



## JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS: JOGO TIMBER E JOGO DE COLORAÇÃO

Ana Luísa Carvalho Furtado

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de  
Figueiredo  
Simone Dantas de Souza

Rio de Janeiro  
Outubro de 2017

JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS: JOGO TIMBER E JOGO DE  
COLORAÇÃO

Ana Luísa Carvalho Furtado

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

---

Prof. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

---

Prof. Sylvain Gravier, Ph.D.

---

Prof. Sulamita Klein, D.Sc.

---

Prof. Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
OUTUBRO DE 2017

Furtado, Ana Luísa Carvalho

Jogos Combinatórios em Grafos: Jogo Timber e Jogo de Coloração/Ana Luísa Carvalho Furtado. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XII, 134 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 63 – 66.

1. Grafos. 2. Jogos Combinatórios. 3. Caterpillar. 4. Jogo Timber. 5. Jogo de Coloração. 6. Jogo de Marcação. 7. Nordhaus-Gaddum. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Ao amor meu, minha alegria.*

# Agradecimentos

Diversas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, seja com sugestões, conhecimento, carinho ou amizade. A todos o meu mais sincero agradecimento.

A Deus por sempre me dar força e por colocar em meu caminho pessoas maravilhosas.

As minhas orientadoras Celina de Figueiredo e Simone Dantas pelo apoio, incentivo e exemplo de mulheres determinadas, fortes e trabalhadoras.

Je remercie Sylvain Gravier, mon directeur de thèse en France, pour toutes les bonnes idées, discussions et pour faire mes journées à Grenoble très agréables.

Je remercie aussi mes autres coauteurs, Simon et Clément.

Aos projetos Math à Modeler e Antena Brasileira da Matemática por me proporcionarem experiências incríveis ao participar de eventos de popularização da matemática.

Aos membros da banca pela contribuição para a melhoria desta tese.

Aos meus professores pelo conhecimento que me proporcionaram durante minha trajetória.

Ao meu amor, Diego, que sempre está ao meu lado me apoiando, ajudando, animando, sendo paciente com meus momentos de estresse e fazendo os meus dias muito mais felizes e lindos.

Aos meus pais que sempre me incentivaram e acreditaram em mim. Obrigada por terem feito todo o possível para que eu tivesse uma boa educação.

Ao meu irmão, Rafael, que é sempre a alegria da casa.

A todos os meus familiares, fundamentais para minha formação pessoal.

A todos os meus amigos de longa data, em especial, Camila e Celso, pelas longas conversas sobre a vida acadêmica, e Érica, pelas assessorias em francês.

Aos colegas que o PESC me deu, em especial, Zé, Filipe, Alex, Luís e Alexander. Aprender com vocês foi muito mais divertido.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao programa de cooperação regional em ciência e tecnologia MATH AmSud pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS: JOGO TIMBER E JOGO DE COLORAÇÃO

Ana Luísa Carvalho Furtado

Outubro/2017

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Simone Dantas de Souza

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Nesta tese, estudamos três jogos combinatórios competitivos. O jogo *timber* é jogado em digrafos, sendo que cada arco representa um dominó, e o sentido do arco indica o sentido em que o mesmo pode ser derrubado, causando um efeito em cadeia. O jogador que derrubar o último dominó é o vencedor. Uma *P-position* é uma orientação das arestas de um grafo na qual o segundo jogador ganha. Se o grafo possui ciclos, então não há *P-positions* e, por este motivo, o jogo *timber* só é interessante quando jogado em árvores. Determinamos o número de *P-positions* em três famílias de caterpillars e um limite inferior para o número de *P-positions* em uma caterpillar qualquer. Além disto, provamos que uma árvore qualquer possui *P-positions* se, e somente se, possui quantidade par de arestas.

No *jogo de coloração*, Alice e Bob se revezam colorindo propriamente os vértices de um grafo, sendo que Alice tenta minimizar o número de cores, enquanto Bob tenta maximizá-lo. O *número cromático do jogo* é o menor número de cores que garante que o grafo pode ser propriamente colorido apesar da intenção de Bob. Determinamos o número cromático do jogo para três subclasses de florestas (compostas por caterpillars), apresentamos duas condições suficientes e duas condições necessárias para qualquer caterpillar ter número cromático do jogo igual a 4.

No *jogo de marcação*, Alice e Bob selecionam alternadamente os vértices não selecionados de um grafo, e Alice tenta garantir que para algum inteiro  $k$ , todo vértice não selecionado tem no máximo  $k - 1$  vizinhos selecionados. O *número de coloração do jogo* é o menor  $k$  possível. Estabelecemos limites inferiores e superiores para a *relação do tipo Nordhaus-Gaddum* referente ao número de *P-positions* de uma caterpillar, aos números cromático e de coloração do jogo em um grafo qualquer.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COMBINATORIAL GAMES IN GRAPHS: TIMBER GAME AND COLORING GAME

Ana Luísa Carvalho Furtado

October/2017

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Simone Dantas de Souza

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this thesis, we studied three competitive combinatorial games. The *timber* game is played in digraphs, with each arc representing a domino, and the arc direction indicates the direction in which it can be toppled, causing a chain reaction. The player who topples the last domino is the winner. A *P-position* is an orientation of the edges of a graph in which the second player wins. If the graph has cycles, then the graph has no *P-positions* and, for this reason, timber game is only interesting when played in trees. We determine the number of *P-positions* in three caterpillar families and a lower bound for the number of *P-positions* in any caterpillar. Moreover, we prove that a tree has *P-positions* if, and only if, it has an even number of edges.

In the *coloring game*, Alice and Bob take turns properly coloring the vertices of a graph, Alice trying to minimize the number of colors used, while Bob tries to maximize them. The *game chromatic number* is the smallest number of colors that ensures that the graph can be properly colored despite of Bob's intention. We determine the game chromatic number for three forest subclasses (composed by caterpillars), we present two sufficient conditions and two necessary conditions for any caterpillar to have game chromatic number equal to 4.

In the *marking game*, Alice and Bob take turns selecting the unselected vertices of a graph, and Alice tries to ensure that for some integer  $k$ , every unselected vertex has at most  $k - 1$  neighbors selected. The *game coloring number* is the smallest  $k$  possible. We established lower and upper bounds for the *Nordhaus-Gaddum type inequality* for the number of *P-positions* of a caterpillar, the game chromatic and coloring numbers in any graph.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Noções preliminares . . . . .	4
1.2 Caterpillar . . . . .	7
<b>2 Jogo timber</b>	<b>12</b>
2.1 Jogo timber em caminhos . . . . .	14
2.2 Jogo timber em árvores . . . . .	19
2.3 Jogo timber em caterpillars . . . . .	21
2.3.1 Jogo timber em caterpillars com número par de arestas . . . . .	22
2.4 Análise dos resultados . . . . .	26
<b>3 Jogo de coloração</b>	<b>29</b>
3.1 Jogo de coloração em caterpillars . . . . .	33
3.1.1 Caterpillar com grau máximo 3 . . . . .	35
3.1.2 Condições suficientes e necessárias para $\chi_g(H) = 4$ . . . . .	35
3.1.3 Caterpillar sem vértice de grau 2 . . . . .	37
3.1.4 Caterpillar sem vértice de grau 3 . . . . .	38
3.1.5 Caterpillars com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 . . . . .	40
3.2 Jogo de coloração em floresta . . . . .	45
3.3 Uma redução . . . . .	47
3.4 Análise dos resultados . . . . .	48
<b>4 Nordhaus-Gaddum em jogos combinatórios</b>	<b>50</b>
4.1 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número de $P$ -positions do jogo . . . . .	52
4.2 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número cromático do jogo	53
4.3 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número de coloração do jogo . . . . .	56



4.4	Análise dos resultados . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>59</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Manuscrito “Timber Game as a counting problem”</b>	<b>68</b>
<b>B</b>	<b>Manuscrito “The Game Chromatic Number of a caterpillar”</b>	<b>91</b>
<b>C</b>	<b>Manuscrito “On Nordhaus-Gaddum type inequalities for the Game Chromatic and Game Coloring Numbers”</b>	<b>118</b>
<b>D</b>	<b>Questão da 5ª Maratona de Programação da UFFS</b>	<b>132</b>

# Lista de Figuras

1.1	$cat(2, 0, 1, 0, 3, 0)$ . . . . .	7
1.2	Caterpillars isomorfas. . . . .	8
1.3	Árvores que não são caterpillars com 7, 8 e 9 vértices. . . . .	11
2.1	Imagens do vídeo game timber. . . . .	12
2.2	(a) Digrafo $D$ ; configuração restante após derrubar o arco: (b) (5, 4), (c) (2, 3). . . . .	13
2.3	Possíveis configurações de $P_3$ . . . . .	14
2.4	Representação de montanha da palavra LLRLR. . . . .	15
2.5	Representação de montanha da palavra LLLRLLRRRR, que é um caminho de Dyck. . . . .	17
2.6	Exemplo de reflexão em torno de $y = -1$ a partir de $x = 3$ . . . . .	18
2.7	O digrafo em (a) é uma $P$ -position sse o digrafo em (b) é uma $P$ - position. . . . .	20
2.8	O digrafo em (a) é uma $P$ -position sse o digrafo em (b) é uma $P$ - position. . . . .	21
2.9	$cat_{01}(\{v_1, v_4, v_6\}   \{v_2, v_3, v_5\})$ . . . . .	22
2.10	Configuração com número par de arcos que não é $P$ -position. . . . .	23
2.11	Família de caterpillars (I), (II) e (III) do Teorema 2.13. . . . .	23
2.12	Lemas 2.7 e 2.8 são aplicados: (a) da esquerda para a direita (b) da direita para a esquerda. . . . .	24
2.13	$\vec{G}$ e $\vec{G}'$ tem o mesmo número de $P$ -positions. . . . .	24
2.14	Caterpillar do tipo (II) após aplicarmos o Lema 2.7. . . . .	26
2.15	Na região hachurada, a caterpillar $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$ tem mais $P$ -positions que o caminho, quando $s$ é par e ímpar, respectivamente. . . . .	27
2.16	$cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$ . . . . .	28
2.17	Orientações que são $P$ -positions da caterpillar que alcança o limite inferior para o número de $P$ -positions. . . . .	28
3.1	Caminho $P_4$ sendo colorido por Alice e Bob. . . . .	30
3.2	Tentativa de colorir o grafo $G$ com três cores. . . . .	30

3.3	A caterpillar $H_d$ satisfaz $\chi_g(H_d) = 4$ . . . . .	32
3.4	A garra parcialmente colorida. . . . .	33
3.5	As caterpillars parcialmente coloridas (a) $H_1$ (b) $H_2$ (c) $H_3$ (d) $H_4$ . . .	34
3.6	A menor árvore $H_d$ com $\chi_g(H_d) = 4$ . . . . .	38
3.7	As caterpillars (a) $H_{33}$ (b) $H_{[3]}$ (c) $H_{[3][4]}$ (d) $H_{[3]3[4]}$ . . . . .	39
3.8	Caterpillar $H'_{[6]}$ com $\chi_g^b(H'_{[6]}) = 4$ . . . . .	41
3.9	Caterpillar $H'_{22}$ com $\chi_g^a(H'_{22}) = 4$ . . . . .	42
3.10	Caterpillar $H'_{[6][3]}$ com $\chi_g^a(H'_{[6][3]}) = 4$ . . . . .	43
3.11	Caterpillar $H'_{23}$ com $\chi_g^a(H'_{23}) = 4$ . . . . .	44
3.12	Ilustração para o algoritmo de Faigle et al. [21]. . . . .	46
3.13	Florestas $F$ e $F'$ com $\chi_g(F) = 2$ e $\chi_g(F') = 3$ , respectivamente. . . .	48
3.14	Caterpillars $H$ com $\Delta(H) \geq 4$ que são minimais com respeito a $\chi_g(H) = 4$ . . . . .	49
4.1	Caterpillar (a) parcialmente marcada $H_3$ (b) $H$ . . . . .	52
4.2	Grafos (a) $H_{12}$ ; (b) $H_{10}$ . . . . .	56
5.1	Grafo $G$ com $\chi_g^a(G) = 5$ e $\chi_g^b(G) = 3$ . . . . .	61

# Lista de Tabelas

2.1	Resultados resumidos na $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$ quando temos os arcos $(v_1, v_2)$ ou $(v_s, v_{s-1})$ ; ou $(v_2, v_1)$ e $(v_{s-1}, v_s)$ . . . . .	25
2.2	Número de $P$ -positions de uma caterpillar do tipo (I). . . . .	26
3.1	Alguns exemplos de limites inferior e superior de $\chi_g(G)$ . . . . .	31
3.2	Conjecturas em florestas com $r$ componentes e seus contra-exemplos. . . . .	32
3.3	Resultados do Lema 3.1. . . . .	34
3.4	Resumos dos resultados . . . . .	48
4.1	Relações do tipo Nordhaus-Gaddum para a soma de parâmetros em $G$ e $\bar{G}$ . . . . .	51
4.2	Grafos que atingem os limites apresentados nos Teoremas 4.3, 4.4 e 4.7. . . . .	58
5.1	Famílias (I), (II) e (III) e seus números de $P$ -positions. . . . .	59

# Capítulo 1

## Introdução

Um *grafo* pode ser visto como um conjunto de pontos com linhas ligando alguns deles. Apesar de se tratar de um objeto matemático de simples compreensão, os grafos são ferramentas poderosas para modelarmos e resolvermos problemas de diversas áreas de conhecimento como, por exemplo, problemas de transporte, genética, comunicação, química e web. Dependendo da aplicação, as linhas de um grafo podem ter orientação e, neste caso, o grafo orientado é chamado de *digrafo*. Como exemplo de um grafo orientado temos a estrutura de referências das páginas web do *Wikipédia*.

A *Teoria de Grafos* teve seu marco inicial com o artigo de Euler, publicado em 1736, sobre o *problema das sete pontes de Königsberg*<sup>1</sup>, mas levou quase um século para que a área voltasse a despertar interesse na comunidade científica. Um dos problemas que contribuiu para este ressurgimento foi o *problema das quatro cores*, que diz que, dado um mapa plano dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de modo que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. O *Teorema das quatro cores* foi demonstrado pela primeira vez em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador IBM 360, que realizou bilhões de cálculos. Em 1994, foi produzida uma prova simplificada para este teorema por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas, mas até hoje ninguém conseguiu uma demonstração sem o uso do computador. Desde então, problemas de coloração vem sendo amplamente estudados em Teoria de Grafos.

Encontrar o menor número de cores para colorir um mapa, como no problema das quatro cores, trata-se de um problema de otimização discreta. Uma maneira de dinamizar e tornar mais interessante os problemas de otimização em grafos é usar a ideia dos *jogos combinatórios*.

---

<sup>1</sup>Este problema é baseado na cidade de Königsberg, que é cortada pelo Rio Prególia, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes. Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repeti-las, de forma que o ponto de destino fosse igual ao ponto de partida. Havia se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando, em 1736, Euler provou que não existia um circuito que atendesse tais condições.

Jogos combinatórios atraem o interesse de muitos pesquisadores, e seu principal objetivo é o estudo das estratégias vencedoras existentes. Mais especificamente, de acordo com Berlekamp et al. [4], jogos combinatórios são jogos:

- com número de jogadas finito;
- jogados por dois jogadores: jogador 1 e jogador 2;
- em que existe uma posição inicial específica escolhida aleatoriamente;
- em que ambos os jogadores possuem a *informação perfeita*, ou seja, as informações pertinentes ao jogo são públicas;
- em que não há dados ou dispositivos aleatórios;
- em que os jogadores jogam intercaladamente, ou seja, não há jogadas simultâneas;
- nos quais, quando um dos jogadores não puder se movimentar, teremos a *condição de término*.

Alguns exemplos de jogos combinatórios amplamente conhecidos são o jogo da velha, o xadrez e a dama. Outros jogos combinatórios menos conhecidos são o *Go*, o *Hex* e o *Nim*. Vale ressaltar que a maioria dos jogos de cartas que conhecemos não são jogos combinatórios, pois usualmente não é permitido que um jogador conheça as cartas dos demais jogadores; o Gamão também não é um jogo combinatório, pois há um dispositivo aleatório, o dado. O jogo da velha talvez seja o mais simples dos jogos combinatórios e é possível que os jogadores tenham estratégia de modo a garantir, pelo menos, o empate. Desta forma, uma pergunta natural seria: sempre é possível traçar uma estratégia em jogos combinatórios?

Atualmente, há uma rica e recente literatura sobre jogos combinatórios [1, 4, 10, 11, 29, 36, 37, 42, 44]. O primeiro artigo nesta área foi publicado em 1905 [8], e consiste em um estudo do jogo *Nim*, que se tornou referência em *jogos imparciais*. Jogos imparciais são jogos combinatórios em que os jogadores não são distinguíveis, ou seja, ambos jogadores possuem o mesmo conjunto de movimentos permitidos. Um jogo que não é imparcial é chamado de *jogo partizan*, no qual certos movimentos são permitidos para um jogador, mas não são permitidos para o outro.

Ainda temos as classificações de *normal play* e *misère play*, em que o primeiro jogador que não pode se mexer é o perdedor/vencedor, respectivamente. Nesta tese, trabalhamos com jogos imparciais na forma *normal play*.

Schmidt [42] descreve um exemplo de modelagem que utiliza o *jogo de dominação*, que é o segundo jogo combinatório mais estudado na literatura.

Tomemos, por exemplo, o problema da dominação. Imaginemos que o grafo representa um território que queremos proteger do risco de incêndio. Procuramos um local para instalar os quartéis de bombeiros. O problema de garantir que nenhuma cidade esteja muito longe de um quartel corresponde a um dominante do grafo que representa o território. Idealmente, o número mínimo de quartéis a instalar corresponde ao número dominante do grafo. Mas, suponhamos agora que a localização dos quartéis é decidida por dois capitães dos bombeiros. Quem quer fazer seu trabalho bem tenta minimizar o número de quartéis, enquanto o outro, que tem conexões com a empresa encarregada de construí-los, gostaria de ter o maior número possível. O número de quartéis requerido neste caso corresponde a uma variante lúdica de número dominante. (Schmidt, 2015)

Além de ajudar a resolver problemas de teoria de grafos, os jogos combinatórios também são ferramentas didáticas e contribuem com a popularização da matemática. Com este intuito, por exemplo, os projetos *Math à Modeler*<sup>2</sup> (França) e *Antena Brasileira da Matemática*<sup>3</sup> (Brasil) buscam apresentar jogos em feiras e eventos. Os jogos apresentados são todos modelados por grafos, e a apresentação ao público é feita de forma lúdica e divertida. Ao longo do desenvolvimento desta tese, tive a honra de participar das atividades de ambos os projetos nos eventos *Salon International des Jeux Mathématiques* (Paris, 2015), *Festival Remue Méninge* (Echirolles, 2015) e *Festival da Matemática* (Rio de Janeiro, 2017).

Parte da motivação para escolhermos o tema de jogos combinatórios foi justamente o desejo de estudar um objeto matemático que pudesse ser aplicado no ensino da Matemática.

Nesta tese, estudamos dois jogos combinatórios em grafos extremamente distintos: o *jogo timber* e o *jogo de coloração*. No jogo timber, trabalhamos problemas de contagem: contamos de quantas maneiras podemos orientar um grafo de modo que o segundo jogador ganhe. Timber é um jogo novo, apresentado em 2014 por Nowakowski et al. [35]. Além deste artigo, o único trabalho que temos na literatura sobre este jogo é a tese de doutorado de Renault [41].

Por outro lado, o jogo de coloração, em nosso estudo, é um problema de caracterização de grafos. Ao contrário do jogo timber, esse é o jogo combinatório mais antigo e estudado. Na literatura, é comum a busca por limites superiores para o parâmetro do jogo em classes específicas de grafos. Muitas vezes para obter estes limites, os autores utilizam um jogo auxiliar ao jogo de coloração, o *jogo de marca-*

---

<sup>2</sup>[www.mathsamodeler.ujf-grenoble.fr](http://www.mathsamodeler.ujf-grenoble.fr)

<sup>3</sup>[www.antenabrasil.uff.br](http://www.antenabrasil.uff.br)

*ção*. O jogo de coloração surgiu em 1980 como uma tentativa de provar o Teorema das quatro cores.

Os jogos *timber*, de coloração e de marcação, bem como seus parâmetros, são introduzidos e discutidos nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. Nos Capítulos 2 e 3, estudamos os jogos em uma classe de grafo especial: a *caterpillar*. No Capítulo 4, apresentamos o jogo de marcação, a *relação do tipo Nordhaus-Gaddum* e analisamos os parâmetros dos três jogos de acordo com esta relação. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais e algumas propostas de trabalhos futuros.

Antes de começarmos a trabalhar com os jogos combinatórios, definimos, na Seção 1.1, conceitos básicos de Teoria de Grafos e, na Seção 1.2, o grafo *caterpillar*, que é objeto de nossa pesquisa nos Capítulos 2 e 3.

Este doutorado teve início em setembro de 2013 sob orientação das professoras Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e Simone Dantas de Souza, com período de doutorado sanduíche em Grenoble (França) com duração de sete meses sob orientação do professor Sylvain Gravier.

## 1.1 Noções preliminares

Um *grafo simples*  $G = (V(G), E(G))$  consiste de um conjunto não-vazio  $V(G)$  de *vértices* e de um conjunto  $E(G)$  de *arestas*, de modo que cada *aresta*  $e \in E(G)$  é um par não ordenado de vértices distintos, isto é, para toda aresta  $e \in E(G)$  existem  $u \in V(G)$  e  $v \in V(G)$  distintos e tais que  $e = \{u, v\}$  ou simplesmente  $e = uv$ . Neste caso, dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* ou *vizinhos* e que a aresta  $e$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$  ou que  $u$  e  $v$  são as *extremidades* da aresta  $e$ . De maneira análoga, duas arestas que possuem a mesma extremidade são chamadas de *arestas adjacentes*. Denotamos por  $n$  o número de vértices  $|V(G)|$  e por  $m$  o número de arestas  $|E(G)|$ . A *ordem*  $|G|$  do grafo  $G$  é  $n$ .

Quando não houver risco de ambiguidade escreveremos  $G = (V, E)$  ou simplesmente  $G$ .

O grafo sem vértices é o *grafo nulo*. Um grafo é *finito* quando seu conjunto de vértices é finito, caso contrário ele é um grafo *infinito*.

Nesta tese, todos os grafos considerados são simples, finitos e não-nulos.

O grafo simples com apenas um vértice é considerado *trivial*.

Um vértice que é adjacente a todos os demais vértices no grafo é dito *universal*.

Dizemos que dois grafos são *isomorfos* caso exista uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices que preserve adjacências e não-adjacências. Se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos isomorfos, denotamos  $G_1 \cong G_2$ .

O complemento  $\overline{G}$  de um grafo  $G$  simples é um grafo simples cujo conjunto de vértices  $V(\overline{G}) = V(G)$  e cujas arestas são os pares de vértices não-adjacentes de  $G$ .



O *grau* de um vértice  $v$  em  $G$ , representado por  $d_G(v)$  ou simplesmente  $d(v)$ , é o número de arestas incidentes à  $v$ . Denotamos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices do grafo  $G$ .

Um grafo é *k-regular* se todos os seus vértices têm grau  $k$ .

Um grafo *completo* é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Todo grafo completo com  $n$  vértices é  $(n - 1)$ -regular.

Uma *clique* de um grafo é um subconjunto de seus vértices mutuamente adjacentes. Se a clique em  $G$  possui  $l$  vértices, então a denotamos por  $K_l$ .

Um *conjunto independente* ou *conjunto estável* é um subconjunto de vértices dois a dois não adjacentes. Se o conjunto independente tem  $l$  vértices, então o denotamos como  $S_l$ .

Um grafo  $H = (U, F)$  é um *subgrafo* de um grafo  $G = (V, E)$  quando  $U \subseteq V$  e  $F \subseteq E$ , e denotamos por  $H \subseteq G$ . Um subgrafo  $H \subseteq G$  é *gerador* se  $H$  contém todos os vértices de  $G$ . Dado um conjunto de vértices  $U \subseteq V$ , dizemos que o subgrafo  $H = (U, F)$  do grafo  $G = (V, E)$  é *induzido* por  $U$  quando todas as arestas de  $G$  com extremidades em  $U$  pertencem à  $F$ , e denotamos por  $H = G[U]$  o subgrafo  $H \subseteq G$  induzido por  $U \subseteq V$ . De maneira análoga, definimos um subgrafo induzido por um subconjunto de arestas  $F \subseteq E$ .

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um *emparelhamento* é um subconjunto de arestas de  $G$  tal que seus elementos não são adjacentes dois a dois.

Um *caminho*  $P$  é um grafo simples cujos vértices podem ser arrumados em uma sequência linear de modo que 2 vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência e são não-adjacentes caso contrário. O caminho com  $n$  vértices é denotado por  $P_n$  e o comprimento do caminho é dado pelo número de suas arestas.

Um grafo  $G$  é *conexo* quando existe um caminho entre qualquer par de vértices de  $G$ , caso contrário dizemos que  $G$  é *desconexo*. Um grafo é dito *p-conexo* se a remoção de quaisquer  $p - 1$  de seus vértices não o torna desconexo.

A *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  de um grafo conexo  $G = (V, E)$  é representada por  $d_G(u, v)$  ou por  $d(u, v)$  (se não houver risco de ambiguidade) e é definida como o comprimento do menor caminho entre  $u$  e  $v$  em  $G$ . O *diâmetro* de um grafo conexo é dado pela máxima distância entre dois vértices do grafo.

Um *ciclo* com  $n$  vértices, com  $n \geq 3$ , denotado por  $C_n$ , é um grafo simples cujos vértices podem ser arrumados em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência; caso contrário, eles não são adjacentes. O comprimento de um ciclo também é dado pelo número de suas arestas.

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Uma *folha* de uma árvore é um vértice cujo grau é 1. Se uma árvore possui  $n$  vértices, então possui  $n - 1$  arestas.

Uma *floresta* é um grafo acíclico. Uma árvore é uma floresta, bem como um conjunto de árvores também é uma floresta.

Um *grafo bipartido* é um grafo cujos vértices podem ser particionados em dois conjuntos disjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tais que toda aresta conecta um vértice em  $V_1$  a um vértice em  $V_2$ , ou seja,  $V_1$  e  $V_2$  são conjuntos independentes.

Um *grafo bipartido completo*  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  é um tipo especial de grafo bipartido onde cada vértice de  $V_1$  é adjacente a cada vértice de  $V_2$ . O grafo bipartido completo com partições de tamanho  $|V_1| = p$  e  $|V_2| = q$ , é denotado  $K_{p,q}$ .

Uma *estrela* é um grafo bipartido completo  $K_{1,p}$ , para qualquer valor de  $p$  inteiro. Todos os grafos bipartidos completos que são árvores são estrelas.

Uma *garra* é o grafo bipartido completo  $K_{1,3}$ .

Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  dois grafos. Define-se a *junção* (ou *join*),  $G_1 \oplus G_2$ , como o grafo cujo conjunto de vértices é a união dos conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  e cujo conjunto de arestas é a união de  $E_1$  e  $E_2$  mais todas as arestas entre  $V_1$  e  $V_2$ , ou seja,  $G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E(V_1) \cup E(V_2) \cup \{uv | u \in V_1, v \in V_2\})$ .

Um *grafo k-partido completo*  $G$  é o grafo junção de  $k$  conjuntos independentes  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , ou seja,  $G = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$ .

Uma *coloração própria* para um grafo é uma atribuição de cores aos seus vértices tal que dois vértices adjacentes não recebam uma mesma cor. Em outras palavras, uma coloração para um grafo é uma partição do seu conjunto de vértices em conjuntos estáveis.

O *número cromático* de  $G$ ,  $\chi(G)$ , é o parâmetro associado ao grafo  $G$  para o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  admite uma coloração própria com  $k$  cores.

Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*)  $D$  é um par ordenado  $(V(D), A(D))$  que consiste de um conjunto de vértices  $V(D)$  e um conjunto de arcos  $A(D)$ , de modo que cada arco  $a \in A(D)$  é um par ordenado de vértices de  $D$  (não necessariamente distintos), isto é, para todo arco  $a \in A(D)$  existem  $u, v \in V(D)$  tais que  $a = (u, v)$  e  $a$  é dita a ligação de  $u$  para  $v$ . Neste caso, dizemos que o vértice  $u$  é a cauda de  $a$ , e o vértice  $v$  é a cabeça de  $a$ ;  $u$  e  $v$  são ambos as extremidades de  $a$ .

Em um digrafo  $D$ , o *grau de entrada*  $d_D^-(v)$  de um vértice  $v$  em  $D$  é o número de arcos  $(x, v)$ , e o *grau de saída*  $d_D^+(v)$  de  $v$  em  $D$  é o número de arcos  $(v, x)$ ,  $x \in V(D)$ .

No decorrer do trabalho acrescentamos definições específicas ao contexto abordado. As definições de Teoria de Grafos apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em Bondy e Murty [6] e Szwarcfiter [45]. As notações utilizadas neste trabalho são notações padrões e seguem, em geral, as notações adotadas em [6] e [45].

## 1.2 Caterpillar

Caterpillars são usadas em Química para representar a estrutura da molécula do hidrocarboneto benzenóide (molécula que possui dois ou mais anéis de benzeno fundidos) e por este motivo também são conhecidas como *árvores de benzenóide* ou *árvores de Gutman*, pesquisador que desenvolveu o trabalho nesta área.

El-Basil [19] escreveu: “É incrível que quase todos os grafos que desempenharam um papel importante no que hoje é chamado de “Teoria dos Grafos em química” estão relacionados com árvores caterpillars”.

Uma *caterpillar*  $cat(k_1, \dots, k_s)$  é uma árvore obtida por um caminho central  $v_1, \dots, v_s$  (chamado de *espinha*) atribuindo  $k_i \geq 0$  novas folhas adjacentes a cada vértice  $v_i$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Na Figura 1.1, vemos uma  $cat(2, 0, 1, 0, 3, 0)$ .

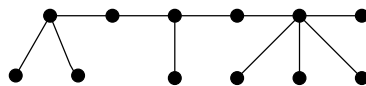


Figura 1.1:  $cat(2, 0, 1, 0, 3, 0)$ .

Uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  possui  $s + \sum_{i=1}^s k_i$  vértices. Chamamos de *aresta perna* uma aresta com um extremo em  $v_i$  (vértice da espinha da caterpillar) e o outro em uma das suas  $k_i$  folhas adjacentes. Considerando a ordem de vértices  $v_1, \dots, v_s$  na espinha da caterpillar, dizemos que  $v_i$  é o *sucessor* de  $v_{i-1}$ , e  $v_{i-1}$  é o *antecessor* de  $v_i$ , para  $i = 1, \dots, s$ .

Na caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  o diâmetro é sempre  $s - 1, s$  ou  $s + 1$  (a espinha já nos fornece um limite inferior para o diâmetro da caterpillar). Baseado na definição de caterpillar, temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.1** *As seguintes caterpillars, cujos diâmetros são iguais a  $s - 1$ , são isomorfas:*

- $G_1 = cat(k_1, \dots, k_s)$ , onde  $k_1 = k_s = 0$ ;
- $G_2 = cat(x_1, \dots, x_{s-2})$ , tal que  $x_1 = k_2 + 1, x_i = k_{i+1}$ , para  $i = 2, \dots, s - 3$ , e  $x_{s-2} = k_{s-1} + 1$ ;
- $G_3 = cat(y_1, \dots, y_{s-1})$ , tal que  $y_1 = k_2 + 1, y_i = k_{i+1}$ , para  $i = 2, \dots, s - 2, s - 1$ ;
- $G_4 = cat(z_1, \dots, z_{s-1})$ , tal que  $z_{s-1} = k_{s-1} + 1$  e  $z_i = k_i$ , para  $i = 1, \dots, s - 2$ .

*Demonstração.* Observe que em  $G_1$  a espinha é um caminho de comprimento  $s - 1$ , logo  $k_1 = k_s = 0$ , caso contrário o diâmetro não seria  $s - 1$ . Portanto,  $|V(G_1)| = s + k_2 + \dots + k_{s-1}$ .

Sejam  $V(G_1) = \{v_i : 1 \leq i \leq s\} \cup I_1$  e  $V(G_2) = \{w_i : 1 \leq i \leq s-2\} \cup I_2$ , onde  $v_i$  é vértice da espinha de  $G_1$ ,  $w_i$  é vértice da espinha de  $G_2$ , e os conjuntos  $I_1$  e  $I_2$  são os vértices que não estão nas espinhas de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Seja  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  a função definida como:  $\phi(v_1)$  é o vértice de  $I_2 \setminus I_1$  que é adjacente a  $w_1$ ;  $\phi(v_s)$  é o vértice de  $I_2 \setminus I_1$  que é adjacente a  $w_{s-2}$ ;  $\phi(v_i) = w_{i-1}$ , para  $2 \leq i \leq s-1$ ; e para folha  $p \in I_1$  adjacente a  $v_i$ , para  $2 \leq i \leq s-1$ ,  $\phi(p) = p'$  uma folha adjacente a  $\phi(v_i) = w_{i-1}$ .

A função  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  é bijetiva. Logo,  $G_1 \cong G_2$ .

De modo similar, é possível encontrar funções bijetivas entre  $G_1$  e  $G_j$ , para  $j = 3, 4$ .

Então  $G_1 \cong G_j$ , e como isomorfismo é uma relação de equivalência,  $G_1 \cong G_2 \cong G_3 \cong G_4$ .

□

Na Figura 1.2, temos 4 caterpillars isomorfas cujo diâmetro é 5.

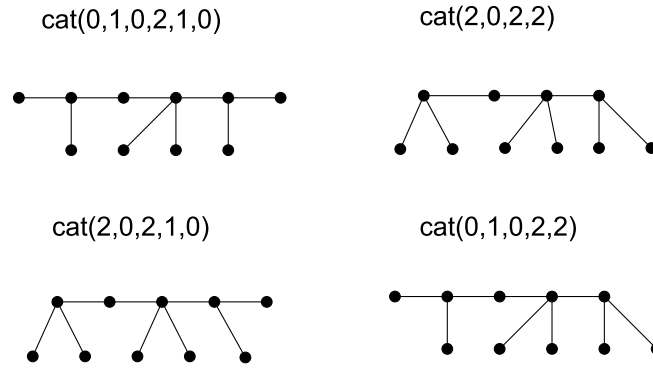


Figura 1.2: Caterpillars isomorfas.

Há muitas definições de caterpillar. No Teorema 1.2, apresentamos algumas:

**Teorema 1.2** *As definições abaixo de caterpillar são equivalentes.*

1. *Árvores em que todos os vértices têm distância no máximo 1 até um caminho central.*<sup>4</sup>
2. *Árvores nas quais a remoção das folhas e suas arestas incidentes produz um caminho.*
3. *Árvores onde os vértices de grau maior ou igual a 2 definem um único caminho.*
4. *Árvores em que todo vértice de grau pelo menos 3 tem até 2 vizinhos não-folha.*
5. *Árvores que não contém como subgrafo o grafo formado substituindo cada aresta do grafo estrela  $K_{1,3}$  por um caminho de comprimento 2.*

<sup>4</sup>Este caminho central não se trata necessariamente do diâmetro  $d$  da árvore, ele pode ter tamanho  $d-2$ ,  $d-1$  ou  $d$ .

*Demonstração.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Seja  $G$  uma árvore em que todos os vértices estão a uma distância 0 ou 1 de um caminho central. As folhas não pertencem ao caminho central, exceto na possibilidade de serem extremidades do caminho. Se as folhas não estão no caminho central, então possuem distância 1 do mesmo. Se retirarmos as folhas, restarão em  $G$  apenas os vértices cuja distância para o caminho é 0, ou seja, restará o próprio caminho.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Se ao remover todas as folhas resta um caminho, então é porque as folhas estão a uma distância 1 do caminho. Os próprios vértices do caminho têm distância 0 em relação ao caminho. Logo, todos os vértices têm distância até 1 de um caminho central.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Os vértices folha têm grau 1 e ao removê-los resta um caminho  $P = w_1, \dots, w_r$ . Se  $w_1 \in P$  é porque possui alguma folha adjacente. O mesmo vale para  $w_r$ . Para  $w_2, \dots, w_{r-1}$  sabemos que o grau é maior ou igual a 2, pois o grau 2 já está garantido por pertencer ao interior de um caminho. Logo, existe o caminho  $P$  contendo todos os vértices com grau maior ou igual a 2.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Suponha que existe um caminho  $P = w_1, w_2, \dots, w_r$  que contém todo vértice de grau maior ou igual a 2. Os vértices  $w_1$  e  $w_r$  necessitam de folhas adjacentes para ter grau pelo menos 2. Os vértices de grau 1 têm que ser adjacentes a  $w_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Logo, removendo as folhas, teremos o caminho  $P$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Suponha que há caminho  $P = w_1, w_2, \dots, w_r$  que contém todo vértice de grau maior ou igual a 2. Logo, os vértices de grau maior ou igual a 3 pertencem a este caminho  $P$ . Se  $d(w_1) \geq 3$ , então  $w_1$  tem  $w_2$  como vértice adjacente não-folha. Se  $d(w_i) \geq 3$  para algum  $i = 2, \dots, r-1$ , então  $w_i$  tem  $w_{i-1}$  e  $w_{i+1}$  como vértices adjacentes não-folhas. Se  $d(w_r) \geq 3$ , então  $w_r$  tem  $w_{r-1}$  como vértice adjacente não-folha.

(4)  $\Rightarrow$  (3) Suponha por absurdo que (4) é verdade, mas que (3) não é. Logo, na árvore  $G$  os vértices de grau maior ou igual a 2 não definem um único caminho. Portanto, existem um caminho  $P$  e um vértice  $w$  de grau 2 ou mais que não pertence a  $P$  ( $w$  não é folha). Como  $G$  é uma árvore (conexo), há caminho  $P'$  entre  $w$  e um vértice de  $P$ . Suponha que  $v \in V(P)$  pertence a este caminho  $P'$ . Logo,  $d(v) \geq 3$ . Repare que  $v$  não é extremidade de  $P$ . Consequentemente,  $v$  tem pelo menos 3 arestas adjacentes não-folha.

(1)  $\Rightarrow$  (5) Prova por contra-positiva. Suponha que uma árvore contém o subgrafo formado substituindo cada aresta do grafo estrela  $K_{1,3}$  por um caminho de tamanho 2. Logo, para todo caminho na árvore, existem vértices a uma distância pelo menos 2.

