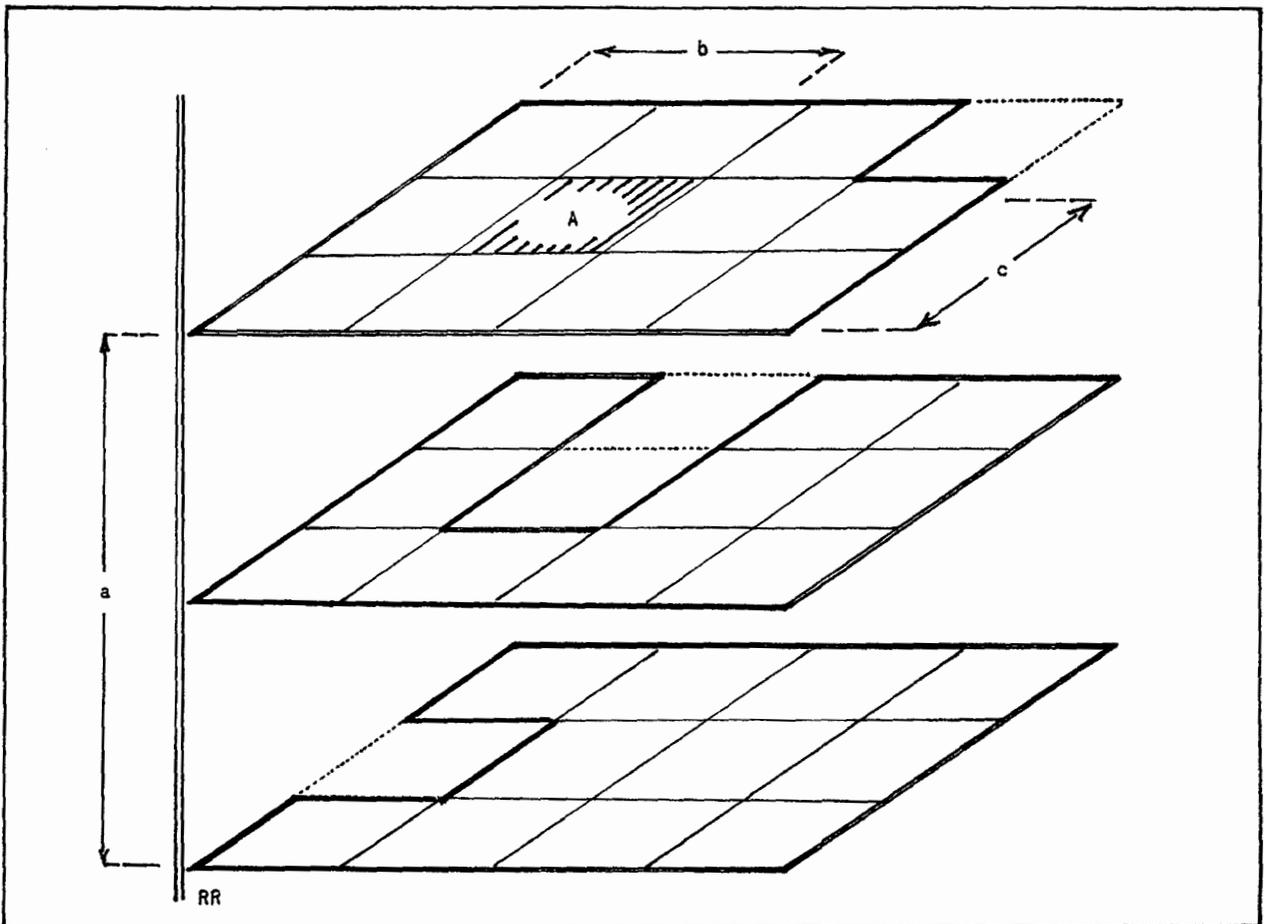
DP1, DP2, DP1, DP2, M, COEF,
DP1, DP2, DP2, DP1, M, COEF

VI - EXTENSÕES DO MODELO

1. Conceito de 'Módulo' e Deslocamento Horizontal

Um dos elementos que, até o momento, tem se apresentado como mais restritivo ao uso geral do Modelo, é justamente a necessidade de equivalência do tamanho entre os departamentos, ("múltiplos" entre si) ou das áreas de alocação disponíveis.* Assim, pretende-se estender o Modelo a aplicação nos casos gerais em que as instalações não são necessariamente uniformes, e os departamentos têm tamanhos diversos.

Considere-se o disposto abaixo, em que os pavimentos estão distribuídos por módulos padronizados :



(*) - Muito embora esse aspecto possa ser parcialmente contornado - pelo desmembramento de um d_p , ou pela sua assimilação em conjuntos.

Uma seção S de departamento, situada no Módulo A , está perfeitamente caracterizada em sua distância vertical a um referencial RR (a), e pelas distâncias horizontais, (nos dois sentidos), b e c .

Então, x_{sijk} apropria a parcela de S com coordenadas i (vertical), j (horizontal-sentido I) e k (horizontal-sentido II).

2. Redefinição do Modelo

Tendo em vista essa abertura do modelo para deslocamento também horizontal, e a redefinição das variáveis básicas, sua estrutura sofre alterações de forma, embora mantidos os conceitos até então já estabelecidos.

2.1. Variáveis básicas do Problema

x_{dijk} - Quantidade de departamento d apropriada pelo andar i e módulo j (deslocamento-horizantal-I), k (desl.-horizontal-II)

y_{de}^v - Distância vertical, (em andares), entre os departamentos d e e .

y_{de}^1 - Distância horizontal, (em módulos), entre os departamentos d e e , sentido-I.

y_{de}^2 - Idem para sentido-II.

w_{de} - Adjacência (ou não) entre os departamentos d e e .

2.2. Função-Objetivo

$$\min z = D \left\{ \sum_{d=1}^n \left(f_{do} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (x_{dijk}) + \sum_{e=d+1}^n f_{de} (y_{vde} + y_{ved} + y_{1de} + y_{1ed} + y_{2de} + y_{2ed}) \right) \right\} + (D+E) \left\{ \sum_{d=1}^n (f_{do} w_{do} + \sum_{e=d+1}^n f_{de} w_{de}) \right\} .$$

2.3. Restrições

2.3.1. Equilíbrio de distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (x_{dijk}) = 1, \quad \text{para } d = [1, n] \text{ sendo}$$

n = número de departamentos

r = número de andares da instalação

p = afastamento máximo (em módulos), nos sentido-I

q = idem, sentido-II

2.3.2. Equilíbrio de ocupação dos módulos pelas parcelas de departamento

$$\sum_{d=1}^n (x_{dijk}) = 1, \quad \text{para } i = [1, r], j = [1, p], k = [1, q]$$

2.3.3. Restrições "Modulares"*

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (i x_{dijk} - x_{eijk}) = (y_{vde} - y_{ved}), \text{ para}$$

$$d = [\bar{1}, n-1], \quad e = [\bar{2}, n] \quad \text{e} \quad d < e$$

2.3.4. Restrições Auxiliares-I-

$$i) \quad ((y_{vde} + y_{ved}) - 1) \leq n w_{ed}, \text{ para}$$

$$d = [\bar{1}, n-1], \quad e = [\bar{2}, n] \quad \text{e} \quad d < e$$

$$ii) \quad \left(\sum_{i=1}^r (i x_{dijk}) - 1 \right) \leq n w_{d\phi}, \text{ para} \quad d = [\bar{1}, n]$$

Considerando-se o caso de um pavimento distribuído por m módulos, é evidente que o deslocamento, de um a outro módulo, nem sempre representará a distância física entre ambos. Há que definir, nessas situações, linha de escoamento (rotas), e uma ligação específica a cada par de módulos num mesmo pavimento.