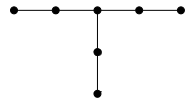
(5)  $\Rightarrow$  (1) Prova por contra-positiva. Suponha que para todo caminho  $P$ , existe vértice  $w$  com distância pelo menos 2 até  $P$ . Logo, existe subgrafo formado substituindo cada aresta do grafo estrela  $K_{1,3}$  por um caminho de tamanho 2.

□

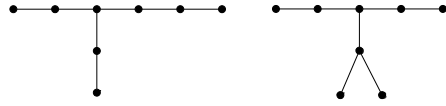
O número de caterpillars não isomorfas com  $n$  vértices é dado por  $2^{n-4} + 2^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}$ . É um caso raro de enumeração de grafos conhecido. Este resultado foi provado de duas maneiras em Harary e Schwenk [31].

O item (5) do Teorema 1.2 nos dá uma boa caracterização do que não é uma caterpillar, fornecendo os subgrafos *proibidos*, ou seja, subgrafos induzidos que não são admitidos em uma caterpillar. Inclusive a menor árvore que não é caterpillar possui 7 vértices. Na Figura 1.3 apresentamos as árvores que não são caterpillars com 7, 8 e 9 vértices.

Árvore que não é caterpillar com 7 vértices



Árvores que não são caterpillars com 8 vértices



Árvores que não são caterpillars com 9 vértices

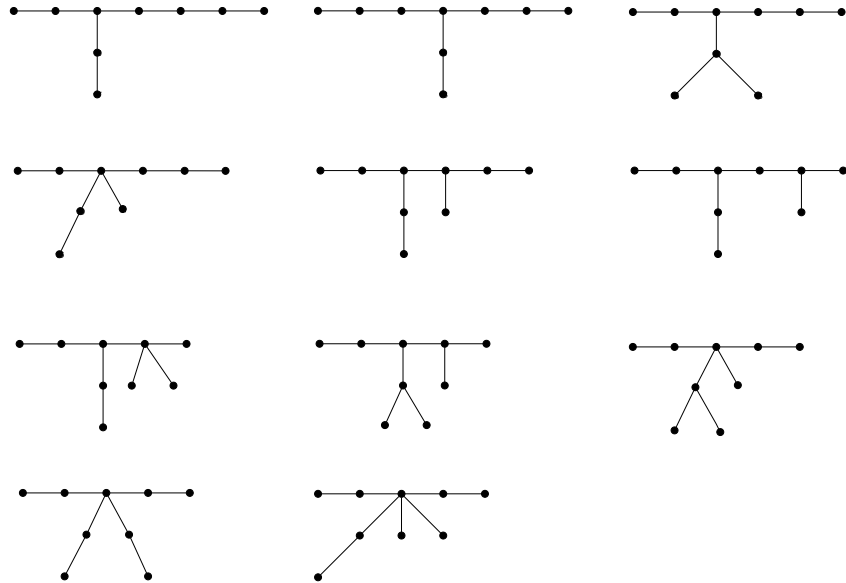


Figura 1.3: Árvores que não são caterpillars com 7, 8 e 9 vértices.

## Capítulo 2

### Jogo timber

Em 1984, foi lançado um jogo de vídeo game chamado *timber* (ilustrado na Figura 2.1). O objetivo deste jogo é acumular pontos por derrubar árvores ou se equilibrar em cima de um tronco flutuante, em rotação. O jogador assume o papel de um lenhador e possui uma quantidade limitada de tempo para derrubar um determinado número de árvores que aparecem em sequência a partir do solo. Pode ser jogado por uma, duas ou várias pessoas e também há obstáculos a serem ultrapassados.

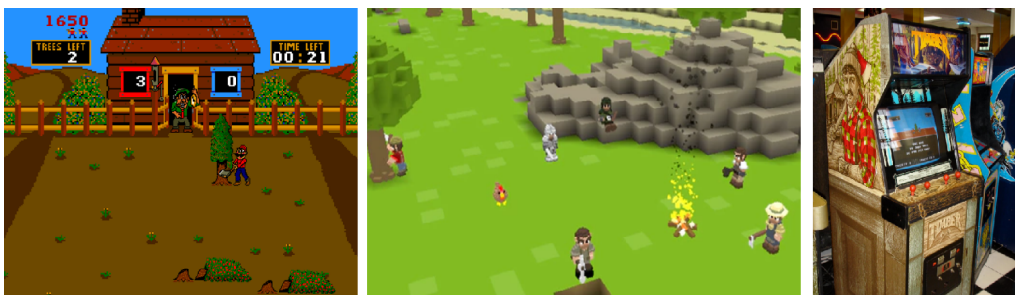


Figura 2.1: Imagens do vídeo game timber.

Em 2013, este jogo foi tratado como um jogo combinatório por Nowakowski, Renault, Lamoureux, Mellon e Miller [35] e ganhou uma modelagem matemática através da Teoria de Grafos. Além deste artigo, o único trabalho encontrado na literatura de grafos que trata do jogo timber é a tese de doutorado de Renault [41].

O jogo *timber*, do ponto de vista dos jogos combinatórios, é um jogo imparcial jogado por dois jogadores. A ideia do jogo é a de enfileirarmos peças de dominó que são derrubadas causando um efeito em cadeia. O jogo é modelado da seguinte maneira: cada peça do dominó corresponde a um arco de um digrafo  $D = (V, \vec{E})$ , e cada jogador escolhe uma peça de dominó que corresponde a algum arco  $(x, y)$  e o derruba no sentido do vértice  $y$ . Esta peça de dominó derruba as demais em arcos incidentes a  $y$ , independente da direção destes arcos. Os arcos correspondentes às peças de dominós derrubadas são removidos do digrafo, ou seja, remove-se de



$D$  todos os vértices da componente conexa  $G$  que contém  $y$ , exceto a aresta  $xy$ . O processo de derrubar os dominós continua até não haver mais peças a serem derrubadas. O jogador que derrubar o último dominó ganha e o jogador que não tiver opção de jogada perde. Na Figura 2.2(a), temos o digrafo inicial e, à direita, o que resta deste digrafo após duas possíveis jogadas (Figura 2.2(b) e (c)).

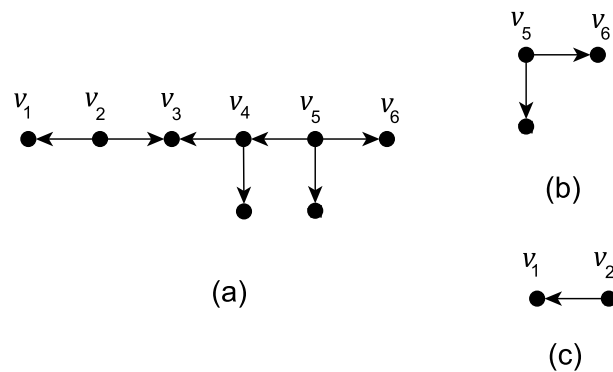


Figura 2.2: (a) Digrafo  $D$ ; configuração restante após derrubar o arco: (b) (5, 4), (c) (2, 3).

Dado um grafo  $G$ , uma *configuração de  $G$*  é obtida pela orientação das arestas de  $G$ . Em geral, dado um digrafo  $D$ , o grafo obtido ao ignorar as orientações das arestas é o grafo *subjacente* a  $D$ . Trabalhamos apenas com instâncias cujo grafo subjacente é conexo. No jogo timber há dois resultados possíveis para um dado digrafo: ser uma *P-position* ou uma *N-position*. Em uma *P-position* o segundo jogador sempre ganha independente da jogada feita pelo primeiro jogador, ou seja, o segundo jogador sempre possui uma estratégia vencedora. Já em uma *N-position*, o primeiro jogador é quem sempre ganha. O caso degenerado é quando o digrafo é formado por apenas 1 vértice (não há dominó algum) e não há movimento disponível para o primeiro jogador, caracterizando uma *P-position*.

Trabalhamos apenas com o *Normal Play*, isto é, o jogador que não possui movimento disponível é o perdedor.

**Exemplo 2.1** Para o grafo caminho com 3 vértices temos quatro possibilidades de digrafo. Veja a Figura 2.3. Os dois primeiros digrafos são isomorfos. Os arcos em *negrito* indicam o movimento a ser escolhido pelo primeiro jogador para que ele ganhe o jogo (no terceiro digrafo, o primeiro jogador poderia ter escolhido qualquer um dos arcos). Já no último digrafo não importa o arco escolhido pelo primeiro jogador, o segundo jogador sempre ganha. Logo, apenas o último digrafo é uma *P-position* e o grafo caminho com 3 vértices possui apenas uma *P-position*.

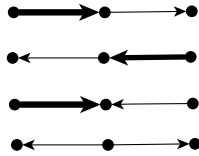


Figura 2.3: Possíveis configurações de  $P_3$ .

Nowakovski et al. [35] mostram que o número de configurações de um caminho que são  $P$ -positions é dado pela sequência de Catalan<sup>1</sup> e apresentam três lemas que auxiliam no seguinte problema de decisão: dada uma árvore orientada  $\vec{T}$ , ela é uma  $P$ -position?

Como observado em Nowakovski et al. [35], se o grafo subjacente tiver um ciclo, o primeiro jogador sempre ganha independente da orientação, pois basta escolher um arco qualquer no ciclo para sua primeira jogada. Logo, ao contrário da maioria dos problemas da Teoria de Grafos, a análise do jogo timber é desafiadora apenas em árvores. Estudamos o jogo timber em um tipo especial de árvore, chamada de *caterpillar* (descrita na seção 1.2), buscando resolver o problema em aberto de determinar o seu número de  $P$ -positions.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: nas Seções 2.1 e 2.2 apresentamos os resultados da literatura para o número de  $P$ -positions em caminhos e árvores, respectivamente. Nestas seções, expandimos os resultados existentes, em especial, através do Teorema 2.9, no qual caracterizamos as árvores que possuem  $P$ -positions. Na Seção 2.3, determinamos o número de  $P$ -positions de três classes infinitas de caterpillars por meio do Teorema 2.13 e comparamos estes resultados com o número de  $P$ -positions de um caminho.

Ao longo do estudo sobre o jogo timber apresentamos alguns resultados preliminares nas seguintes conferências:

- VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs (2014) [23];
- 13th Cologne-Twente Workshop on Graphs & Combinatorial Optimization (2015) [22].

Além disso, submetemos um artigo ao periódico *Discrete Applied Mathematics* edição especial do GO X [25], manuscrito encontrado no Apêndice A.

## 2.1 Jogo timber em caminhos

Todo caminho orientado é composto por arcos  $L$ 's para a esquerda e arcos  $R$ 's para a direita. Peart e Woan [38] e Deutsch [16] trabalham com uma representação de um caminho orientado como uma palavra composta por  $R$ 's e  $L$ 's.

<sup>1</sup>Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) foi um matemático francês e belga que trabalhava em frações continuadas, geometria descritiva, teoria dos números e combinatória. Uma de suas contribuições notáveis foi apresentar os números de Catalan para resolver um problema combinatório.

Seja  $w$  uma palavra cujo alfabeto é  $\{R, L\}$ . Seja  $w_{[i,j]} = w_i w_{i+1} \dots w_j$  uma subpalavra de  $w$ . Todo caminho orientado pode ser escrito como uma palavra  $w$ .

Uma *representação de montanha* é uma forma de representar no plano uma palavra  $w$ . Começa no ponto  $(0, 0)$ , cada letra L é um segmento obtido unindo os pontos  $(x, y)$  e  $(x + 1, y + 1)$  e cada letra R é um segmento obtido unindo os pontos  $(x, y)$  e  $(x + 1, y - 1)$ . Na Figura 2.4, temos a representação da palavra LLRLR.

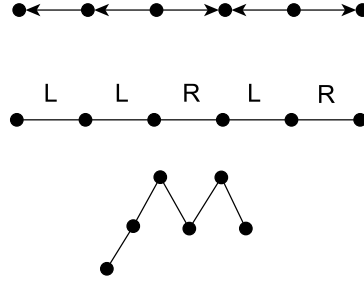


Figura 2.4: Representação de montanha da palavra LLRLR.

Seja  $|w|$  o número total de letras em  $w$ ,  $|w|_L$  o número de L's em  $w$  e  $|w|_R$  o número de R's em  $w$ .

Seja  $WP = \{w : |w_{[0,i]}|_L \geq |w_{[0,i]}|_R, \forall i, e |w|_L = |w|_R\}$ , ou seja,  $WP$  é o conjunto de palavras em que o número de L's é igual ao número de R's, e o número de L's é sempre maior ou igual que o número de R's quando lemos a palavra da esquerda para a direita. Observe que se um caminho orientado tem quantidade ímpar de arcos, então não é possível que o número de L's seja igual ao número de R's. Logo, um caminho orientado com quantidade ímpar de arcos não é uma palavra em  $WP$ .

Nowakowski et al. [35] usam a representação de montanha para determinar o número de  $P$ -positions de um caminho. Os autores apresentam seus resultados através dos Teoremas 2.2 e 2.3, sendo que reescrevemos a prova do Teorema 2.2 e completamos a prova do Teorema 2.3.

**Teorema 2.2** [35] *Em Normal Play, um caminho representado por uma palavra  $w$  é uma  $P$ -position se, e somente se,  $w \in WP$ .*

*Demonstração.* Usamos indução sobre o número de arcos.

Se existe apenas um arco no caminho orientado, então ele corresponde à palavra  $w$ , com  $|w| = 1$ . O caminho orientado não é uma  $P$ -position e  $w \notin WP$ , porque  $|w|_L \neq |w|_R$ .

Assuma que  $w$  é uma palavra com  $1 \leq |w| < t$  e  $w$  é uma  $P$ -position sse  $w \in WP$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $w$  uma palavra em  $WP$  com  $|w| = t$ .

Se o jogador move o dominó  $w_i = R$ , resta a subpalavra  $w_{[0,i-1]}$ . Como  $w_i = R$ , então  $|w_{[0,i-1]}|_L = |w_{[0,i]}|_L$  e  $|w_{[0,i-1]}|_R + 1 = |w_{[0,i]}|_R$ .

Como  $w \in WP$ ,  $|w_{[0,i]}|_L \geq |w_{[0,i]}|_R$  então

$$|w_{[0,i-1]}|_L = |w_{[0,i]}|_L \geq |w_{[0,i]}|_R > |w_{[0,i-1]}|_R \Rightarrow |w_{[0,i-1]}|_L > |w_{[0,i-1]}|_R$$

Logo,  $|w_{[0,i-1]}|_L \neq |w_{[0,i-1]}|_R$  e isto implica que  $w_{[0,i-1]} \notin WP$ . Como  $|w_{[0,i-1]}|_L < t$ , pela hipótese de indução,  $w_{[0,i-1]}$  não é uma  $P$ -position, ou seja, o primeiro que jogar em  $w_{[0,i-1]}$  ganha. Mas o primeiro jogador em  $w_{[0,i-1]}$  é o segundo jogador em  $w$ . Portanto,  $w$  é uma  $P$ -position.

Se o jogador move o dominó  $w_i = L$ , resta a subpalavra  $w_{[i+1,t-1]}$ . Como  $w_i = L$ , então  $|w_{[0,i-1]}|_L + 1 = |w_{[0,i]}|_L$  e  $|w_{[0,i-1]}|_R = |w_{[0,i]}|_R$ .

Como  $w \in WP$ ,  $|w_{[0,i-1]}|_L \geq |w_{[0,i-1]}|_R$  e  $|w|_L = |w|_R = \frac{t}{2}$ , porque  $|w| = t$ .

Calculamos que:

$$|w_{[i+1,t-1]}|_L = \frac{t}{2} - |w_{[0,i]}|_L = \frac{t}{2} - (|w_{[0,i-1]}|_L + 1) = \frac{t}{2} - |w_{[0,i-1]}|_L - 1.$$

Mas,  $\frac{t}{2} - |w_{[0,i-1]}|_L - 1 \leq \frac{t}{2} - |w_{[0,i-1]}|_R - 1 = |w_{[i+1,t-1]}|_R - 1$ . Logo,  $|w_{[i+1,t-1]}|_L \leq |w_{[i+1,t-1]}|_R - 1 \Rightarrow |w_{[i+1,t-1]}|_L < |w_{[i+1,t-1]}|_R \Rightarrow |w_{[i+1,t-1]}|_L \neq |w_{[i+1,t-1]}|_R$  e isto implica que  $w_{[i+1,t-1]} \notin WP$ . Análogo ao que fizemos quando  $w_i = R$ , concluímos que  $w$  é uma  $P$ -position.

( $\Rightarrow$ ) Assuma que  $w \notin WP$ .

Definimos  $i = \min \{0 \leq k \leq t-1 : |w_{[0,k]}|_L < |w_{[0,k]}|_R\}$ . Logo,  $w_i = R$  and  $|w_{[0,i]}|_L = |w_{[0,i]}|_R - 1$ . O primeiro jogador derruba  $w_i$  e resta a subpalavra  $w_{[0,i-1]} \in WP$ . Pela hipótese de indução,  $|w_{[0,i-1]}|_L$  é uma  $P$ -position, ou seja, o segundo que jogar em  $w_{[0,i-1]}$  ganha. Mas o segundo jogador em  $w_{[0,i-1]}$  é o primeiro jogador em  $w$ . Portanto,  $w$  não é uma  $P$ -position. □

Um *caminho de Dyck*<sup>2</sup> é um caminho orientado  $\vec{P}_n$  cuja representação em montanha começa em  $(0, 0)$  e termina em  $(n, 0)$  de modo que o caminho não passe abaixo do eixo- $x$  (o caminho pode eventualmente tocar o eixo- $x$  em outros pontos além de seus extremos). Logo, a representação de montanha de uma palavra em  $WP$  é um caminho de Dyck, e conseqüentemente, caminhos orientados que são  $P$ -positions são caminhos de Dyck. Na Figura 2.5, temos a representação de montanha de um  $\vec{P}_{11}$  que pode ser escrito como a palavra  $LLLRLRRRR$ , e é um caminho de Dyck. Logo, o caminho orientado dado é uma  $P$ -position.

<sup>2</sup>Walther Franz Anton von Dyck (1856 — 1934) foi um matemático alemão. Ele estabeleceu a base da teoria de grupo combinatório, sendo o primeiro a estudar sistematicamente um grupo por geradores e relações.

O coeficiente binomial  $\binom{n}{p}$ , para  $n, p \in \mathbb{Z}_+$ , é  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$  quando  $p \leq n$ , e é zero quando  $p > n$ .

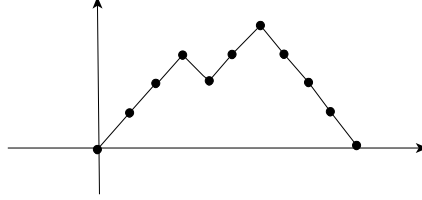


Figura 2.5: Representação de montanha da palavra  $LLLRLRRRR$ , que é um caminho de Dyck.

**Teorema 2.3** [35] *Em Normal Play, o número de  $P$ -positions de um caminho de tamanho  $2k$  é dado pelo Número de Catalan  $C_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$ . Se o caminho possuir tamanho ímpar, então não há  $P$ -position.*

*Demonstração.* Seja  $w \in WP$  com  $|w| = 2k$ . Temos que a representação de montanha de  $w$  é tal que o caminho orientado começa em  $(0, 0)$ , termina em  $(2k, 0)$  e nunca atravessa o eixo horizontal.

Logo, o número de palavras em  $WP$  com tamanho  $2k$  é igual a  $|A| - |B|$ , onde:

- $A$  é o conjunto de caminhos orientados que começam em  $(0, 0)$  e terminam em  $(2k, 0)$ ;
- $B$  é o conjunto de caminhos orientados que começam em  $(0, 0)$  e terminam em  $(2k, 0)$  que atravessam o eixo horizontal pelo menos 1 vez;

Em  $A$ ,  $|w|_L = |w|_R$ , então temos  $|A| = P_{2k}^{k,k} = \binom{2k}{k}$ .

Em  $B$ , para cada um destes caminhos orientados alcançando os números negativos pelo menos uma vez, definimos  $T$  como a primeira vez que o número  $-1$  é alcançado pelo caminho orientado. De  $T$  em diante, podemos traçar um espelho com respeito ao eixo horizontal com a coordenada vertical  $-1$ . Logo, aplicando a reflexão, temos um caminho orientado que começa em  $(0, 0)$  e termina em  $(2k, -2)$ . Um exemplo de reflexão pode ser visto na Figura 2.6. Logo,

$$|w|_R - 2 = |w|_L \Rightarrow |w|_R = k + 1 \Rightarrow |w|_L = k - 1 \Rightarrow |B| = P_{2k}^{k+1, k-1} = \binom{2k}{k+1}.$$

Portanto, o número de palavras em  $WP$  com tamanho  $2k$  é igual a  $\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1} = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = C_k$ .

Se  $|w| = 2k + 1$ , então não é possível ter  $|w|_L = |w|_R$ . Portanto,  $w \notin WP$  e o caminho não tem  $P$ -position.

□

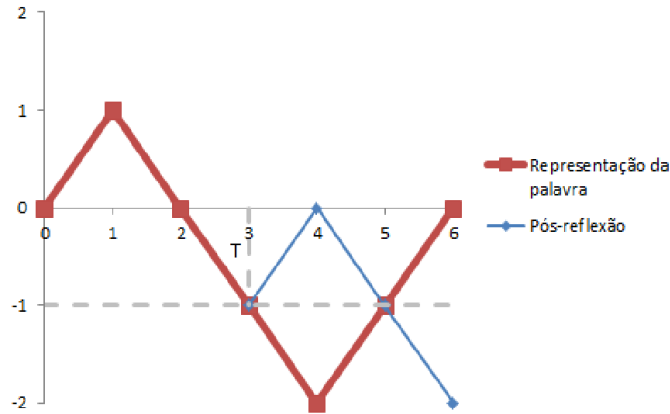


Figura 2.6: Exemplo de reflexão em torno de  $y = -1$  a partir de  $x = 3$ .

Em [25], fizemos uma releitura dos Teoremas 2.2 e 2.3, unindo os resultados e associando uma notação mais apropriada da Teoria de Grafos:

**Lema 2.4** [25] *Sejam  $\vec{P}_s$  um caminho orientado,  $L$  o número de arcos para a esquerda e  $R$  o número de arcos para a direita. O número de caminhos orientados satisfazendo:*

(i) *o número de arcos para a esquerda é sempre maior ou igual ao número de arcos para a direita considerando os subcaminhos quando atravessados da esquerda para a direita;*

(ii)  $L = R$

é dado por  $\frac{1}{L+1} \binom{2L}{L} = \frac{1}{R+1} \binom{2R}{R}$ , que é exatamente o número de Catalan  $C_L = C_R$ .

Além disto, como  $L = R = (s - 1)/2$ , podemos dizer que este número é  $C_{\frac{s-1}{2}} =$

$$\frac{2}{s+1} \binom{s-1}{(s-1)/2}.$$

Logo, o número de  $P$ -positions do caminho  $P_s$  com  $s$  vértices é 0 quando  $s$  é par, e o  $\frac{s-1}{2}$ -ésimo número de Catalan quando  $s$  é ímpar, que é  $C_{\frac{s-1}{2}} = \frac{2}{s+1} \binom{s-1}{(s-1)/2} \simeq 2^s e^{\sqrt{\frac{2(s-1)^{s-1}}{\pi(s+1)^{s+2}}}}$ .

Inspirados no Lema 2.4, fizemos um lema semelhante, mas em que retiramos a necessidade do número de letras  $R$  e  $L$  serem iguais. Logo, contaremos o número de  $P$ -positions de um caminho que não necessariamente tem número par de arestas.

**Lema 2.5** [25] (Lema 4.1, p. 11 do Apêndice A) *Sejam  $\vec{P}_s$  um caminho orientado,  $L$  o número de arcos para a esquerda e  $R$  o número de arcos para a direita. O número de caminhos orientados satisfazendo que*

(i) *o número de arcos para a esquerda é sempre pelo menos o número de arcos para a direita considerando os subcaminhos quando lemos da esquerda para a direita;*

*é dado por  $\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R}$ , onde cada membro do somatório é o número de caminhos orientados com  $R$  arcos, satisfazendo (i).*

Note que o Lema 2.5 é mais geral que o Lema 2.4, e temos a seguinte desigualdade  $\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R} = C_{\frac{s-1}{2}} + \sum_{R=0}^{\frac{s-3}{2}} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R} \geq C_{\frac{s-1}{2}}$ , quando  $s$  é ímpar. Logo, o número de caminhos orientados satisfazendo Lema 2.4 é sempre menor que o número de caminhos orientados que satisfazem o Lema 2.5, mesmo quando  $s$  é par (porque não há caminho orientado satisfazendo Lema 2.4). O Lema 2.5 é crucial para obtermos o número de  $P$ -positions de duas classes de caterpillars na Seção 2.3.

## 2.2 Jogo timber em árvores

O problema de determinar o número de  $P$ -positions de uma árvore que não é um caminho ainda está em aberto. Nowakowski et al. [35] resolvem o problema de decidir se uma árvore orientada é ou não uma  $P$ -position usando os Lemas 2.6, 2.7 e 2.8. O objetivo desta seção é, além de exibir a literatura existente, mostrar o nosso resultado de que uma árvore possui  $P$ -position se, e somente se, ela possui uma quantidade par de arestas (Teorema 2.9).

O Lema 2.6 estabelece o número de  $P$ -positions em árvores com pelo menos uma folha com grau de saída 1.

**Lema 2.6** [35] *Seja  $T$  uma árvore. Se  $D$  é uma configuração de  $T$  com uma folha com grau de saída 1, então  $D$  não é uma  $P$ -position.*

Logo, resta-nos analisar as árvores orientadas que não possuem folha com grau de saída 1.

O Lema 2.7 garante que para cada configuração  $D$  com um vértice  $x \in V(D)$  tal que  $N^+(x) = \{y, z\}$  e  $N^-(x) = \emptyset$ , podemos remover os arcos  $(x, y)$  e  $(x, z)$ , e contrair os vértices  $x, y, z$  sem alterar o resultado de  $D$ . Portanto, reduzimos o tamanho do digrafo de entrada para decidir se o novo digrafo (menor) é uma  $P$ -position ou não. A Figura 2.7 ilustra o Lema 2.7.

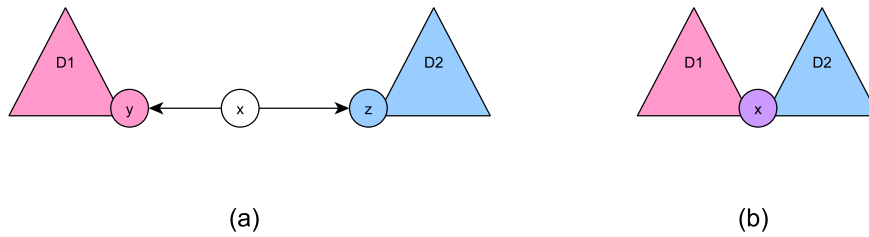


Figura 2.7: O digrafo em (a) é uma  $P$ -position sse o digrafo em (b) é uma  $P$ -position.

**Lema 2.7** [35] *Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas configurações das árvores  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. Escolha  $y \in V(D_1)$  e  $z \in V(D_2)$  e seja  $x$  um novo vértice tal que  $x \notin V(D_1) \cap V(D_2)$ . Seja  $D_\alpha$  um digrafo com conjunto de vértices  $V(D_\alpha) = V(D_1) \cup \{x\} \cup V(D_2)$  e conjunto de arcos  $\vec{E}(D_\alpha) = \vec{E}(D_1) \cup \{(x, y), (x, z)\} \cup \vec{E}(D_2)$ . Seja  $D_\beta$  um digrafo com conjunto de vértices  $V(D_\beta) = (V(D_1) \setminus \{y\}) \cup (V(D_2) \setminus \{z\}) \cup \{x\}$  e conjunto de arcos  $\vec{E}(D_\beta) = \vec{E}(D_1 \setminus \{y\}) \cup \vec{E}(D_2 \setminus \{z\}) \cup \{xt_1 | yt_1 \in \vec{E}(D_1)\} \cup \{s_1x | s_1y \in \vec{E}(D_1)\} \cup \{xt_2 | zt_2 \in \vec{E}(D_2)\} \cup \{s_2x | s_2z \in \vec{E}(D_2)\}$ . Os resultados de  $D_\alpha$  e  $D_\beta$  são iguais, ou seja,  $D_\alpha$  é uma  $P$ -position se, e somente se,  $D_\beta$  é uma  $P$ -position.*

O próximo lema usa o operador  $XOR$  (representado por  $\oplus$ ) que retorna um bit 1 quando o número de operandos iguais a 1 é ímpar. Por exemplo,  $11 \oplus 5 = (1011)_2 \oplus (101)_2 = (1110)_2 = 14$ . Este operador também é conhecido como *Soma Nim*.

O Lema 2.8, ilustrado pela Figura 2.8, afirma que para cada configuração  $D$  contendo dois caminhos orientados  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  começando em  $w$ , com  $|\vec{A}| = a$  e  $|\vec{B}| = b$ , podemos substituir  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  por apenas um caminho orientado  $\vec{Q}$  começando em  $w$ , tal que  $|\vec{Q}| = a \oplus b$ , sem alterar o resultado de  $D$ .



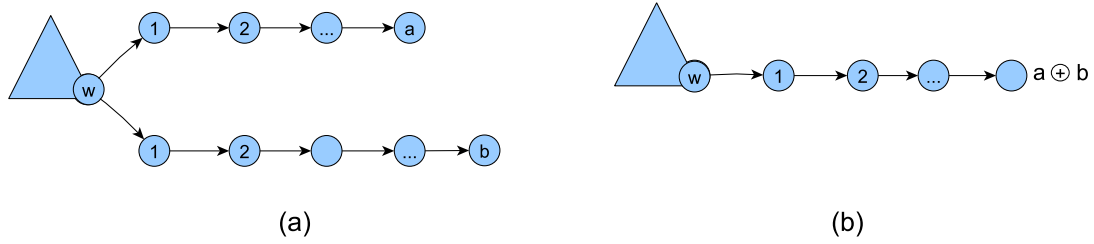


Figura 2.8: O digrafo em (a) é uma  $P$ -position sse o digrafo em (b) é uma  $P$ -position.

**Lema 2.8** [35] *Sejam  $T$  uma árvore orientada,  $w \in V(T)$  e  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Seja  $D_1$  um digrafo com conjunto de vértices  $V(D_1) = V(T) \cup \{y_i\}_{1 \leq i \leq r} \cup \{z_i\}_{1 \leq i \leq s}$  e conjunto de arcos  $\vec{E}(D_1) = \vec{E}(T) \cup \{(y_i, y_{i+1})\}_{1 \leq i \leq r-1} \cup \{(z_j, z_{j+1})\}_{1 \leq j \leq s-1} \cup (w, y_1) \cup (w, z_1)$ . Seja  $D_2$  um digrafo com conjunto de vértices  $V(D_2) = V(T) \cup \{x_i\}_{1 \leq i \leq r \oplus s}$  e conjunto de arcos  $\vec{E}(D_2) = \vec{E}(T) \cup \{(x_i, x_{i+1})\}_{1 \leq i \leq (r \oplus s) - 1} \cup \{(w, x_1)\}$ . O resultado de  $D_1$  e de  $D_2$  são iguais.*

Nowakowski et al. [35] fornecem um algoritmo quadrático (complexidade  $O(|V(T)|^2)$ ) para decidir se uma árvore orientada é uma  $P$ -position, utilizando os três lemas anteriores. Neste algoritmo, o Lema 2.6 resolve os casos triviais e os Lemas 2.7 e 2.8 reduzem uma árvore orientada grande em uma árvore orientada menor. Observe que os Lemas 2.7 e 2.8 não fornecem informações sobre o número de  $P$ -positions de uma árvore. Usamos estes lemas, ao longo deste capítulo, para determinar o número de  $P$ -positions de caterpillars com propriedades estruturais.

O Teorema 2.9 fornece um algoritmo de complexidade  $O(1)$  para este problema de decisão quando o número de arcos é ímpar, e além disto, caracteriza árvores que admitem uma orientação que é uma  $P$ -position.

**Teorema 2.9** [25] *Uma árvore tem uma  $P$ -position se, e somente se, ela possui um número par de arestas.*

*Demonstração.* Ver página 9 do Apêndice A, Teorema 1.1. □

Observe que a partir deste resultado, decidir se uma árvore possui  $P$ -position também é  $O(1)$ , pois basta saber se a quantidade de arestas é par ou ímpar.

## 2.3 Jogo timber em caterpillars

A caterpillar, por ser uma árvore bem comportada, fornece interessantes resultados quanto ao número de  $P$ -positions. O primeiro resultado trata de uma redução do número de pernas da caterpillar sem alterar seu número de  $P$ -positions.

**Teorema 2.10** [25] *(Lema 2.5, p. 9 do Apêndice A) Seja  $G$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = 1, \dots, s$ . O número de  $P$ -positions de  $G$  é igual ao número*

de  $P$ -positions de uma caterpillar  $cat(l_1, \dots, l_s)$ , tal que se  $k_i$  é par, então  $l_i = 0$ , e se  $k_i$  é ímpar, então  $l_i = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$ .

Logo, podemos reduzir o estudo de uma caterpillar qualquer assumindo que  $k_i$  é 0 ou 1. Por exemplo, um grafo vassoura é uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , onde  $k_2 = \dots = k_s = 0$  e  $k_1 \geq 2$ ; o número de  $P$ -positions de um grafo vassoura  $cat(k_1, \dots, k_s)$  é igual ao número de  $P$ -positions de  $P_s$  ou  $P_{s+1}$ , dependendo de  $k_1$  ser par ou ímpar, respectivamente.

Para facilitar a compreensão, usamos daqui por diante a seguinte notação: continuamos chamando os vértices da espinha de  $v_1, \dots, v_s$  e quando  $l_i = 1$ , para  $i \in \{1, \dots, s\}$ , chamamos a folha adjacente a  $v_i$  de  $u_i$ .

Quando conveniente, usamos a notação  $cat_{01}(\{v_i : k_i = 0\} | \{v_j : k_j = 1\})$ , para  $i, j \in \{1, \dots, s\}$ , para destacar os vértices da espinha que possuem folhas adjacentes. Na Figura 2.9, exibimos a  $cat_{01}(v_1, v_4, v_6 | v_2, v_3, v_5)$ .

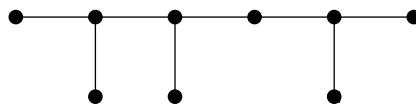


Figura 2.9:  $cat_{01}(\{v_1, v_4, v_6\} | \{v_2, v_3, v_5\})$ .

Nowakowski et al. [35] apresentaram um algoritmo quadrático para decidir se uma árvore orientada qualquer é uma  $P$ -position, pois há a necessidade de revisitar o mesmo arco mais de uma vez. Para caterpillars, este problema de decisão é linear, pois só precisamos visitar cada vértice uma vez, aplicando os Lemas 2.6, 2.7 e 2.8 da esquerda para a direita, ou vice-versa.

### 2.3.1 Jogo timber em caterpillars com número par de arestas

O Teorema 2.9 garante que toda caterpillar com quantidade par de arestas possui  $P$ -position. Logo, qualquer árvore orientada com número ímpar de arcos não é uma  $P$ -position. Uma outra pergunta é se um teste igualmente simples pode ser feito sobre uma configuração  $D$  de  $G$  para saber se  $D$  é ou não uma  $P$ -position. Por exemplo, sabe-se que se  $D$  é  $P$ -position, então  $D$  não tem folha com grau de saída 1. Será que esta condição também é suficiente? Na Figura 2.10, vemos um exemplo em que não há folha com grau de saída 1 e mesmo assim há estratégia vencedora para o primeiro jogador que é derrubar o arco  $(v_2, v_3)$ .

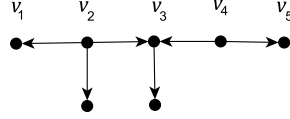


Figura 2.10: Configuração com número par de arcos que não é  $P$ -position.

A fim de entendermos melhor como se comporta o número de  $P$ -positions em uma caterpillar, resolvemos estudar casos particulares. As três subclasses infinitas de caterpillars (I), (II) e (III) apresentadas no Teorema 2.13 estão ilustradas na Figura 2.11.

A subclasse de caterpillars (I) foi estudada com o intuito de posteriormente determinarmos o número de  $P$ -positions de uma caterpillar qualquer, subdividindo-a em várias caterpillars do tipo (II). As caterpillars da subclasse (I) são do tipo  $cat_{01}(\{v_1, \dots, v_a\} | \{v_{a+1}, \dots, v_{a+b+1}\})$ , com  $a$  ímpar e  $a + b + 1 = s$ . Note que não é necessário estudarmos o caso em que  $a$  é par, pois o número de arestas da caterpillar seria ímpar, e o resultado decorre do Teorema 2.9.

As subclasses de caterpillars (II) e (III) são as caterpillars do tipo  $cat_{01}(\{v_i\} | \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s\})$  e  $cat_{01}(\{v_1, \dots, v_a, v_{a+2}, \dots, v_{a+b+1}\} | \{v_{a+1}\})$ , respectivamente, e foram estudadas para compreendermos melhor qual o efeito que as pernas da caterpillar têm sobre o número de  $P$ -positions. Afinal, uma caterpillar é uma árvore muito próxima de um caminho. Será que quanto mais pernas a caterpillar possuir, mais (ou menos)  $P$ -positions terá?

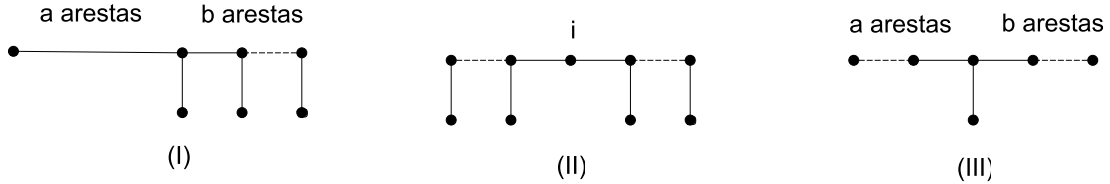


Figura 2.11: Família de caterpillars (I), (II) e (III) do Teorema 2.13.

Quando iniciamos o estudo da subclasse de caterpillar (II), analisamos os casos em que  $a$  é 1, 3 e 5 e obtivemos os seguintes resultados para os números de  $P$ -positions: 1,  $s - 2$  e  $\frac{s^2 - 5s + 4}{2}$ , respectivamente. Observe que o número de  $P$ -positions é um polinômio em função de  $s$  e que o grau deste polinômio aumenta linearmente. Ao generalizarmos o resultado para qualquer  $a$  ímpar, não é tão simples prevermos estes resultados. Por este motivo, voltaremos a fazer esta análise no final deste capítulo.