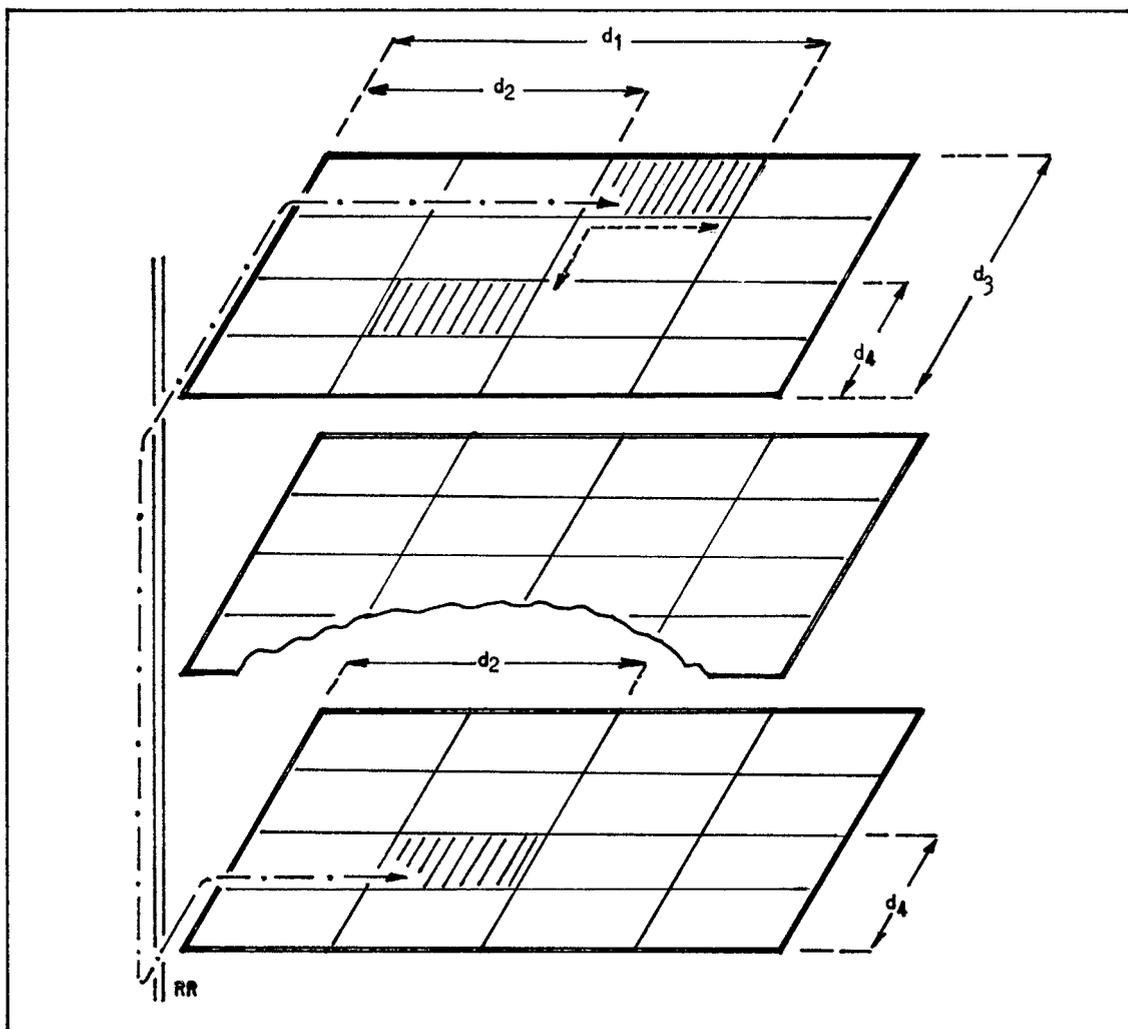
São admitidas, portanto, duas alternativas, de caracterização do problema, e o enquadramento, na prática, dar-se-á segundo cada caso em particular.

(*) - Não confundir função-módulo com o conceito de "Módulos" acima introduzidos.

Dado que esse último critério envolve grandes implicações de natureza computacional (tamanho da matriz), a presente metodologia enfatiza o problema de alocações segundo a distância física entre módulos.

2.4. Deslocamento pela distância (física) entre módulos

Do exposto no gráfico 2.0 anterior, determinadas situações específicas admitem, como aproximação válida, o uso das distâncias "físicas" entre dois módulos, como medida do deslocamento entre os departamentos que apropriam. No gráfico a seguir, estão exemplos do critério de afastamento presentemente considerado.



2.4.1. Premissas

Pela observação do esquema acima, infere-se que o deslocamento horizontal, (em qualquer sentido), representa:

- i) - A soma das distâncias dos módulos ao eixo $(d1 + d2) + (d3 + d4)$, sempre que os dp's estão alocados em pavimentos distintos, ou
- ii) - A soma das diferenças entre os afastamentos dos módulos, nos casos em que ambos os departamentos situam-se num mesmo andar $(d1 - d2) + (d3 - d4)$

Para caracterizar esse comportamento alternativo, foram utilizadas novas variáveis "dummy", semelhantes às que já introduzidas no correr do trabalho, que indicaram uma ocorrência de seções ou dp's adjacentes (deslocamento vertical - w_{jk}).

Como, no caso presente, está também admitida uma distância vertical nula entre duas unidades quaisquer, vale observar que as variáveis binárias w permanecem com a assunção do valor zero nas adjacências ou nas coincidências de alocação vertical, e assim, mantém-se eliminado o efeito da espera por elevadores, na instância de departamentos nivelados.

Denotando-se por λ_{de} os novos parâmetros que indicarão uma ocorrência de departamentos em mesmo andar, $(y_{de} + y_{ed}) \leq n \lambda_{de}$ restringiria os valores nulos da variável apenas a aquelas situações onde $y_{de} = y_{ed} = \phi$

A fim de detectar tais nivelamentos, o Modê

lo é reformulado em seus conceitos de determinação da distancia vertical entre departamentos, pela aplicação do segundo critério analisado no ítem III.1 (5.3.1) anterior (alternativa das distâncias menores).

2.4.2. Expressão da distância vertical entre departamentos -

$$\text{Se } \left| \begin{array}{l} y_{vm_{de}} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q i (x_{dijk}) \\ y_{vm_{de}} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q i (x_{eijk}) \end{array} \right.$$

onde $y_{m_{de}}$ é o menor dos afastamentos $y_{d\emptyset}$ e $y_{e\emptyset}$,

$$dy_{de}^* \geq \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q i (x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2 * y_{vm_{de}}$$

representará o valor absoluto da distância entre os afastamentos $\sum_{i,j,k} i(x_{dijk})$ e $\sum_{i,j,k} i(x_{eijk})$ considerados.

2.4.3. Determinação de d_{de}

$$\lambda_{de} \geq 1/n \cdot dv_{de} \therefore$$

(*) - A expressão de DV é apenas didática, uma vez que pode ser implicitamente formalizada na F. Objetivo.

$$\lambda_{de} \geq \left\{ \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q i(x_{dijk} + x_{eijk}) \right) - 2 \cdot y_{VM}_{de} \right\}$$

para $d = [\bar{1}, n-1]$, $e = [\bar{2}, n]$ e $d < e$

Como λ_{de} será induzido (na função-utilidade) a assumir valor nulo somente quando $\sum_i \sum_j \sum_k i(x_{dijk})$ for igual a $\sum_i \sum_j \sum_k i(x_{eijk})$, ou seja, quando

$$y_{VM}_{de} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q i(x_{dijk} + x_{eijk})}{2}, \text{ o parâmetro } \lambda \text{ não ne}$$

cessita ser estritamente positivo.