Antes de enunciarmos e provarmos o Teorema 2.13, precisamos de dois lemas auxiliares. O Lema 2.11 é ilustrado na Figura 2.12, enquanto o Lema 2.12, na Figura 2.13.

**Lema 2.11** [25] (Lema 4.2, p. 12 do Apêndice A) Uma caterpillar orientada  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_1, \dots, v_s)$  pode ser reduzida para:

(a)  $2L + 1$  arcos para a esquerda se os Lemas 2.7 e 2.8 são aplicados da esquerda para direita, onde  $L$  é o número do arcos para a esquerda ao longo dos  $s - 1$  arcos na espinha da caterpillar orientada; (b)  $2R + 1$  arcos para a direita se os Lemas 2.7 e 2.8 são aplicados da direita para esquerda, onde  $R$  é o número do arcos para a direita ao longo dos  $s - 1$  arcos na espinha da caterpillar orientada.

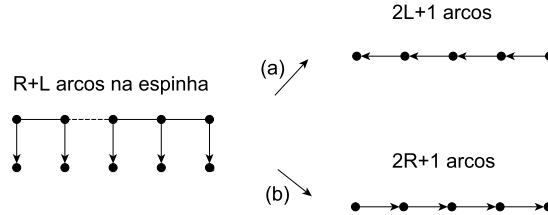


Figura 2.12: Lemas 2.7 e 2.8 são aplicados: (a) da esquerda para a direita (b) da direita para a esquerda.

**Lema 2.12** [25] (Lema 4.3, p. 13 do Apêndice A) Seja  $\vec{G}$  uma caterpillar orientada  $\vec{cat}(0, 0, k_3, \dots, k_{s-2}, 0, 0)$ , tal que existe exatamente um  $z \in \{3, \dots, s - 1\}$  com  $k_z$  par e  $k_i$  é ímpar para  $i = 3, \dots, z - 1, z + 1, \dots, s - 2$ , e com os arcos  $(v_2, v_1)$  e  $(v_{s-1}, v_s)$ . Seja  $\vec{G}'$  uma caterpillar orientada tal que  $V(\vec{G}') = \{x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_j\} \cup V(\vec{G})$  e  $\vec{E}(\vec{G}') = \vec{E}(\vec{G}) \cup \{(v_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{j-1}, x_j), (v_s, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{j-1}, y_j)\}$ .

$\vec{G}$  é uma  $P$ -position se, e somente se,  $\vec{G}'$  é uma  $P$ -position.

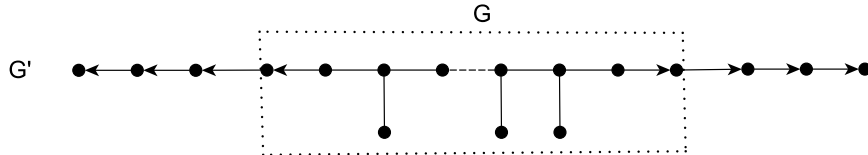


Figura 2.13:  $\vec{G}$  e  $\vec{G}'$  tem o mesmo número de  $P$ -positions.

Finalmente, chegamos ao teorema central desta seção. Nele fornecemos o número de  $P$ -positions para as subclasses infinitas de caterpillars (I), (II) e (III). A prova do Teorema 2.13 encontra-se na página 14 do Apêndice A. Para estudarmos a subclasse de caterpillars (II), denotamos a caterpillar  $cat(v_i|v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s)$  por  $CAT_{01}(i, s)$ .

**Teorema 2.13** [25] (Teorema 1.2, p. 14 do Apêndice A) Seja  $G$  uma caterpillar.

(I) Se  $G$  é  $cat(k_1, \dots, k_a, \dots, k_{a+b+1})$ , tal que  $k_1, \dots, k_a$  são pares,  $k_{a+1}, \dots, k_{a+b+1}$  são ímpares,  $a$  é ímpar e  $b \geq 1$ , então  $G$  possui

$$\sum_{R'=0}^b \frac{4R' + 4}{a + 2R' + 3} \binom{a}{\frac{a-2R'-1}{2}} \binom{b}{R'}$$

$P$ -positions, onde o parâmetro  $R'$  é o número de arestas orientadas para a direita ao longo das  $b$  arestas na espinha de  $G$  entre os vértices  $v_{a+1}$  e  $v_{a+b+1}$ .

(II) Se  $G$  é  $cat(k_1, \dots, k_i, \dots, k_s)$ , tal que apenas  $k_i$  é par, então  $G$  possui  $\binom{s-1}{i-1}$   $P$ -positions.

(III) Se  $G$  é  $cat(k_1, \dots, k_{a+1}, \dots, k_{a+b+1})$ , tal que apenas  $k_{a+1}$  é ímpar,  $a, b \geq 1$  e  $a + b + 1$  é par, então  $G$  possui

$$\sum_{R'=\lceil \frac{b}{2} \rceil}^b \frac{-2b + 4R' + 2 + 2(-1)^b}{a - b + 2R' + 2 + (-1)^b} \binom{a}{\frac{a+b-2R'-(-1)^b}{2}} \frac{-b + 2R' + 1}{R' + 1} \binom{b}{R'}$$

$P$ -positions, onde o parâmetro  $R'$  é o número de arestas orientadas para a direita ao longo das  $b$  arestas na espinha de  $G$  entre os vértices  $v_{a+1}$  e  $v_{a+b+1}$ .

*Esquema da demonstração.*

(I) O Lema 2.5 nos fornece de quantos modos podemos distribuir os  $R$  arcos entre os vértices  $v_1$  e  $v_{a+1}$ . Aplicamos o Lema 2.7 na subcaterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{a+1})$  para substituir os  $a$  arcos por  $L - R = a - 2R$  arcos para a esquerda; e o Lema 2.11 em  $cat(k_{a+1}, \dots, k_{a+b+1})$  da direita para a esquerda para obter  $2R' + 1$  arcos para a direita. Para este caminho orientado ser uma  $P$ -position é necessário que  $a - 2R = 2R' + 1$ .

(II) A prova é dada por indução sobre  $s$ .

Dividimos em casos em que a caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  tem os arcos  $(v_1, v_2)$  ou  $(v_s, v_{s-1})$ ; ou  $(v_2, v_1)$  e  $(v_{s-1}, v_s)$  e o resultado segue pelo princípio de inclusão e exclusão. Veja na Tabela 2.1 os resultados resumidos.

Arcos presentes	Lemas usados	Redução da caterpillar	Número de $P$ -positions pela hipótese de indução
$(v_1, v_2)$	2.7	$CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-1)$	$\binom{s-2}{i-2}$
$(v_s, v_{s-1})$	2.7	$CAT_{0\bar{1}}(i, s-1)$	$\binom{s-2}{i-1}$
$(v_1, v_2)$ e $(v_s, v_{s-1})$	2.7	$CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-2)$	$\binom{s-3}{i-2}$
$(v_2, v_1)$ e $(v_{s-1}, v_s)$	2.8 e 2.12	$CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-2)$	$\binom{s-3}{i-2}$

Tabela 2.1: Resultados resumidos na  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  quando temos os arcos  $(v_1, v_2)$  ou  $(v_s, v_{s-1})$ ; ou  $(v_2, v_1)$  e  $(v_{s-1}, v_s)$ .

(III) O Lema 2.5 fornece de quantos modos podemos distribuir os  $R$  arcos entre os vértices  $v_1$  e  $v_{a+1}$ , e os  $L'$  arcos para a esquerda entre os vértices  $v_{a+1}$  e  $v_{a+b+1}$ , de modo que seja possível que a caterpillar orientada seja uma  $P$ -position. Aplicamos o Lema 2.7, removemos todos os  $R$  arcos para direita entre os vértices  $v_1$  e  $v_{a+1}$  e todos os  $L'$  arcos para a esquerda entre os vértices  $v_{a+1}$  e  $v_{a+b+1}$ . Logo, reduzimos a caterpillar orientada inicial a caterpillar orientada apresentada na Figura 2.14. Em seguida, aplicamos o Lema 2.8 e reduzimos a caterpillar orientada a um caminho orientado com  $L - R + 1$  arcos para a esquerda seguidos por  $R' - L'$  arcos para a direita. Este caminho orientado é uma  $P$ -position se  $L - R + 1 = R' - L'$ .

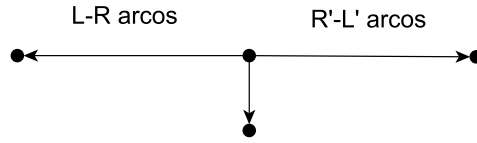


Figura 2.14: Caterpillar do tipo (II) após aplicarmos o Lema 2.7.

□

## 2.4 Análise dos resultados

Nesta seção, analisamos os resultados obtidos no Teorema 2.13.

Na Tabela 2.2, mostramos o número de  $P$ -positions da subclasse de caterpillar (I) quando variamos os valores de  $a$  de 3 até 19 (lembramos que  $a$  deve ser ímpar, pois caso contrário não há  $P$ -position). É possível notar uma possível lei de formação e que o número de  $P$ -positions quando  $a = i$  é um polinômio em função de  $s = a + b + 1$  com grau  $\frac{i-1}{2}$ .

a	
1	$0!$
3	$(s - 2)/1!$
5	$(s - 1)(s - 4)/2!$
7	$(s - 1)(s - 2)(s - 6)/3!$
9	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 8)/4!$
11	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 4)(s - 10)/5!$
13	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 4)(s - 5)(s - 12)/6!$
15	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 4)(s - 5)(s - 6)(s - 14)/7!$
17	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 4)(s - 5)(s - 6)(s - 7)(s - 16)/8!$
19	$(s - 1)(s - 2)(s - 3)(s - 4)(s - 5)(s - 6)(s - 7)(s - 8)(s - 18)/9!$

Tabela 2.2: Número de  $P$ -positions de uma caterpillar do tipo (I).

Além disto, verificamos que na subclasse de caterpillar (I), se fixarmos o número  $s$  de vértices na espinha e aumentarmos  $a$  (o que significa que a caterpillar é quase

um caminho), então o número de  $P$ -positions cresce exponencialmente, mas como  $b \geq 1$ , a subclasse de caterpillar (I) é sempre diferente de um caminho. Na maioria dos casos, o número de  $P$ -positions do caminho é maior que o número de  $P$ -positions da caterpillar da parte (I), mas há exceções. Por exemplo, o número de  $P$ -positions da caterpillar  $cat_{01}(v_1, \dots, v_a | v_{a+1}, v_{a+2})$  é sempre maior que o número de  $P$ -positions de  $P_{a+2}$ .

A subclasse de caterpillar (II) permite uma comparação surpreendente com o caminho com  $s$  vértices, quando  $s$  é ímpar, porque o número de  $P$ -positions da subclasse de caterpillar (II) é menor que o número de  $P$ -positions de um caminho para a maioria dos casos (considerando ambos os casos com  $s$  vértices na espinha).

O número de  $P$ -positions de uma caterpillar da subclasse (II) é um polinômio de grau  $i-1$  ( $\cong \frac{s^{i-1}}{(i-1)!}$ ). Para  $s$  fixo,  $\binom{s-1}{i-1}$  é menor que o número de Catalan  $C_{\frac{s-1}{2}}$ , para a maioria dos valores  $i$ . Na Figura 2.15(a), mostramos na região hachurada os valores de  $s$  e  $i$  para os quais a caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  tem mais  $P$ -positions que o caminho  $P_{s+1}$ , quando  $s$  é par; e em (b), a região hachurada mostra para quais valores de  $s$  e  $i$  a caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  tem mais  $P$ -positions que o caminho  $P_{s+2}$ , quando  $s$  é ímpar. Ainda assim é possível que o número de  $P$ -positions das caterpillars da subclasse (II) seja maior que o número de  $P$ -positions do caminho  $P_s$ , e um exemplo disto é quando  $s$  é ímpar e  $i = \frac{s+1}{2}$ .

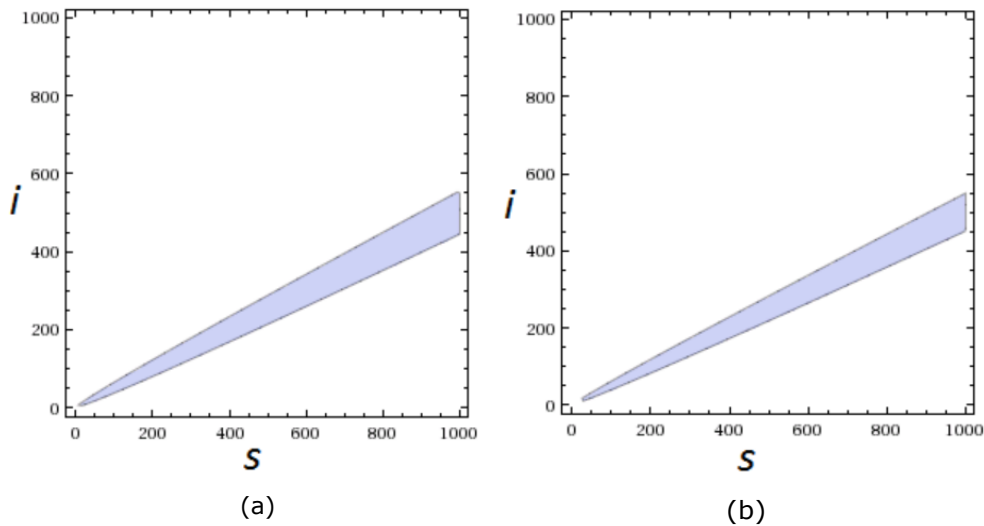


Figura 2.15: Na região hachurada, a caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  tem mais  $P$ -positions que o caminho, quando  $s$  é par e ímpar, respectivamente.

Na subclasse (III), a caterpillar é quase um caminho, que é o oposto da caterpillar da subclasse (II). Para  $s$  fixo, as caterpillars da subclasse (III) têm mais  $P$ -positions que as caterpillars da subclasse (II), para a maioria dos valores  $a$  (por exemplo,  $a = 1$  e  $s \geq 10$ ). De fato, isto acontece porque o número de  $P$ -positions da caterpillar da subclasse (III) é exponencial, assim como o número de  $P$ -positions do caminho.

Além destas comparações, a parte (I) do Teorema 2.13 é uma arma poderosa para computar um limite inferior para o número de  $P$ -positions de uma caterpillar qualquer, já que uma caterpillar pode ser vista como  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  (Figura 2.16). O limite inferior é o produto do número de  $P$ -positions de cada subcaterpillar dada por  $a_i$  e  $b_i$  arestas, para  $i = 1, \dots, j$ .

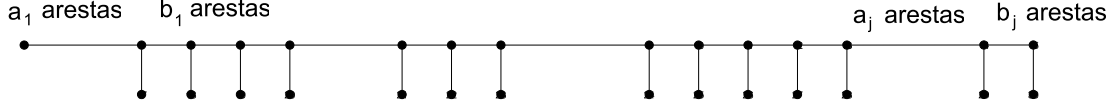


Figura 2.16:  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$ .

**Teorema 2.14** [25] (Teorema 4.4, p. 19 do Apêndice A) Uma caterpillar  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  como na Figura 2.16 tem pelo menos

$\prod_{i=1}^j \sum_{R'_i=0}^{b_i} \frac{4R'_i+4}{a_i+2R'_i+3} \binom{a_i}{\frac{a_i-2R'_i-1}{2}} \binom{b_i}{R'_i}$   $P$ -positions, onde  $R'_i$  é o número de arestas orientadas para a direita ao longo das  $b_i$  arestas na espinha.

Infelizmente, este limite inferior só é possível quando todos os  $a_i$ 's são ímpares, caso contrário o limite inferior seria zero. Apesar desta limitação, o limite inferior fornecido pelo Teorema 2.14 atinge exatamente o número de  $P$ -positions de algumas caterpillars, como, por exemplo,  $cat \langle 1, 1; 3, 2 \rangle = cat_{01}(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ , que possui orientações que são  $P$ -position ilustradas na Figura 2.17. O número de  $P$ -positions desta caterpillar é exatamente 4 e seu limite inferior também é 4:

$$\left( \sum_{R'_1=0}^1 \frac{4R'_1+4}{2R'_1+4} \binom{1}{-R'_1} \binom{1}{R'_1} \right) \left( \sum_{R'_2=0}^2 \frac{4R'_2+4}{2R'_2+6} \binom{3}{1-R'_2} \binom{2}{R'_2} \right) = 1 \times 4.$$

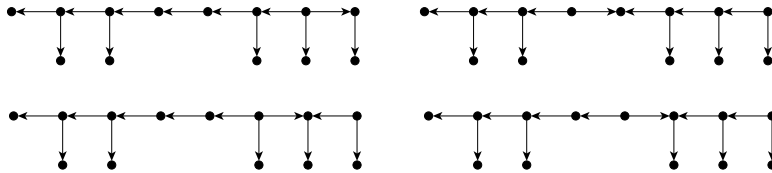


Figura 2.17: Orientações que são  $P$ -positions da caterpillar que alcança o limite inferior para o número de  $P$ -positions.

Embora existam caterpillars  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  com todos os  $a_i$ 's ímpares, cujo número de  $P$ -positions não é dado pelo limite inferior fornecido no Teorema 2.16, exibimos um exemplo em que este limite inferior é justo.



# Capítulo 3

## Jogo de coloração

O *jogo de coloração* é o jogo combinatório (jogado por dois jogadores) imparcial<sup>1</sup> mais antigo que é jogado em grafos. Foi concebido por Steven Brams em 1980, como uma tentativa alternativa para provar o Teorema das quatro cores sem utilizar o computador. Apenas em 1981 foi publicado por Martin Gardner [27], em sua coluna na revista *Scientific American*, como um *jogo de coloração de mapa*.

Em 1991, o jogo foi reinventado por Bodlaender [5], que o estudou no contexto de grafos. Um exemplo de aplicação de jogos combinatórios em Teoria de Grafos foi apresentado em 2009 por Kierstead e Kostochka [33], e baseia-se na utilização de uma variação do jogo de coloração para resolver um problema de empacotamento.

Dadas  $t$  cores, Alice e Bob se alternam colorindo propriamente os vértices não coloridos de um grafo. O objetivo de Alice é colorir o grafo de entrada com as  $t$  cores, e Bob deseja impedi-la, tentando aumentar o número de cores. Alice ganha quando o grafo é completamente colorido com as  $t$  cores; caso contrário, Bob ganha. É importante esclarecer que Alice e Bob podem usar qualquer uma das  $t$  cores no momento que desejarem. Bodlaender [5] chama Alice de *minimizadora* e Bob, de *maximizador*. Estas expressões nos auxiliam a ter em mente que Alice sempre busca o menor número de cores e Bob busca o maior número de cores possível.

Sabemos que o número cromático de uma árvore é dois. Se dermos duas cores para Alice e Bob colorirem propriamente um caminho, qual dos dois ganha? Se o caminho tiver até três vértices, então Alice ganha, mas caso o caminho tenha pelo menos quatro vértices, Alice perde. Nos casos triviais  $P_1$  e  $P_2$ , Alice ganha independente da sua jogada. No  $P_3$ , Alice ganha jogando no segundo vértice. Já no  $P_4$ , independente do vértice que Alice jogar, Bob pode jogar a uma distância dois com uma cor diferente da usada por Alice, impossibilitando que  $P_4$  seja propriamente colorido com duas cores (o mesmo argumento vale para  $P_n$ , com  $n \geq 4$ ). Na Figura 3.1, ilustramos o  $P_4$  e as possíveis jogadas de Alice (cor rosa) e Bob (cor azul)

---

<sup>1</sup>Não cabe ao jogo de coloração a classificação de normal play ou misère play.

a menos de isomorfismo. E se dermos  $t = 3$  cores para eles colorirem o caminho, então Alice sempre ganha? Sim, pois Bob não é capaz de ter estratégia que impeça que o grafo seja propriamente colorido com três cores.



Figura 3.1: Caminho  $P_4$  sendo colorido por Alice e Bob.

Na Figura 3.2, vemos um grafo  $G$  sendo colorido por Alice e Bob com três cores, sendo que Alice começou colorindo em um vértice de maior grau. A estratégia de Bob foi colorir com a cor 2 o único vértice não-adjacente ao vértice colorido por Alice. Após a quarta jogada, vemos que é impossível colorir propriamente todo o grafo com três cores, porém com quatro cores é possível. Mesmo se Alice escolhesse começar jogando em um vértice de grau 2, Bob possuiria estratégia que impossibilitaria a coloração própria deste grafo utilizando três cores, porém com quatro cores é possível fazê-lo. Deixamos a cargo do leitor verificar esta segunda opção.

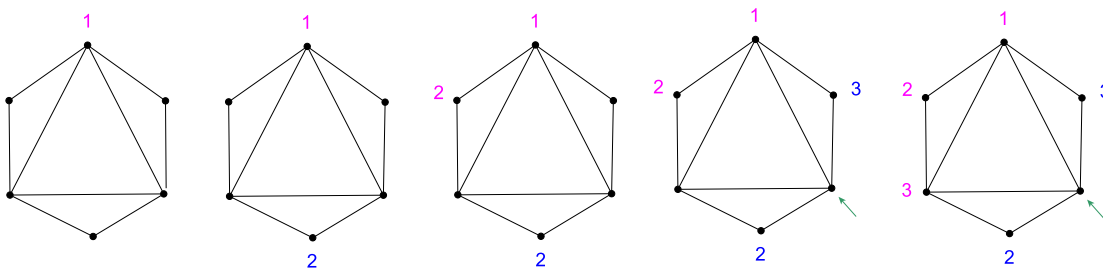


Figura 3.2: Tentativa de colorir o grafo  $G$  com três cores.

O parâmetro para estudarmos este jogo é o *número cromático do jogo*, denotado por  $\chi_g(G)$ , que é o menor número  $t$  de cores que garante que Alice ganhe em  $G$ . Na literatura, Alice começa o jogo, mas achamos conveniente permitir que Bob comece o jogo também. Denotamos por  $\chi_g^a(G)$  (ou simplesmente  $\chi_g(G)$ ) o número cromático do jogo de  $G$  quando Alice começa o jogo, e introduzimos o parâmetro auxiliar  $\chi_g^b(G)$  quando Bob o faz, que é uma poderosa ferramenta nas nossas provas. Na Figura 3.2, temos um exemplo em que  $\chi_g(G) = 4$ .

Para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ , pois no melhor caso colorimos  $V(G)$  com  $\chi(G)$  cores e no pior caso todos os vértices adjacentes ao vértice  $v \in V(G)$  de maior grau estariam coloridos com cores diferentes,  $v$  inclusive. Isto garante que Alice sempre ganha ao jogar com três cores em um caminho ( $\chi_g(P_n) \leq 3$ ) e comprova nossa resposta a pergunta anterior. Logo, temos que  $\chi_g(P_1) = 1$ ,  $\chi_g(P_2) = \chi_g(P_3) = 2$  e  $\chi_g(P_n) = 3$ , para  $n \geq 4$ .

Aplicando a mesma ideia usada em caminhos, temos que um ciclo  $C_n$  tem sempre  $\chi_g(C_n) = 3$ , mesmo quando  $n$  é par. Os únicos grafos conexos satisfazendo  $\chi_g(G) = 2$  são as estrelas  $K_{1,p}$  com  $p \geq 1$ .

Da relação  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$  decorre que um grafo completo  $K_n$  tem  $\chi_g(K_n) = n$ , pois  $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$ . Analogamente, um conjunto independente  $S_n$  tem  $\chi_g(S_n) = 1$ .

O jogo de coloração tem sido bastante estudado em diferentes classes de grafos com o intuito de obter limites inferior e superior para  $\chi_g(G)$ . Na Tabela 3.1, apresentamos os resultados da literatura para algumas classes.

Grafo $G$	lim. inf. $\chi_g(G)$	lim. sup. $\chi_g(G)$	Referência
Floresta	1	4	[18, 21]
Periplanar	6	7	[30]
Planar	7	17	[47]
Grafo intervalo	$2\omega$	$3\omega-2$	[21]
Cacto		5	[10, 32]
Produto cartesiano de árvores		12	[39]

Tabela 3.1: Alguns exemplos de limites inferior e superior de  $\chi_g(G)$ .

Há muitos resultados para produtos cartesianos de grafos em [9, 39]. Além dos dados da tabela existem resultados também para grades toroidais [40] e  $k$ -árvores parciais [46]. Note que o fato do jogo de coloração ter o Bob como maximizador, faz com que o  $\chi_g(G)$  seja muito maior que  $\chi(G)$  para alguns grafos, como, por exemplo, para os grafos planares. Ainda se tenta melhorar estes limites para grafos planares.

De acordo com a Tabela 3.1, o número cromático do jogo para uma árvore é no máximo 4. Em 1991, Bodlaender [5] exibiu um exemplo de uma árvore com número cromático do jogo pelo menos 4 e provou que toda árvore tem número cromático do jogo no máximo 5, utilizando um algoritmo que garante a vitória de Alice com cinco cores. Em 1993, Faigle et al. [21] melhoraram este limite superior provando que toda floresta tem número cromático do jogo no máximo 4, utilizando um algoritmo que garante a vitória de Alice com quatro cores.

Apesar da vasta literatura em jogo de coloração, apenas em 2015, Dunn et al. [18] consideraram a distinção entre florestas com diferentes números cromáticos do jogo, investigando casos especiais. Eles caracterizaram florestas com número cromático do jogo 2, e investigaram a distinção entre florestas com número cromático do jogo 3 e 4, usando propriedades que dependem de um certo conjunto de vértices ser colorido durante o jogo. Eles não obtiveram qualquer tipo de caracterização destas florestas, o que ainda é um problema em aberto, dada a dificuldade inerente ao seu estudo. Contribuímos com este estudo analisando uma árvore especial, a *caterpillar*.

Por que estudar caterpillars novamente? A motivação para concentrarmos nossos esforços novamente em caterpillars vem do fato de que Bodlaender [5]

provou a existência de uma árvore com  $\chi_g(T) \geq 4$  considerando a caterpillar  $H_d = cat(0, 2, 2, 2, 2, 0)$  exibida na Figura 3.3. Além disto, Dunn et al. [18] provaram que a caterpillar  $H_d$  é a menor árvore que possui  $\chi_g(T) = 4$ , além de ser a única árvore com quatorze vértices e número cromático do jogo 4.

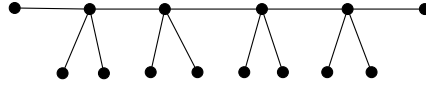


Figura 3.3: A caterpillar  $H_d$  satisfaz  $\chi_g(H_d) = 4$ .

Um fato que torna o estudo do jogo de coloração em floresta interessante é que o número cromático do jogo não é monótono. Na Tabela 3.2, exemplificamos duas conjecturas que surgem naturalmente em uma floresta com  $r$  componentes e seus contra-exemplos. Nos dois exemplos o parâmetro auxiliar  $\chi_g^b$  é útil. Na primeira linha temos que  $\chi_g(P_1 \cup P_4) = 2$ , apesar de  $\chi_g(P_4) = 3$ , pois Alice joga em  $P_1$ , forçando Bob a jogar em  $P_4$ , e  $\chi_g^b(P_4) = 2$ . Na segunda linha, temos uma floresta composta por duas cópias da caterpillar  $H_1$ , que possui  $\chi_g(H_1) = 3$ , mas  $\chi_g(H_1 \cup H_1) = 4$ . Independente de onde Alice jogue, Bob pode escolher jogar na outra componente e o Lema 3.1 garante que  $\chi_g^b(H_1) = 4$ , o que gera o resultado na floresta.

Conjectura	Contra-exemplo
$\chi_g(F) = \max\{\chi_g(T_i)\}$	$P_1 \bullet \quad P_4 \bullet \bullet \bullet \bullet$
$\chi_g(F) \leq \max\{\chi_g(T_i)\}$	$H_1$ $H_1$

Tabela 3.2: Conjecturas em florestas com  $r$  componentes e seus contra-exemplos.

Faigle et al. [21] provaram que  $\chi_g(T) \leq 4$  para árvores e estabeleceram que não há perda de generalidade quando pensamos em florestas, ou seja, a prova de que  $\chi_g(T) \leq 4$  pode ser expandida para obter  $\chi_g(F) \leq 4$ . No mesmo espírito de Dunn et al. [18] e Faigle et. al [21], analisamos florestas (compostas por caterpillars), estudando primeiro o número cromático do jogo nos grafos conexos.

Dunn et al. [18] querem determinar se o grau máximo é uma característica relevante para classificar o número cromático do jogo 3, e conjecturam que o grau máximo somente não é relevante. Concordamos com esta conjectura, e contribuimos para este problema analisando, na Seção 3.1, três subclasses infinitas de caterpillars: caterpillars com grau máximo 3; caterpillars sem vértice de grau 2; e, caterpillars sem vértice de grau 3. Obtemos exatamente o número cromático do jogo de cada uma destas famílias de caterpillars. Estes resultados são apresentados nos Teoremas 3.2, 3.11 e 3.18, respectivamente, e além disto, os resultados são estendidos

para florestas compostas por caterpillars de cada subclasse. Exibimos uma família infinita de caterpillars com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 que possuem número cromático do jogo 4 através do Teorema 3.27. Quando  $\chi_g(H) = 4$ , mostramos uma estratégia de Bob para ganhar o jogo com 3 cores independente de onde Alice jogue, e quando  $\chi_g(H) = 3$ , mostramos uma estratégia de Alice para ganhar o jogo com 3 cores independente de onde Bob jogue.

Mostramos também duas condições suficientes e duas condições necessárias para qualquer caterpillar ter  $\chi_g(H) = 4$ . Na Seção 3.2, determinamos  $\chi_g(F)$ , para uma floresta, conhecendo  $\chi_g^a(T_i)$ ,  $\chi_g^b(T_i)$  e a paridade de  $|V(T_i)|$  para cada componente árvore  $T_i$  de  $F$ . Na Seção 3.3, mostramos que se  $\chi_g(H) = 4$ , então é possível fazer uma redução: removemos as folhas dos vértices de grau pelo menos 4, restando apenas duas folhas, sem alterar o  $\chi_g(H)$ .

Ao longo do estudo sobre o jogo de coloração apresentamos alguns resultados preliminares na conferência XVIII Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research (CLAIO) [24].

Além disto, submetemos o artigo ao periódico *Annals of Operations Research* edição especial do XVIII CLAIIO [26], manuscrito encontrado no Apêndice B.

A maioria dos resultados deste capítulo possuem provas completas no Apêndice B, e por este motivo, omitimos as provas aqui, nos limitando apenas a comentá-las.

### 3.1 Jogo de coloração em caterpillars

De acordo com Faigle et al. [21] toda caterpillar  $H$ , que não é uma estrela, tem  $3 \leq \chi_g(H) \leq 4$ . Logo, estamos interessados em caracterizar caterpillars com  $\chi_g(H)$  igual a 3 ou 4. Observamos que Alice é forçada a usar quatro cores para colorir uma caterpillar se durante o jogo há uma garra como subgrafo com suas folhas coloridas com as cores 1, 2 e 3 (veja Figura 3.4).

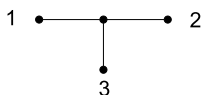


Figura 3.4: A garra parcialmente colorida.

Logo, Bob tenta sempre que possível colorir parcialmente um subgrafo garra como na Figura 3.4. Suponha que a caterpillar  $H$  tem duas cópias do subgrafo garra parcialmente colorido (com duas folhas com cores diferentes), como na Figura 3.5(a). Para impedir a estratégia de Bob, Alice colore um vértice não colorido da espinha

de uma das cópias com a terceira cor. Na vez do Bob jogar, ele colore a folha não colorida da outra cópia, ganhando o jogo com 3 cores, ou seja,  $\chi_g^a(H) = 4$ .

Analisamos os casos quando conectamos duas garras por uma aresta ou identificamos dois vértices, e ambos os extremos estão coloridos. A menos de isomorfismo e dois casos particulares, todos os casos estão apresentados na Figura 3.5. Observe que a Figura 3.5(a) representa o caso em que identificamos os dois vértices centrais da garra. Omitimos dois casos em que unimos duas garras por uma aresta:  $cat(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ , que não é útil para as provas nesta tese; e  $cat(0, 1, 0, 2, 0)$ , que tem o mesmo número cromático do jogo em que Alice ou Bob começam na subcaterpillar ilustrada na Figura 3.5(b).

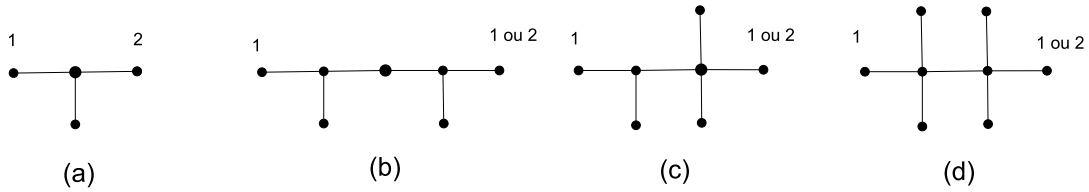


Figura 3.5: As caterpillars parcialmente coloridas (a)  $H_1$  (b)  $H_2$  (c)  $H_3$  (d)  $H_4$ .

Precisamos introduzir dois parâmetros auxiliares. Seja  $Z$  o subconjunto de vértices coloridos de  $V(G)$ , ou seja, para todo  $v \in Z$ ,  $c(v) \neq \emptyset$ , onde  $c(v)$  é a cor do vértice  $v$ . Denotamos por  $\chi_g(G, Z)$  o menor número  $t$  de cores que garante que Alice ganha no grafo  $G$  parcialmente colorido. Seja  $l(F)$  o número de arestas do caminho de maior comprimento na floresta  $F$ .

No Lema 3.1, analisamos o número cromático do jogo quando Alice ou Bob começam nas quatro caterpillars parcialmente coloridas  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  e  $H_4$ , que são ilustradas na Figura 3.5.

**Lema 3.1** [26] (*Lema 1, p. 5 do Apêndice B*) *Sejam  $H_1$  a caterpillar (garra)  $cat(0, 1, 0)$ ,  $H_2$  a caterpillar  $cat(0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $H_3$  a caterpillar  $cat(0, 1, 2, 0)$  e  $H_4$  a caterpillar  $cat(0, 2, 2, 0)$ . Considerando os casos parcialmente coloridos, como na Figura 3.5, temos os resultados na Tabela 3.3.*

$i$	$Z$	$\chi_g^a(H_i, Z) = 3$	$\chi_g^b(H_i, Z) = 3$
1	$\{v_1, v_3   c(v_1) \neq c(v_3)\}$	3	3
2	$\{v_1, v_5\}$	3	4
3	$\{v_1, v_4\}$	3	4
4	$\{v_1, v_4   c(v_1) \neq c(v_4)\}$	3	4
4	$\{v_1, v_4   c(v_1) = c(v_4)\}$	4	4

Tabela 3.3: Resultados do Lema 3.1.

### 3.1.1 Caterpillar com grau máximo 3

Esta subseção tem o objetivo de estudar o número cromático do jogo de caterpillars com grau máximo 3, que não são estrelas, e as consequências quando expandimos o resultado para florestas. Em Dunn et. al [18], os autores provam que existe uma árvore  $T$  com  $\Delta(T) = 3$  e  $\chi_g(T) = 4$  a partir de um exemplo. Este resultado não é válido para caterpillars, como apresentamos no Teorema 3.2.

**Teorema 3.2** [26] (*Teorema 2, p. 6 do Apêndice B*) *Se  $H$  é uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  com  $\Delta(H) = 3$ , então  $H$  tem  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$ . Além disto, se  $F$  é uma floresta onde cada componente conexa é uma caterpillar e  $\Delta(F) = 3$ , então  $F$  tem  $\chi_g^a(F) \leq 3$ .*

*Esquema da demonstração.* Ver na página 6 do Apêndice B (Teorema 2). Esta prova é dividida em três afirmações e provamos cada uma delas usando indução sobre o número de vértices na espinha da caterpillar.

*Afirmção 1:* Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  e  $\Delta(H) = 3$ . Se  $Z = \{v_1, v_s\}$ , então  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , exceto para as caterpillars com  $s$  ímpar, que tem  $\chi_g^b(H, Z) \leq 4$ .

*Afirmção 2:* Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  e  $\Delta(H) = 3$ . Se  $Z = \{v_1\}$ , então  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ .

*Afirmção 3:* Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  e  $\Delta(H) = 3$ . Temos que  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$ . □

Finalmente, podemos caracterizar as florestas com  $\Delta(F) = 3$  a partir do Teorema 3.2 e do Teorema 11 de Dunn et. al [18].

**Corolário 3.3** [26] (*Corolário 3, p. 8 do Apêndice B*) *Seja  $F$  uma floresta cujas componentes conexas são caterpillars e  $\Delta(F) = 3$ . Temos que  $\chi_g(F) = 3$  se, e somente se,*

- $l(F) \geq 4$  ou
- $l(F) = 3$ ,  $|V(F)|$  é ímpar, e nenhuma componente com diâmetro 3 é um caminho.

### 3.1.2 Condições suficientes e necessárias para $\chi_g(H) = 4$

Os Teoremas 3.4 e 3.5 são resultados bem intuitivos que mostram condições suficientes para  $\chi_g(H) = 4$  para qualquer caterpillar  $H$ . No Teorema 3.4, a caterpillar possui uma subcaterpillar induzida, em que independente de quem comece jogando,

o número cromático do jogo é 4. No Teorema 3.5, a caterpillar possui duas subcaterpillars induzidas cujo número cromático do jogo quando Bob começa é 4. Em ambos os teoremas, independente da primeira jogada de Alice, Bob pode jogar em uma subcaterpillar induzida que força que quatro cores sejam necessárias para o grafo ser totalmente colorido.

**Teorema 3.4** [26] (Teorema 4, p. 8 do Apêndice B) *Se uma caterpillar  $H$  tem uma subcaterpillar induzida  $H'$ , tal que  $\chi_g^a(H') = \chi_g^b(H') = 4$ , então  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

**Teorema 3.5** [26] (Teorema 5, p. 8 do Apêndice B) *Se uma caterpillar  $H$  tem duas subcaterpillars induzidas  $H'$  e  $H''$ , tal que  $\chi_g^b(H') = \chi_g^b(H'') = 4$ , então  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

Nos Teoremas 3.7 e 3.9, apresentamos as condições necessárias para que  $\chi_g(H) = 4$  em qualquer caterpillar  $H$ . Para chegarmos às provas destes teoremas, desenvolvemos sete lemas em [26] que omitimos aqui, mas gostaríamos de destacar os Lemas 3.6 e 3.8.