Pretende-se gerar, novamente, variáveis auxiliares λ_{de} , que assumirão:

- i) 0 no caso de departamentos não nivelados
- ii) O menor de seus afastamentos horizontais (em módulos ao elevador), no caso de dp's situados em mesmo pavimento.

2.4.4. Restrições Auxiliares-II

O termo de restrições a seguir*, associado a

(*) - Uma vez que a análise do deslocamento horizontal será a mesma para qual quer dos dois sentidos considerados, a expressão abaixo, que se reporta ao sentido-I, (θ_{1de}), aplica-se igualmente ao sentido-II (θ_{zde}) apenas pela alteração da nomenclatura.

novos parâmetros da função-objetivo, condiciona o Modelo no intuito de assumir esse aludido comportamento.

$$\theta_{1de} \leq (1-\lambda_{de}) \cdot M$$

$$\text{- restrições : } \theta_{1de} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{dijk})$$

$$\theta_{1de} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{eijk})$$

- Componente adicional da F.O.

$$f_{de} \left\{ \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2 \cdot \theta_{1de} \right\}$$

Depreende-se, pela análise das relações, que:

i) - Se d e e são nivelados -

$$a) y_{de}^v + y_{ed}^v \leq n\lambda_{de} \longrightarrow \phi n\lambda_{de} \longrightarrow \lambda_{de} = \underline{\phi} \text{ ou } 1$$

$$b) \theta_{1de} \leq (1-\lambda_{de}) \cdot n \longrightarrow \theta_{1de} < n \longrightarrow \theta_{1de} \text{ não restringido}$$

$$c) \theta_{1de} \leq \min \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{dijk}); \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{eijk}) \right]$$

Decorre :

$$\theta_{1de}^{\max} = \min \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{dijk}); \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{eijk}) \right)$$

$$F.O. \text{ (adic.)} = f_{de} \cdot \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \left(j(x_{dijk} + x_{eijk}) \right) \right\|$$

ii) Se d e e situam-se em pavimentos distantes

$$a) y_{v_{de}} + y_{v_{ed}} \leq n\lambda_{de} \longrightarrow \phi < n\lambda_{de} \longrightarrow \lambda_{de} = 1$$

$$b) \theta_{1de} \leq (1 - \lambda_{de}) \cdot N \longrightarrow \theta_{1de} \leq \phi \longrightarrow \theta_{1de} = \phi$$

c) Supêrfulo

Decorre

$$\cdot \theta_{1de}^{\max} = \phi$$

$$\cdot F.O. \text{ (adic)} = f_{de} \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \left(j(x_{dijk} + x_{eijk}) \right) \right\}$$

A consolidação dos novos elementos considera-
dos na função-objetivo (componentes adicionais relativas aos dois
sentidos horizontais), é dada pela expressão :

$$M.f_{de} \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q j(x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2\theta_{1de} \right\} +$$

$$+ M.f_{de} \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q k(x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2\theta_{2de} \right\} , \text{ ou}$$

(I)

$$M.f_{de} \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (j+k)(x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2 \sum_{i=1}^2 \theta_{1de} \right\} , d < k$$

onde M representa um parâmetro incidente sô-
bre tôdas as variáveis de deslocamento-entre-módulos.

Com efeito, uma vez que o deslocamento entre
módulos implica em medidas de esforço diferentes daquelas aplica-
das ao movimento vertical (uso de escadas ou elevadores), novos
parâmetros são atribuídos aos seus respectivos componentes na
função-objetivo, A e M, tais que Af_{de} e Mf_{de} podem ser avaliados
em unidades de mesma grandeza.

Pela incorporação de (I) à função- utilidade
originalmente considerada :

ANEXO - IMETODOLOGIA DE ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA DE ALOCAÇÕES À PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA.

1. O processo metodológico atualmente desenvolvido, é uma variante do modelo da programação linear mista anterior, e representa um enquadramento do problema de alocações à Programação Quadrática.

Desde que implica numa carga de restrições substancialmente maior, acrescida do desgaste computacional decorrente de uma convergência mais lenta, (característica de todos os algoritmos de programação quadrática), a presente metodologia assume caráter apenas ilustrativo, e só em casos muito específicos pode representar vantagens sobre o modelo discreto anteriormente detalhado.

I.1. Variáveis Básicas

Define-se como variável básica do problema, a distância vertical x de um departamento i ao departamento j das instalações (x_{ij}) , ou pavimento térreo (x_{i0}) , tomada em número de andares.

I.2. Escopo de Restrições

Ao contrário do que se estabeleceu para o Modelo de Programação Inteira, pretende-se desenvolver uma sistemática que, a partir de novas restrições indutivas, (posteriormente detalhadas), e parâmetros adicionais na função-objetivo, permita aplicar, ao caso em estudo, os métodos condicionais de programação quadrática, (através do algoritmo de Beale), para os referidos problemas.

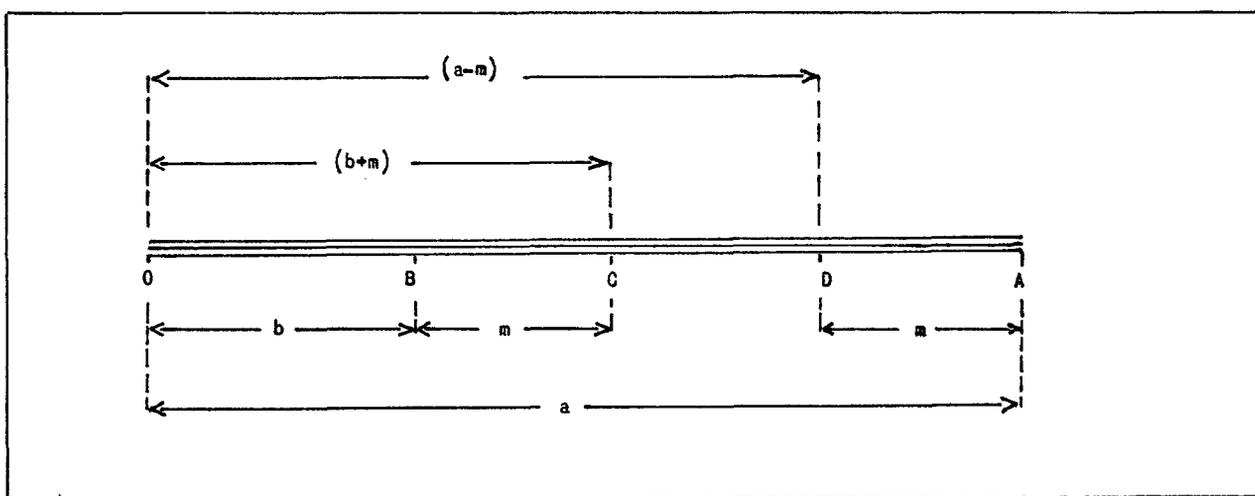
Em outros termos, pretende-se, com a introdução de uma nova componente na F.O., associada a restrições lineares adicionais,

provocar $x_{i_0} \neq x_{i'_0} \neq \dots \neq x_{i''_0}$, qualquer que seja o valor de i , e por outro lado, estabelecer uma correspondência entre dois departamentos, e sua distância entre si ($x_{i_0} - x_{j_0} = x_{ij}$)**.

É necessário, entretanto, o desenvolvimento da demonstração a seguir, cuja utilidade será evidente para aceitação da metodologia em seqüência.

Teorema: Para diferentes conjuntos de valores, cuja soma é constante, a soma de seus quadrados será tão maior quanto mais afastados estiverem esses valores entre si.

Procura-se demonstrar, no teorema acima, que se for estabelecido um intervalo entre dois números quaisquer, a soma do quadrado de seus pontos extremos, será sempre maior que a soma dos quadrados de dois outros pontos interiores, para os quais o resultado da soma simples é igual à soma dos valores extremos considerados.



(*) - Com x_{i_0} ou x_{ij} assumindo sempre valores inteiros, não-negativos.

(**) - "Restrições-Modulares".

hipótese : $\sum_{i=1}^n x_i = k$ (I) $k > 0$

Tomando-se o quadrado de (I)

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = k^2 \quad (\text{II})$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = k^2 \dots (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1x_2 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n) = k^2$$

$$\sum_{i=1}^n [x_i^2 + 2 \sum_{j=i+1}^n x_i x_j] = k^2 \dots \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j = k^2; \text{ com } j \neq i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \quad (\text{III})$$

Dado que $x_i \geq 0 \quad \forall i = [1;n]$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \geq 0 \dots \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq k^2 \quad (\text{IV})$$

De (III) temos que o máximo de $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ocorrerá quando $\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] = 0$ (V)

Infer-se, das relações.

i) $x_i = 0 \quad \forall i = 1;n$ inviável por não atender (I)

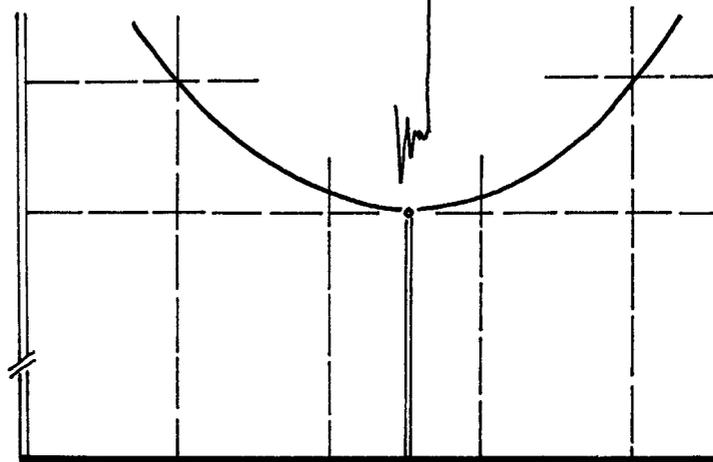
ii) $x_i = k$ e $x_j = 0 \quad \forall j \neq i$ satisfaz a (V) e (I)

iii) $x_i = k_i \quad \forall i \in I; x_j = 0 \quad \forall j \in J$, onde $I \cup J = N$ e o I conjunto tem mais de um elemento

Inviável, pois (V) não seria satisfeito.

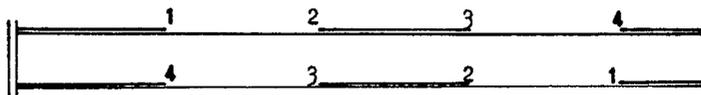
$$\underline{x_1 + x_2 = K}$$

VALORES DE SQ



VAL DE X1

VAL DE X2



I.3. Novos componentes da F.O., e restrições adicionais introduzidas

Como já observado no início do trabalho, a representação matemática da função-objetivo (real) do modelo é:

$$\min z = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n f_{ij} y_{ij} \right\}, \quad \text{onde } f_j \text{ é constante pré-determinada, e } j = i \text{ (ou } j = 0)$$

Introduziu-se na função-utilidade, um novo componente, como explicitado a seguir, que forçosamente elegerá, dentre as possíveis soluções do problema, apenas aquelas em que ocorra a condição de mútua exclusividade.

$$\min (Z) = M \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^n (m)^2 \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^n (y_{i_0}) \right\} \right\} + \left\{ \dots \right\}$$

|<— k —>|

O Termo k , representa uma constante, igual à soma dos quadrados das distâncias dos departamentos ao solo.

De fato, uma restrição efetivamente necessária, seria $\prod_{i=1}^n (x_{ij} - i) = \phi \forall i$, a qual, associada à restrição básica de equilíbrio do modelo, $\sum_{i=1}^n (x_{i_0}) = k_2$ onde $k_2 = n(n-1)/2$, implica em valores 1,2,3,...,n (n = nº de andares), para qualquer solução viável do problema.

Tratando-se de expressão não linear, procurou-se substituí-la por uma componente na F.O., que induzisse o modelo a assumir, de forma preferencial, essas soluções mütuamente exclusivas.

Conhecido o valor de k (soma do quadrado dos valores de 1 a n , sabe-se, a priori, que existem diversas combinações possíveis* decorrendo em

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_{i0})^2 \right) = \left(\sum_{m=1}^n (m)^2 \right) = n(n-1)/2, \text{ ou seja,}$$

anulando o primeiro componente da função-utilidade acima referida.

$$\min (Z) = M \left\{ \left(- \sum_{i=1}^n (x_{i0})^2 \right) + \left(\sum_{m=1}^n (m)^2 \right) \right\} + \{ \dots \}$$

$$\min (Z) = \phi + \{ \dots \}$$

Considerando que a soma das distâncias dos departamentos ao térreo é uma restrição de igualdade $\left(\sum_{m=1}^n (x_{i0})^2 = K \right)^*$ e com base no teorema anteriormente demonstrado $\left(\sum_{i=1}^n (x_{i0})^2 \right)$ será máximo se e somente se $\left(x_{i0} = \sum_{m=1}^n (m)^2 \right)$ e $x_{i0} = \phi^{***}$ para qualquer valor de i diferente de \bar{i} .

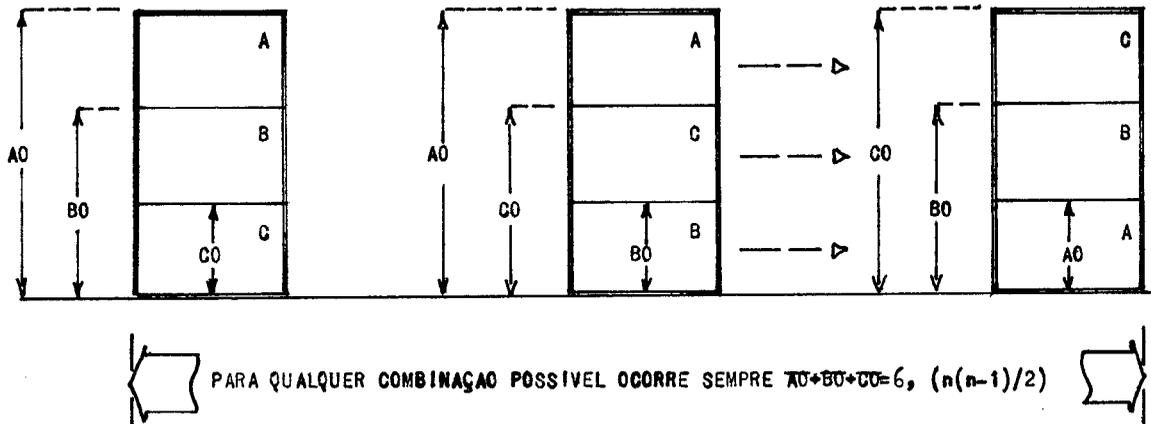
(*) - De maneira precisa, existem $n!$ combinações possíveis

(**) - Onde $k = n(n-1)/2$

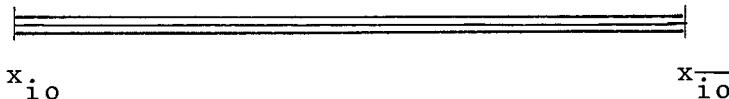
(***) - Pelos requisitos de Programação Quadrática, x_{ij} é sempre maior que ou igual a zero.