**Lema 3.6** [26] (Lema 12, p. 11 do Apêndice B) *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , tal que  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_j \geq 2$  e  $k_i \leq 1$ , para todo  $i \in \{2, \dots, s-1\} \setminus \{j\}$ . Temos que  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , com  $Z = \{v_1\}$ .*

**Teorema 3.7** [26] (Teorema 13, p. 11 do Apêndice B) *Se uma caterpillar  $H$  tem  $\chi_g(H) = 4$ , então  $H$  tem pelo menos quatro vértices de grau pelo menos 4.*

A prova deste teorema usa o Teorema 3.2 e o Lema 3.6.

**Lema 3.8** [26] (Lema 14, p. 11 do Apêndice B) *Sejam  $H' = cat(k_1, \dots, k_p)$  e  $H'' = cat(k_q, \dots, k_s)$  caterpillars tais que  $k_p = k_q = 0$ ,  $\chi_g^a(H') = \chi_g^a(H'') = \chi_g^b(H'') = 3$  e  $\chi_g^b(H') \geq 3$ . Seja  $H$  uma caterpillar construída unindo o vértice  $v_p$  de  $H'$  ao vértice  $v_q$  de  $H''$  por um caminho, que é  $H = cat(k_1, \dots, k_p, \dots, k_q, \dots, k_s)$ , para  $p \neq q$ . Temos que  $\chi_g^a(H) = 3$ .*

Dizemos que um grafo é *minimal com respeito ao número cromático do jogo* para explicitarmos que a retirada de qualquer vértice do grafo, faria com que o número cromático do jogo fosse no máximo uma unidade a menos.

**Teorema 3.9** [26] (Teorema 15, p. 12 do Apêndice B) *Se  $H$  é uma caterpillar minimal com respeito a  $\chi_g^a(H) = 4$ , então  $H$  não possui vértices consecutivos de grau 2, a menos que  $H$  tenha duas subcaterpillars induzidas  $H'$  e  $H''$  aresta disjuntas que são minimais em relação a  $\chi_g^b(H') = 4$  e  $\chi_g^b(H'') = 4$ .*

A prova deste teorema usa o Lema 3.8 e Teorema 3.5.



### 3.1.3 Caterpillar sem vértice de grau 2

Nesta seção, estudamos o número cromático do jogo de caterpillars sem vértice de grau 2, e suas consequências quando expandimos os resultados para florestas, no Teorema 3.11. Antes, provamos o Lema 3.10, focado em caterpillars com exatamente dois vértices de grau pelo menos 4.

**Lema 3.10** [26] (*Lema 16, p. 12 do Apêndice B*) *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 5$ ,  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_p, k_q \geq 2$  para  $p, q \in \{2, \dots, s-1\}$ ,  $p \neq q$ , e  $k_i = 1$  para todo  $i \in \{2, \dots, s-1\} \setminus \{p, q\}$ . Temos que  $\chi_g^a(H, Z) = \chi_g^b(H, Z) = 4$ , para  $Z = \{v_1, v_s \mid c(v_1) \neq c(v_s)\}$ .*

**Teorema 3.11** [26] (*Teorema 17, p. 13 do Apêndice B*) *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  sem vértice de grau 2 e  $k_1 = k_s = 0$ . Temos que  $\chi_g^a(H) = 4$  se, e somente se,  $H$  tem pelo menos quatro vértices de grau pelo menos 4.*

*Esquema da demonstração.* A primeira parte segue pelo Teorema 3.7. Para provarmos a volta, consideramos  $H'$  uma caterpillar induzida de  $H$ , tal que  $H'$  tem exatamente quatro vértices de grau pelo menos 4, a saber  $v_p, v_q, v_r$  e  $v_t$ , com  $p < q < r < t$ . O restante da prova segue a partir da análise da posição entre estes quatro vértices (quais são ou não consecutivos).  $\square$

O Teorema 3.11 garante quando uma caterpillar  $H$  sem vértices de grau 2 tem  $\chi_g^a(H) = 4$ , mas não delimita quais são as caterpillars que são minimais em relação a  $\chi_g^a(H) = 4$ . O Corolário 3.12 fornece esta restrição, pois apresenta uma caterpillar  $H$  sem vértices de grau 2 que tem  $\chi_g^a(H) = 4$  e mostra que se retirarmos qualquer um de seus vértices, o número cromático do jogo é diminuído para três.

**Corolário 3.12** [26] (*Corolário 18, p. 14 do Apêndice B*) *Uma caterpillar  $H = cat(0, k_2, \dots, k_q, \dots, k_r, \dots, k_{s-1}, 0)$  sem vértice de grau 2 é minimal com respeito a  $\chi_g^a(H) = 4$ , para  $k_2 = k_q = k_r = k_{s-1} = 2$ ,  $q, r \in \{3, \dots, s-2\}$ , e  $k_i = 1$ ,  $i \in \{3, \dots, s-2\} \setminus \{q, r\}$ .*

Para analisarmos o número cromático do jogo de uma floresta cujas componentes são caterpillars sem vértice de grau 2, precisamos determinar o número cromático do jogo quando Bob começa no caso conexo.

**Teorema 3.13** [26] (*Teorema 19, p. 14 do Apêndice B*) *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  sem vértice de grau 2 e  $k_1 = k_s = 0$ . Temos que  $\chi_g^b(H) = 4$  se, e somente se,  $H$  tem pelo menos três vértices de grau pelo menos 4 não consecutivos ou  $H$  tem  $cat(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  como subcaterpillar induzida.*

O Corolário 3.14 segue diretamente dos Teoremas 3.11 e 3.13.

**Corolário 3.14** [26] (Corolário 20, p. 16 do Apêndice B) *Seja  $H$  uma caterpillar  $\text{cat}(k_1, \dots, k_s)$  sem vértice de grau 2,  $k_1 = k_s = 0$ . Temos que  $\chi_g^a(H) = 3$  e  $\chi_g^b(H) = 4$  se, e somente se,  $H$  possui exatamente três vértices de grau pelo menos 4 não consecutivos ou  $H$  tem  $\text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  como subcaterpillar induzida.*

Finalmente, podemos caracterizar florestas com número cromático do jogo 4 usando os Teoremas 3.11 e 3.13.

**Corolário 3.15** [26] (Corolário 21, p. 15 do Apêndice B) *Seja  $F$  uma floresta composta por caterpillars sem vértice de grau 2. Temos que  $\chi_g^a(F) = 4$  se, e somente se, uma destas afirmações ocorre:*

(i)  *$F$  tem uma componente  $H$  que possui pelo menos quatro vértices de grau pelo menos 4;*

(ii)  *$F$  tem duas componentes  $H'$  e  $H''$  que possuem exatamente três vértices de grau pelo menos 4 não consecutivos ou  $\text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  como subcaterpillar induzida.*

### 3.1.4 Caterpillar sem vértice de grau 3

Das três subclasses de caterpillars que analisamos, esta certamente é a mais trabalhosa. O primeiro fato que notamos é que se a caterpillar  $H$  sem vértice de grau 3 não possui vértices consecutivos de grau pelo menos 4, então  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$  [26]. Logo, buscamos caterpillars sem vértice de grau 3 que possuem vértices consecutivos de grau pelo menos 4.

Sabemos que se  $H$  contém quatro vértices consecutivos de grau pelo menos 4, então  $H$  contém  $H_d$ . Dunn et al. [18] provaram que a caterpillar  $H_d$  (veja Figura 3.6) é a menor árvore  $T$  tal que  $\chi_g(T) = 4$ . Provamos que  $\chi_g^b(H_d) = 4$  também e, conseqüentemente, que  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$  [26]. Temos que  $H_d$  é uma caterpillar sem vértice de grau 3 que é minimal com respeito a  $\chi_g^a(H_d) = 4$ .



Figura 3.6: A menor árvore  $H_d$  com  $\chi_g(H_d) = 4$ .

Buscamos então caterpillars sem vértice de grau 3 com dois ou três vértices consecutivos de grau pelo menos 4 que tenham número cromático do jogo 4 e, por construção, obtemos as seguintes caterpillars (Representadas na Figura 3.7):

1. Seja  $H_{33}$  a caterpillar  $cat(0, 2, 2, 2, 0, 2, 2, 2, 0)$ , como na Figura 3.7(a), com vértices da espinha  $v_1, \dots, v_9$ .
2. Seja  $H_{[\alpha]} \cup H_{[\beta]}$  a caterpillar que possui as subcaterpillars induzidas  $H_{[\alpha]}$  e  $H_{[\beta]}$  arestas disjuntas, para  $\alpha, \beta \geq 1$ , onde  $H_{[\alpha]}$  é a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+5})$ , tal que  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+5} = 0$  e  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4} = 2$ , para  $\alpha \geq 1$ . Veja um exemplo de  $H_{[3]}$  na Figura 3.7(b). Em outras palavras,  $H_{[\alpha]}$  tem dois  $H_4$  disjuntas em arestas como subcaterpillars induzidas, e entre eles há uma sequência alternada de vértices da espinha de grau 2 e 4, com  $\alpha$  vértices de grau 2. Considere  $v_1, \dots, v_{2\alpha+5}$  os vértices da espinha, e observe que  $|V(H_{[\alpha]})| = 4\alpha + 11$ .
3. Seja  $H_{[\alpha][\beta]}$  a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+2\beta+6})$ , tal que  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+5}, k_{2\alpha+7}, k_{2\alpha+9}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+1}, k_{2\alpha+2\beta+3}, k_{2\alpha+2\beta+6} = 0$  e  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4}, k_{2\alpha+6}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+4}, k_{2\alpha+2\beta+5} = 2$ . Veja um exemplo de uma  $H_{[3][4]}$  na Figura 3.7(c). Em outras palavras,  $H_{[\alpha][\beta]}$  tem exatamente três  $H_4$  disjuntas em arestas como subcaterpillars induzidas, e entre elas há uma sequência alternada de vértices da espinha de grau 2 e 4, com  $\alpha$  e  $\beta$  vértices de grau 2, respectivamente.
4. Seja  $H_{[\alpha]3[\beta]}$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+2\beta+7})$ , tal que  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+6}, k_{2\alpha+8}, k_{2\alpha+10}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+2}, k_{2\alpha+2\beta+4}, k_{2\alpha+2\beta+7} = 0$  e  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4}, k_{2\alpha+5}, k_{2\alpha+7}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+5}, k_{2\alpha+2\beta+6} = 2$ . Veja um exemplo de  $H_{[3]3[4]}$  na Figura 3.7(d). Em outras palavras,  $H_{[\alpha]3[\beta]}$  tem dois pares de  $H_4$  disjuntas em arestas como subcaterpillars induzidas, três vértices consecutivos de grau 4, e entre eles há uma sequência alternada de vértices da espinha de grau 2 e 4, com  $\alpha$  e  $\beta$  vértices de grau 2, respectivamente.

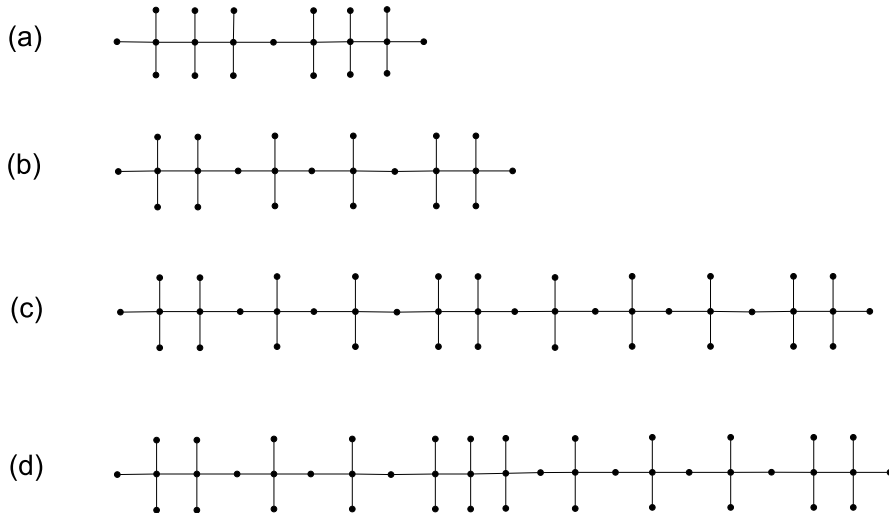


Figura 3.7: As caterpillars (a)  $H_{33}$  (b)  $H_{[3]}$  (c)  $H_{[3][4]}$  (d)  $H_{[3]3[4]}$ .

Definimos a família  $Q$  como sendo o conjunto de caterpillars  $H_d, H_{33}, H_{[\alpha]} \cup H_{[\beta]}, H_{[\alpha][\beta]}$  e  $H_{[\alpha]3[\beta]}$ . Para provarmos que a família  $Q$  delimita as caterpillars sem vértices de grau 3 que são minimais em relação ao número cromático do jogo 4, introduzimos dez lemas em [26], dos quais destacamos aqui os Lemas 3.16 e 3.17, para finalmente estarmos prontos para o Teorema 3.18.

**Lema 3.16** [26] (*Lema 30, p. 20 do Apêndice B*) *Se  $H$  é uma caterpillar sem vértice de grau 3,  $\chi_g^a(H) = 3$ ,  $H$  não possui subcaterpillar induzida com número cromático do jogo 4, e  $H$  é minimal com respeito a  $\chi_g^b(H) = 4$ , então  $H$  não possui vértices consecutivos de grau 2.*

**Lema 3.17** [26] (*Lema 31, p. 20 do Apêndice B*)  *$H$  é uma caterpillar sem vértice de grau 3,  $\chi_g^a(H) = 3$ ,  $H$  não possui subcaterpillar induzida com número cromático do jogo 4, e  $H$  é minimal com respeito a  $\chi_g^b(H) = 4$  se, e somente se,  $H = H_{[l]}$ , para  $l \geq 1$ .*

**Teorema 3.18** [26] (*Teorema 32, p. 21 do Apêndice B*) *Uma caterpillar  $H$  sem vértice de grau 3 tem  $\chi_g(H) = 4$  se, e somente se,  $H$  tem uma caterpillar da família  $Q$  como uma subcaterpillar induzida.*

### 3.1.5 Caterpillars com vértices de grau 1, 2, 3 e 4

Os resultados desta subseção não estão presentes em [26]. Vamos construir uma família  $Q'$  com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 de modo que o número cromático do jogo de cada caterpillar é quatro.

Em algumas provas desta seção usamos o Lema 3.19, que está provado em [26].

**Lema 3.19** [26] *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  tal que  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_j \geq 2$  e  $k_i \leq 1$ , para  $i = 3, \dots, j-1, j+1, \dots, s-1$ . Temos que  $\chi_g^a(H, Z) \leq 3$  e  $\chi_g^b(H, Z) \leq 4$ , com  $Z = \{v_1, v_s | c(v_1) \neq c(v_s)\}$ .*

Seja  $H'_{[\alpha]}$  uma caterpillar  $cat(0, 2, \dots, 2, 0)$  com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 (Figura 3.8.). Sejam  $t_1, \dots, t_\alpha$  os vértices de grau 2, de modo que:

1. entre  $v_1$  e  $t_1$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_1$  e  $q_2$ ;
2. entre  $v_s$  e  $t_\alpha$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_3$  e  $q_4$ ;
3. a distância entre  $q_2$  e  $t_1$  é no máximo 2;

4. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é no máximo 2;
5. entre dois vértices de grau 2 ou há exatamente um vértice de grau 3 ou um vértice de grau 3 e um vértice de grau 4;
6. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1 ou existe um par de vértices  $t_i$  e  $t_{i+1}$  cuja distância é 2.

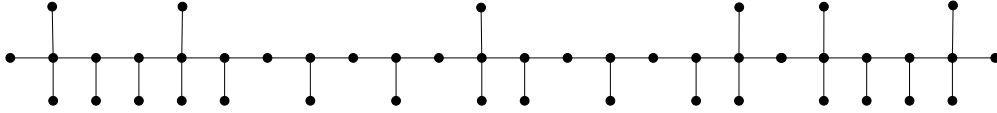


Figura 3.8: Caterpillar  $H'_{[6]}$  com  $\chi_g^b(H'_{[6]}) = 4$ .

**Lema 3.20**  $H'_{[\alpha]}$  possui  $\chi_g^a(H'_{[\alpha]}) = 3$  e é minimal em relação a  $\chi_g^b(H'_{[\alpha]}) = 4$ .

*Demonstração.* Bob joga em  $t_1$ , obrigando Alice a jogar na subcaterpillar entre  $v_1$  e  $t_1$ , para evitar as hipóteses do Lema 3.10, e em seguida, Bob joga em  $t_2, \dots, t_\alpha$  forçando Alice a jogar na subcaterpillar entre  $t_1$  e  $t_2, t_2$  e  $t_3, \dots, t_{\alpha-1}$  e  $t_\alpha$ , respectivamente, para evitar as hipóteses do Lema 3.19. Finalmente, Bob joga em  $v_s$ , e pelo Lema 3.10,  $\chi_g^b(H) = 4$ .

$H$  é minimal com respeito a  $\chi_g^b(H) = 4$ , pois se removermos qualquer folha, então Bob não consegue forçar o Lema 3.10.

Se a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1, então Alice joga em  $q_3$  e  $\chi_g^a(H'_{[\alpha]}) = 3$ . Se a distância entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$  é dois, então entre dois vértices de grau 2 há exatamente um vértice de grau 3 e novamente  $\chi_g^a(H'_{[\alpha]}) = 3$ , pois Alice joga neste vértice de grau 3.  $\square$

**Lema 3.21**  $\chi_g(H'_{[\alpha]} \cup H'_{[\beta]}) = 4$ .

*Demonstração.* O resultado segue pelo Lema 3.20 e Teorema 3.5.  $\square$

Seja  $H'_3$  a caterpillar sem grau 2 e com exatamente três vértices de grau 4 não consecutivos ou que tem  $cat(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  como subcaterpillar induzida. Sabemos, pelo Corolário 3.14, que  $\chi_g^a(H'_3) = 3$  e  $\chi_g^b(H'_3) = 4$ .

**Lema 3.22** As caterpillars  $H'_{[\alpha]} \cup H'_3$  e  $H'_3 \cup H'_3$  com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 tem ambas número cromático do jogo 4.

*Demonstração.* O resultado segue pelos Lemas 3.20, Corolário 3.14 e Teorema 3.5.  $\square$

Seja  $H'_{22}$  uma caterpillar  $cat(0, 2, \dots, 2, 0)$  que contém vértices de grau 1, 2, 3 e 4 (Figura 3.9). Sejam  $t_1, \dots, t_r$  os vértices de grau 2, de modo que:

1. entre  $v_1$  e  $t_1$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_1$  e  $q_2$ ;
2. entre  $v_s$  e  $t_r$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_3$  e  $q_4$ ;
3. a distância entre  $q_2$  e  $t_1$  é par;
4. a distância entre  $q_3$  e  $t_r$  é par;
5. entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$  há exatamente um vértice de grau 4:  $w_i$ ;
6. a distância entre  $t_i$  e  $w_i$  ou a distância entre  $t_{i+1}$  e  $w_i$  é par.

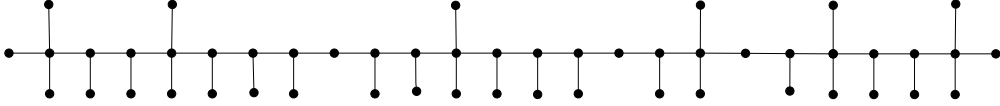


Figura 3.9: Caterpillar  $H'_{22}$  com  $\chi_g^a(H'_{22}) = 4$ .

**Lema 3.23**  $\chi_g^a(H'_{22}) = 4$ .

*Demonstração.* Se Alice joga em  $v_1$ , então Bob joga em  $t_1$  e o resultado segue pelo Lema 3.10.

Se Alice joga em algum vértice da espinha entre o sucessor de  $q_2$  e  $t_1$ , então Bob joga em  $v_1$  e o resultado segue pelo Lema 3.10.

Se Alice joga em vértice  $v$  da espinha entre  $q_1$  e o antecessor de  $q_2$ , então Bob joga em  $t_1$  forçando que Alice jogue na subcaterpillar entre  $v$  e  $t_1$ , para evitar as hipóteses do Lema 3.19, e as próximas jogadas de Bob são em  $t_2, \dots, t_r$  e em  $v_s$ , e o resultado segue novamente pelo Lema 3.10.

Se Alice joga em  $q_2$ , então Bob joga em  $t_1$  forçando que Alice jogue na subcaterpillar entre  $v$  e  $t_1$ , para evitar as hipóteses da afirmação 1 do Teorema 3.2. As próximas jogadas de Bob são em  $t_2, t_3, t_r$  e em  $v_s$ , e o resultado segue pelo Lema 3.10.

Todas as jogadas em vértices da espinha entre  $t_r$  e  $v_s$  são análogas a um dos casos citados acima.

Se Alice joga em  $w_i$ , então Bob joga em  $t_i$  ou  $t_{i+1}$  cuja distância até  $w_i$  é par. Suponha sem perda de generalidade que distância entre  $t_{i+1}$  e  $w_i$  é par. Logo, Bob

joga em  $t_{i+1}$ , forçando que Alice jogue na subcaterpillar entre  $w_i$  e  $t_{i+1}$  para evitar as hipóteses da afirmação 1 do Teorema 3.2. As próximas jogadas de Bob são em  $t_{i+2}, \dots, t_r$  e em  $v_s$ , e o resultado segue pelo Lema 3.10.

Se Alice joga em um vértice da espinha  $v$  entre o sucessor de  $t_i$  e  $w_i$ , então Bob joga em  $t_{i+1}$ , forçando que Alice jogue na subcaterpillar entre  $v$  e  $t_{i+1}$ , para evitar as hipóteses Lema 3.19, e as próximas jogadas de Bob são em  $t_{i+2}, \dots, t_r$  e em  $v_s$ , e o resultado segue pelo Lema 3.10. Se Alice joga em vértice da espinha  $v$  entre  $w_i$  e o antecesor de  $t_{i+1}$ , o resultado é análogo.

Finalmente, se Alice joga em uma folha, então Bob joga a uma distância 2 com uma cor diferente, forçando-a a jogar na espinha.  $\square$

Seja  $H'_{[\alpha][\beta]}$  uma caterpillar  $cat(0, 2, \dots, 2, 0)$  que contém vértices de grau 1, 2, 3 e 4 (Figura 3.10). Sejam  $t_1, \dots, t_\alpha, \dots, t_{\alpha+\beta}$  os vértices de grau 2, de modo que:

1. entre  $v_1$  e  $t_1$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_1$  e  $q_2$ ;
2. entre  $t_\alpha$  e  $t_{\alpha+1}$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_3$  e  $q_4$ ;
3. entre  $t_{\alpha+\beta}$  e  $v_s$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_5$  e  $q_6$ ;
4. a distância entre  $q_2$  e  $t_1$  é no máximo 2;
5. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é no máximo 2;
6. a distância entre  $q_5$  e  $t_{\alpha+\beta}$  é no máximo 2;
7. entre dois vértices de grau 2 ou há exatamente um vértice de grau 3 ou um vértice de grau 3 e um vértice de grau 4;
8. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1 ou a distância entre  $q_5$  e  $t_{\alpha+\beta}$  é 1 ou existe um par de vértices  $t_i$  e  $t_{i+1}$  cuja distância é 2.

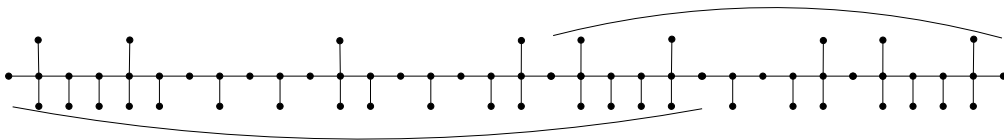


Figura 3.10: Caterpillar  $H'_{[6][3]}$  com  $\chi_g^a(H'_{[6][3]}) = 4$ .

**Lema 3.24**  $\chi_g(H'_{[\alpha][\beta]}) = 4$ .

*Demonstração.* Note que  $H'_{[\alpha][\beta]}$  contém  $H'_\alpha$  ou  $H'_\beta$  (assuma sem perda de generalidade que  $H'_{[\alpha][\beta]}$  contém  $H'_\alpha$ ). A estratégia de Alice em  $H'_\alpha$  para que  $\chi_g^a(H'_\alpha) = 3$  é a seguinte:

1. se a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1, então Alice joga em  $q_3$ ;
2. se entre dois vértices de grau 2 há exatamente um vértice de grau 3, então Alice joga neste vértice de grau 3.

Se Alice usar a estratégia 1, então Bob joga em  $t_{\alpha+1}, t_{\alpha+2}, \dots, t_{\alpha+\beta}$ , forçando as jogadas de Alice, que tenta evitar as hipóteses do Lema 3.19, até que finalmente Bob joga em  $v_s$  e, pelo Teorema 3.10, temos que  $\chi_g(H'_{[\alpha][\beta]}) = 4$ .

Se Alice usar a estratégia 2, então Bob joga em  $H'_\beta$  e, pelo Lema 3.20, temos que  $\chi_g(H'_{[\alpha][\beta]}) = 4$ .

□

Seja  $H'_{23}$  uma caterpillar que contém vértices de grau 1, 2, 3 e 4 (ver Figura 3.11). Sejam  $t_1, \dots, t_\alpha$  os vértices de grau 2, de modo que:

1. entre  $v_1$  e  $t_1$  há exatamente dois vértices de grau 4:  $q_1$  e  $q_2$ ;
2. entre  $t_\alpha$  e  $v_s$  há exatamente três vértices de grau 4 não consecutivos:  $q_3, q_4$  e  $q_5$ ;
3. a distância entre  $q_2$  e  $t_1$  é no máximo 2;
4. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é no máximo 2;
5. entre dois vértices de grau 2 ou há exatamente um vértice de grau 3 ou um vértice de grau 3 e um vértice de grau 4;
6. a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1 ou um existe par de vértices  $t_i$  e  $t_{i+1}$  cuja distância é 2.

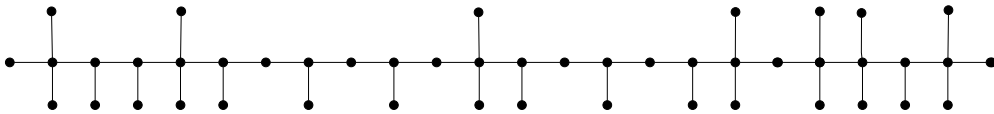


Figura 3.11: Caterpillar  $H'_{23}$  com  $\chi_g^a(H'_{23}) = 4$ .

**Lema 3.25**  $\chi_g(H'_{23}) = 4$ .

*Demonstração.* Observe que  $H'_{23}$  contém  $H'_{[\alpha]}$ . Alice usa a estratégia  $H'_{[\alpha]}$  para que  $\chi_g^a(H'_{[\alpha]}) = 3$ , que é a seguinte:

1. se a distância entre  $q_3$  e  $t_\alpha$  é 1, então Alice joga em  $q_3$ ;



2. se entre dois vértices de grau 2 há exatamente um vértice de grau 3, então Alice joga neste vértice de grau 3.

Se Alice usar a estratégia 1, então Bob joga em  $v_s$  e pelo Lema 3.10, temos que  $\chi_g(H'_{23}) = 4$ .

Se Alice usar a estratégia 2, então Bob joga na subcaterpillar entre  $t_\alpha$  e  $v_s$ , que é uma caterpillar sem vértices de grau 2 e com exatamente três vértices de grau 4 não consecutivos. Logo, pelo Corolário 3.14, temos que  $\chi_g(H'_{23}) = 4$ .  $\square$

Seja a família  $Q' = \{H'_{[\alpha]} \cup H'_{[\beta]}, H'_{[\alpha]} \cup H_3, H_3 \cup H_3, H'_{22}, H'_{[\alpha][\beta]}, H'_{23}\}$  composta por caterpillars com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 com número cromático do jogo 4.

**Lema 3.26** *O número cromático do jogo quando Bob começa em qualquer caterpillar da família  $Q'$  é 4.*

*Demonstração.* Em  $H'_{22}, H'_{[\alpha][\beta]}, H'_{23}$ , Bob joga em  $t_1$ , forçando Alice a jogar na subcaterpillar induzida entre  $v_1$  e  $t_1$ . Depois, Bob joga sucessivamente nos vértices de grau 2 até por fim colorir  $v_s$ , e o resultado segue pelo Teorema 3.10.

Em  $H'_{[\alpha]} \cup H'_{[\beta]}, H'_{[\alpha]} \cup H_3$  e  $H_3 \cup H_3, H'_{22}$  o número cromático do jogo quando Bob começa é 4 pelo Teorema 3.5.  $\square$

**Teorema 3.27** *Seja  $H$  uma caterpillar com vértices de grau 1, 2, 3 e 4. Se  $H$  tem uma caterpillar da família  $Q'$  como uma subcaterpillar induzida, então  $\chi_g(H) = 4$ .*

*Demonstração.* A prova segue pelos Lemas 3.26, 3.4, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 e 3.25.  $\square$

## 3.2 Jogo de coloração em floresta

Faigle et al. [21] afirmam que  $\chi_g(F) \leq 4$  a partir de um algoritmo que indica como Alice deve colorir uma árvore, independente da jogada de Bob, e ganhar o jogo utilizando quatro cores. O algoritmo é o seguinte:

Dada uma árvore  $T$ , Alice escolhe um vértice arbitrário  $r \in V(T)$ , que assumimos como raiz de  $T$ .

Seja  $T_0 = \{r\}$  neste momento do jogo. Durante todo o jogo, Alice mantém uma subárvore  $T_0$  de  $T$  que contém todos os vértices coloridos até então.

Suponha que Bob colore um vértice  $v$  qualquer. Seja  $\vec{P}$  o (único) caminho direcionado de  $r$  a  $v$  em  $T$  e seja  $u$  o último vértice que  $P$  tem em comum com  $T_0$ . Logo, Alice faz o seguinte:

1. atualiza  $T_0 = T_0 \cup P$ ;
2. se  $u$  não está colorido, então colore  $u$  com uma cor disponível;
3. se  $u$  está colorido e  $T_0$  contém um vértice  $w$  que não está colorido, então colore  $w$  com uma cor disponível;
4. se todos os vértices em  $T_0$  estão coloridos, então colore qualquer vértice  $w$  adjacente a  $T_0$  e atualiza  $T_0$ .

Como contribuição da tese, ilustramos como este algoritmo garante que quatro cores são suficientes para que Alice ganhe o jogo, e como estender o fato de  $\chi_g(T) \leq 4$  para florestas. Na Figura 3.12, ilustramos a seguinte situação: Alice colore  $r$ ; Bob colore  $v$ ; Alice colore  $u$  se for possível, mas caso não exista este  $u$ , ela colore  $w$  como na etapa 4 do algoritmo. Se Bob colore  $v'$ , então pelo algoritmo, Alice colore  $u'$ ; Se Bob colore  $v''$ , então pelo algoritmo, Alice colore  $u''$ , e no pior dos casos para Alice,  $v, v'$  e  $u'$  estão coloridos com cores distintas, sendo necessário que ela use uma quarta cor em  $u''$ .

Pelo algoritmo de Faigle et al. [21], se um vértice  $u''$  da árvore tem grau pelo menos 4, Bob só é capaz de colorir dois de seus vizinhos, e Alice colore no máximo um de seus vizinhos. Assim que Bob colorir pela segunda vez um vizinho de  $u''$ , o algoritmo faz com que Alice cora  $u''$ . Logo, quatro cores são suficientes para colorir uma árvore.

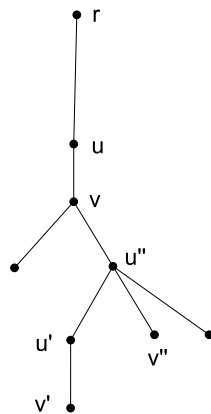


Figura 3.12: Ilustração para o algoritmo de Faigle et al. [21].

E como estendemos este algoritmo para florestas? Precisamos provar que  $\chi_g^b(T) \leq 4$  [26], e o fazemos usando a mesma ideia do algoritmo de Faigle et al. que prova que  $\chi_g^a(T) \leq 4$ . A variação do algoritmo de Faigle et al. está no fato de que Bob começa escolhendo um vértice arbitrário  $r \in V(T)$ , que assumimos como a raiz de  $T$ ; Alice colore um vizinho  $s$  de  $r$  (que não é folha) com uma cor disponível, e o restante segue pelo algoritmo de Faigle et al..

Logo, se  $\chi_g^a(T), \chi_g^b(T) \leq 4$ , então em uma floresta  $F$ , independente de quem comece jogando em cada componente, apenas quatro cores são necessárias para colorir a floresta. Portanto,  $\chi_g^a(F) \leq 4$ .

Queremos determinar o número cromático do jogo de uma floresta qualquer a partir do momento em que conhecemos o número cromático do jogo de cada componente quando Alice ou Bob começam, e a paridade do número de vértices de cada componente. No entanto, precisamos enunciar antes o Teorema 3.28 [26], que restringe as possibilidades de  $\chi_g^a(T)$  e  $\chi_g^b(T)$  para uma mesma árvore  $T$ .

**Teorema 3.28** [26] (Teorema 34, p. 23 do Apêndice B) *Seja  $T$  uma árvore. Temos que  $(\chi_g^a(T), \chi_g^b(T)) \subseteq \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ .*

Finalmente, analisamos o número cromático do jogo de uma floresta qualquer.

**Teorema 3.29** [26] (Teorema 35, p. 23 do Apêndice B) *Seja  $F$  uma floresta composta por  $r$  árvores  $T_1, \dots, T_r$ . Assuma que  $\chi_g^a(T_1) \leq \chi_g^a(T_2) \leq \dots \leq \chi_g^a(T_r)$ , e se existem duas árvores  $T_i$  e  $T_j$  com o mesmo número cromático do jogo, então  $T_i$  e  $T_j$  são ordenadas de modo que  $\chi_g^b(T_i) \leq \chi_g^b(T_j)$ , para  $i < j$ . Temos que:*

1. se  $\chi_g^b(T_r) > \chi_g^a(T_r), \chi_g^b(T_{r-1})$ , então  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r)$ ;
2. se  $\chi_g^b(T_r) = \chi_g^b(T_{r-1}) > \chi_g^a(T_r)$ , então  $\chi_g(F) = \chi_g^b(T_r)$ ;
3. se  $\chi_g^a(T_r) = \chi_g^b(T_r)$ , então  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r) = \chi_g^b(T_r)$ ;
4. se  $\chi_g^b(T_r) < \chi_g^a(T_r)$  e  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  é par, então  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r)$ ;
5. se  $\chi_g^b(T_r) < \chi_g^a(T_r)$  e  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  é ímpar, então  $\chi_g(F) = \max \{ \chi_g^a(F \setminus T_r), \chi_g^b(T_r) \}$ .

### 3.3 Uma redução

Assim como Dunn et al. [18], não distinguimos vértices de grau 4 e vértices de grau pelo menos 4. Propomos uma conjectura sobre este problema para caterpillars.

**Conjectura 3.30** *Seja  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , com  $\chi_g(H) = 3$ , e  $H'$  uma caterpillar  $cat(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , tal que  $\gamma_i = k_i$ , se  $k_i \leq 2$ , e  $\gamma_i = 2$ , se  $k_i > 2$ . Temos que  $\chi_g(H') = 3$ .*

Sabemos que a Conjectura 3.30 é falsa para florestas. Na Figura 3.13, apresentamos exemplos de florestas  $F$  e  $F'$  tais que  $\chi_g(F) = 2$  e  $\chi_g(F') = 3$ .

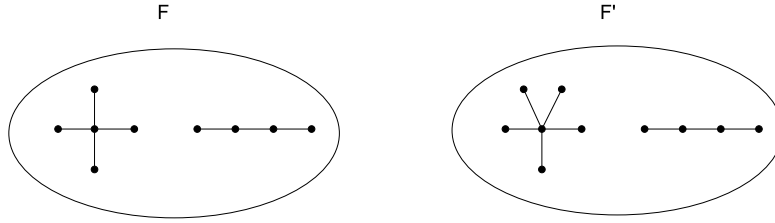


Figura 3.13: Florestas  $F$  e  $F'$  com  $\chi_g(F) = 2$  e  $\chi_g(F') = 3$ , respectivamente.

Embora a Conjectura 3.30 seja falsa para florestas, provamos que ela é verdadeira para uma caterpillar  $H$  que tem  $\chi_g^a(H) = 4$ . Usamos o algoritmo de Faigle et al. em nossa prova, pois como  $\chi_g^a(H) = 4$ , Alice pode usar o algoritmo sem se preocupar em aumentar o número cromático do jogo.

**Teorema 3.31** [26] (Teorema 36, p. 24 do Apêndice B) *Sejam  $H$  uma caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , com  $\chi_g(H) = 4$ , e  $H'$  uma caterpillar  $cat(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , tal que  $\gamma_i = k_i$ , se  $k_i \leq 2$ , e  $\gamma_i = 2$ , se  $k_i > 2$ . Temos que  $\chi_g(H') = 4$ .*

### 3.4 Análise dos resultados

Estudamos os seguintes casos com respeito ao número cromático do jogo de uma caterpillar  $H$  (veja Tabela 3.4):

$\Delta(H)$	$\chi_g(H) = 1$	$\chi_g(H) = 2$	$\chi_g(H) = 3$	$\chi_g(H) = 4$
0	$S_l$	-	-	-
1	-	$P_2$	-	-
2	-	$P_3$	$P_n, n \geq 4$	-
3	-	estrela	não estrela	-
4	-	estrela	não estrela e não está na Figura 3.14	ver Figura 3.14

Tabela 3.4: Resumos dos resultados

Os casos em que a caterpillar  $H$  tem  $\Delta(H) \geq 4$  e  $\chi_g(H)$  é 3 ou 4 são os casos difíceis de analisar. Para facilitar a visualização dos resultados, mostramos na Figura 3.14 as caterpillars  $H$  com  $\Delta(H) \geq 4$  e que são minimais com respeito a  $\chi_g(H) = 4$  (logo, todas as caterpillars presentes na Figura 3.14 possuem pelo menos quatro vértices de grau pelo menos 4). Somos capazes de caracterizar cada caterpillar minimal, impondo condições adicionais de não possuir vértice de grau 2 ou 3. Além disto, conhecemos uma família infinita de caterpillars minimais com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 (a família  $Q'$ ), mas não sabemos ainda se existe mais alguma

caterpillar com vértices de grau 1, 2, 3 e 4, que não pertença a família  $Q'$  e que seja minimal com respeito ao número cromático do jogo 4.