EXEMPLO:

(INSTALAÇÃO DE 3 ANDARES)



$$\left(\sum_{m=1}^n (m)^2 \right)$$



Essa situação, que não corresponde à limitações reais do problema, é contornada com a introdução de novas restrições cumulativas, que definem limites superiores para cada x_{i0} isolado, para cada par de valores $(x_{i0} + x_{i'0})$, ternos, $(x_{i0} + x_{i'0} + x_{i''0})$, etc, até o máximo de $(n-1)$ parcelas de soma.

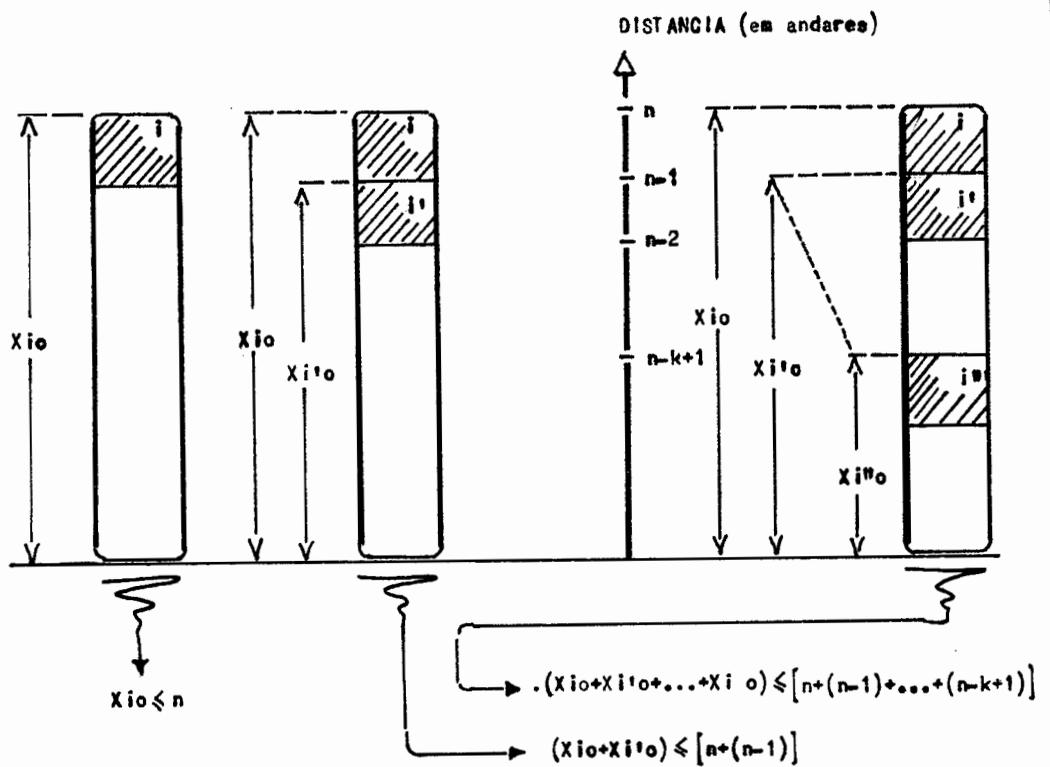
Esse raciocínio origina-se no fato de que, para uma instalação de n pavimentos, a distância ao térreo de um andar i qualquer, será menor ou igual a n (caso em que êle apropria o n -ésimo andar). A distância ao solo de dois departamentos i e i' , somada, será sempre menor ou igual a $n + (n-1)$, na hipótese extrema de situarem-se êles, respectivamente, no n -ésimo e $(n-1)$ -ésimo andar, ou vice-versa*

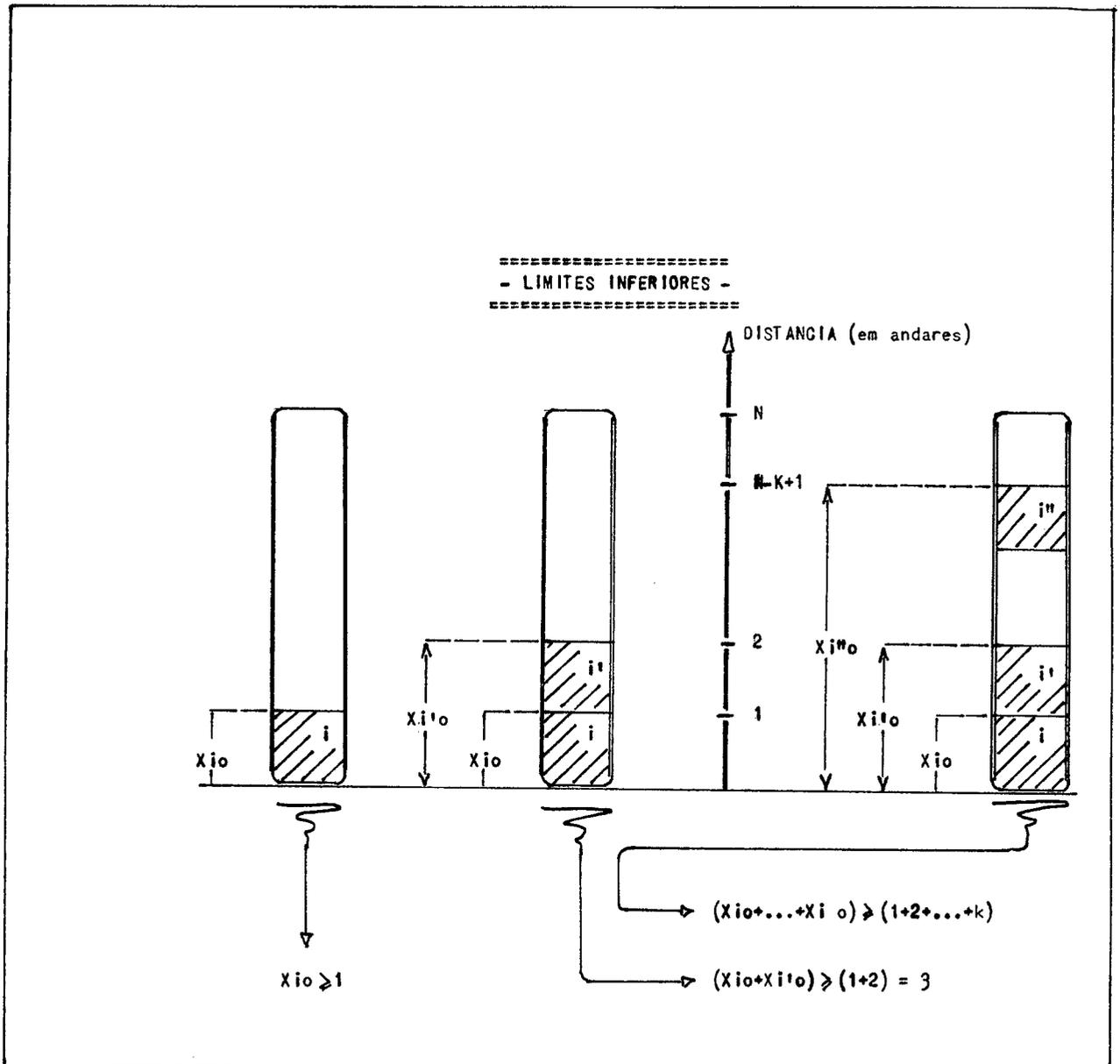
(*) - Os limites mínimos, ao contrário, seriam acumulados crescentemente :

$$(x_{i0} \geq 1; (x_{i0} + x_{i'0}) \geq 3; (x_{i0} + x_{i'0} + \dots + x_{i_k0}) \geq (1+2+\dots+k), \text{ etc.})$$