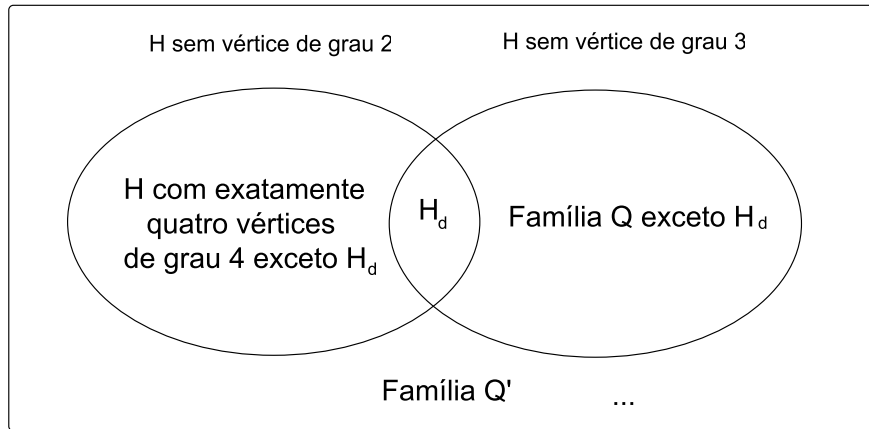


Figura 3.14: Caterpillars  $H$  com  $\Delta(H) \geq 4$  que são minimais com respeito a  $\chi_g(H) = 4$ .

Determinamos o número cromático do jogo de uma floresta arbitrária, uma vez que conhecemos os parâmetros  $\chi_g^a(T)$  e  $\chi_g^b(T)$  para cada componente conexa da floresta.

Agora sabemos responder, para caterpillars, a Questão 32 de Dunn et al. [18] que diz: *existe um algoritmo de tempo polinomial para determinar se uma floresta com grau máximo 3 tem o número cromático do jogo 4?* Para uma floresta composta por caterpillars, não há floresta com grau máximo 3 e número cromático 4, pelo Teorema 3.2. Portanto, respondemos “não” em tempo constante.

# Capítulo 4

## Nordhaus-Gaddum em jogos combinatórios

O número cromático de um grafo é um parâmetro muito estudado atualmente, cuja história começou com o famoso problema das quatro cores proposto em 1852 por Guthrie. Até 1956, os estudos sobre número cromático consideravam apenas um grafo  $G$ . Durante este ano, Nordhaus e Gaddum [34] estudaram o número cromático de um grafo e de seu complementar de modo conjugado. Eles determinaram limites inferiores e superiores para a soma e para o produto de  $\chi(G)$  e  $\chi(\overline{G})$  em função do número de vértices de  $G$ .

A relação original apresentada por Nordhaus e Gaddum [34] é a seguinte:

**Teorema 4.1** [34] *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, então  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$  e  $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$ .*

Desde então toda soma e/ou produto de qualquer parâmetro de um grafo  $G$  e de seu complemento é chamada de *inequação ou relação do tipo Nordhaus–Gaddum*.

Em 2013, Aouchiche e Hansen [3] publicaram uma pesquisa que reúne variadas relações do tipo Nordhaus–Gaddum. São resultados de muitos autores (360 artigos são citados em [3]) usando diferentes parâmetros de grafos. Citamos aqui alguns deste resultados relacionados a soma de parâmetros em  $G$  e  $\overline{G}$  na Tabela 4.1.

Nesta tese, determinamos relações do tipo Nordhaus-Gaddum quando o parâmetro é o número de  $P$ -positions de uma caterpillar (referente ao jogo timber apresentado no Capítulo 2), o número cromático do jogo (referente ao jogo de coloração apresentado no Capítulo 3) e o número de coloração do jogo (referente ao jogo de marcação).

O *jogo de marcação* é uma variação do jogo de coloração e foi introduzido, em 1999, por Zhu [47] justamente para estudar o número cromático do jogo. Assim como no jogo de coloração, o jogo de marcação é jogado em um grafo  $G$  por dois

Número	Limite inferior	Limite superior
emparelhamento [13]	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
independência [13]	$\min\{a + b \mid R(a + 1, b + 1) > n\}$	$n + 1$
dominação [7]	2	$n + 1$
cromático ordenado [14]	-	$\lfloor \frac{5n+2}{4} \rfloor$
eficiente de cobertura [17]	$n - 1$	$\frac{(n - 1)(n + 2)}{3}$
dominação do jogo [2]	-	$n + 2$
convexidade [28]	$2\log_4 n$	$2(n - 1)$
parcial de Grundy [20]	$2\sqrt{n}$	$n + 1 + \Delta(G) - \delta(G)$

Tabela 4.1: Relações do tipo Nordhaus-Gaddum para a soma de parâmetros em  $G$  e  $\bar{G}$ .

jogadores, Alice e Bob, de modo não cooperativo. Eles jogam alternadamente, marcando os vértices não marcados do grafo até que todos os vértices estejam marcados. Podemos entender que “marcar” os vértices é colorir-los de modo monocromático, ou simplesmente os selecionarmos. Usualmente na literatura, considera-se que Alice começa o jogo.

Seja  $b(x)$  o número de vizinhos de  $x \in V(G)$  que foram marcados antes de  $x$ . Seja  $s = 1 + \max\{b(x); x \in V(G)\}$ . O objetivo de Alice é minimizar  $s$ , enquanto que Bob tenta maximizar  $s$ . O *número de coloração do jogo* de  $G$ , denotado por  $col_g(G)$ , é o menor valor de  $s$  que garante que Alice vence.

Em uma estrela  $K_{1,p}$ , temos que  $col_g(K_{1,p}) = 2$ , pois Alice marca o vértice universal, que neste momento tem zero vizinhos marcados, e após isto todas as folhas tem exatamente um vértice vizinho marcado.

Em um caminho  $P_4$ , independente do vértice que Alice marcar, Bob pode marcar um vértice a uma distância dois, deixando assim um vértice com os dois vizinhos marcados. Logo,  $col_g(P_4) = 3$ . Este argumento vale para caminhos  $P_n$  e ciclos  $C_n$ , com  $n \geq 4$ .

Note que no algoritmo de Faigle et. al [21] para provar que  $\chi_g(F) \leq 4$ , a cor atribuída não é importante, e aplicando o mesmo algoritmo ao jogo de marcação obtemos a prova de que  $col_g(F) \leq 4$ .

O  $col_g(G)$  é útil para determinarmos um limite superior para o número cromático do jogo, pois temos a seguinte relação:  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq col_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Inclusive, a maioria dos limites superiores para o número cromático do jogo presentes na literatura [21, 43, 47] foram obtidos a partir do número de coloração do jogo. Temos que  $\chi_g(G) \leq col_g(G)$ , pois o  $col_g(G)$  é o maior número de vizinhos marcados mais uma unidade que um vértice não marcado tem durante o jogo. Se  $col_g(G) = k$ , então há um vértice  $v$  com  $k - 1$  vizinhos marcados. Relacionando com o jogo de coloração, podemos pensar que os  $k - 1$  vizinhos marcados podem ser coloridos com no máximo  $k - 1$  cores e que o próprio vértice  $v$  recebe a  $k$ -ésima cor, e assim temos

que  $\chi_g(G) \leq k$ .

Como exemplos de grafos em que  $\chi_g(G) = col_g(G)$  temos os caminhos  $P_n$ , para todo  $n$  inteiro, as estrelas e as caterpillars com grau máximo 3. Vimos no Teorema 3.7 que toda caterpillar com número cromático do jogo igual a 4 possui pelo menos quatro vértices de grau pelo menos 4. Logo, a caterpillar  $H = cat(0, 2, 2, 1, 2, 0)$  apresentada na Figura 4.1(b) tem  $\chi_g(H) = 3$ , mas possui  $col_g(H) = 4 > \chi_g(H)$ .

Para verificarmos isto, seja  $Z$  o subconjunto de vértices marcados de  $V(G)$ , e  $col_g(G, Z)$  o menor número que garante que Alice ganha no grafo  $G$  parcialmente marcado. Seja  $H_3 = cat(0, 1, 2, 0)$  parcialmente marcada como em Figura 4.1(a). Temos que  $col_g(H_3, Z) = 4$  com  $Z = \{v_1, v_4\}$ , pois independente de onde Alice jogue, Bob marca um vértice a distância 2 não marcado de modo que existe vértice não marcado com três vizinhos marcados. Se Bob começar o jogo nesta caterpillar parcialmente marcada, então o número de coloração do jogo também é 4, pois basta Bob marcar a folha adjacente a  $v_3$ , forçando Alice a marcar  $v_3$ , e em seguida ele marca  $v_2$ . Logo em  $H$  (Figura 4.1(b)), se Alice marcar um vértice da espinha, Bob colore a distância 3 e  $H$  contém a caterpillar parcialmente marcada como na Figura 4.1(a); se Alice marcar uma folha adjacente a  $v_i$ , para  $i \in \{2, 3, 5\}$ , então Bob marca a outra folha adjacente a  $v_i$ , forçando-a a jogar na espinha; se Alice marca a folha adjacente a  $v_4$ , então Bob marca  $v_5$ , forçando-a a jogar em  $v_4$  (ou seja, em um vértice da espinha).

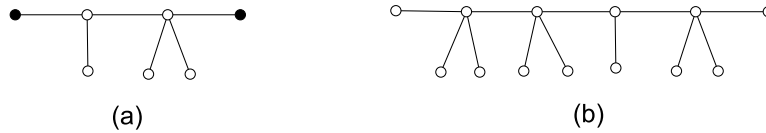


Figura 4.1: Caterpillar (a) parcialmente marcada  $H_3$  (b)  $H$ .

Neste capítulo, determinamos limites para a relação do tipo Nordhaus-Gaddum para o jogo timber, jogo de coloração e jogo de marcação nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

Os resultados das seções 4.2 e 4.3 foram submetidos ao periódico *Discrete Mathematics* [12], manuscrito encontrado no Apêndice C.

## 4.1 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número de $P$ -positions do jogo

No Capítulo 2, estudamos um limite inferior para o número de  $P$ -positions de uma caterpillar qualquer no Teorema 2.14. Vamos agora analisar a relação do tipo Nordaus-Gaddum para o número de  $P$ -positions quando o grafo é uma caterpillar.



**Lema 4.2** *Se  $H$  é uma caterpillar e  $H$  não é o caminho  $P_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , então o complemento  $\overline{H}$  é um grafo com ciclos. Além disto,  $\overline{H}$  não possui  $P$ -position.*

*Demonstração.* Se  $H$  é estrela, então  $H$  tem pelo menos 3 folhas, ou caso contrário seria  $P_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Logo,  $\overline{H}$  possui uma clique  $K_f$ , para  $f \geq 3$  e um vértice isolado.

Se  $H$  não é estrela e contém  $f$  folhas, com  $f \geq 3$ , então  $\overline{H}$  possui uma clique  $K_f$ , pois as  $f$  folhas formam um conjunto independente  $S_f$  em  $H$ . Além disto,  $\overline{H}$  é conexo, pois não há vértice universal em  $H$ .

Se  $H$  não é estrela e contém apenas 2 folhas, então  $H$  é  $P_i$ , com  $i \geq 5$ . Como não há vértice universal em  $H$ , temos que  $\overline{H}$  também é conexo. Além disto em  $\overline{H}$ , há sempre um  $K_3$  formado por  $v_i, v_{i+2}$  e  $v_{i+4}$ , para  $i \geq 1$ .

Em todos os três casos, Alice joga em um arco qualquer da clique orientada (independente da orientação) e remove todas as arestas do  $\overline{H}$ . Portanto, não há  $P$ -position. □

**Teorema 4.3** *Seja  $H$  caterpillar  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  como na Figura 2.16 que não é caminho  $P_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Temos que*

$$\prod_{i=1}^j \sum_{R'_i=0}^{b_i} \frac{4R'_i+4}{a_i+2R'_i+3} \binom{a_i}{\frac{a_i-2R'_i-1}{2}} \binom{b_i}{R'_i} \leq \mathcal{P}(H) + \mathcal{P}(\overline{H}) \leq ((\sum_{i=1}^j a_i + b_i) - 1)^2,$$

onde  $\mathcal{P}(H)$  e  $\mathcal{P}(\overline{H})$  são os números de  $P$ -positions em  $H$  e  $\overline{H}$ , respectivamente.

*Demonstração.* Obtemos o limite inferior pelo Teorema 2.14 e pelo Lema 4.2.

Sabemos que a caterpillar  $H$  possui  $\sum_{i=1}^j a_i + b_i$  arestas na espinha, sendo que uma delas tem como um dos vértices uma folha. Para que uma caterpillar orientada seja  $P$ -position, sabemos que é necessário que todas as folhas tenham grau de entrada 1 pelo Lemma 2.6. Logo, já sabemos como orientar estes  $(\sum_{i=1}^j b_i + 1) + 1$  arcos. A caterpillar  $H$  tem  $(\sum_{i=1}^j a_i + b_i) + (\sum_{i=1}^j b_i + 1)$  arestas. Não sabemos como orientar  $(\sum_{i=1}^j a_i + b_i) + (\sum_{i=1}^j b_i + 1) - ((\sum_{i=1}^j b_i + 1) + 1) = (\sum_{i=1}^j a_i + b_i) - 1$  arestas, então podemos assumir que há duas possibilidades de orientação. Logo,  $H$  tem no máximo  $((\sum_{i=1}^j a_i + b_i) - 1)^2$   $P$ -positions.

Pelo Lema 4.2, sabemos que  $\overline{H}$  não possui  $P$ -position, e isto encerra o resultado para o limite superior. □

Embora o limite inferior seja justo, como visto no Capítulo 2 (Figura 2.17), o limite superior não é.

## 4.2 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número cromático do jogo

O objetivo desta seção é provarmos o Teorema 4.4.

**Teorema 4.4** (Teorema 1.2, p. 3 do Apêndice C) Para qualquer grafo  $G$  de ordem  $n$ , temos que  $2\sqrt{n} \leq \chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ . Além disto, os limites são os melhores possíveis assintoticamente

1. Para infinitos valores  $n$ , há grafos  $G$  de ordem  $n$  com  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = \lceil \frac{4n}{3} \rceil - 1$ ;
2. Para infinitos valores  $n$ , há grafos  $G$  de ordem  $n$  com  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = 2\sqrt{2n} - 1$ .

O limite inferior de  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G})$  decorre das seguintes relações:  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G})$  [34] e  $\chi(G) \leq \chi_g(G)$ . Da segunda relação, podemos concluir que  $\chi(\overline{G}) \leq \chi_g(\overline{G})$ . Logo,  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi_g(G) + \chi_g(\overline{G})$ .

O limite superior do Teorema 4.4 decorre de uma estratégia de Alice marcar os vértices de maior grau. Trata-se de uma prova simples, mas com muitos detalhes apresentada no Lema 2.1, p. 4 do Apêndice C. Precisamos analisar os casos em que o número de vértices  $n$  é par e ímpar, e ainda se o número de vértices de grau menor que  $\frac{n}{2}$  é menor que  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ , e se o número de vértices de grau pelo menos  $\frac{n-1}{2}$  é menor que  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ , respectivamente.

Alice colore os vértices de maior grau, podendo inclusive colorir com cores todas distintas desnecessariamente. Até que todos os vértices de grau pelo menos  $\frac{n}{2}$  (para  $n$  par) ou maior que  $\frac{n-1}{2}$  ( $n$  ímpar) estejam coloridos, podemos assumir o pior caso em que todos os vértices coloridos receberam cores distintas. Após este momento, se ainda há vértices não coloridos, então estes vértices remanescentes possuem grau no máximo  $\frac{n}{2}$  ou  $\frac{n-1}{2}$ , respectivamente, e nenhuma cor extra é necessária, sendo possível terminar de colorir o grafo inteiro com as cores já utilizadas.

Caso o número de vértices de grau pelo menos  $\frac{n}{2}$ , para  $n$  par (maior que  $\frac{n-1}{2}$ , para  $n$  ímpar) seja maior que  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  ( $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ , respectivamente) em  $G$ , com esta estratégia,  $\chi(G)$  será alto, podendo inclusive ser  $n$ , porém em  $\overline{G}$  será o inverso.

Para chegarmos ao resultado final, usamos o fato de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n + 1$ .

Para obtermos a família infinita presente no item 1 do Teorema 4.4, temos o seguinte Lema:

**Lema 4.5** [12] (Lema 2.2, p. 6 do Apêndice C) Seja  $G_l$  o grafo join  $S_l \oplus K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ , com ordem  $n = l + \lceil \frac{l}{2} \rceil \not\equiv 1 \pmod{3}$ ,  $l \geq 2$  e  $n \geq 5$ . Temos que  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G}_l) = \lceil \frac{4n}{3} \rceil - 1$ .

Note inicialmente que se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , então é impossível construirmos o grafo  $S_l \oplus K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ . Por isto adicionamos a condição de  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ .

A prova do lema baseia-se em uma boa escolha de estratégia de Alice e Bob. Observe que  $\overline{G}_l$  é formado pela clique  $K_l$  e pelo conjunto independente  $S_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  disjuntos.

Logo,  $\chi_g(\overline{G_l}) = \chi(\overline{G_l}) = l$  e, conseqüentemente, o parâmetro que define a relação do tipo Nordhaus-Gaddum é  $\chi_g(G_l)$ .

Em  $G_l$ , a coloração ótima se dá assumindo que todos os vértices de  $S_l$  recebem a mesma cor. Para maximizar  $\chi_g(G_l)$ , Bob colore em  $S_l$  com cores distintas sempre que possível.

Em [12] apresentamos a melhor estratégia para Alice: ele colore os vértices da clique  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  até que não reste vértice sem cor. Usando esta estratégia, mostramos que  $\chi_g(G_l) = 2 \lceil \frac{l}{2} \rceil - 1$ .

Se ao invés desta estratégia, Alice colorisse em  $S_l$  sempre com a cor 1, teríamos que  $S_l$  seria colorido com  $\lceil \frac{l}{2} \rceil + 1$  cores (Alice sempre usa a cor 1 e Bob usa  $\lceil \frac{l}{2} \rceil$  cores distintas) e  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  é colorido com  $\lceil \frac{l}{2} \rceil$  cores inevitavelmente. Logo,  $\chi_g(G_l)$  seria  $l + 1$ .

Uma terceira opção, seria Alice colorir na clique  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  em sua primeira jogada, e nas jogadas seguintes colorir em  $S_l$  usando sempre a mesma cor. Sendo assim,  $S_l$  seria colorido com  $\lceil \frac{l}{2} \rceil$  cores, pois Bob começou colorindo  $S_l$ , e  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  é colorido com  $\lceil \frac{l}{2} \rceil$  cores inevitavelmente. Logo,  $\chi_g(G_l)$  seria  $2 \lceil \frac{l}{2} \rceil$ .

Portanto, a melhor estratégia é a apresentada em [12].

Para obtermos a família infinita presente no item 2 do Teorema 4.4, temos o seguinte Lema:

**Lema 4.6** [12] (Lema 2.3, p. 7 do Apêndice C) *Seja  $G$  um grafo completo  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ -partido, tal que  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  é um inteiro par e cada  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  conjunto de vértices disjuntos tem exatamente  $\sqrt{2n}$  vértices. Temos que  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = 2\sqrt{2n} - 1$ .*

Observemos inicialmente que  $n$  é o óctuplo de um quadrado perfeito. Por exemplo, se  $n = 8$ , então  $G = S_4 \oplus S_4 = K_{4,4}$ ; se  $n = 32$ , então  $G = S_8 \oplus S_8 \oplus S_8 \oplus S_8$ .

A melhor estratégia de Alice é colorir um vértice em cada um dos  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  conjuntos independentes  $S_{\sqrt{2n}}$ , até que todos eles tenham pelo menos um vértice colorido. Quando todos os conjuntos independentes tiverem um vértice colorido, Bob não pode mais maximizar o número de cores, e  $\chi_g(G) = \sqrt{2n} - 1$  [12].

Se ao invés disto, Alice colorisse vértices de um mesmo conjunto independente com a mesma cor, Bob a cada jogada coloriria um vértice do mesmo conjunto independente com cores distintas, aumentando o  $\chi_g(G)$ .

### 4.3 Relação do tipo Nordhaus–Gaddum para o número de coloração do jogo

O objetivo desta seção é provarmos o Teorema 4.7.

**Teorema 4.7** [12] *Para qualquer grafo  $G$  de ordem  $n$ , temos que  $2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{8n-2}{5} \rceil$ . O limite inferior é o melhor possível para infinitos valores de  $n$ . Além disto, para infinitos valores de  $n$ , há grafos  $G$  de ordem  $n$  com  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil - 1$ .*

Bob seleciona os vértices de menor grau a cada jogada garante o limite inferior  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) \geq 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , como provado na página 8 do Apêndice C (Lema 3.1). Para qualquer valor de  $n$ , exceto 2 e 4, é possível criar um grafo que satisfaça este limite inferior.

Se  $n$  é ímpar, então  $K_n$  satisfaz o limite inferior.

Se  $n$  é par e  $n \geq 6$ , então criamos um grafo  $H_n$  com duas cópias de  $K_{\frac{n}{2}}$  da seguinte forma:

- Para  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , adicionamos um emparelhamento de  $\frac{n}{4}$  arestas entre as duas cópias de  $K_{\frac{n}{2}}$ , como na Figura 4.2(a).
- Para  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ , adicionamos um emparelhamento de  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  arestas entre as duas cópias de  $K_{\frac{n}{2}}$ , mais uma aresta entre um vértice que está no emparelhamento em uma das cópias de  $K_{\frac{n}{2}}$  e não na outra, como na Figura 4.2(b).

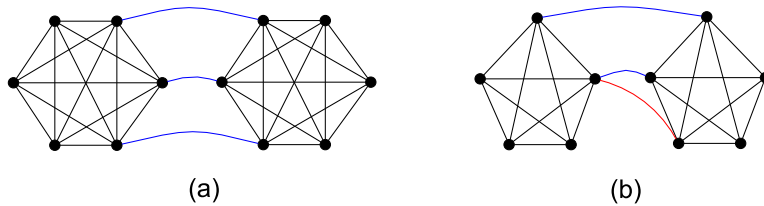


Figura 4.2: Grafos (a)  $H_{12}$ ; (b)  $H_{10}$ .

Se Alice seleciona os vértices de maior grau, então  $\text{col}_g(H_n) = \frac{n}{2}$ , independente da estratégia de Bob, pois o último vértice selecionado não participa do emparelhamento (é um dos vértices de menor grau). Se Alice seleciona os vértices de menor grau, então Bob também seleciona os vértices de menor grau obtendo  $\text{col}_g(H_n) = \frac{n}{2} + 1$  (para  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ) e  $\text{col}_g(H_n) = \frac{n}{2} + 2$  (para  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ ). Logo, a melhor estratégia para Alice é selecionar os vértices de maior grau em  $H_n$ , e com isto o limite inferior alcançado.

A prova do limite superior  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{8n-2}{5} \rceil$  é diferente de todas as feitas no artigo [12] (Lema 3.2, página 10 do Apêndice C) e não apresenta explicitamente a estratégia de Alice ou Bob, e sim usa fortemente a Propriedade 4.8. A propriedade, por sua vez, tem sua prova baseada em uma estratégia de Alice de selecionar os vértices de maior grau.

**Propriedade 4.8** [12] (p. 9 do Apêndice C) *Qualquer grafo  $G$  contém um conjunto  $X(G)$  de  $\left\lceil \frac{col_g(G) + 1}{2} \right\rceil$  vértices de grau pelo menos  $col_g(G) - 1$ . O número de arestas tendo exatamente um vértice em  $X(G)$  é pelo menos  $|X(G)|(|X(G)| - 1)$ .*

Para obtermos a família infinita, tal que  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil - 1$ , presente no Teorema 4.7, introduzimos o Lema 4.9.

**Lema 4.9** (Lema 3.3, p. 11 do Apêndice C) *Seja  $G$  o grafo join  $S_l \oplus K_{l+1}$ , com  $n = 2l + 1$  ímpar e  $l \geq 1$ . Temos que  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 1$ . Seja  $G'$  o grafo join  $S_l \oplus K_{l+2}$ , com  $n = 2l + 2$  par. Temos que  $col_g(G') + col_g(\overline{G}') = \frac{3n}{2} - 1$ .*

Logo, se  $n$  é par, construímos  $G' = S_{\frac{n-2}{2}} \oplus K_{\frac{n}{2}}$  e, conseqüentemente,  $\overline{G}'$  é composto por uma clique  $K_{\frac{n-2}{2}}$  e um conjunto independente  $S_{\frac{n}{2}}$ . Temos que  $col_g(\overline{G}') = \frac{n}{2} - 1$  independente da estratégia de Alice e Bob.

Em  $G'$ , se Bob selecionasse primeiro os vértices da clique, então Alice faria o mesmo e  $col_g(G') = \frac{n}{2}$ . Se Bob seleciona primeiro os vértices de  $S_{\frac{n-2}{2}}$ , então  $col_g(G') = n$ , independente da estratégia de Alice. Logo, Bob escolhe selecionar os vértices do conjunto independente  $S_{\frac{n-2}{2}}$  para maximizar o  $col_g(G')$ . A mesma estratégia funciona para  $n$  ímpar.

## 4.4 Análise dos resultados

Nos Teoremas 4.3, 4.4 e 4.7 apresentamos limites inferiores e superiores para o número de  $P$ -positions de uma caterpillar, para os números cromático e de coloração do jogo de um grafo qualquer, respectivamente. Para o limite inferior do Teorema 4.7, apresentamos grafos que o satisfazem para todo valor  $n$ , com  $n \neq 2$  e  $n \neq 4$ . Já para os outros limites desconhecemos família infinita que os atinja para todo  $n$ . Conhecemos apenas exemplos para os demais limites, exceto o limite superior do número de  $P$ -positions de uma caterpillar, como ilustrado na Tabela 4.2.

Teorema	Limite inferior	Limite superior
4.3	$cat_{01}(0; 1; 1; 0; 0; 1; 1; 1)$	-
4.4	$P_1$	$P_1$ e $P_4$
4.7	família infinita	$P_4$

Tabela 4.2: Grafos que atingem os limites apresentados nos Teoremas 4.3, 4.4 e 4.7.

Sabemos que o limite superior do Teorema 4.3 nunca é atingido, pois este limite considera todas as possíveis orientações das arestas da espinha (que não tem como um de seus extremos uma folha).

Embora não conheçamos famílias infinitas que atinjam os limites inferior e superior para o número cromático do jogo, as famílias infinitas que fornecem os itens 1 e 2 do Teorema 4.4 são assintoticamente equivalentes aos limites superior e inferior, respectivamente.

# Capítulo 5

## Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta tese, estudamos o jogo timber e o jogo de coloração na caterpillar. Referente ao jogo timber, determinamos o número de  $P$ -positions para três famílias infinitas de caterpillars no Teorema 2.13 (Tabela 5.1), o que nos possibilitou entender melhor a relação entre a quantidade de pernas da caterpillar e o seu número de  $P$ -positions. As comparações entre o número de  $P$ -positions entre as três famílias e o caminho apresentados na seção 2.4 nos surpreenderam já que não é possível fazer afirmações para todo número de vértices  $n$ , porém ainda assim notamos que para a maioria dos valores de  $n$ , quanto mais pernas a caterpillar tiver, menor é o seu número de  $P$ -positions.

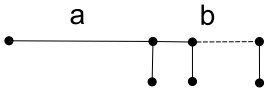
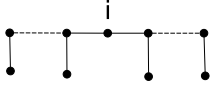
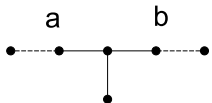
Caterpillar	Número de $P$ -positions
	$\sum_{R'=0}^b \frac{4R'+4}{a+2R'+3} \binom{a}{\frac{a-2R'-1}{2}} \binom{b}{R'}$
	$\binom{s-1}{i-1}$
	$\sum_{R'=\lceil \frac{b}{2} \rceil}^b \frac{-2b+4R'+2+2(-1)^b}{a-b+2R'+2+(-1)^b} \binom{a}{\frac{a+b-2R'-(-1)^b}{2}} \frac{-b+2R'+1}{R'+1} \binom{b}{R'}$

Tabela 5.1: Famílias (I), (II) e (III) e seus números de  $P$ -positions.

Vimos na Tabela 2.2 que existe uma lei de formação para o o número de  $P$ -positions de uma caterpillar da família (I), o que nos sugere a seguinte conjectura:

**Conjectura 5.1** *O número de  $P$ -positions de uma caterpillar da família (I) apresentada no Teorema 2.13 é:*

$$\frac{2(s-a+1)}{a-1} \binom{s-1}{(a-3)/2}.$$

Caso nossa conjectura seja verdadeira, naturalmente surge a questão:

**Questão 5.2** *Existe uma fórmula mais simples para o número de  $P$ -positions da família (III) do Teorema 2.13, sem o uso de somatório?*

Inicialmente, nosso objetivo era estudar a família (I) para com ela sermos capazes de determinar o número de  $P$ -positions de qualquer caterpillar  $H$ . Obtemos que a caterpillar  $H$  pode ser reduzida a um caminho orientado com a seguinte quantidade de arcos para a esquerda:

$$\sum_{i=1}^j [a_i + b_i - 2(R_i + R'_i) + (1 + b_i)(-1)^{\sum_{k=1}^i (a_k + \frac{(1+(-1)^k)}{2})}],$$

onde é  $R_i$  a quantidade de arcos para a direita dentre os  $a_i$  arcos e  $R'_i$  é a quantidade de arcos para a direita dentre os  $b_i$  arcos.

Para que a caterpillar  $H$  seja uma  $P$ -position queremos que esta quantidade de arcos para a esquerda seja zero e como soluções teremos  $2j$ -uplas. Cada  $2j$ -upla fornece o número de arcos para a direita entre os  $a_i$  e  $b_i$  arcos, porém não nos fornece o número de  $P$ -positions. Para determinarmos o número de  $P$ -positions, precisamos saber, para cada  $2j$ -upla, quantas são as configurações que são  $P$ -positions. Como nossas únicas  $2j$  condições são que  $R_i \leq a_i$  e  $R'_i \leq b_i$ , resolver este problema é extremamente difícil.

Felizmente, a partir da família (I), obtemos um limite inferior justo para o número de  $P$ -positions em qualquer caterpillar, como vimos no Teorema 2.14, restando a seguinte questão em aberto:

**Questão 5.3** *Dada uma caterpillar qualquer, existe algoritmo polinomial para determinar seu número de  $P$ -positions?*

O jogo timber foi utilizado como uma questão na 5ª Maratona de Programação da UFFS (Universidade Federal da Fronteira Sul) que ocorreu em sete de setembro de 2017. Participam desta competição, alunos de universidades de todo o país, tendo neste ano mais de 297 times/alunos participantes. O enunciado da questão (Apêndice D), elaborado por Alesom Zorzi, buscava apenas que o aluno compreendesse o fato de que quando há uma folha com grau de saída 1 ou um ciclo, Alice é capaz de ganhar o jogo na primeira jogada. Das seis questões da competição, a questão que nos referimos é a B, e foi a terceira questão com mais certos (39% de acertos). Em <https://www.urionlinejudge.com.br/judge/pt/users/contest/306> podemos acessar o resultado da competição.

Em relação ao jogo de coloração em caterpillars, no Teorema 2.13 determinamos o número cromático do jogo em três classes de caterpillars: caterpillars com grau



máximo 3, sem vértice de grau 2 e sem vértice de grau 3. Além disto, determinamos condições necessárias e condições suficientes para que o número cromático do jogo seja igual a quatro, mas não obtivemos ainda uma condição simultaneamente necessária e suficiente para tal. No entanto, na subseção 3.1.5, exibimos uma família infinita de caterpillars com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 que possuem número cromático do jogo 4 (Família  $Q'$ ), e temos as seguintes conjecturas que pretendemos investigar:

**Conjectura 5.4** *A caterpillar  $H'_{[\alpha]}$  é a única caterpillar com vértices de grau 1, 2, 3 e 4 que satisfaz  $\chi_g^a(H'_{[\alpha]}) = 3$  e é minimal com respeito a  $\chi_g^b(H'_{[\alpha]}) = 4$ .*

**Conjectura 5.5** *Se  $H$  é uma caterpillar com vértices de grau 1, 2, 3 e 4, e é minimal com respeito a  $\chi_g(H) = 4$ , então  $H$  pertence a família  $Q'$ .*

Determinamos o número cromático do jogo em qualquer floresta dados o número cromático do jogo quando Alice e Bob começam a jogar em cada componente da floresta e dada a paridade do número de vértices de cada componente (Teorema 3.29). Ainda assim, persiste uma questão, que apresentamos como conjectura:

**Conjectura 5.6**  $\chi_g^a(T) \leq \chi_g^b(T)$ , para uma árvore  $T$ , exceto para  $T = P_4$ .

Sabemos que a Conjectura 5.6 é falsa para um grafo  $G$  qualquer. Veja a Figura 5.1. Se a Conjectura 5.5 for verdadeira, então a Conjectura 5.6 também será verdadeira, pois a Conjectura 5.5 encerraria o problema de caracterização das caterpillars com relação ao número cromático do jogo.

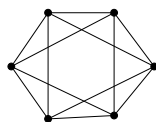


Figura 5.1: Grafo  $G$  com  $\chi_g^a(G) = 5$  e  $\chi_g^b(G) = 3$ .

Provamos no Teorema 3.31 que em uma caterpillar  $H = cat(k_1, \dots, k_s)$ , com  $\chi_g(H) = 4$ , podemos remover as folhas de todos os vértices com grau pelo menos 4 de modo que  $\Delta(H) = 4$  sem alterar o número cromático do jogo. Ficamos no entanto com a Conjectura 3.30, que acredita que o resultado do Teorema 3.31 vale também quando  $\chi_g(H) = 3$ .

O jogo de coloração foi apresentado aos alunos de iniciação científica do Colégio Pedro II, unidade Engenho Novo, em julho de 2017. O projeto de iniciação científica é coordenado pelo professor Diego Nicodemos e tem como tema Matemática

Discreta. Os alunos conheciam o conceito de grafos, mas ainda não haviam estudado coloração de vértices. Explicamos as regras do jogo e convidamos os alunos a jogarem em grafos simples como caminhos, ciclos, estrelas e árvores que não são estrelas. Os alunos compreenderam bem e concluíram sem nossa interferência que se um deles não estivesse atrapalhando a coloração, sempre seria possível colorir as árvores com duas cores. Consideramos esta constatação dos alunos algo excelente.

Acreditamos que os jogos combinatórios podem e devem colaborar para a popularização da matemática. Dentro de uma escola/universidade pode ser um problema motivador para o ensino de certos conceitos. O jogo timber, por exemplo, pode ser usado para motivar o ensino de permutações e combinações, bem como o jogo de coloração motiva o ensino do número cromático. Fora do meio acadêmico, a utilização de jogos é extramente benéfica. Nos três eventos em que participei (Salon International des Jeux Mathematiques, Festival Remue Méninge e Festival da Matemática), notei que muitas crianças procuravam os jogos, geralmente acompanhadas dos seus pais. É senso comum que há uma rejeição à matemática, por ser considerada difícil e inacessível. Poder tratar a matemática de forma lúdica e colaborar no processo de desfazer este estigma é mais do que um desejo para mim, e sim uma meta. Logo, como trabalho futuro, quero buscar aplicar estes jogos de modo lúdico dentro e fora do meio acadêmico.

Por fim, apresentamos um jogo auxiliar ao jogo de coloração, o jogo de marcação, e determinamos limites inferiores e superiores da relação Nordhaus-Gaddum para o número de  $P$ -positions em uma caterpillar, os números cromático e de coloração do jogo em um grafo qualquer. Estes limites são todos justos, exceto o limite superior para o número de  $P$ -positions em uma caterpillar, o que nos leva a Questão 5.7. Além disto, o limite inferior para o número de coloração do jogo em um grafo não é apenas justo, como para todo valor de  $n$ , exceto 2 e 4, é possível construir um grafo que satisfaça o limite.

**Questão 5.7** *É possível melhorar o limite superior para o número de  $P$ -positions em uma caterpillar de modo que o limite seja justo?*

Na literatura é comum a busca por grafos extremais que satisfaçam os limites da relação Nordhaus-Gaddum, como em Dantas et. al [15], o que motiva a Questão 5.8.

**Questão 5.8** *É possível encontrar grafos extremais para os limites inferiores e superiores para o número de  $P$ -positions em uma caterpillar, o número cromático e de coloração do jogo em um grafo qualquer?*

# Referências Bibliográficas

- [1] ALBERT, M. H., NOWAKOWSKI, R. J., WOLFE, D., 2007, *Lessons in Play*. A. K. Peters Ltd.
- [2] ALON, N., BALOGH, J., BOLLOBÁS, B., et al., 2002, “The game domination number”, *Discrete Math.*, v. 256, pp. 23–33.
- [3] AOUCHICHE, M., HANSEN, P., 2013, “A survey of Nordhaus–Gaddum type relations”, *Discrete Appl. Maths.*, v. 161, n. 4, pp. 466–546.
- [4] BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K., 1992, *Winning ways for your mathematical plays*. 1. 2nd ed. , A. K. Peters Ltd.
- [5] BODLAENDER, H., 1991, “On the complexity of some coloring games of Lecture Notes in Computer Science”, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, v. 484, pp. 30–40.
- [6] BONDY, J., MURTY, U., 2008, *Graph Theory*. Springer.
- [7] BOROWIECKI, M., 1976, “On the external stability number of a graph and its complement”, *Prace Naukowe Inst. Mat. Politechniki Wrocławskiej*, v. 12, pp. 39–43.
- [8] BOUTON, C. L., 1905, “Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory”, *Annals of Math*, , n. 3, pp. 35–39.
- [9] CHARMAINE, S., 2009, “The Game Chromatic Number of Some Families of Cartesian Product Graphs”, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, v. 6, n. 2, pp. 315–327.
- [10] CHARPENTIER, C., 2017, “The coloring game on planar graphs with large girth, by a result on sparse cactuses”, *Discrete Mathematics*, v. 340, n. 5, pp. 1069–1073.
- [11] CHARPENTIER, C., SOPENA, E., 2015, “The incidence game chromatic number of  $(a, d)$ -decomposable graphs.” *J. Discrete Algorithms*, v. 31, pp. 14–25.

- [12] CHARPENTIER, C., FURTADO, A., DANTAS, S., et al., 2017, “On Nordhaus-Gaddum type inequalities for the Game Chromatic and Game Coloring numbers”, *Submitted to Discrete Maths*.
- [13] CHARTRAND, G., SCHUSTER, S., 1974, “On the independence number of complementary graphs”, *Trans. NY Acad. Sci. Ser. II*, v. 36, pp. 247–251.
- [14] COCKAYNE, E., THOMASON, A., 1982, “Ordered colourings of graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 32, pp. 286–292.
- [15] DANTAS, S., GRAVIER, S., MAFFRAY, M., 2004, “Extremal graphs for the list-coloring version of a theorem of Nordhaus and Gaddum”, *Discrete Appl. Maths.*, v. 141, pp. 93—101.
- [16] DEUTSCH, E., 1998, “A Bijection of Dyck Paths and its Consequences”, *Discrete Math.*, v. 179, pp. 253–256.
- [17] DUNBAR, J., HATTINGH, J.H.AND MCRAE, A., SLATER, P., 1997, “Efficient coverage of edge sets in graphs”, *Util. Math.*, v. 51, pp. 183—192.
- [18] DUNN, C., LARSEN, V., LINDKE, K., et al., 2015, “The game chromatic number of trees and forests”, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 2, n. 17, pp. 31–48.
- [19] EL-BASIL, S., 1987, “Applications of caterpillar trees in chemistry and physics”, *Journal of Mathematical Chemistry*, , n. 1, pp. 153–174.
- [20] ERDÖS, P., HEDETNIEMI, S., LASKAR, R., et al., 2003, “On the equality of the partial Grundy and upper ochromatic numbers of graphs”, *Discrete Math.*, v. 272, n. 1, pp. 53–64.
- [21] FAIGLE, U., KERN, W., A., H. K., et al., 1993, “On the game chromatic number of some classes of graphs”, *Ars Combinatoria*, v. 35, pp. 143–150.
- [22] FURTADO, A., DANTAS, S., FIGUEIREDO, C., et al., 2015, “Timber Game with Caterpillars”. In: *13th Cologne-Twente Workshop on Graphs Combinatorial Optimization*, .
- [23] FURTADO, A., DANTAS, S., FIGUEIREDO, C., et al., 2015, “Timber Game with Caterpillars”, *Matemática Contemporânea*, v. 44, pp. 1–9.
- [24] FURTADO, A., DANTAS, S., FIGUEIREDO, C., et al., 2016, “The Game Chromatic Number of Caterpillars”. In: *XVIII Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research*.

- [25] FURTADO, A., DANTAS, S., FIGUEIREDO, C., et al., 2017, “Timber Game as a counting problem”, *Submetido a DAM edição especial do GO X*, v. 10.
- [26] FURTADO, A., DANTAS, S., FIGUEIREDO, C., et al., 2017, “The Game Chromatic Number of a caterpillar”, *Submetido a Annals of Operations Research edição especial do XVIII CLAIO*.
- [27] GARDNER, M., 1981, “Mathematical Games”, *Scientific American*, v. 23.
- [28] GIMBEL, J., 2003, “Some remarks on the convexity number of a graph”, *Graphs Combin.*, v. 19, pp. 357–361.
- [29] GORDINOWICZ, P., NOWAKOWSKI, R., PRALAT, P., 2012, “POLISH - Let us play the cleaning game”, *Theoretical Computer Science*, v. 463, pp. 123–132.
- [30] GUAN, D., ZHU, X., 1999, “Game chromatic number of outerplanar graphs”, *Journal of Graph Theory*, v. 30, pp. 67–70.
- [31] HARARY, F., SCHWENK, A. J., 1973, “The number of caterpillars”, *Discrete Mathematics*, v. 6, pp. 359–365.
- [32] JUNOSZA-SZANIAWSKI, K., L., R., 2010, “Game chromatic number of graphs with locally bounded number of cycles”, *Information Processing Letters*, v. 10, pp. 757–760.
- [33] KIERSTEAD, H. A., KOSTOCHKA, A. V., 2009, “Efficient Graph Packing via Game Colouring”, *Combinatorics, Probability and Computing*, v. 18, pp. 765–774.
- [34] NORDHAUS, E., GADDUM, J., 1956, “On complementary graphs”, *Amer. Math.*, v. 63, pp. 175–177.
- [35] NOWAKOWSKI, R. J., RENAULT, G., LAMOUREUX, E., et al., 2014, “The game of TIMBER!” *JCMCC*, v. 85, pp. 213–225.
- [36] PARÁ, T., GRAVIER, S., DANTAS, S., 2014, “Solitaire clobber on circulant graphs”, *Discrete Mathematics*, , n. 329, pp. 33–41.
- [37] PARÁ, T., GRAVIER, S., DANTAS, S., 2015, “Solitaire Clobber played on Cartesian product of graphs”, *Discrete Appl. Math. (Special Issue of GO VIII)*, v. 182, pp. 84–90.
- [38] PEART, P., WOAN, W., 2001, “Dyck Paths with no Peaks at Height k”, *J. Integer Seq. (eletronic) 4*, , n. Article 01.1.3.

- [39] PETERIN, I., 2007, “Game chromatic number of Cartesian product graphs”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 29, pp. 353–357.
- [40] RASPAUD, A., JIAOJIAO, W., 2009, “Game chromatic number of toroidal grids”, *Information Processing Letters*, v. 109, n. 21-22, pp. 1183–1186.
- [41] RENAULT, G., 2013, *Jeux combinatoires dans les graphes*. Tese de Doutorado, L’Université Bordeaux 1, France.
- [42] SCHMIDT, S., 2016, *Jeux à objectif compétitif sur les graphes*. Tese de Doutorado, Université Grenoble Alpes, France.
- [43] SIDOROWICZ, E., 2007, “The game chromatic number and the game colouring number of cactuses”, *Information Processing Letters*, v. 102, pp. 147–151.
- [44] SIEGEL, A. N., 2013, *Combinatorial Game Theory*. Graduate Studies in Mathematics.
- [45] SZWARCFITER, J. L., 1988, *Grafos e algoritmos computacionais*. Campus.
- [46] ZHU, X., 2000, “The game coloring number of pseudo partial k-trees”, *Discrete Mathematics*, v. 215, n. 1–3, pp. 245–262.
- [47] ZHU, X., 1999, “Game coloring of planar graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 75, pp. 245–258.

# Índice Remissivo

*P*-position, 12

arco, 6

cabeça, 6

cauda, 6

clique, 5

coloração própria, 6

conjunto independente, 5

diâmetro, 5

digrafo, 6, 12

distância, 5

emparelhamento, 5

garra, 6

grafo

  árvore, 5

  bipartido completo, 6

  ciclo, 5

  complemento, 4, 48

  completo, 5

  conexo, 5

  estrela, 6

  finito, 4

  infinito, 4

  nulo, 4

  subjacente, 12

grafos

  floresta, 6

  isomorfos, 4

grau

  de um vértice, 5

jogo

  de coloração, 4, 28

  de marcação, 4, 49

  timber, 4, 12

número

  cromático, 6, 48

  cromático do jogo, 48

  de coloração do jogo, 48

vértice

  folha, 5

  universal, 4

## Apêndice A

Manuscrito “Timber Game as a counting problem”



# Timber Game as a counting problem

Ana Furtado

*CEFET-RJ/ COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.*

Simone Dantas

*IME, Universidade Federal Fluminense, Brasil.*

Celina M. H. de Figueiredo

*COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.*

Sylvain Gravier

*CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.*

---

## Abstract

Timber is a two player game played on a directed graph, with a domino on each arc. The direction of an arc indicates the direction its domino can be toppled. Once a domino is toppled, it creates a chain reaction toppling all dominoes along that direction, and the player who topples the last domino wins. A  $P$ -position is an orientation of the edges of the graph where the second player can always force a win. A connected graph with a cycle has no  $P$ -position, thus Timber is a game studied in trees. We prove that a tree has a  $P$ -position if and only if the number of edges is even, which generalizes the existing characterization for paths and improves the performance of the existing algorithm to decide if an oriented tree with an odd number of arcs is a  $P$ -position. We contribute to the open problem of determining the number of  $P$ -positions of a tree. We compute the number of  $P$ -positions of three caterpillar infinite subclasses. Finally, we present a lower bound to the number of  $P$ -positions of an arbitrary caterpillar.

*Keywords:* graph theory, combinatorial games, impartial games, digraph,

---

<sup>☆</sup>Partially supported by CAPES/MathAmSud 021/14, CNPq and FAPERJ. Email: [alcf@cos.ufrj.br](mailto:alcf@cos.ufrj.br), [sdantas@im.uff.br](mailto:sdantas@im.uff.br), [celina@cos.ufrj.br](mailto:celina@cos.ufrj.br), [sgravier434@gmail.com](mailto:sgravier434@gmail.com)

timber game, caterpillar.

---

## 1. Introduction

A *Combinatorial Game* is a finite two player game with perfect information, that is, all the relevant information is public to both players, and the set of available moves is also public. The aim of its study is usually to know a winning strategy. Because these games are of pure strategy, they have aroused the interest of many researchers and they have been studied for one century. There exists a rich and recent literature on Game Theory [1, 2, 12, 13, 10]. We focus on the combinatorial game for trees called *Timber* introduced by Nowakowski et al. [9] in 2013. The authors study this new game from two distinct approaches: decision algorithms for trees and counting problems for paths. We succeed in advancing their seminal contributions with respect to both approaches.

Let  $G = (V, E)$  be a connected graph. A *configuration*  $D = (V, \vec{E})$  of  $G$  is an orientation of the edges of  $G$ . *Timber* is a two player game in which both players have the same allowed set of moves. It is played on a configuration  $D$  with a domino on each arc, where the orientation of an arc indicates the direction that its domino can be toppled. The authors [9] define the game as follows: “on a move, the player chooses a domino on some arc, say,  $(x, y)$  and topples it in the direction of  $y$ . (This is the only time the direction of the edge is important.) The domino then topples the dominoes on the arcs incident with  $y$ , independent of whether the arc is directed into or away from  $y$ , and the process of toppling the dominoes continues until no more dominoes topple. The toppled dominoes and corresponding arcs are removed from the graph.” In other words, each player chooses a domino on some arc  $(x, y)$  and topples it in the direction of vertex  $y$ , removing from  $D$  all vertices of the connected component of  $G$  minus the edge  $xy$  containing  $y$ .

See in Figure 1 how the movements of the game work: in (a) there is a digraph; if a player chooses the domino  $(5, 4)$ , then he topples it in the direction of 4 and, consequently, the dominoes on the arcs incident with 4 are toppled, independent of whether the arc is directed into or away from 4, and we can see in (b) the remaining digraph after this movement. In other words, a player chooses a domino on arc  $(5, 4)$  and topples it in the direction of vertex 4, removing from  $D$  all vertices of the connected component of  $G$  minus the edge containing vertex 4 corresponding to arc  $(5, 4)$ ; if a player

chooses the domino  $(2, 3)$ , then the remaining digraph after this movement is present in (c).

This game can be played in two versions: *Normal play*, in which the first player who can not move is the loser; and *Misère play*, in which this player would be the winner. We choose to study the Normal play version, i.e., the player who topples the last domino wins. As noted in [9], if the subjacent graph  $G$  is connected and has a cycle, then playing on any edge of a cycle gives an empty graph. Thus, restricted to connected graphs, only trees are considered.

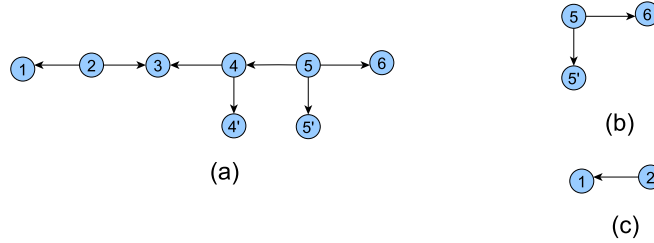


Figure 1: (a) Digraph  $D$ ; remaining configuration after toppling arc: (b)  $(5, 4)$ , (c)  $(2, 3)$ .

A  $P$ -position is a configuration  $D$  in which the second player can force a win (also called *kernel position* in the Sprague-Grundy theory of two-player games; see Heteyi [7, 8]). When a digraph  $D$  is a  $P$ -position, we say that its *outcome* is  $P$ . The *number of  $P$ -positions* of a graph  $G$  is the number of possible configurations of  $G$  that are  $P$ -positions. A  $N$ -position is a configuration in which the first player can force a win. The digraph  $D$  in Figure 1 is a  $N$ -position, because the first player wins by toppling the arc  $(5, 4)$ . Nowakowski et al. [9] give a quadratic algorithm to determine if an oriented tree is a  $P$ -position. Our Theorem 1.1 gives a faster algorithm for this decision problem when the number of arcs is odd and, in addition, it characterizes trees that admit an orientation that is a  $P$ -position:

**Theorem 1.1.** *A tree has a  $P$ -position if and only if it has an even number of edges.*

The binomial coefficient  $\binom{n}{p}$ , for  $n, p \in \mathbb{Z}_+$ , is  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$  whenever  $p \leq n$ , and is zero when  $p > n$ .

In [9], the authors presented the number of  $P$ -positions of paths  $P_s$  with  $s$  vertices and  $(s - 1)$  edges. The number of  $P$ -positions of  $P_s$  is 0 when  $s$  is even, and the  $\frac{s-1}{2}$  Catalan number when  $s$  is odd, that is  $C_{\frac{s-1}{2}} = \frac{2}{s+1} \binom{s-1}{(s-1)/2} \simeq 2^s e^{\sqrt{\frac{2(s-1)^{s-1}}{\pi(s+1)^{s+2}}}}$ . Therefore, Theorem 1.1 extends an existing result for paths [9]: a path has  $P$ -position if and only if the number of edges is even.

A *caterpillar*  $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$  is a tree that is obtained from a central path  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_s$  (called *spine*) by joining  $k_i$  leaf vertices to  $v_i$  (called *legs*), for each  $i = 1, \dots, s$ . The notation means that a spine leaf corresponds to  $k_1 = 0$  or  $k_s = 0$ , and all other leaves correspond to  $k_i \neq 0$  and they are called *leg leaves*. Thus, the number of vertices is  $n = s + \sum_{i=1}^s k_i$ . For instance, Figure 1 has a caterpillar  $cat(0, 0, 0, 1, 1, 0)$  as subjacent graph. We extend the result obtained for paths [9] by determining the number of  $P$ -positions of three caterpillar infinite subclasses, as we see in Theorem 1.2.

In Section 2, we present Lemma 2.5 that is fundamental to simplify the problem of counting  $P$ -positions in a caterpillar, because it states that the number of  $P$ -positions of a caterpillar  $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$  is the same number as in caterpillar  $cat(l_1, l_2, \dots, l_s)$ , where  $l_i \equiv k_i \pmod{2}$ , for  $i = 1, \dots, s$ . Note that the trees of maximum degree 2 are precisely the paths. Our Lemma 2.5 says that although a caterpillar may have arbitrary large maximum degree, when counting the number of  $P$ -positions, it is enough to consider caterpillars with maximum degree 3. So when we study a caterpillar, we just need to consider the caterpillars whose spine vertices have 0 or 1 adjacent legs. Thus, by using Lemma 2.5, the three infinite subclasses of caterpillars (I), (II) and (III) presented in Theorem 1.2 may be simplified as in Figure 2.

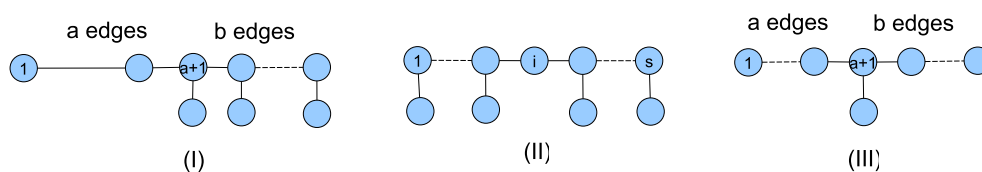


Figure 2: Caterpillars (I), (II) and (III) of Theorem 1.2.

**Theorem 1.2.** *Let  $G$  be a caterpillar.*

(I) *If  $G$  is  $cat(k_1, \dots, k_a, \dots, k_{a+b+1})$ , such that  $k_1, \dots, k_a$  are even,  $k_{a+1}, \dots,$*

$k_{a+b+1}$  are odd,  $a$  is odd, and  $b \geq 1$ , then  $G$  has

$$\sum_{R'=0}^b \frac{4R'+4}{a+2R'+3} \binom{a}{\frac{a-2R'-1}{2}} \binom{b}{R'}$$

*P-positions.*

(II) If  $G$  is  $\text{cat}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_s)$ , such that only  $k_i$  is even, then  $G$  has  $\binom{s-1}{i-1}$  *P-positions*.

(III) If  $G$  is  $\text{cat}(k_1, \dots, k_{a+1}, \dots, k_{a+b+1})$ , such that only  $k_{a+1}$  is odd,  $a, b \geq 1$  and  $a+b+1$  is even, then  $G$  has

$$\sum_{R'=\lceil \frac{b}{2} \rceil}^b \frac{-2b+4R'+2+2(-1)^b}{a-b+2R'+2+(-1)^b} \binom{a}{\frac{a+b-2R'-(-1)^b}{2}} \frac{-b+2R'+1}{R'+1} \binom{b}{R'}$$

*P-positions.*

The subclass (I) of caterpillars is used to obtain a lower bound to the number of *P-positions* of any caterpillar in Theorem 4.4. The subclass (II) of caterpillars enables a surprising comparison with a path with  $s$  vertices, when  $s$  is odd, because the number of *P-positions* of subclass (II) of caterpillars is smaller than the number of *P-positions* of a path for most cases (considering both cases with  $s$  vertices in the spine). In order to study the effect of increasing the maximum degree from 2 to 3, we consider two opposite cases: the subclass (II) of caterpillars with most vertices of degree 3; and the subclass (III) with most vertices of degree 2. Moreover, we show that the number of *P-positions* for caterpillar subclasses (I) and (II) both grow polynomially with the number of vertices in the spine; whereas for subclass (III) this number grows exponentially.

In Section 2, we exhibit four existing results that are fundamental for our study. Also in this section, we prove, in Lemma 2.5, our first reduction of caterpillars that does not change the number of *P-positions*. Section 3 and Section 4 are devoted to the proofs of Theorem 1.1 and Theorem 1.2, and the analysis of the growth of the number of *P-positions* of the considered caterpillars, comparing the obtained formulas whenever is possible. Finally, in Section 5, we present the final remarks.

## 2. Preliminary Results

Every oriented path is composed of left arcs L's and right arcs R's (for simplicity we denote by L and R the number of L's and R's arcs, respectively). In [4, 11], the authors work with a representation of an oriented path as a word composed of letters L's and R's. A *Peak Representation* is a representation of some word on the integer cartesian plane: start at  $(0, 0)$  and let  $L$  be the line joining the lattice points  $(x, y)$  and  $(x + 1, y + 1)$ , and  $R$  be the line joining  $(x, y)$  and  $(x + 1, y - 1)$ . The following Lemma 2.1 is well known, see for instance [4, 11].

**Lemma 2.1.** *Let  $\vec{P}_s$  be an oriented path, and let  $L$  be the number of left arcs and  $R$  be the number of right arcs. The number of oriented paths satisfying*

- (i) the number of left arcs is always greater than or equal to the number of right arcs considering the subpaths when traversing from the left to right;*
- (ii)  $L = R$*

*is  $\frac{1}{L+1} \binom{2L}{L} = \frac{1}{R+1} \binom{2R}{R}$ , which is exactly the Catalan number  $C_L = C_R$ .*

*Moreover, since  $L = R = (s - 1)/2$ , we can say that this number is  $C_{\frac{s-1}{2}} = \frac{2}{s+1} \binom{s-1}{(s-1)/2}$ .*

The peak representation that satisfies the conditions of Lemma 2.1 is a *Dyck Path*. In [9], the authors prove that the oriented paths that are  $P$ -positions are exactly those with Dyck Path representation, which explains why the number of  $P$ -positions of a path with an even number of edges is given by the Catalan number. On the other hand, in an oriented path with odd number of arcs, it is impossible that  $L = R$ , and the condition (i) of Lemma 2.1 can never be satisfied, so it is never a  $P$ -position.

In [9], the authors present three lemmas. Lemma 2.2 helps to solve the trivial case where an oriented tree is not a  $P$ -position. Lemmas 2.3 and 2.4 show how to reduce the problem of deciding whether an oriented tree is a  $P$ -position to a decision in a smaller oriented tree.

The *indegree* of a vertex  $v$  in  $D$  is the number of arcs with head  $v$ ; the *outdegree* of a vertex  $v$  in  $D$  is the number of arcs with tail  $v$ . If there is a leaf with outdegree 1, then the first player can win by playing on the only arc incident to that leaf.

**Lemma 2.2.** [9] *Let  $T$  be a tree. If  $D$  is a configuration of  $T$  with a leaf with outdegree 1, then  $D$  is not a  $P$ -position.*

Thus, in order to count the number of  $P$ -positions of a tree, it is enough to consider the configurations such that every leaf has indegree 1.

**Lemma 2.3.** [9] *Let  $D_1$  and  $D_2$  be two configurations of trees  $T_1$  and  $T_2$ , respectively. Choose  $y \in V(D_1)$  and  $z \in V(D_2)$  and let  $x$  be a new vertex not present in  $V(D_1) \cup V(D_2)$ .*

*Let  $D_\alpha$  be a digraph with vertex set  $V(D_\alpha) = V(D_1) \cup \{x\} \cup V(D_2)$  and arc set  $\vec{E}(D_\alpha) = \vec{E}(D_1) \cup \{(x, y), (x, z)\} \cup \vec{E}(D_2)$ .*

*Let  $D_\beta$  be the digraph with vertex set  $V(D_\beta) = (V(D_1) \setminus \{y\}) \cup (V(D_2) \setminus \{z\}) \cup \{x\}$  and the arc set  $\vec{E}(D_\beta) = \vec{E}(D_1 \setminus \{y\}) \cup \vec{E}(D_2 \setminus \{z\}) \cup \{xt_1 | yt_1 \in \vec{E}(D_1)\} \cup \{s_1x | s_1y \in \vec{E}(D_1)\} \cup \{xt_2 | zt_2 \in \vec{E}(D_2)\} \cup \{s_2x | s_2z \in \vec{E}(D_2)\}$ .*

*The outcomes of  $D_\alpha$  and  $D_\beta$  are equal, i.e.,  $D_\alpha$  is a  $P$ -position if and only if  $D_\beta$  is a  $P$ -position.*

Let  $N^+(x)$  be the set of vertices with tail  $x$  and  $N^-(x)$  be the set of vertices with head  $x$ . Lemma 2.3, illustrated in Figure 3, says that for each configuration  $D$  such there exists a vertex  $x \in V(D)$  with  $N^+(x) = \{y, z\}$  and  $N^-(x) = \emptyset$ , we can remove arcs  $(x, y)$  and  $(x, z)$ , and contract vertices  $x, y$  and  $z$  without changing the outcome of  $D$ . Therefore, we are reducing the size of the input digraph to decide whether the new smaller digraph is a  $P$ -position.

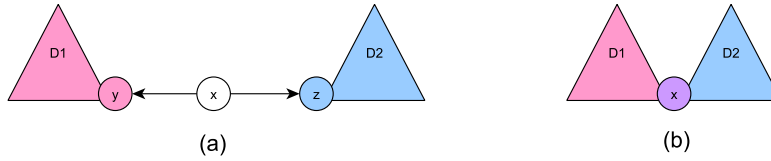


Figure 3: The digraphs in (a) and (b) have the same outcome.

The next lemma uses the operator  $XOR$  (denoted by  $\oplus$ ) that returns a 1 bit when the number of operands equal to 1 is odd. For example,  $11 \oplus 5 = (1011)_2 \oplus (101)_2 = (1110)_2 = 14$ . This operation is also known as Nim sum [13].

**Lemma 2.4.** [9] Let  $D$  be a configuration of tree  $T$ ,  $w \in V(D)$  and  $r, s \in \mathbb{Z}$ .

Let  $D_1$  be a digraph with vertex set  $V(D_1) = V(D) \cup \{y_i\}_{1 \leq i \leq r} \cup \{z_i\}_{1 \leq i \leq s}$  and arcs  $\vec{E}(D_1) = \vec{E}(D) \cup \{(y_i, y_{i+1})\}_{1 \leq i \leq r-1} \cup \{(z_j, z_{j+1})\}_{1 \leq j \leq s-1} \cup (w, y_1) \cup (w, z_1)$ .

Let  $D_2$  be a digraph with vertex set  $V(D_2) = V(D) \cup \{x_i\}_{1 \leq i \leq r \oplus s}$  and arc set  $\vec{E}(D_2) = \vec{E}(D) \cup \{(x_i, x_{i+1})\}_{1 \leq i \leq (r \oplus s) - 1} \cup \{(w, x_1)\}$ .

Thus, the outcome of  $D_1$  is the same of  $D_2$ .

Lemma 2.4, illustrated in Figure 4, says that for each configuration  $D$  such that  $\vec{A}$  and  $\vec{B}$  are two oriented paths starting at  $w$ ,  $|\vec{A}| = a$  and  $|\vec{B}| = b$ , we can replace  $\vec{A}$  and  $\vec{B}$  by just one oriented path  $\vec{Q}$  starting at  $w$ , such that  $|\vec{Q}| = a \oplus b$ , without changing the outcome of  $D$ .

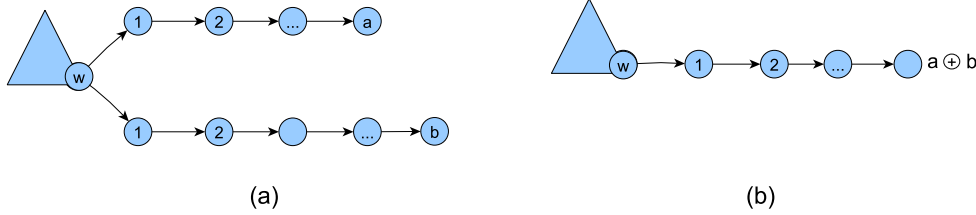


Figure 4: The digraphs in (a) and (b) have the same outcome.

These three lemmas compose the steps of the algorithm presented in [9] to decide whether an oriented tree is a  $P$ -position: Lemma 2.2 solves the trivial case, and Lemmas 2.3 and 2.4 reduce a large oriented tree into a smaller one, accepting the oriented tree as a  $P$ -position if and only if it can be reduced to a single vertex, the minimal graph that is a  $P$ -position.

In the next section, we present Theorem 1.1 that improves this decision algorithm when the number of arcs of an oriented tree is odd. Observe that Lemmas 2.3 and 2.4 do not address the number of  $P$ -positions of a tree. Nevertheless, in our proof of Theorem 1.2, we use Lemma 2.2 and the auxiliary parameter  $R'$  in order to be able to apply the reductions provided by Lemmas 2.3 and 2.4.

To facilitate our study of Timber in caterpillars in Section 4, we use the following reduction, which follows as an application of the previous work of Nowakowski et al. [9], and reduces a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  to a caterpillar with the same number of vertices in the spine, but maximum degree at most 3.



**Lemma 2.5.** *Let  $G$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, s$ . The number of  $P$ -positions of  $G$  is equal to the number of  $P$ -positions of a caterpillar  $cat(l_1, \dots, l_s)$ , such that if  $k_i$  is even, then  $l_i = 0$ , and if  $k_i$  is odd, then  $l_i = 1$ , for  $i = 1, \dots, s$ .*

*Proof.* We shall use Lemma 2.2 and count the configurations where all leaves have indegree 1, and Lemma 2.4 which removes a pair of adjacent leaf vertices.

Let  $i \in \{1, \dots, s\}$ . If  $k_i$  is even, then we write  $k_i = 2t$ , with  $t \geq 0$ , and let  $u_1, u_2, \dots, u_{2t}$  be the  $2t$  leg leaves adjacent to  $v_i$ . We repeatedly apply Lemma 2.4 to  $t$  pairs of arcs:  $(v_i, u_1)$  and  $(v_i, u_2)$ ; ...;  $(v_i, u_{2t-1})$  and  $(v_i, u_{2t})$ . Thus, after  $t$  applications of Lemma 2.4, in the resulting caterpillar, vertex  $v_i$  has no adjacent leg leaf, and we assign in the new caterpillar  $l_i = 0$ .

Else,  $k_i$  is odd and write  $k_i = 2t + 1$ , with  $t \geq 0$ , and deal analogously with the  $2t + 1$  leg leaves adjacent to  $v_i$ , by repeatedly applying Lemma 2.4 to  $t$  pairs of arcs. Thus, after  $t$  applications of Lemma 2.4, in the resulting caterpillar, vertex  $v_i$  has only one adjacent leg leaf, and we assign in the new caterpillar  $l_i = 1$ , which concludes the proof. □

Therefore, we may assume that  $k_i$  is either 0 or 1, and in order to emphasize which vertices  $v_j$  of the spine have an adjacent leg leaf, we shall use the notation  $cat_{01}(\{v_i : k_i = 0\} | \{v_j : k_j = 1\})$ .

### 3. Timber in Trees

A *rooted tree*  $T$  chooses an arbitrary vertex  $v$  as *root*. For every pair of adjacent vertices  $z$  and  $w$ , if  $z$  belongs to the unique path in  $T$  between  $v$  and  $w$ , then  $z$  is the *father* of  $w$ .

We recall that Theorem 1.1 extends the result obtained for paths and solves the problem of determining the number of  $P$ -positions of a tree with an odd number of edges. The proof of the theorem highlights the use of Lemmas 2.2, 2.3 and 2.4, established in the seminal paper by Nowakowski et al. [9].

*Proof. of Theorem 1.1.*

Suppose that the tree  $T$  has an odd number of edges and let  $\vec{T}$  be a configuration of  $T$ . By Lemma 2.2, only configurations where all leaves have indegree 1 are considered.

We successively apply Lemmas 2.3, 2.2 and 2.4 and simplify  $\vec{T}$  to either (i) a smaller oriented tree  $\vec{T}'$  containing a leaf with outdegree 1, which by Lemma 2.2 is not a  $P$ -position; or (ii) an oriented path  $\vec{T}'$  with an odd number of arcs, because Lemmas 2.3 and 2.4 preserve the parity of the number of arcs. In both cases, by [9], configuration  $\vec{T}'$  is not a  $P$ -position. Thus,  $T$  has no  $P$ -position.

Conversely, let  $T$  be a tree with an even number of edges. We shall construct a configuration  $\vec{T}$  of  $T$ , and we use Lemmas 2.2, 2.3 and 2.4 to ensure that  $\vec{T}$  is a  $P$ -position.

Consider  $T$  as a rooted tree. First, by Lemma 2.2, we are forced to orient the edges incident to the leaves of  $T$ , such that in  $\vec{T}$  all leaves have indegree 1.

*Reduction 1:* In  $T$ , for a set  $F$  of leaves adjacent to the same father, such that  $|F| \geq 2$ , we remove from  $F$  an even number of leaves remaining just 1 or 0 leaves, according to the parity of  $|F|$ .

If the reduced tree has a new leaf, whose incident edge is not oriented in  $\vec{T}$  yet, then, by Lemma 2.2, this vertex must have indegree 1 in  $\vec{T}$ .

*Reduction 2:* In  $T$ , let  $w$  be the father of just one leaf  $f$  and let  $p$  be the father of  $w$ . Orient the edge between  $w$  and  $p$  as  $(w, p)$  in  $\vec{T}$ , and remove the vertices  $w$  and  $f$  in  $T$ .

Since both reductions keep the number of remaining edges in  $T$  even, we may repeat them until all edges of  $T$  are oriented.

After we have an oriented  $\vec{T}$ , it is possible to apply Lemmas 2.3 and 2.4 in  $\vec{T}$  reducing it to just one vertex, because in fact *Reduction 1* and *Reduction 2* (that we do in  $T$ ) correspond to Lemmas 2.4 and 2.3 (that we apply in  $\vec{T}$ ), respectively. Thus,  $\vec{T}$  is a  $P$ -position. □

#### 4. Number of $P$ -positions in Caterpillars

As a consequence of Theorem 1.1, a caterpillar has a  $P$ -position if, and only if, it has an even number of edges. We further study caterpillars with an even number of edges, and we show three counting results about caterpillar infinite subclasses in Theorem 1.2. We prove three auxiliary lemmas: Lemma 4.1 generalizes Lemma 2.1; Lemmas 4.2 and 4.3 show how to simplify an oriented caterpillar.

**Lemma 4.1.** Let  $\vec{P}_s$  be an oriented path, and let  $L$  be the number of left arcs and  $R$  be the number of right arcs. The number of oriented paths satisfying that

(i) the number of left arcs is always greater than or equal to the number of right arcs considering the subpaths when traversing from the left to right is  $\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R}$ , where each member of the summation is the number of oriented paths with  $R$  arcs, satisfying (i).

*Proof.* First, note that in this lemma it is not necessary that  $s$  is odd ( $s$  can be odd or even).

If  $L = R$ , then  $R = \frac{s-1}{2}$  and, by Lemma 2.1, the number of oriented paths satisfying (i) is the Catalan number  $C_{\frac{s-1}{2}}$ , which agrees with the obtained member of the summation  $\frac{2}{s+1} \binom{s-1}{(s-1)/2}$ , and the result follows.

Now, we calculate the number of oriented paths satisfying (i), for fixed  $L$  and  $R$ , with  $L > R$ .

In an oriented path with  $L + R$  arcs, there exist  $\binom{L+R}{L}$  possible choices of arcs oriented to the left.

Using Peak representation, the oriented paths that do not satisfy (i) with  $L > R$  occur when the horizontal axis is crossed, and when this happens for the first time, we make a reflection with respect to the line  $y = -1$ .

The peak representation ends at the point  $(L + R, L - R)$ . Thus, after the reflection, this final point is the point  $(L + R, R - L - 2)$ .

So, this new word starts at  $(0, 0)$ , ends at  $(L + R, R - L - 2)$ , and we have  $R - L = L - R + 2$ , i.e.,  $R = L + 1$ . Thus, this word has  $L + R$  letters and  $R = L + 1$ . Hence, we have  $\binom{L+R}{L+1}$  such oriented paths.

Therefore, the number of words that satisfy that the number of  $L$ 's is always less or equal to the number of  $R$ 's from left to right is  $\binom{L+R}{L} -$

$$\binom{L+R}{L+1} = \frac{L-R+1}{L+1} \binom{L+R}{L}.$$

In the oriented path  $\vec{P}_s$ ,  $L + R = s - 1$ . So,  $L = s - R - 1$  and  $\frac{L-R+1}{L+1} \binom{L+R}{L} = \frac{s-R-1-R+1}{s-R-1+1} \binom{s-1}{s-R-1} = \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R}$ .

Since  $L \geq R$ , the maximum value for  $R$  is  $\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ . Thus, the number of oriented paths satisfying (i) is  $\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R}$ .

□

Note that the condition of Lemma 4.1 is exactly the condition (i) of Lemma 2.1. Hence, Lemma 4.1 is more general than Lemma 2.1, and in fact  $\sum_{R=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R} = C_{\frac{s-1}{2}} + \sum_{R=0}^{\frac{s-3}{2}} \frac{s-2R}{s-R} \binom{s-1}{R} \geq C_{\frac{s-1}{2}}$ , when  $s$  is odd. Thus, the number of oriented paths that satisfy Lemma 2.1 is always smaller than the number of oriented paths that satisfy Lemma 4.1, including when  $s$  is even (because there is no oriented path satisfying Lemma 2.1).

Lemmas 4.2 and 4.3 are reductions that will be used in the proof of Theorem 1.2, for infinite families (I) and (II), respectively. We observe that these reduction lemmas refer to special caterpillars that may occur as subcaterpillars in the infinite families of Theorem 1.2. Lemma 4.2 is illustrated in Figure 5.

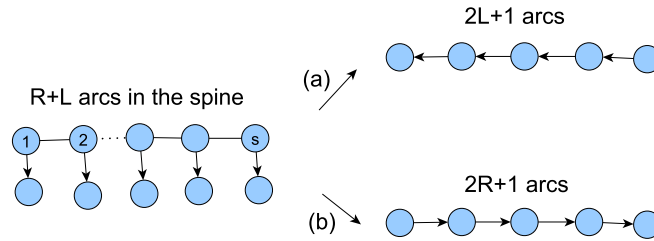


Figure 5: Lemmas 2.3 and Lemma 2.4 are applied: (a) from left to right (b) from right to left.

**Lemma 4.2.** *An oriented caterpillar  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_1, \dots, v_s)$  can be reduced to:*  
 (a)  $2L + 1$  arcs to the left if Lemmas 2.3 and 2.4 are applied from left to right, where  $L$  is the number of arcs to the left among the  $s - 1$  arcs in the spine of the oriented caterpillar;  
 (b)  $2R + 1$  arcs to the right if Lemmas 2.3 and 2.4 are applied from right to left, where  $R$  is the number of arcs to the right among the  $s - 1$  arcs in the spine of the oriented caterpillar.

*Proof.* We prove (a) by induction in  $s$  when we apply Lemmas 2.3 and 2.4 from left to right.

For  $s = 1$ , there is no arc in the spine. Hence,  $L = 0$  which corresponds to an oriented path with only 1 arc to the left. For  $s = 2$ , it is possible to have  $(v_1, v_2)$  or  $(v_2, v_1)$ , i.e.,  $L = 0$  or  $L = 1$  respectively. Applying Lemmas 2.3 and 2.4 from left to right, when  $L = 0$  we apply Lemma 2.3 and we obtain just 1 arc to the left, and when  $L = 1$  we apply Lemma 2.4 and we obtain 3 arcs to the left.

Assume that the result holds for  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_1, \dots, v_j)$  with  $j < s$  and let  $L'$  be the number of left arcs in the spine when  $j = s - 1$ .

Regarding the last arc of the spine of  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_1, \dots, v_s)$ , we can have  $(v_{s-1}, v_s)$  or  $(v_s, v_{s-1})$ , i.e.,  $L = L'$  or  $L = L' + 1$  respectively.

By the induction hypothesis, we are able to simplify the oriented caterpillar  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_1, \dots, v_{s-1})$  and have an oriented path with  $2L' + 1$  left arcs. Thus, when have the right arc  $(v_{s-1}, v_s)$ , we obtain by Lemmas 2.3 and 2.4  $2L' + 1 = 2L + 1$  arcs to the left. Else, when we have the left arc  $(v_s, v_{s-1})$ , we obtain, by Lemmas 2.4,  $2L' + 3 = 2(L' + 1) + 1 = 2L + 1$  arcs to the left.

The proof of (b) is analogous. □

**Lemma 4.3.** *Let  $\vec{G}$  be an oriented caterpillar  $\vec{cat}(0, 0, k_3, \dots, k_{s-2}, 0, 0)$ , such that there exists exactly one  $z \in \{3, \dots, s-1\}$  with  $k_z$  even,  $k_i$  is odd for  $i = 3, \dots, z-1, z+1, \dots, s-2$ , and with the arcs  $(v_2, v_1)$  and  $(v_{s-1}, v_s)$ . Let  $\vec{G}'$  be an oriented caterpillar such that  $V(\vec{G}') = \{x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_j\} \cup V(\vec{G})$  and  $\vec{E}(\vec{G}') = \vec{E}(\vec{G}) \cup \{(v_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{j-1}, x_j), (v_s, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{j-1}, y_j)\}$ .*

*$\vec{G}$  is a  $P$ -position if and only if  $\vec{G}'$  is a  $P$ -position.*

*Proof.*

First, assume that  $\vec{G}$  is a  $P$ -position. So, when we apply Lemmas 2.3 and 2.4 from left to right (or from right to left) just one vertex remains.