- LIMITES SUPERIORES -

- CASOS EXTREMOS (POSSIVEIS) -





Tendo em vista o conjunto das restrições de limite superior acima enumeradas, e o teorema de maximização da soma, também já demonstrado, assume-se que :

$x_{i_0} = n$ $x_{i'_0} = n-1$ \vdots $x_{i^k_0} = n-(k+1)$ \vdots $x_{i^n_0} = 1$	<p>- (para atender $x_{i_0} \leq n$)</p> <p>- (para atender $[x_{i_0} + x_{i'_0}] \leq [2n-1]$)</p> <p>- (para atender $[x_{i_0} + \dots + x_{i^k_0}] \leq [kn - n(n-1)/2]$)</p> <p>- (para atender $[x_{i_0} + \dots + x_{i^n_0}] \leq [n(n-1)/2]$)</p>
--	--

onde $i \neq i' \neq \dots \neq i^k \neq \dots \neq i^n$

Vale observar que, se o sub-conjunto das soluções apontadas corresponde à maximização de $[\sum_{i=1}^n (x_{i_0})^2]$, o valor mínimo de $m[k - \sum_{i=1}^n (x_{i_0})^2]$ também ocorrerá para esse mesmo conjunto.

Em resumo, a minimização de

$$m \left\{ \left[\sum_{m=1}^n (m)^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^n (x_{i_0})^2 \right] \right\},$$

sujeito a restrições:

$$\sum_{i=1}^n (x_{i_0}) = n(n-1)/2,$$

e ainda,

$$x_{i_0} \leq n$$

$$(x_{i_0} + x_{i'_0}) \leq n + (n-1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_{i_0} + \dots + x_{i^k_0}) \leq n + (n-1) + \dots + (n-k+1), \text{ onde}$$

$$i \neq i' \neq \dots \neq i^k,$$

ocorre se, e somente se:

$$\begin{array}{l}
 x_{i_0} = n \\
 x_{i'_0} = n-1 \\
 \vdots \\
 x_{i^k_0} = (n - k + 1) \\
 \vdots \\
 x_{i^n_0} = n
 \end{array}$$

para i qualquer e $i \neq i' \neq \dots \neq i^k \neq \dots \neq i^n$

Pretende-se, com a introdução da "componente indutiva" na função-objetivo, e das "restrições cumulativas" de limite superior (ou inferior), utilizar o método contínuo da programação quadrática, para a solução de um problema cujas variáveis assumem valores inteiros, positivos e mutuamente exclusivas.

Cumpra observar que o parâmetro multiplicador desse componente, admite os mesmos conceitos do "Big M" tradicionalmente utilizado nos algoritmos "simplex", tão grande quanto se queira, onde qualquer resultante da expressão intra-parênteses assume valor escalarmente alto, e por decorrência, incompatível* com a solução mínima pesquisada**.

Assim, por essa diferença escalar entre os dois termos da função-objetivo (conceito do Big-M), sua componente-real

(*) - O valor da componente é sempre maior que ou igual a zero, desde que o limite superior de x_{i_0} é n por força das restrições cumulativas anteriormente referidas.

(**)- Sabe-se, a priori, que qualquer combinação mutuamente exclusiva de x_{i_0} , implica na assunção do valor \emptyset pela COMPONENTE-I.

$$\left(\min z = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} f_{ij} x_{ij} \right\} \right), \quad \text{com } j = i \text{ ou } j = \emptyset, \text{ s\`o mente \u00e9 testada}$$
 para o sub-conjunto das solu\u00e7\u00f5es vi\u00e1veis que impliquem em $COMP-I = \emptyset^*$

(*) - \u00c9 esse sub-conjunto \u00e9 formado por $n!$ distribu\u00e7\u00f5es de x_{ij} .

ANEXO-IIUM MÉTODO DE ENUMERAÇÃO IMPLÍCITA

O método de enumeração presentemente desenvolvido, define um esquema alternativo de resolução do problema, a partir das variações do Branch and Bound detalhadas abaixo :

- i) - É possível eleger, através de processo empírico, uma solução sub-ótima do problema, que sirva de base inicial ao truncamento dos nós, por ultrapassagem, à medida em que evolue o algoritmo específico.
- ii) - Como discutido a seguir, a aplicação do conceito de "departamentos-dominantes" implica sempre na obtenção de somas efetivamente inferiores ao valor dos fluxos-de-deslocamento, considerados como objetivo de minimização.

1. Conceito de "departamento-dominante"

Se os fluxos associados a um departamento específico (d), fôsssem "dominantes" em relação aos demais, ou seja, se seus valores estivessem em ordem de grandeza suficientemente superior à dos demais fluxos, é fato que a solução de um modelo de alocações estaria diretamente influenciada por êsse departamento, representando mesmo sua própria distribuição-mínima.

Assim, dado que o dp é dominante, um processo de formulação da sua distribuição mais econômica consiste em fixar progressivamente os demais departamentos, nas suas adjacências, em ordem decrescente dos respectivos fluxos.

2. Exemplo :

- Dupondo-se D dominante, e

- FLUXO (D,A)= 1 ; FLUXO (D,B)= 2 ; FLUXO (D,C)= 3 ; FLUXO (D,E)= 4 ;

FLUXO (D,F)= 5 ;

- 1ª fixação

. [max (1,2,3,4,5)]

. soma dos fluxos = $5 \cdot 1 = 5$

- 2ª fixação

. [max (1,2,3,4)]

. soma-fluxos = $5 + 4 \cdot 1 = 9$

- 3ª fixação

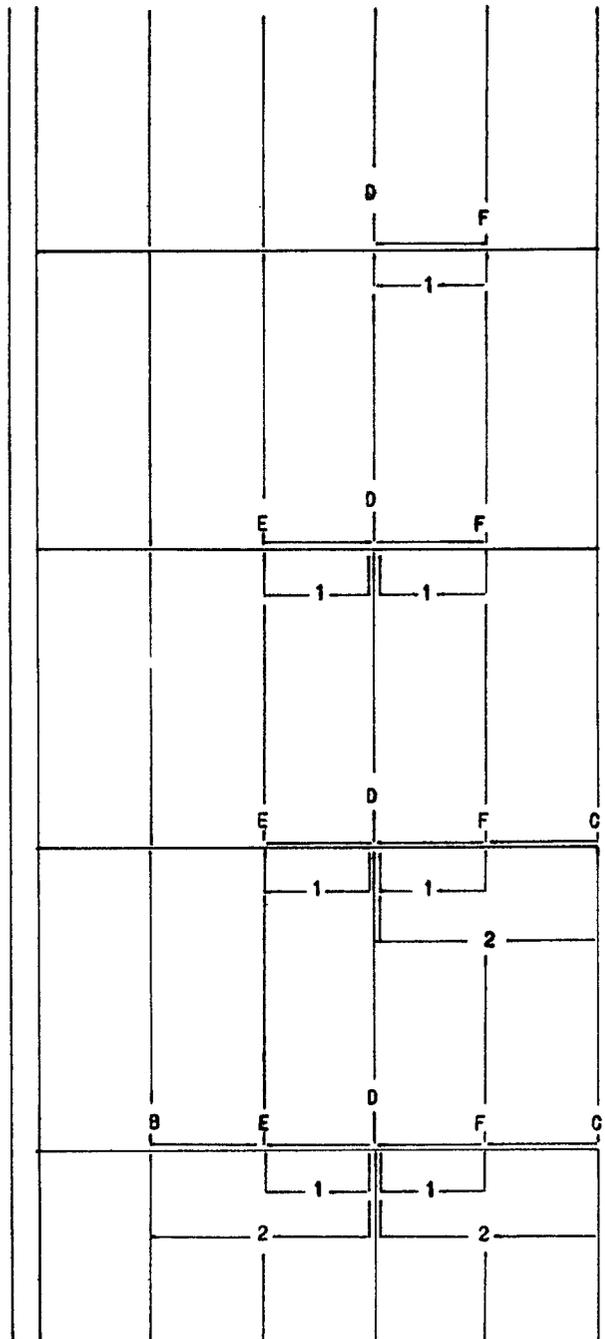
. [max (1,2,3)]

. soma-fluxos = $9 + 3 \cdot 2 = 15$

- 4ª fixação

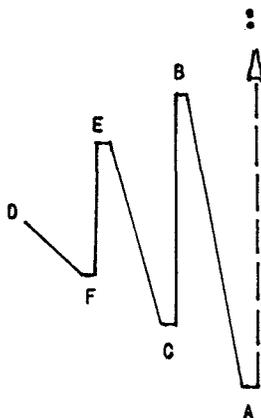
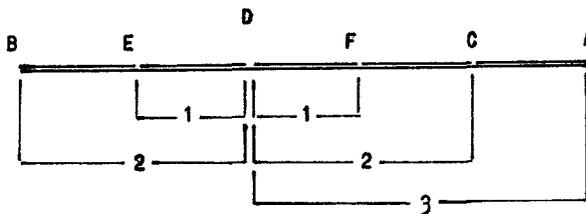
. [max (1,2)]

. soma-fluxos = $15 + 2 \cdot 2 = 19$



- 5ª fixação

• (1)

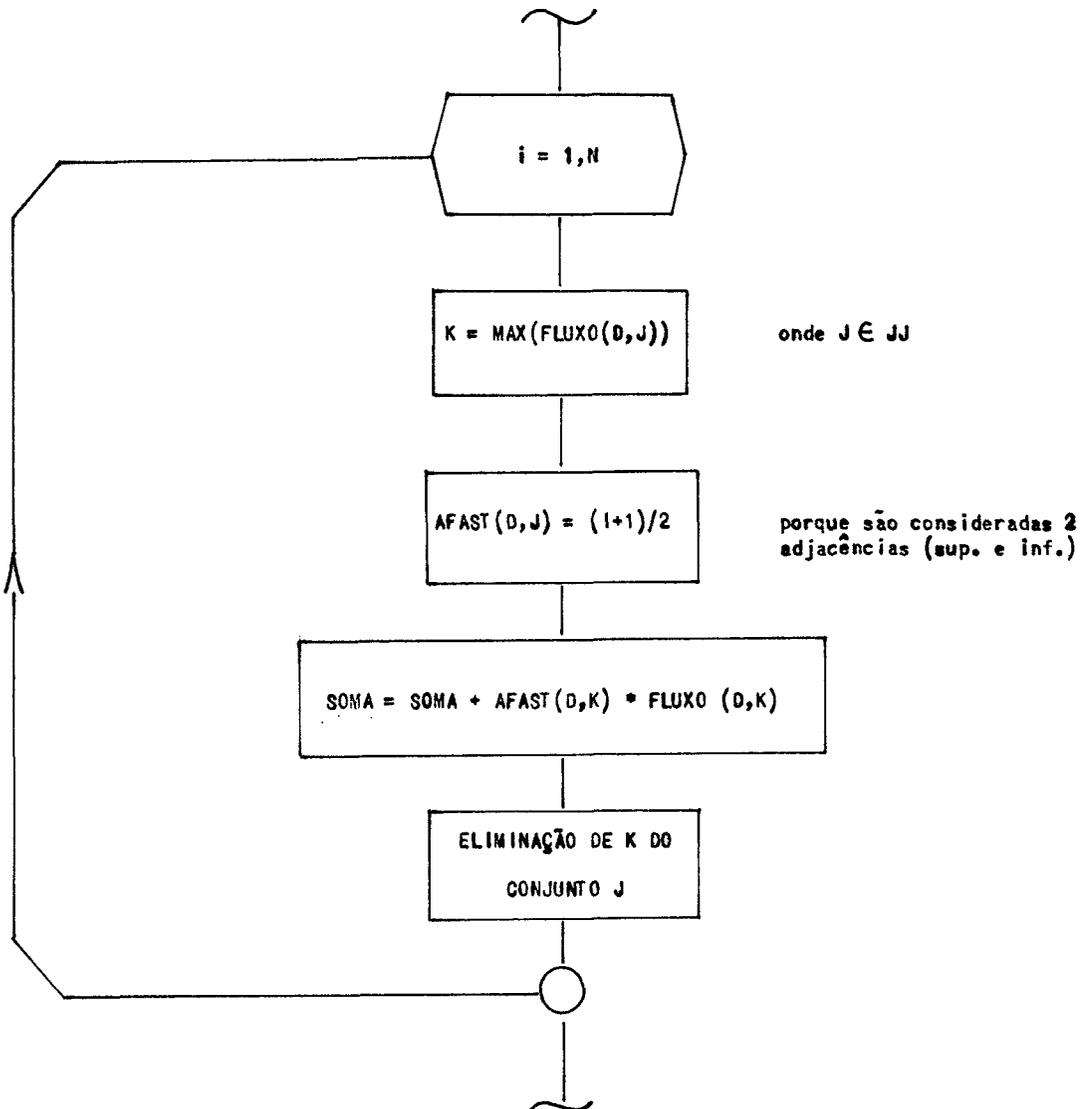
• soma-fluxos = $19 + 1 \cdot 3 = 22$ 

(PRÓXIMA FIXAÇÃO)

Do exemplo, depreende-se que o afastamento dos dp's, em relação ao dominante, decorrerá no deslocamento mínimo sempre que a distribuição for promovida segundo esse critério.

Formalmente, o processo é estabelecido no fluxograma seguinte, onde

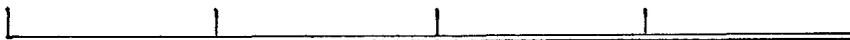
- D = departamento dominante;
- N = conjunto dos demais departamentos.
- J = conjunto dos departamentos ainda não fixados.
- AFAST = matriz-inteira



Uma vez formulada a distribuição para D dominante, o esforço-deslocamento, (com D dominante), será tido pela soma dos fluxos a ele associados, ponderados os respectivos afastamentos.

Exemplo:

$$SOMA(D) = 2*FLUXO(D,B) + 1*FLUXOS(D,E) + 1*FLUXO(D,F) + 2*FLUXO(D,C) + 3*(FLUXO(A,D))$$



afastamentos do dominante

3. Se o processo é repetitivo para todos os outros departamentos, ou seja, se os considerarmos isoladamente como maiores-dominantes, obter-se-á um conjunto de n somas, associadas aos n dp's.

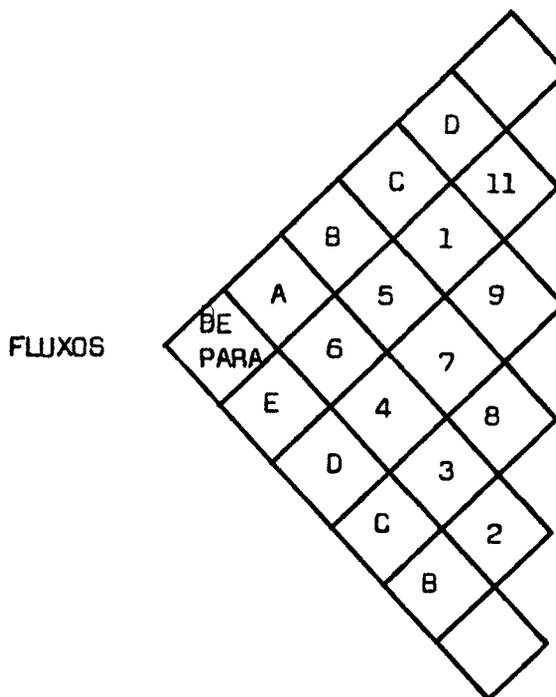
Estão duplamente computados na soma, entre tanto, os diversos pares de departamentos, ij , uma vez que os respectivos fluxos estiveram presentes nos cálculos para i -dominante, como também na apuração de j -dominante.