Let  $\vec{G}''$  be an oriented caterpillar such that  $V(\vec{G}'') = \{x_1, \dots, x_j\} \cup V(\vec{G})$  and  $\vec{E}(\vec{G}'') = \vec{E}(\vec{G}) \cup \{(v_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{j-1}, x_j)\}$ . Since  $\vec{G}$  is a  $P$ -position, applying Lemmas 2.3 and 2.4 from right to left reduces  $\vec{G}''$  to an oriented path with  $j$  left arcs. So, we can reduce  $\vec{G}''$  to an oriented path  $\vec{P}$  composed by  $j$  left arcs followed  $j$  right arcs, and which is, by Lemma 2.1, a  $P$ -position.

Next, assume that  $\vec{G}'$  is a  $P$ -position, and remove from it the vertices  $y_1, \dots, y_j$ , in order to obtain  $\vec{G}''$ . As we remove  $j$  right arcs of  $\vec{G}'$ , then  $\vec{G}''$

should be reduced to  $j$  left arcs, which can be the arcs  $(v_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{j-1}, x_j)$ . Thus, removing these  $j$  left arcs from  $\vec{G}''$ , we obtain  $\vec{G}$ , which can be reduced to 0 arcs (only one vertex), and this is a  $P$ -position.  $\square$

Now we present the proof of Theorem 1.2 that determines the number of  $P$ -positions for the three infinite subclasses of caterpillars illustrated in Figure 2. In the case (II) of the proof, we denote the caterpillar  $cat_{01}(v_i|v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s)$  by  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$ .

*Proof. of Theorem 1.2*

For families (I) and (II), we use the following notation, when considering all possible configurations. Let  $a = L + R$ , where  $L$  (resp.  $R$ ) is the number of left (resp. right) arcs in the spine of  $\vec{G}$  between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ ; and let  $b = L' + R'$ , where  $L'$  (resp.  $R'$ ) is the number of left (resp. right) arcs in the spine of  $\vec{G}$  between vertices  $v_{a+1}$  and  $v_{a+b+1}$ .

(I) According to Lemma 2.5, the caterpillar under consideration has the same number of  $P$ -positions as the caterpillar  $cat_{01}(v_1, \dots, v_a|v_{a+1}, \dots, v_{a+b+1})$ , with  $a$  odd and  $b \geq 1$ .

We need that  $L \geq R$ , because if  $L < R$ , then the reduction of Lemma 2.3 will produce a leaf with outdegree 1.

By Lemma 4.1, for a fixed  $R$ , there exist  $\frac{a+1-2R}{a+1-R} \binom{a}{R}$  ways to distribute the  $R$  arcs between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ , such that the number of left arcs is always greater than or equal to the number of right arcs considering the subpaths when traversing from the left to the right.

In each of the  $\frac{a+1-2R}{a+1-R} \binom{a}{R}$  oriented paths, we apply Lemma 2.3 and remove all the  $R$  right arcs between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ , replacing the  $a$  arcs by  $L - R = a - 2R$  left arcs.

Now, since  $b \geq 1$  we are able to apply Lemma 4.2 in the oriented sub-caterpillar  $\vec{cat}_{01}(\emptyset|v_{a+1}, \dots, v_{a+b+1})$  from right to left, and we obtain  $2R' + 1$  right arcs. Hence, we simplify  $\vec{G}$  to an oriented path with  $a - 2R$  left arcs followed by  $2R' + 1$  right arcs.

This oriented path is a  $P$ -position if  $a - 2R = 2R' + 1$ , i.e,  $R = \frac{a-2R'-1}{2}$ ; and have  $\binom{b}{R'}$  choices of  $R'$  arcs between vertices  $v_{a+1}$  and  $v_{a+b+1}$ .

Thus, the number of  $P$ -positions is  $\sum_{R'=0}^b \frac{a+1-2R'}{a+1-R'} \binom{a}{R'} \binom{b}{R'}$ . Since,  $R = \frac{a-2R'-1}{2}$ , we have  $\sum_{R'=0}^b \frac{4R'+4}{a+2R'+3} \binom{a}{\frac{a-2R'-1}{2}} \binom{b}{R'}$ .

(II) (Proof by induction in  $s$ )

According to Lemma 2.5, the caterpillar under consideration has the same number of  $P$ -positions as  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$ .

If  $s = 1$ , then  $CAT_{0\bar{1}}(1, 1)$  is a single vertex, there is only one  $P$ -position, and this agrees with  $\binom{1-1}{1-1} = \binom{0}{0} = 1$ .

Assume that  $CAT_{0\bar{1}}(i, j)$  has  $\binom{j-1}{i-1}$   $P$ -positions, for  $j < s$  and  $i \in \{1, \dots, j\}$ .

We analyze  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$ . If  $i = 1$  or  $i = s$ , then, by part (I),  $CAT_{0\bar{1}}(1, s)$  has just one  $P$ -position, which agrees with  $\binom{s-1}{1-1} = 1$ .

Moreover, if  $i = 2$  or  $i = s - 1$ , and  $s = 3$ , then  $CAT_{0\bar{1}}(2, 3) = P_5$ , and if  $s > 3$ , then the caterpillar is  $cat_{0\bar{1}}(v_1, v_2, v_3|v_4, \dots, v_{s+1})$ . By part (I), we know that the number of its  $P$ -positions is

$$\sum_{R'=0}^{s-3} \frac{4R'+4}{3+2R'+3} \binom{3}{\frac{3-2R'-1}{2}} \binom{s-3}{R'} = \frac{4}{6} \times 3 \times 1 + \frac{8}{8} \times 1 \times (s-3) = s-1,$$

which agrees with  $\binom{s-1}{2-1} = s-1$ . Now, we assume  $i = 3, \dots, s-2$ .

We divide into cases according to  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  having arcs  $(v_1, v_2)$  or  $(v_s, v_{s-1})$ ; or  $(v_2, v_1)$  and  $(v_{s-1}, v_s)$ .

If we have arc  $(v_1, v_2)$ , then, by Lemma 2.3, we remove vertex  $v_1$ , and contract vertices  $u_1$  and  $v_2$ , getting a  $CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-1)$  that, by induction hypothesis, has  $\binom{s-2}{i-2}$   $P$ -positions. Similarly for the arc  $(v_s, v_{s-1})$

we obtain  $CAT_{0\bar{1}}(i, s-1)$  that, by induction hypothesis, has  $\binom{s-2}{i-1}$   $P$ -positions. Again, if we have both arcs  $(v_1, v_2)$  and  $(v_s, v_{s-1})$ , then we get  $CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-2)$  that, by induction hypothesis, has  $\binom{s-3}{i-2}$   $P$ -positions.

If we have arcs  $(v_2, v_1)$  and  $(v_{s-1}, v_s)$ , for  $i = 3, \dots, s-1$ , then we apply Lemma 2.4 in paths  $v_2, v_1, u_1$  and  $v_2, u_2$ ; and also in  $v_{s-1}, v_s, u_s$  and  $v_{s-1}, u_{s-1}$ . By Lemma 4.3, this caterpillar is simplified to  $CAT_{0\bar{1}}(i-1, s-2)$  that, by induction hypothesis, has  $\binom{s-3}{i-2}$   $P$ -positions.

Therefore, the number of  $P$ -positions of  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  is given by

$$\begin{aligned} & \binom{s-2}{i-2} + \binom{s-2}{i-1} - \binom{s-3}{i-2} + \binom{s-3}{i-2} \\ &= \binom{s-2}{i-2} + \binom{s-2}{i-1} = \binom{s-1}{i-1}. \end{aligned}$$

(III) According to Lemma 2.5, this caterpillar has the same number of  $P$ -positions of  $cat_{0\bar{1}}(v_{a+1} | v_1, \dots, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{a+b+1})$ .

By hypothesis,  $a+b$  is odd, which implies that  $a$  and  $b$  have different parities.

*Case 1)  $a$  is even and  $b$  is odd*

By Lemma 4.1, for a fixed  $R$ , there exist  $\frac{a+1-2R}{a+1-R} \binom{a}{R}$  ways to distribute the  $R$  arcs between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ , such that the number of left arcs is always greater than or equal to the number of right arcs considering the subpaths when traversing from the left to the right. Similarly, for a fixed  $L'$ , there exist  $\frac{b+1-2L'}{b+1-L'} \binom{b}{L'}$  ways to distribute the  $L'$  arcs between vertices  $v_{a+1}$  and  $v_{a+b+1}$ , such that the number of right arcs is always greater than or equal to the number of left arcs considering the subpaths when traversing from the right to the left.

In each of the  $\frac{a+1-2R}{a+1-R} \binom{a}{R}$  oriented paths, we apply Lemma 2.3 and remove all the  $R$  right arcs between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ , replacing the  $a$  arcs by  $L-R = a-2R$  left arcs. In the same way, in each of the  $\frac{b+1-2L'}{b+1-L'} \binom{b}{L'}$  oriented paths we apply Lemma 2.3 and remove all the  $L'$  right arcs between vertices  $v_{a+1}$  and  $v_{a+b+1}$ , replacing the  $b$  arcs by  $R'-L' = b$  right arcs.

So, we obtain  $L-R$  left arcs between vertices  $v_1$  and  $v_{a+1}$ , and  $R'-L'$  right arcs between vertices  $v_{a+1}$  and  $v_{a+b+1}$ . Observe that  $L-R$  is even and  $R'-L'$  is odd.



Applying Lemma 2.4 in the oriented path with  $L - R$  left arcs and the arc  $(v_{a+1}, u_{a+1})$ , we get  $L - R + 1$  left arcs followed by  $R' - L'$  right arcs. This oriented path is a  $P$ -position if  $L - R + 1 = R' - L'$  (\*).

Thus, the number of  $P$ -positions is  $\frac{a+1-2R}{a+1-R} \binom{a}{R} \frac{b+1-2L'}{b+1-L'} \binom{b}{L'}$ , for  $R$  and  $L'$  satisfying the equation (\*).

Now, we have  $\left\{ \begin{array}{l} L + R = a \\ L' + R' = b \\ L - R + 1 = R' - L' \end{array} \right\}$  and consequently  $L' = b - R'$  and  $R = \frac{a+b-2R'+1}{2}$ .

Thus, the number of  $P$ -positions is

$$\sum_{R'=\lceil \frac{b}{2} \rceil}^b \frac{-2b + 4R'}{a - b + 2R' + 1} \binom{a}{\frac{a+b-2R'+1}{2}} \frac{-b + 2R' + 1}{R' + 1} \binom{b}{b - R'}.$$

*Case 2)*  $a$  is odd and  $b$  is even

It is analogous to the Case 1, and the number of  $P$ -positions is

$$\sum_{R'=\lceil \frac{b}{2} \rceil}^b \frac{-2b + 4R' + 4}{a - b + 2R' + 3} \binom{a}{\frac{a+b-2R'-1}{2}} \frac{-b + 2R' + 1}{R' + 1} \binom{b}{b - R'}.$$

□

In Table 1, we consider the possible values of  $a$  for the caterpillar of part (I), remember that  $a$  must be odd, otherwise there is no  $P$ -position. For each line, note that a fixed value of  $a$  gives an expression of the number of  $P$ -positions, which is a function of  $s = a + b + 1$ . Moreover, we can note in part (I) that, if we fix the number  $s$  of vertices in the spine and increase  $a$  (which means that the caterpillar is closer to being a path), then the number of  $P$ -positions increases exponentially, but as  $b \geq 1$ , the caterpillar of part (I) is never a path. In most cases, the number of  $P$ -positions of the path is greater than the number of  $P$ -positions of a caterpillar of part (I), but, there are exceptions. For example, the number of  $P$ -positions of caterpillar  $cat_{01}(v_1, \dots, v_a | v_{a+1}, v_{a+2})$  is always greater than the number of  $P$ -positions of  $P_{a+2}$ .

Table 1: Comparing the number of  $P$ -positions

a	Number of $P$ -positions of part (I)
1	1
3	$s - 2$
5	$\frac{s^2 - 5s + 4}{2}$
7	$\frac{s^3 - 9s^2 + 20s - 12}{6}$
$\vdots$	$\vdots$
$i$	$s^{\frac{i-1}{2}}$

In part (II), we can study the number of  $P$ -positions  $\binom{s-1}{i-1}$ , which is a polynomial with degree  $i-1$  ( $\cong \frac{s^{i-1}}{(i-1)!}$ ).

For a fixed  $s$ ,  $\binom{s-1}{i-1}$  is smaller than the Catalan number  $C_{\frac{s-1}{2}}$ , for most values of  $i$ . In Figure 6(a), we show in the highlighted region for which values of  $s$  and  $i$  the caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  has more  $P$ -positions than the path  $P_{s+1}$ , when  $s$  is even; and in (b), the highlighted region shows for which values of  $s$  and  $i$  the caterpillar  $CAT_{0\bar{1}}(i, s)$  has more  $P$ -positions than the path  $P_{s+2}$ , when  $s$  is odd. But, for  $s$  odd,  $\binom{s-1}{i-1}$  assumes its maximum value when  $i = \frac{s+1}{2}$ , and  $\binom{s-1}{i-1} = \binom{s-1}{\frac{s-1}{2}} \geq \frac{2}{s+1} \binom{s-1}{\frac{s-1}{2}}$ . So, the number of  $P$ -positions of part (II) can be greater than the number of  $P$ -positions of a path  $P_s$ .

In part (III), the caterpillar is almost a path, unlike the caterpillar of part (II). Let  $s = a + b + 1$ . We know, for example, that if  $a = 1$  and  $s \geq 10$ , then the number of  $P$ -positions of caterpillar of part (III) is greater than the corresponding caterpillar of part (II) with the same value of  $s$ . For a fixed  $s$  and most values of  $a$ , the caterpillar of part (III) has more  $P$ -positions than the caterpillar of part (II).

For fixed  $a$  odd and  $s$  even, without loss of generality, we divide the caterpillar  $cat_{01}(v_1, \dots, v_{a-1}, v_{a+1}, \dots, v_s | v_a)$  of part (III) into two subcaterpillars, and: if  $cat_{01}(v_1, \dots, v_a | \emptyset) = P_a$  and  $cat_{01}(v_{a+1}, \dots, v_s | v_a) = P_{s-a-1}$  have  $P$ -positions, then caterpillar of part (III) also has  $P$ -position. So, the number

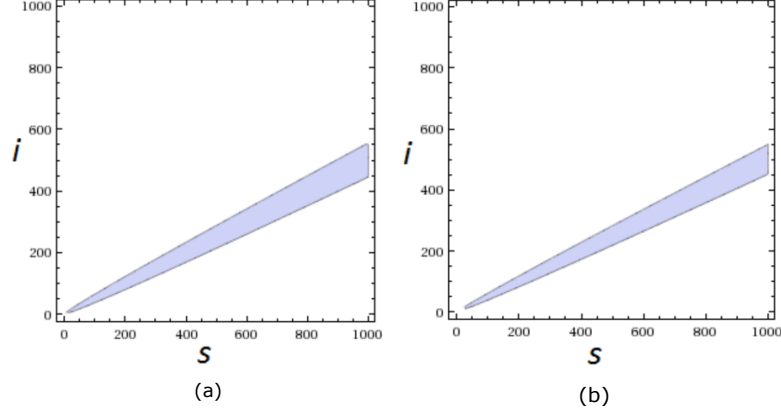


Figure 6: The highlighted regions show, for which values of  $s$  and  $i$ ,  $CAT_{01}(i, s)$  has more  $P$ -positions than the path, when  $s$  is even and odd, respectively.

of  $P$ -positions of a caterpillar of part (III) is greater than the product of the number of  $P$ -positions of  $P_a$  and  $P_{s-a-1}$  (and we know, by [9], that the number of  $P$ -positions of a path is the Catalan number, which is exponential). Thus, number of  $P$ -positions of a caterpillar of part (III) is exponential.

We observe that part (I) of Theorem 1.2 is a strong tool to compute a lower bound for the number of  $P$ -positions of any caterpillar, since a caterpillar can be seen as a  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  (Figure 7). The lower bound is the product of the number of  $P$ -positions for each subcaterpillar given by  $a_i$  and  $b_i$  edges, for  $i = 1, \dots, j$ .

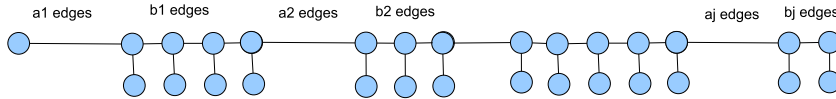


Figure 7:  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$ .

**Theorem 4.4.** *A caterpillar  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  as in Figure 7 has at least*

$\prod_{i=1}^j \sum_{R'_i=0}^{b_i} \frac{4R'_i+4}{a_i+2R'_i+3} \binom{a_i}{\frac{a_i-2R'_i-1}{2}} \binom{b_i}{R'_i}$   $P$ -positions, where  $R'_i$  is the number of edges oriented to the right among the  $b_i$  edges in the spine.

*Proof.* Without loss of generality, we apply Lemmas 2.3 and 2.4 from left to right in the caterpillar.

If a configuration of the subcaterpillar  $cat \langle a_1, b_1 \rangle$  is a  $P$ -position, then it can be reduced to just one vertex without changing the outcome. So, if a configuration of the subcaterpillar  $cat \langle a_1, b_1 \rangle$  is a  $P$ -position, then  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  has the same outcome that  $cat \langle a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$ . We can make this process until  $i = j$ .

As we know the number of  $P$ -positions in each subcaterpillar  $cat \langle a_i, b_i \rangle$ , by Theorem 1.2, it is possible to count all the combinations of these configurations that are  $P$ -positions. This is exactly the product of the number of  $P$ -positions of each  $cat \langle a_i, b_i \rangle$ .  $\square$

Unfortunately, this lower bound is only reasonable when all  $a_i$ 's are odd, otherwise the lower bound is zero, which is a poor result. Even with this limitation, our lower bound reaches exactly the number of  $P$ -positions of some caterpillars, such as  $cat \langle 1, 1; 3, 2 \rangle = cat_{01}(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ . The number of  $P$ -positions of this caterpillar is exactly 4. And the lower bound is also 4:

$$\left( \sum_{R'_1=0}^1 \frac{4R'_1+4}{2R'+4} \binom{1}{-R'_1} \binom{1}{R'_1} \right) \left( \sum_{R'_2=0}^2 \frac{4R'_2+4}{2R'+6} \binom{3}{1-R'_2} \binom{2}{R'_2} \right) = 1 \times 4.$$

So, it is natural to ask if this lower bound is exactly the number of  $P$ -positions of a caterpillar  $cat \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_j, b_j \rangle$  with all  $a_i$  odd, but it is not true. When we do a reduction in a configuration of  $cat \langle a_i, b_i \rangle$  with Lemmas 2.3 and 2.4 it is possible to get oriented path with left arcs (if a configuration of  $cat \langle a_i, b_i \rangle$  is not a  $P$ -position), and yet the oriented caterpillar is a  $P$ -position. We can compute all the possibilities (zero arcs or left arcs) and examine how many combinations are  $P$ -positions. This process is better than analyzing every possible configuration of the caterpillar, but still is laborious and it has an exponential complexity.

## 5. Conclusion

We know that a tree has no  $P$ -positions if its number of edges is odd. Unfortunately, when the number of edges is even, it is still an open problem to know the number of  $P$ -positions for any tree (we just know that there is a  $P$ -position), but it is possible to know how to get this number for some caterpillars. In Table 2, we compare the growth of the number of  $P$ -positions of the path  $P_s$  to the three infinite subclasses of caterpillars presented in Theorem 1.2, according to the variables  $i$  and  $s$ , where, for cases (I) and (III), we have  $i = a + 1$  and  $s = a + b + 1$ .

Although the three found sequences do not correspond to known sequences listed for instance on the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (<https://oeis.org/>), we are able to compare their growth.

Table 2: Comparing the number of  $P$ -positions

Caterpillar	Number of $P$ -positions
$P_s; s$ odd	$\approx \frac{2^s}{s^{2/3}}$
$cat_{01}(v_1, \dots, v_{i-1} v_i, \dots, v_s); i$ even	$\approx s^{\frac{i-1}{2}}$
$cat_{01}(v_i v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s)$	$\approx \frac{s^{i-1}}{(i-1)!}$
$cat_{01}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s v_i); s$ even	$\geq \frac{2^s}{(i(s-1))^{2/3}}$

We observe that the quantity of leg leaves of a caterpillar changes its number of  $P$ -positions. In the three infinite subclasses considered, for most values of  $s$  and  $i$ , the one with the greatest number of  $P$ -positions is the caterpillar that has only one leg leaf.

We hope to use the studied families to generalize the results for other trees or at least get a lower bound for its number of  $P$ -positions, as we did for the caterpillars. We also intend to obtain a formula for the number of  $P$ -positions of an arbitrary caterpillar, to study the minimum number of steps for the first player to win the game in caterpillars, and to study the Partizan Game that is a variation of Timber: the Toppling Dominoes [5].

## References

- [1] Albert, M. H.; Nowakowski, R. J.; Wolfe, D., *Lessons in Play*. A. K. Peters Ltd., 2007.
- [2] Berlekamp, E. R.; Conway, J. H.; Guy, R. K., *Winning Ways for your Mathematical Plays*. Vol.1, (2nd edition). A. K. Peters Ltd., 2001.
- [3] Bouton, Charles L., *Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory*. Annals of Math. 3 (1905), 35-39.
- [4] Deutsch, E.A *Bijection of Dyck Paths and its Consequences*. Discrete Math. 179 (1998), 253-256.
- [5] Fink, A., Nowakowski, R. J.; Siegel, A. N.; Wolfe, D., *Toppling Conjectures*. Games of No Chance 4, chapter 6. Cambridge University Press, 2015.

- [6] Harary, Frank; Schwenk, Allen J., *The Number of Caterpillars*. Discrete Math. 6 (1973), 359-365.
- [7] Heteyi, G., *Enumeration by kernel positions*. Adv. in Appl. Math.. 42 (2009), 445-470.
- [8] Heteyi, G., *Enumeration by kernel positions for strongly Bernoulli type truncation games on words*. J. Combin. Theory Ser. A. 117 (2010), 1107-1126.
- [9] Nowakowski, R. J.; Renault, G.; Lamoureux, E.; Mellon, S.; and Miller, T., *The game of TIMBER!* J. Combin. Math. Combin. Comput. 85 (2013), 213-225.
- [10] Pará, T.; Gravier, S.; Dantas, S., *Solitaire Clobber played on Cartesian product of graphs*. Discrete Appl. Math. (Special Issue of GO VIII). 182 (2015), 84-90.
- [11] Peart, P.; Woan, W., *Dyck Paths with no Peaks at Height  $k$*  J. Integer Seq. (electronic) 4 (2001) Article 01.1.3.
- [12] Renault, G., *Jeux combinatoires dans les graphes*. Ph.D. thesis, L'Université Bordeaux 1, France, 2013. Available in: <<http://math.umons.ac.be/maef/Gabriel.Renault/manuscript.pdf>> Accessed on January 20, 2017.
- [13] Siegel, A. N., *Combinatorial Game Theory*. Graduate Studies in Mathematics, 2013.

## Apêndice B

Manuscrito “The Game Chromatic  
Number of a caterpillar”

## The Game Chromatic Number of Caterpillars

Ana Furtado · Simone Dantas · Celina  
M. H. de Figueiredo · Sylvain Gravier ·  
Simon Schmidt

Received: date / Accepted: date

**Abstract** The coloring game is played by Alice and Bob on a finite graph  $G$ . They take turns properly coloring the vertices with  $t$  colors. If at any point there is an uncolored vertex without available color, then Bob wins. The game chromatic number of  $G$  is the smallest number  $t$  such that Alice has a winning strategy. It is known that for forests this number is at most 4. We find exact values for the game chromatic number of three infinite subclasses of forests (composed by caterpillars), in order to contribute to the open problem of characterizing forests with different game chromatic numbers. Moreover, we show two sufficient conditions and two necessary conditions for any caterpillar to have game chromatic number 4.

**Keywords** Coloring game · Combinatorial games · Game chromatic number · Caterpillar

---

Partially supported by CAPES/MathAmSud 021/14, CNPq and FAPERJ.

Ana Furtado  
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil / CEFET-RJ.  
Tel.: +55-21-39388685  
E-mail: alcf@cos.ufrj.br

Simone Dantas  
IME, Universidade Federal Fluminense, Brasil.

Celina M. H. de Figueiredo  
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Sylvain Gravier  
CNRS, Université Joseph Fourier, France.

Simon Schmidt  
Université Joseph Fourier, France.



## 1 Introduction

The *coloring game* is a two player non-cooperative game conceived by Steven Brams, firstly published in 1981 by Martin Gardner [5], as a *map-coloring game*, and reinvented in 1991 by Bodlaender [1], who studied the game in the context of graphs. The first application of a variation of this game to a non-game graph packing problem was presented in 2009 by Kierstead and Kostochka [7].

Given  $t$  colors, Alice and Bob take turns properly coloring an uncolored vertex. The goal of Alice is to color the input graph with  $t$  colors, and Bob does his best to prevent it. Alice wins when the graph is completely colored with  $t$  colors; otherwise, Bob wins. The *game chromatic number*  $\chi_g(G)$  of  $G$  is the smallest number  $t$  of colors that ensures that Alice wins. In the literature, Alice starts the game, but we find convenient to allow Bob to start the game as well. We denote by  $\chi_g^a(G)$  (or simply  $\chi_g(G)$ ) the game chromatic number of  $G$  when Alice starts the game, and we introduce the auxiliary parameter  $\chi_g^b(G)$  when Bob does it, which is a powerful tool in our proofs.

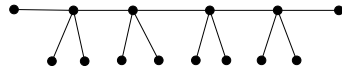
Clearly, for a graph  $G$ ,  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ , where  $\chi(G)$  denotes the chromatic number and  $\Delta(G)$  the maximum degree. So, we have that a complete graph  $K_n$  has  $\chi_g(K_n) = n$ , because  $\chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$ , and, analogously, an independent set  $S_n$  has  $\chi_g(S_n) = 1$ . Analyzing the game chromatic number of paths  $P_n$ , with  $n$  vertices, we can quickly check that  $\chi_g(P_1) = 1$  and  $\chi_g(P_2) = \chi_g(P_3) = 2$ . For  $n \geq 4$ , we have that  $\chi_g(P_n) = 3$  because, regardless of where Alice colors at her first turn, Bob can always give a different color to a vertex at distance 2 of the vertex that Alice colored, forcing the third color. Using the same idea, we have that a cycle  $C_n$  has  $\chi_g(C_n) = 3$ , and that the stars  $K_{1,p}$  with  $p \geq 1$  are the only connected graphs satisfying  $\chi_g(G) = 2$ .

The game has been much studied for different graph classes in order to obtain better upper and lower bounds to  $\chi_g(G)$ : forests [3], planar graphs [9], outerplanar graphs [6], toroidal grids [8], partial  $k$ -trees [10], and the cartesian products of some classes of graphs [2].

Bodlaender [1] showed an example of a tree with game chromatic number at least 4 and proved that every tree has game chromatic number at most 5. In 1993, Faigle et al. [4] improved this bound by proving that every forest has game chromatic number at most 4. Extending Faigle's algorithm that proves that  $\chi_g(F) \leq 4$ , we prove that  $\chi_g^b(F) \leq 4$ . Despite the vast literature in this area, only in 2015, Dunn et al. [3] considered the distinction between forests with different game chromatic numbers, by investigating special cases. They characterized forests with game chromatic number 2, and they investigated the distinction between forests with game chromatic number 3 and 4, using properties that depend on a certain set of vertices to be colored during the game. Actually, they do not provide any kind of characterization of these forests, suggesting as an open problem, due to the difficulty concerning this subject. In our work, we contribute to this study by analyzing a special tree called the *caterpillar*.

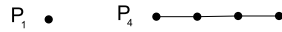
A caterpillar  $H = \text{cat}(k_1, k_2, \dots, k_s)$  is a tree obtained from a central path  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_s$  (called *spine*) by joining  $k_i$  leaf vertices to  $v_i$ , for each  $i = 1, \dots, s$ ; and with number of vertices  $n = s + \sum_{i=1}^s k_i$ . If  $k_i \geq 1$ , then we say that the vertex  $v_i$  has  $k_i$  adjacent *leg leaves*.

The motivation to focus on caterpillars relies on the fact that Bodlaender [1] proved the existence of a tree with  $\chi_g(T) \geq 4$  by considering the caterpillar  $H_d = \text{cat}(0, 2, 2, 2, 2, 0)$  depicted in Figure 1. Actually, Dunn et al. [3] proved that the caterpillar  $H_d$  is the smallest tree such that  $\chi_g(T) = 4$ , and is the unique tree with fourteen vertices and game chromatic number 4.



**Fig. 1** The caterpillar  $H_d$  satisfies  $\chi_g(H_d) = 4$ .

Since Faigle et al. [4] and Dunn et al. [3] worked with forests, the natural question that we can ask is: in a forest  $F$  with  $r$  tree connected components  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , is it true that  $\chi_g(F) = \max \{\chi_g(T_i) \mid i = 1, \dots, r\}$ ? The answer is no, and we give two examples that show how the auxiliary parameter  $\chi_g^b$  is useful. We have an example in Figure 2 such that Alice wins the coloring game with 2 colors by coloring the vertex of the  $P_1$  component, forcing Bob to start coloring a vertex of the  $P_4$  component. Regardless of where Bob colors, Alice can always give the same color to a vertex at distance 2 of the vertex that Bob colored, i.e.,  $\chi_g^b(P_4) = 2$ . So,  $\chi_g(F) = 2$ , although  $\chi_g(P_4) = 3$ .



**Fig. 2** Forest  $F$  with  $\chi_g(F) = \chi_g^b(P_4) = 2$ , but  $\chi_g(P_4) = 3$ .

In fact, we cannot say that  $\chi_g(F) \leq \max \{\chi_g(T_i) \mid i = 1, \dots, j\}$  either. In Figure 3, we give an example of a forest  $F$  composed by two copies of the caterpillar  $H_1$  such that  $\chi_g(H_1) = 3$ , but  $\chi_g(H_1 \cup H_1) = 4$ . Note that, again the parameter  $\chi_g^b(H_1)$  is used. Regardless of where Alice colors at her first turn, Bob can always choose to color vertex  $v_4$  of the component with no colored vertices, and now Lemma 1 implies  $\chi_g^b(H_1) = 4$ , and we obtain that  $\chi_g(F) = 4$  as well.



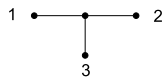
**Fig. 3** Forest  $F = H_1 \cup H_1$  with  $\chi_g(F) = \chi_g^b(H_1) = 4$ , but  $\chi_g(H_1) = 3$ .

Faigle et al. [4] proved for trees that  $\chi_g(T) \leq 4$  and stated that there is no loss of generality when we think of forests, that is, the proof that  $\chi_g(T) \leq 4$  can be extended to obtain  $\chi_g(F) \leq 4$ . In the same spirit of [3] and [4], we analyze forests (composed of caterpillars), studying first the game chromatic number in the connected case.

Dunn et al. [3] wanted to determine if the maximum degree was a relevant characteristic for classifying the game chromatic 3, and they conjectured that the maximum degree alone is not relevant. We agree with this conjecture, and we contribute to this problem by analyzing, in Section 2, three infinite subclasses of caterpillars: caterpillars with maximum degree 3; caterpillars without vertex of degree 2; and, caterpillars without vertex of degree 3. We obtain exactly the game chromatic number of each one. These results are presented in Theorems 2, 17 and 32, respectively, and moreover the results are extended to forests composed by caterpillars of each subclass. When  $\chi_g(H) = 4$ , we show a strategy of Bob to win the game with 3 colors independently of where Alice plays, and when  $\chi_g(H) = 3$ , we show a strategy of Alice to win the game with 3 colors independently of where Bob plays. Besides that, we show two sufficient conditions and two necessary conditions for any caterpillar to have  $\chi_g(H) = 4$ . In Section 3, we determine  $\chi_g(F)$ , for a forest, by knowing  $\chi_g^a(T_i)$ ,  $\chi_g^b(T_i)$  and the parity of  $|V(T_i)|$  for each tree component  $T_i$  of  $F$ . In Section 4, we show that if  $\chi_g(H) = 4$ , then it is possible to make a reduction: we remove leg leaves of vertices of degree greater than 4, leaving only two leg leaves, without changing the  $\chi_g(H)$ . Finally, in Section 5, we present our conclusion and further questions.

## 2 Caterpillar

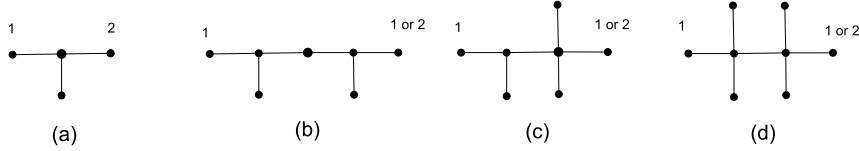
We recall that, by Faigle [4], every caterpillar  $H$ , which is not a star, has  $3 \leq \chi_g(H) \leq 4$ . So we are interested in characterizing caterpillars with  $\chi_g(H)$  equal to 3 or 4. We observe that Alice is forced to use four colors to color a caterpillar if during the game there is a claw subgraph with its leaves colored with different colors 1, 2 and 3 (see Figure 4).



**Fig. 4** The partially colored claw.

So, Bob tries to partially color a claw subgraph as in Figure 4. Suppose caterpillar  $H$  has two copies of the partially colored claw subgraph (with two leaves with different colors), as in Figure 5 (a). In order to prevent Bob's strategy, Alice colors an uncolored vertex in the spine of one of the copies with the third color. In Bob's turn, he colors the uncolored leaf of the other copy, and he wins the game with 3 colors, i.e.,  $\chi_g^a(H) = 4$ . Now, we analyze

cases when we connect two claws by an edge or identify two vertices, and both extremes are colored. Up to isomorphisms and two particular cases, all cases are presented in Figure 5. We observe that Figure 5(a) represents the case when we identify the two central vertices of two claws. We omit two cases when we join two claws by an edge:  $cat(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ , which is not useful for the proofs in this paper; and,  $cat(0, 1, 0, 2, 0)$ , which has the same game chromatic number when Alice or Bob start as the subcaterpillar depicted in Figure 5(b).



**Fig. 5** The partially colored caterpillars (a)  $H_1$  (b)  $H_2$  (c)  $H_3$  (d)  $H_4$ .

First, we introduce two auxiliary parameters. Let  $Z$  be the colored subset of vertices of  $V(G)$ , i.e., for all  $v \in Z$ ,  $c(v) \neq \emptyset$ , where  $c(v)$  is the color of vertex  $v$ . We denote by  $\chi_g(G, Z)$  the smallest number  $t$  of colors that ensures that Alice wins in the partially colored graph  $G$ . Let  $l(F)$  be the number of edges of the longest path in the forest  $F$ .

We refer to Figure 5 for the four caterpillars  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  and  $H_4$  that we shall use throughout the paper.

**Lemma 1** *Let  $H_1$  be the caterpillar (claw)  $cat(0, 1, 0)$ ,  $H_2$  be the caterpillar  $cat(0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $H_3$  be the caterpillar  $cat(0, 1, 2, 0)$ , and  $H_4$  be the caterpillar  $cat(0, 2, 2, 0)$ . Considering the partially colored cases, as in Figure 5, we have that:*

1.  $\chi_g^a(H_1, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_1, Z) = 4$ , with  $Z = \{v_1, v_3 | c(v_1) \neq c(v_3)\}$ ;
2.  $\chi_g^a(H_2, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_2, Z) = 4$ , with  $Z = \{v_1, v_5\}$ ;
3.  $\chi_g^a(H_3, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_3, Z) = 4$ , with  $Z = \{v_1, v_4\}$ ;
4.  $\chi_g^a(H_4, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_4, Z) = 4$ , with  $Z = \{v_1, v_4 | c(v_1) \neq c(v_4)\}$ , but  $\chi_g^a(H_4, Z') = \chi_g^b(H_4, Z') = 4$ , where  $Z' = \{v_1, v_4 | c(v_1) = c(v_4)\}$ .

*Proof* In the next three cases, we show the strategies of Alice and Bob to obtain  $\chi_g^a(H_i, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_i, Z) = 4$ , respectively, for  $i = 1, 2, 3$ .

1. If Alice starts, then she colors  $v_2$  with color 3. If Bob starts, then he colors with color 3 a leg leaf adjacent to  $v_2$ .
2. If Alice starts, then she colors  $v_2$  with color 2. If Bob starts, then he colors  $v_3$  with color 3.
3. If Alice starts, then she colors a leg leaf adjacent to  $v_2$  with color 1. If Bob starts, then he colors with color 3 a leg leaf adjacent to  $v_3$ .

4. Let  $c(v_1) \neq c(v_4)$ , w.l.o.g. assume  $c(v_1) = 1$  and  $c(v_4) = 2$ . If Alice starts, then she colors  $v_2$  with color 2.

Let  $c(v_1) = c(v_4)$ . If Alice starts, then she can color a vertex in the spine, say  $v_2$ , with color 2 and, by Case 1,  $\chi_g^a(H_4, Z') = 4$ . If she colors a leg leaf adjacent to  $v_2$  with color 1, then Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_2$  with color 2, forcing Alice to color  $v_3$  with color 3. So, Bob can color the other leg leaf adjacent to  $v_2$  with color 2, and  $\chi_g^a(H_4, Z') = 4$ . Now, if Bob starts (independent whether  $c(v_1) = c(v_4)$  or  $c(v_1) \neq c(v_4)$ ), then he colors a leg leaf adjacent to  $v_2$  with color 2, forcing Alice to color  $v_2$  with color 3. Finally, he colors a leg leaf adjacent to  $v_3$  with color 2, and  $\chi_g^b(H_4, Z) = \chi_g^b(H_4, Z') = 4$ .

□

We shall define three infinite subclasses of caterpillars for which we are able to establish the exact value of the game chromatic number:

- 2.1: a caterpillar  $H$  with maximum degree 3 that is not a star has  $\chi_g(H) = 3$ ;  
 2.3: a caterpillar  $H$  without vertex of degree 2 has  $\chi_g(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has at least four vertices of degree at least 4.  
 2.4: a caterpillar  $H$  without vertex of degree 3 has  $\chi_g(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has at least one induced subgraph of family  $Q$  (that we present further in subsection 2.4).