Por outro lado, sabe-se que, na solução real do Modelo, todas as combinações ij de departamentos estarão igualmente consideradas.

O processo consistirá, pois, de:

- i) - Acumular as diversas somas de cada maior-dominante num totalizador SCM.
- ii) - Eliminar, desse parâmetro, o maior dos dois valores* $[FLUXO(ij) * afastamento(ij)]$ verificado para cada par de dp's.

4. Exemplo:



(*) $\text{MAX} | \text{DESL}(I,J); \text{DESL}(J,I) |$

$$SCM = SOM(A) + SOM(B) + \dots + SOM(E) - \text{MAX}[\text{DESL}(AB); \text{DESL}(BA)] - \\ - \text{MAX}[\text{DESL}(AC); \text{DESL}(CA)] - \dots - \text{MAX}[\text{DESL}(DE); \text{DESL}(ED)]$$

$$SCM = 20 + 29 + \dots - (4 + \dots)$$

5. O totalizador SCM representa, então, uma soma de deslocamentos obrigatoriamente inferior ao verdadeiro efeito do esforço-deslocamento, (mínimo), correspondente à solução do problema.

De fato, trata-se de processo em que esteve mantido um critério de otimalidade, sem restrições de viabilização das soluções.

Assim, pela aplicação do processo anterior, se $\bar{ij} = 1$ e $\bar{jk} = 1$, e ambos, j e k, estão acima de i, \bar{ik} não foi forçado a assumir valor maior que ou igual a 2, condição necessária para uma solução-viável do problema real*.

Êsses aspectos, entretanto, são elementos básicos no desenvolvimento do processo, desde que :

- Se o SCM encontrado é superior a um valor da função-utilidade já disponível, a solução-mínima do problema real, (compatível com as restrições consideradas na obtenção do SCM), será também não inferior à solução já disponível.

(*)- Pelo próprio exemplo, infere-se que o SCM incorpora $AC=1$, $CD=1$, $AD=1$ e $AE=1$, e que não é admissível como solução-viável do Modelo.

Com efeito, deve-se observar que os conceitos emitidos para o SCM e para as "soluções-mínimas", são válidos em qualquer nível, isto é:

- Se forem fixados alguns departamentos, e aos demais, aplicado o critério de maior-dominante, permanece estabelecido que uma solução-ótima do Modelo, (mínima), fixadas algumas alocações, será não-menor que a soma dos fluxos-inter-departamentais verificada para êsses dp's, acumulada ao SCM correspondente aos demais.

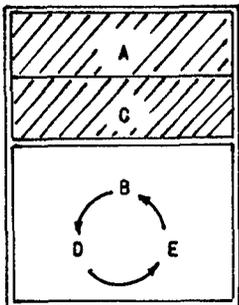
6. Exemplo :

Tendo-se que :

A = fixado no andar N

C = fixado no andar (N-1)

B, D e E = Não fixados.



A solução-ótima (real) do Modelo, com $A = N$ e $C = (N-1)$, será sempre não menor que $[N * \text{FLUXO}(A, \phi) + (N-1) * \text{FLUXO}(C, \phi) + 1 * \text{FLUXO}(A, C)] + [\text{SCM}(B, D, E)]$

Do exposto, o atual processo de enumeração desenvolve a metodologia seguinte :

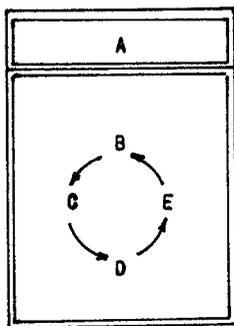
- i) Determinar solução-sub-ótima, por processos empíricos.
- ii) Fixar progressivamente os departamentos nos últimos andares, calculando formalmente o efeito de seus deslocamentos (SOMA-I).

- iii) Aplicar os critérios de maior-dominante aos departamentos restantes, estabelecendo o SCM correspondente (SOMA-II).
- iv) Acumular SOMA-I e SOMA-II.
- v) Se o valor encontrado é superior ou igual ao efeito-deslocamento de uma solução já disponível, nenhuma distribuição, em que estejam fixados os departamentos do Grupo-I*, poderá ser ótima.
- vi) Se a soma é inferior, promove-se uma fixação adicional, repetindo-se o processo a partir de ii .

7. Exemplo:

- a) - Solução disponível (sub-ótima) valor F.O. =
- b) - Fixando-se A em N.

(*) - Nas suas respectivas posições.



$$SOMA(1) = N * FLUXO(A,0)$$

$$SOMA(11) = SCM(B,C,D,E)$$

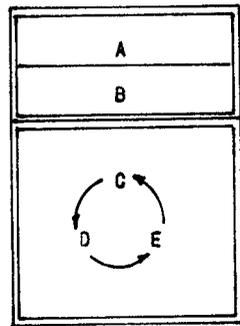
$$SOMA = SOMA(1) + SOMA(11)$$

SE SOMA \geq V1

SE SOMA $<$ V1

NO TRUNCADO -
 TODAS AS (N-1).
 SOLUÇÕES EM QUE
 A = N NÃO PODEM
 CORRESPONDER À
 SOLUÇÃO SUB-OTI-
 MA.

REPETIR O PRO-
 CESSO, FIXANDO
 3.

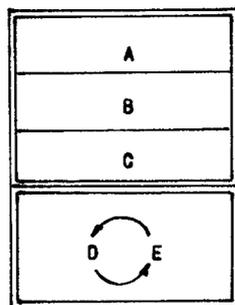


$$SOMA(1) = N * FLUXO(A,0) + (N - 1) * FLUXO(B,0) + FLUXO(A,B)$$

$$SOMA(11) = SCM(C,D,E)$$

$$SOMA = SOMA(1) + SOMA(11)$$

SE SOMA $<$ V1



$$SOMA(1) = N * FLUXO(A,0) + (N - 1) * FLUXO(B,0) + (N - 2) * FLUXO(C,0) + 1 * FLUXO(A,B) + 2 * FLUXO(A,C) + 1 * FLUXO(B,C)$$

$$SOMA(11) = SCM(D,E)$$

$$SOMA = SOMA(1) + SOMA(11)$$

Trata-se, evidentemente, de variações aplicadas ao método de branch and bound, pelo truncamento de nós que ultrapassam um valor já disponível da função-objetivo, eliminando-se assim a enumeração das $(N-R)!$ soluções correspondentes à permutação dos departamentos não fixados.

Cumprir observar que o valor dessa solução disponível é atualizado sempre que todos os departamentos estão fixos, (ou seja quando o critério de menor dominante não é aplicado), e o efeito-deslocamento é inferior ao sub-ótimo armazenado (solução-corrente).

8. Caso Exemplo -

Foi desenvolvido um programa computacional de resolução do atual processo, e utilizado o exemplo-base já definido nos itens anteriores.

O método convergiu em 199 iterações, contra as 720 soluções possíveis $(N!)$, o que vem demonstrar sua aplicabilidade a problemas maiores.

Nos itens seguintes, está detalhada a evolução do algoritmo.

- i) - Valor inicializado para a função-objetivo : 230
- ii) - Evolução do algoritmo :