### 2.1 Caterpillar with maximum degree 3

This subsection has the goal of studying the game chromatic number of caterpillars with maximum degree 3, that are not stars, and its consequence when we extend the result to forests. In [3], the authors proved that there exists a tree  $T$  with  $\Delta(T) = 3$  and  $\chi_g(T) = 4$  by constructing an example. This result is not valid for caterpillars, as we see in Theorem 2.

**Theorem 2** *If  $H$  is a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  with  $\Delta(H) = 3$ , then  $H$  has  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$ . Moreover, if  $F$  is a forest where each connected component is a caterpillar and  $\Delta(F) = 3$ , then  $F$  has  $\chi_g^a(F) \leq 3$ .*

*Proof* We divide the proof in three claims:

*Claim 1:* Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  and  $\Delta(H) = 3$ . If  $Z = \{v_1, v_s\}$ , then  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , except for the caterpillars with  $s$  odd, which has  $\chi_g^b(H, Z) \leq 4$ .

*Proof of Claim 1:* Proof by induction in  $s$ . In the caterpillar  $H = cat(0, 1, 0)$ ,  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , if  $c(v_3) = c(v_1)$ ; and  $\chi_g^b(H, Z) = 4$ , if  $c(v_3) \neq c(v_1)$ .

Assume that the result is true for any caterpillar  $H$  with  $s \leq z$ .

Now, we analyze the caterpillar  $H'$  with  $s = z + 1$ . Since  $v_1$  and  $v_{z+1}$  are colored, Alice colors  $v_3$  with the same color of  $v_1$ , for  $z + 1$  even, or Alice colors  $v_2$ , for  $z + 1$  odd. If Bob starts and  $z + 1$  is even, then he can color a vertex  $v_i$

of the spine of the caterpillar (and Alice colors a vertex in the subcaterpillar with odd number of vertices in the spine), or he colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ . In the last case, if  $i$  is even, then Alice colors  $v_{i+1}$  with the same color that Bob has used, or, if  $i$  is odd, then she colors  $v_{i-1}$  with the same color that Bob has used. The result follows by induction hypothesis. We do not have to analyze the case when Bob starts and  $z + 1$  is odd, because this case is the exception of Claim 1.  $\square$

*Claim 2:* Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  and  $\Delta(H) = 3$ . If  $Z = \{v_1\}$ , then  $\chi_g^a(H, Z)$ ,  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ .

*Proof of Claim 2:* Similarly to Case 1, we prove by induction in  $s$ . In the caterpillar  $H = cat(0, 1, 0)$ ,  $\chi_g^a(H, Z)$ ,  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ . Assume that the result is true for any caterpillar  $H$  with  $s \leq z$ .

Now, we analyze the caterpillar  $H'$  with  $s = z + 1$ . Alice colors  $v_2$  with color 2, and the result follows by induction hypothesis. If Bob colors a vertex  $v_i$  of the spine of the caterpillar, with  $i = 3, \dots, z + 1$  and  $i$  odd, then Alice colors a vertex  $v_k$  between  $v_1$  and  $v_i$ , with  $k$  odd, in order to avoid the case when the induced subcaterpillars  $cat(k_1, \dots, k_i)$  or  $cat(k_i, \dots, k_z)$  have both extremes colored,  $i$  or  $z - i + 1$  is odd, and Bob is the next to play. If Bob colors  $v_i$ , with  $i$  even, then the result follows by induction hypothesis and Claim 1. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then: if  $i$  is even, then Alice colors  $v_i$ ; else, Alice colors  $v_{i+1}$ . The result follows by induction hypothesis and Claim 1.  $\square$

*Claim 3:* Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $k_1 = k_s = 0$  and  $\Delta(H) = 3$ . We have that  $\chi_g^a(H)$ ,  $\chi_g^b(H) \leq 3$ .

*Proof of Claim 3:* Similarly to previous cases, we prove by induction in  $s$ . In the caterpillar  $H = cat(0, 1, 0)$ ,  $\chi_g^a(H)$ ,  $\chi_g^b(H) \leq 3$ . Assume that the result is true for any caterpillar  $H$  with  $s \leq z$ .

Now, we analyze the caterpillar  $H'$  with  $s = z + 1$ . Alice can color vertex  $v_2$ , and, by Claim 2,  $\chi_g^a(H') \leq 3$ . If Bob starts the game, then he can color a spine vertex of the caterpillar (and again, by Claim 2,  $\chi_g^b(H') \leq 3$ ), or he can color a leg leaf. In the last case, Alice colors the spine vertex adjacent to it, and the result follows by Claim 2.  $\square$

So,  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) \leq 3$ , for  $H$  caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  with  $\Delta(H) = 3$ .

In a forest  $F$  where each connected component  $H_1, \dots, H_r$  is a caterpillar and  $\Delta(F) = 3$ , there is at least one caterpillar  $H_i$ , for  $i = 1, \dots, r$ , that has  $\Delta(H_i) = 3$ , and we have that  $\chi_g^a(H_i)$ ,  $\chi_g^b(H_i) \leq 3$ . Moreover, the caterpillars such that the maximum degree is 2 are paths and they have game chromatic number at most 3, independently of who starts the game. Thus, the game chromatic number in each connected component of  $F$  is at most 3, independently of who starts the game in each one. Therefore,  $\chi_g(F) \leq 3$ , and this ends the proof of Theorem 2.  $\square$

**Corollary 3** *Let  $F$  be a forest where each connected component is a caterpillar and  $\Delta(F) = 3$ . We have that  $\chi_g(F) = 3$  if, and only if,*

- $l(F) \geq 4$  or
- $l(F) = 3$ ,  $|V(F)|$  is odd, and none component with diameter 3 is a path.

*Proof* The result follows by Theorem 11 of [3], which characterizes forests of  $\chi_g(F) = 2$ , and Theorem 2.  $\square$

## 2.2 Sufficient conditions and necessary conditions for $\chi_g(H) = 4$

In Theorems 4 and 5, we will show sufficient conditions for  $\chi_g(H) = 4$  for any caterpillar  $H$ .

**Theorem 4** *If a caterpillar  $H$  has an induced subcaterpillar  $H'$ , such that  $\chi_g^a(H') = \chi_g^b(H') = 4$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* If Bob starts, then he colors in  $V(H')$  and  $\chi_g^b(H) = 4$ . If Alice starts, then she can color in  $V(H')$  or not. If she colors in  $V(H')$ , then  $\chi_g^a(H) = 4$ . If she avoids to color in  $V(H')$ , then Bob does it and,  $\chi_g^a(H) = 4$ .  $\square$

**Theorem 5** *If a caterpillar  $H$  has two induced subcaterpillars  $H'$  and  $H''$ , such that  $\chi_g^b(H') = \chi_g^b(H'') = 4$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* If Alice starts the game in  $H$ , then she can color any vertex. Bob colors in  $V(H')$  or  $V(H'')$ , choosing a subcaterpillar that is not colored. Thus,  $\chi_g^a(H) = 4$ . If Bob starts, then he colors in  $V(H')$  and  $\chi_g^b(H) = 4$ .  $\square$

In Theorems 13 and 15, we will show necessary conditions for  $\chi_g(H) = 4$  for any caterpillar  $H$ .

**Lemma 6** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  such that  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_{s-1} = 1$ , and  $k_i \leq 1$ , for  $i = 2, \dots, s-2$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1, v_s, \lambda_{s-1} | c(v_1) \neq c(v_s), c(v_s) = c(\lambda_{s-1})\}$ , where  $\lambda_{s-1}$  is the leg leaf adjacent to  $v_{s-1}$ .*

*Proof* If Alice starts, then she colors  $v_{s-1}$ , if  $s$  is odd; or  $v_{s-2}$ , if  $s$  is even, and by Claim 2 of Theorem 2,  $\chi_g^a(H, Z) \leq 3$ .

If Bob starts, then the proof follows by induction in  $s$ .

If  $s = 4$ , then  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ . Assume that  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , for  $4 \leq s \leq z$ . When  $s = z + 1$ , Bob can start coloring a spine vertex  $v_i$  or a leg leaf. If Bob colors  $v_i$ , then the result follows by Claim 1 of Theorem 2 and induction hypothesis. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then Alice colors  $v_{i+1}$  and the result follows by induction hypothesis.  $\square$

**Lemma 7** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  with  $s$  odd,  $k_1 = k_{s-1} = k_s = 0$ , and  $\Delta(H) = 3$ . We have that  $H$  has  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1, v_s\}$ .*

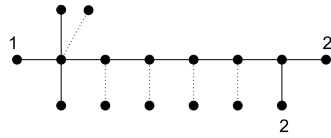
*Proof* This proof follows by induction in  $s$ .

When  $s = 3$ , we have  $cat(0, 0, 0)$  with  $v_1$  and  $v_3$  colored and,  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ .

Assume that the result is true for any caterpillar  $H$  with  $3 \leq s \leq z$ , for  $z$  odd. Now, we analyze the caterpillar  $H'$  with  $s = z + 2$ .

If Bob colors a spine vertex  $v_i$ , then the result follows by Claim 1 of Theorem 2 and induction hypothesis. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , where  $i$  is odd, then Alice colors  $v_{i-1}$ , and the result follows by Claim 1 of Theorem 2 and Lemma 6;  $i$  is even, then Alice colors  $v_i$ , and the result follows by Claim 1 of Theorem 2.  $\square$

**Lemma 8** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  such that  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_2 \geq 2$ ,  $k_{s-1} = 1$ , and  $k_i \leq 1$ , for  $i = 3, \dots, s-2$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1, v_s, \lambda_{s-1} | c(v_1) \neq c(v_s), c(v_s) = c(\lambda_{s-1})\}$ , where  $\lambda_{s-1}$  is the leg leaf adjacent to  $v_{s-1}$  (see Figure 6).*



**Fig. 6** The caterpillar  $H$  of Lemma 8.

*Proof* First, when Alice starts, she colors  $v_2$  with the same color of  $v_s$ , if  $s$  is odd, or she colors  $v_3$  with the same color of  $v_1$ , if  $s$  is even. So, the induced subcaterpillar  $cat(k_2, \dots, k_s)$  or  $cat(k_3, \dots, k_s)$ , respectively, is a caterpillar with maximum degree 3 and has both extremes colored (since  $c(v_s) = c(\lambda_{s-1})$ , we can ignore  $\lambda_{s-1}$ ) and, by Claim 1 of Theorem 2,  $\chi_g^a(H, Z) \leq 3$ .

Now, we prove the case when Bob starts by induction in  $s$ .

If  $s = 4$ , then  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ . Assume that  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , for  $4 \leq s \leq z$ . When  $s = z + 1$ , Bob can start coloring a spine vertex or a leg leaf. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then Alice colors  $v_{i+1}$ , and the result follows by induction hypothesis and Claim 1 of Theorem 2. If Bob colors  $v_i$  and  $v_{i-1}$  has an adjacent leg leaf, then Alice colors it, which is analogous to the previous case. If Bob colors  $v_i$  and  $v_{i-1}$  does not have an adjacent leg leaf ( $d(v_{i-1}) = 2$ ), then Alice colors  $v_{i+1}$ , and the result follows by induction hypothesis and Lemma 6.  $\square$



**Lemma 9** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , such that  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_2 \geq 2$  and  $k_i \leq 1$ , for all  $i = 3, \dots, s-1$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1\}$ .*

*Proof* If Alice starts, then she colors  $v_2$ , and the result follows by Claim 2 of Theorem 2.

If Bob starts, then he can color a spine vertex  $v_i$  or a leg leaf. If he colors  $v_i$ , then Alice colors  $v_2$  (for  $i$  is odd) or  $v_3$  with the same color of  $v_1$  (for  $i$  is even) and, by Claim 1 and 2 of Theorem 2, the result follows. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then Alice colors  $v_{i+1}$ , and the result follows by Claim 2 of Theorem 2 and Lemma 8.  $\square$

**Lemma 10** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  such that  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_{s-1} = 1$ ,  $k_j \geq 2$ , for  $j = 3, \dots, s-2$ ,  $k_{s-1} = 1$  and  $k_i \leq 1$ , for  $i = 2, \dots, j-1, j+1, \dots, s-2$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1, v_s, \lambda_{s-1} | c(v_1) \neq c(v_s), c(v_s) = c(\lambda_{s-1})\}$ , where  $\lambda_{s-1}$  is the leg leaf adjacent to  $v_{s-1}$ .*

*Proof* If  $j$  is odd, then Alice colors  $v_{j-1}$ , and the result follows by Claim 1 of Theorem 2 and Lemma 8. Else, Alice colors  $v_j$ , and the result follows by Claim 1 of Theorem 2.

When Bob starts, the proof follows by induction similarly to Lemma 8 (induction basis  $s = 5$ ).  $\square$

**Lemma 11** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  such that  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_j \geq 2$  and  $k_i \leq 1$ , for  $i = 3, \dots, j-1, j+1, \dots, s-1$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z) \leq 3$  and  $\chi_g^b(H, Z) \leq 4$ , with  $Z = \{v_1, v_s | c(v_1) \neq c(v_s)\}$ .*

*Proof* If there is a leg leaf adjacent to  $v_2$  or  $v_{s-1}$ , then Alice colors it with the same color of  $v_1$  or  $v_s$ , respectively, and the result follows by Lemma 10. Else, Alice colors  $v_j$ , and the result follows by Lemma 7.

When Bob starts, we have in the worst case with  $k_i = 1$ , that: for  $s = 3$  and  $s = 4$ ,  $H$  contains exactly the graphs of Lemma 1 and  $\chi_g^b(H, Z) = 4$ ; for  $s = 5$ , we have two possible caterpillars, as in Figure 7. In both cases, if Bob colors  $v_3$  with color 3, then it is impossible to color all the graph with 3 colors, and  $\chi_g^b(H, Z) = 4$ .



**Fig. 7**  $cat(0, 1, k_3, 1, 0)$  and  $cat(0, k_2, 1, 1, 0)$ , where  $k_3, k_2 \geq 2$ .

For  $s \geq 6$ , Bob colors the vertices of the spine of the caterpillar in the order:  $v_3, v_{s-2}, v_5, v_{s-4}, \dots$ , until he obtains an induced partially colored caterpillar as previously shown in the cases where  $s = 3, s = 4$  or  $s = 5$ .

Thus,  $\chi_g^b(H, Z) = 4$ , when  $k_i = 1$ , and this implies that  $\chi_g^b(H, Z) \leq 4$ , when  $k_i \leq 1$ .  $\square$

**Lemma 12** *Let  $H$  be a caterpillar  $\text{cat}(k_1, \dots, k_s)$ , such that  $k_1 = k_s = 0, k_j \geq 2$  and  $k_i \leq 1$ , for all  $i \in \{2, \dots, s-1\} \setminus \{j\}$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z), \chi_g^b(H, Z) \leq 3$ , with  $Z = \{v_1\}$ .*

*Proof* If  $j$  is even, then Alice colors  $v_j$ , and the result follows by Claim 1 and 2 of Theorem 2. If  $j$  is odd, then Alice colors  $v_{j-1}$ , and the result follows by Claim 1 of Theorem 2 and Lemma 9.

When Bob starts, he can color a spine vertex  $v_i$  or a leg leaf. If he colors: (i) a spine vertex  $v_i$ , for  $i > j$ , then the result follows by Lemma 11 and Claim 2 of Theorem 2; (ii) a spine vertex  $v_i$ , for  $i = j$ , the result follows by Claim 1 and 2 of Theorem 2; (iii) a leg leaf adjacent to  $v_i$ , for  $i \geq j$ , then Alice colors  $v_{i+1}$ , and the result follows by Lemma 8 and Claim 2 of Theorem 2; (iv) a spine vertex  $v_i$  or a leg leaf adjacent to  $v_i$ , for  $i < j$ , we use induction in  $s$  to prove the result as follows.

If  $s = 3$ , then Bob can color  $v_2$  or the leaf adjacent to it. In both cases,  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$ .

Assume that  $\chi_g^b(H, Z) \leq 3$  for  $s \leq z$ . When  $s = z + 1$ , Bob can color a spine vertex or a leg leaf. If he colors a spine vertex  $v_i$ , the result follows by Claim 1 or 2 of Theorem 2 and by induction hypothesis. If he colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then Alice colors  $v_{i+1}$  with the same color, and the result follows by Lemma 8 and by induction hypothesis.  $\square$

**Theorem 13** *If a caterpillar  $H$  has  $\chi_g(H) = 4$ , then  $H$  has at least four vertices of degree at least 4.*

*Proof* If  $H$  has just one vertex of degree at least 4,  $v_i$ , then Alice colors  $v_i$ , and by Claim 2 of Theorem 2, we have that  $\chi_g(H) = 3$ .

If  $H$  has exactly two vertices of degree at least 4,  $v_i$  and  $v_j$ , then Alice colors  $v_i$ , and by Theorem 2 and Lemma 12, we have that  $\chi_g(H) = 3$ .

If  $H$  has exactly three vertices of degree at least 4,  $v_i, v_j$  and  $v_k$ , then Alice colors  $v_j$ , and by Lemma 12, we have that  $\chi_g(H) = 3$ .  $\square$

**Lemma 14** *Let  $H' = \text{cat}(k_1, \dots, k_p)$  and  $H'' = \text{cat}(k_q, \dots, k_s)$  be caterpillars such that  $k_p = k_q = 0, \chi_g^a(H') = \chi_g^a(H'') = \chi_g^b(H'') = 3$  and  $\chi_g^b(H') \geq 3$ . Let  $H$  be a caterpillar constructed by linking vertex  $v_p$  of  $H'$  to vertex  $v_q$  of  $H''$  by a path, that is  $H = \text{cat}(k_1, \dots, k_p, \dots, k_q, \dots, k_s)$ , for  $p \neq q$ . We have that  $\chi_g^a(H) = 3$ .*

*Proof* Alice colors a vertex in  $H'$ . If Bob colors in  $V(H')$  or  $V(H'')$ , then Alice colors in the same subcaterpillar. If Bob colors a vertex  $v_i$ ,  $p \leq i \leq q$ , then Alice continues coloring vertices in  $H'$  or  $H''$  until all them are colored, because even if just Bob colors the vertices in the subpath  $v_p, \dots, v_q$ , it does not increase the game chromatic number of  $H$ .  $\square$

**Theorem 15** *If  $H$  is a minimal caterpillar with respect to  $\chi_g^a(H) = 4$ , then  $H$  does not have consecutive vertices of degree 2, unless  $H$  has two edge disjoint induced subcaterpillars  $H'$  and  $H''$  that are minimal with respect to  $\chi_g^b(H') = 4$  and  $\chi_g^b(H'') = 4$ .*

*Proof* Suppose that there are at least two consecutive vertices of degree 2 in  $V(H)$ , and at most one induced subcaterpillar that is minimal with respect to game chromatic number 4 when Bob starts. Let  $H = \text{cat}(k_1, \dots, k_p, \dots, k_q, \dots, k_s)$  such that  $k_i = 0$ ,  $p \leq i \leq q$  and  $p \neq q$ . Let  $H' = \text{cat}(k_1, \dots, k_p)$  and  $H'' = \text{cat}(k_q, \dots, k_s)$  be two induced subcaterpillars of  $H$ . Since  $H$  is minimal with respect to  $\chi_g^a(H) = 4$ , we have that  $\chi_g^a(H'), \chi_g^a(H'') \leq 3$ . And since there does not exist two edge disjoint induced subcaterpillars that are minimal with respect to game chromatic number 4 when Bob starts, we have that only one of  $\chi_g^b(H')$  and  $\chi_g^b(H'')$  is 4. So, by Lemma 14,  $\chi_g^a(H) = 3$ .

If there are two edge disjoint induced subcaterpillars  $H'$  and  $H''$  that are minimal with respect to  $\chi_g^b(H') = 4$  and  $\chi_g^b(H'') = 4$ , by Theorem 5, we have that  $\chi_g^a(H) = 4$ , and  $H$  could be minimal with respect to  $\chi_g^a(H) = 4$ .  $\square$

### 2.3 Caterpillar without vertex of degree 2

Next Theorem 17 has the goal of studying the game chromatic number of caterpillars without vertex of degree 2, and its consequence when we extend to forests. First, we prove a lemma that focus in the caterpillars with exactly two vertices of degree at least 4.

**Lemma 16** *Let  $H$  be a caterpillar  $\text{cat}(k_1, \dots, k_s)$ ,  $s \geq 5$ ,  $k_1 = k_s = 0$ ,  $k_p, k_q \geq 2$  for  $p, q \in \{2, \dots, s-1\}$ ,  $p \neq q$ , and  $k_i = 1$  for all  $i \in \{2, \dots, s-1\} \setminus \{p, q\}$ . We have that  $\chi_g^a(H, Z) = \chi_g^b(H, Z) = 4$ , with  $Z = \{v_1, v_s \mid c(v_1) \neq c(v_s)\}$ .*

*Proof* If Alice colors a vertex  $v_i$  with  $p \leq i \leq q$ , then, by Lemma 11,  $\chi_g^a(H, Z) = 4$ . If Alice colors a leg leaf adjacent to a vertex  $v_i$  with  $i < p$  and  $i > q$ , then Bob colors  $v_i$  and we have a subcaterpillar with the same properties as the input partially colored caterpillar. All the following situations end with  $\chi_g^a(H, Z) = 4$  by Lemma 11: if Alice colors a leg leaf adjacent to a vertex  $v_i$  with  $p < i < q$ , then Bob colors  $v_i$ ; if Alice colors a vertex  $v_i$  with  $i < p$  or  $i > q$ , then Bob colors a vertex  $v_i$  with  $p < i < q$ ; and, if Alice colors a leg leaf adjacent to a vertex  $v_p$  (or  $v_q$ ), then Bob colors the other leg leaf adjacent to  $v_p$  (or  $v_q$ ) forcing Alice to color  $v_p$  (or  $v_q$ ).

If Bob starts the game, he colors  $v_i$  with  $p < i < q$ , and, by Lemma 11,  $\chi_g^b(H, Z) = 4$ .  $\square$

Observe that when  $s = 4$ , the result of Lemma 16 follows by Lemma 1.

**Theorem 17** *Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  without vertex of degree 2 and  $k_1 = k_s = 0$ . We have that  $\chi_g^a(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has at least four vertices of degree at least 4.*

*Proof* The first part, follows by Theorem 13. Now, to prove the converse, let  $H'$  be an induced caterpillar of  $H$  such that  $H'$  has exactly four vertices of degree at least 4, say  $v_p, v_q, v_r$  and  $v_t$ , for  $p < q < r < t$ .

*Case 1:*  $H'$  has no consecutive vertices in the spine of degree at least 4.

If Alice colors a vertex  $v_i$  in the spine of  $H'$ , then Bob colors another vertex  $v_j$  in the spine of  $H'$  in a way that between  $v_i$  and  $v_j$  there are exactly two vertices of degree at least 4 and, by Lemma 16,  $\chi_g^a(H) = 4$ .

If  $r = q + 2$  and Alice colors the leg leaf adjacent to  $v_{q+1}$ , then Bob colors  $v_{q+1}$ , and in the future he can color  $v_{p-1}$  or  $v_{t+1}$  and, by Lemma 16,  $\chi_g^a(H) = 4$ . Otherwise, if Alice colors a leg leaf, then Bob colors with a different color a vertex in the spine of  $H$  with distance 2 of the leg leaf that Alice have colored. In this way, Bob forces Alice to color a vertex in the spine, and he can use the previous strategy.

*Case 2:*  $v_p, v_q$  and  $v_r$  are consecutive vertices, and  $r \neq t$ .

If Alice colors  $v_{p-1}, v_p, v_r$  or  $v_{r+1}$ , then, by Lemma 1,  $\chi_g^a(H) = 4$ . If she colors  $v_q$  or  $v_i$ , with  $i > t$ , or a leg leaf, then we use the strategy of Case 1. If she colors  $v_i$ ,  $r + 1 < i \leq t$ , with color 1, then Bob colors  $v_{p-1}$  with color 2. So, to avoid the hypothesis of Lemma 1, Alice colors  $v_q$  with color 2, and, by Lemma 11,  $\chi_g^a(H) = 4$ . Using the same idea, if Alice colors  $v_i$ ,  $i < p - 1$ , with color 1, then Bob colors  $v_{r+1}$  with color 2.

*Case 3:*  $v_q$  and  $v_r$  are consecutive vertices,  $p \neq q$  and  $r \neq t$ .

If Alice colors  $v_{q-1}$  or  $v_{r+1}$ , then, by Lemma 1,  $\chi_g^a(H) = 4$ . If she colors  $v_i$ ,  $i < p$ ,  $v_q$  or a leg leaf, then Bob uses the strategy of Case 1.

If Alice colors  $v_i$ ,  $p \leq i < q$ , with color 1, then Bob colors  $v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+6} \dots$  with color 2 and 1 alternately, forcing Alice to color  $v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5} \dots$  with color 3. He keeps doing this until he colors vertex  $v_{q-1}$  or  $v_q$ . So, he uses Lemma 1 or the strategy of Case 1. The other cases are isomorphic.

*Case 4:*  $v_p$  and  $v_q$  are consecutive vertices,  $q \neq r$  and  $r \neq t$ .

If Alice colors  $v_{p-1}$  or  $v_{q+1}$ , then, by Lemma 1,  $\chi_g^a(H) = 4$ . If she colors  $v_i$ ,  $i \geq p$ , or a leg leaf, then Bob uses the strategy of Case 1.

If she colors  $v_i$ ,  $i < p$ , then Bob colors  $v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+6} \dots$  with color 2 and 1 alternately forcing Alice to color  $v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5} \dots$  with color 3. He does this until he colors vertex  $v_{p-1}$  or  $v_p$ . So, he uses Lemma 1 or the strategy of Case 1.

*Case 5:*  $v_p$  and  $v_q$  are consecutive vertices,  $v_r$  and  $v_t$  are consecutive vertices and  $q \neq r$ .

If Alice colors  $v_{p-1}, v_{q+1}, v_{r-1}$  or  $v_{t+1}$ , then, by Lemma 1,  $\chi_g^a(H) = 4$ . If she colors  $v_p$  or leg leaf, then Bob uses the strategy of Case 1.

If she colors  $v_i$ ,  $i < p$ , with color 1, and  $p - i$  is odd, then Bob colors  $v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+6} \dots$  with color 2 and 1 alternately, forcing Alice to color  $v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5} \dots$  with color 3. He keeps doing this until he colors vertex  $v_{p-1}$ . Thus, the result follows by Lemma 1.

If she colors  $v_i$ ,  $i < p$ , with color 1, and  $p - i = 2$ , then Bob colors  $v_{q+1}$  with color 2.

If she colors  $v_i$ ,  $i < p$ , with color 1, and  $p - i \geq 4$  is even, then Bob colors  $v_{q+1}$  with color 1. To avoid the hypothesis of Lemmas 1, Alice colors  $v_q$  with color 2 (and the result follows by Lemma 11), or she colors  $v_p$  with color 2, and then Bob colors  $v_{p-2}, v_{p-4}, v_{p-6} \dots$  with color 3 and 2 alternately, forcing Alice to color  $v_{p-1}, v_{p-3}, v_{p-5} \dots$  with color 1 and 3, respectively. He keeps doing this until he colors vertex  $v_{i+2}$ , and so he colors the leg leaf adjacent to  $v_{i+1}$  with a different color of  $v_{i+2}$ , and the result follows by Lemma 1.

If Alice colors  $v_i$ ,  $q \leq i < r$  with color 1, then Bob uses the same strategy as in case that Alice colors  $v_i$ ,  $i < p$ .

Thus, if  $H$  has  $H'$  as a subcaterpillar, then  $\chi_g^a(H) = 4$  and we conclude the proof.  $\square$

Now, we analyze the caterpillar  $H$  without vertex of degree 2 that is minimal with respect to  $\chi_g^a(H) = 4$ .

**Corollary 18** *A caterpillar  $H = \text{cat}(0, k_2, \dots, k_q, \dots, k_r, \dots, k_{s-1}, 0)$  without vertex of degree 2 is minimal with respect to  $\chi_g^a(H) = 4$ , for  $k_2 = k_q = k_r = k_{s-1} = 2$ ,  $q, r \in \{3, \dots, s-2\}$ , and  $k_i = 1$ ,  $i \in \{3, \dots, s-2\} \setminus \{q, r\}$ .*

*Proof* By Theorem 17, we have that  $\chi_g^a(H) = 4$ .

If we remove  $v_1$ ,  $v_s$ , or a leg leaf adjacent to  $v_2$ ,  $v_q$ ,  $v_r$  or  $v_{s-1}$ , then  $H$  does not have four vertices of degree 4, and  $\chi_g^a(H) < 4$ , by Theorem 17.

If we remove a leg leaf adjacent to  $v_i$ , for  $i \in \{3, \dots, s-2\} \setminus \{q, r\}$ , then  $H$  has a vertex of degree 2, which contradicts the hypothesis.

If we remove a spine vertex, then we do not have a connected graph.  $\square$

In the next results, we present conditions to determine the game chromatic number when Bob starts for caterpillars without vertex of degree 2.

**Theorem 19** *Let  $H$  be a caterpillar  $\text{cat}(k_1, \dots, k_s)$  without vertex of degree 2 and  $k_1 = k_s = 0$ . We have that  $\chi_g^b(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has at least three vertices of degree at least 4 not all consecutive or  $H$  has a caterpillar  $\text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  as an induced subcaterpillar.*

*Proof* First, if there is no vertex of degree at least 4, then the result follows by Theorem 2.

Assume there is just one vertex of degree at least 4,  $v_p$ . If Bob colors  $v_i$ ,  $i \neq p$ , then  $\chi_g^b(H) = 3$ , by Lemma 12. If Bob colors  $v_p$ , then  $\chi_g^b(H) = 3$ , by Claim 2 of Theorem 2. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ ,  $i < p$  ( $i > p$ ), then Alice colors  $v_{i-1}$  ( $v_{i+1}$ ) and any other play of Bob follows by Lemmas 6

or 8 or 10. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_p$ , then Alice colors  $v_p$  and the result follows by Claim 2 of Theorem 2.

Now, assume that there are two vertices of degree at least 4,  $v_p$  and  $v_q$ ,  $p < q$ . If Bob colors  $v_i$ ,  $i < p$  and  $p - i$  is odd ( $i > q$  and  $i - q$  is odd), then Alice colors  $v_p$  ( $v_q$ ) and the result follows by Lemma 12. If Bob colors  $v_i$ ,  $i < p$  and  $p - i$  is even ( $i > q$  and  $i - q$  is even), then Alice colors the leaf adjacent to  $v_{i+1}$  ( $v_{i-1}$ ) with the same color. If Bob colors  $v_i$ ,  $p \leq i \leq q$ , then the result follows by Lemma 12. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ ,  $p < i < q$ , then Alice colors  $v_i$  and the result follows by Lemma 12. If Bob colors the leg leaf adjacent to  $v_p$  (leg leaf adjacent to  $v_q$ ), then Alice colors  $v_p$  ( $v_q$ ) and the result follows by Claim 2 of Theorem 2 and Lemma 12. If Bob colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ ,  $i < p$  ( $i > q$ ), then Alice colors  $v_p$  ( $v_q$ ) and the result follows by Claim 1 or 2 of Theorem 2 and Lemma 12.

Assume that there are three vertices of degree at least 4 in both cases:  $H' = \text{cat}(0, 2, 2, 2, 0)$  or  $H'' = \text{cat}(0, 1, 2, 2, 2, 0)$ . In  $H'$ , if Bob colors some vertex of the spine, then Alice colors a vertex of the spine at distance two with the same color. To color a leaf adjacent to  $v_2$  or  $v_4$  is equivalent to color  $v_1$  or  $v_5$ , respectively. If Bob colors a leaf adjacent to  $v_3$ , then Alice colors  $v_3$ . So,  $\chi_g^b(H') = 3$ . In  $H''$  we have  $H'$  as an induced subcaterpillar. If Bob colors in  $H'$ , then  $\chi_g^b(H'') = 3$ . If Bob colors  $v_1$ , then Alice colors the leaf adjacent to  $v_2$  with the same color, forcing Bob to color in  $H'$  in the next move, and Alice can use the same strategy used in  $H'$ , and  $\chi_g^b(H'') = 3$ .

Conversely, let  $H'$  be an induced caterpillar of  $H$  such that  $H'$  has exactly three vertices of degree at least 4, say  $v_p, v_q$  and  $v_r$ , for  $p < q < r$  and assume, without loss of generality, that  $v_p$  and  $v_q$  are not adjacent. Bob colors the first spine vertex of  $H'$ . If Alice colors  $v_i$ : for  $i \leq p$ , then Bob colors  $v_{q+1}$  and the result follows by Lemma 16; for  $p < i \leq q$ , then the result follows by Lemma 11; for  $q < i \leq r$ , then the result follows by Lemma 16; and, for  $i > r$ , then Bob colors  $v_{q-1}$  and the result follows by Lemma 16. Finally, if Alice colors a leg leaf, then Bob forces her to color a spine vertex, which follows one of the previous cases.

Let  $H''' = \text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  be an induced caterpillar of  $H$ . Bob colors  $v_1$  to avoid coloring in  $H''$ , and Alice colors the leaf adjacent to  $v_2$  with the same color. If Bob colors some vertex of the spine or a leaf adjacent to  $v_4, v_5$  or  $v_6$ , then Alice uses the strategy used in  $H''$ . Bob colors the leaf adjacent to  $v_3$  with the same color used until this moment, say color 1. If Alice colors  $v_2$  with color 2, then Bob colors  $v_4$  with color 3. If Alice colors  $v_3, v_4, v_6$  or  $v_7$ , then Bob colors a vertex of the spine at distance 3, and the result follows by Lemma 1. If Alice colors  $v_5$  with color 1 (color 2), then Bob colors a leaf adjacent to  $v_4$  with color 2 (color 1), forcing Alice to color  $v_4$  with color 3, and, finally, Bob colors  $v_2$  with color 2, and  $\chi_g^b(H) = 4$ . And if Alice colors a leaf adjacent to  $v_4, v_5$  or  $v_6$ , then Bob colors the other leaf adjacent to the same vertex with a different color, forcing Alice to color in the spine, and the result follows by previous cases.

□

Next corollary follows directly by Theorems 17 and 19.

**Corollary 20** *Let  $H$  be a caterpillar  $\text{cat}(k_1, \dots, k_s)$  without vertex of degree 2,  $k_1 = k_s = 0$ . We have that  $\chi_g^a(H) = 3$  and  $\chi_g^b(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has exactly three vertices of degree at least 4 not all consecutive or  $H$  has a caterpillar  $\text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  as an induced subcaterpillar.*

Finally we are able to characterize forests with game chromatic number 4 using Theorems 17 and 19.

**Corollary 21** *Let  $F$  be a forest composed by caterpillars without vertex of degree 2. We have that  $\chi_g^a(F) = 4$  if, and only if, one of these statements occurs:*

- (i)  $F$  has a component  $H$  with at least four vertices of degree at least 4;
- (ii)  $F$  has two components  $H'$  and  $H''$  that have exactly three vertices of degree at least 4 not all consecutive or caterpillar  $\text{cat}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$  as an induced subcaterpillar.

*Proof* First, if (i) happens, we have that  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$  (Theorem 17 and 19), and then, independent of who starts playing in  $H$ ,  $\chi_g^a(F) = 4$ . If (ii) happens, by Corollary 20, we have that  $\chi_g^a(H') = \chi_g^a(H'') = 3$  and  $\chi_g^b(H') = \chi_g^b(H'') = 4$ , and then  $\chi_g^a(F) = 4$ , because Bob starts playing in  $H'$  or  $H''$ .

Conversely, if (i) and (ii) do not happen, by Theorems 17 and 19, every component  $H$  of  $F$  has  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$ , and then  $\chi_g^a(F) \leq 3$ .  $\square$

#### 2.4 Caterpillar without vertex of degree 3

In this section, we construct the Family Q of caterpillars without vertices of degree 3 which has game chromatic number 4. First, we study  $\chi_g^a$  and  $\chi_g^b$  for partially colored paths and then we define five infinite subclasses of caterpillars. We show to each one of these subclasses that its game chromatic number is four. We conclude with Theorem 32 showing that these results are also valid for a caterpillar that contains some caterpillar of Family Q as an induced subgraph.

**Lemma 22** *If  $P_n$  is a path with  $n$  vertices, then  $\chi_g^a(P_n, Z), \chi_g^b(P_n, Z) \leq 3$ , where  $Z \subseteq \{v_1, v_n\}$ .*

*Proof* (by induction in  $n$ ) If  $n = 1$  or  $n = 2$ , then  $\chi_g^a(P_n, Z) = \chi_g^b(P_n, Z) = n$ . Assume that  $\chi_g^a(P_n, Z) = \chi_g^b(P_n, Z) \leq 3$ , for  $n \leq z$ . Now, we analyze the path  $P_n$  with  $n = z + 1$ .

Now, for a path  $P_n$  with  $n = z + 1$ , with  $Z \subseteq \{v_1, v_n\}$ , Alice or Bob starts and the result follows by induction hypothesis.  $\square$

**Lemma 23** *If  $H$  is a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$  without vertex of degree 3 and  $H$  has no consecutive vertices of degree at least 4, then  $\chi_g^a(H), \chi_g^b(H) \leq 3$ .*

*Proof* First, Alice colors a spine vertex of degree at least 4.

Bob colors a vertex  $u \in V(H)$ . If there is an uncolored vertex of degree at least 4, then Alice colors the closest vertex of degree at least 4 to the vertex  $u$ . This process continues until there is no uncolored vertex of degree at least 4. So, in this moment there are just uncolored vertices of degree at most 2. To color each leaf it is necessary just a different color of its adjacent vertex in the spine, so, three colors are sufficient. By Lemma 22, to color the induced partially colored subpaths, three colors are sufficient too. □

In order to characterize the caterpillars without vertex of degree 3 and  $\chi_g(H) = 4$ , by Lemma 23, it remains to consider caterpillars that have an induced  $H_4 = cat(0, 2, 2, 0)$  (as in Theorem 1), that has  $h_1, h_2, h_3$  and  $h_4$  as spine vertices.

**Lemma 24** *Let  $H_4$  be the caterpillar  $cat(0, 2, 2, 0)$ . We have that  $\chi_g^a(H_4, Z) = 3$  and  $\chi_g^b(H_4, Z) = 4$ , with  $Z = \{h_1\}$  (see Figure 5(d)).*

*Proof* Assume that  $c(h_1) = 1$ . Alice colors  $h_3$  with color 1, and  $\chi_g^a(H_4, Z) = 3$ . When Bob starts, he colors  $h_4$  with color 1, and by Lemma 1,  $\chi_g^b(H_4, Z) = 4$ . □

So, when the caterpillar  $H$  has as an induced subgraph  $H_4$ , Alice avoid to color vertices  $h_1$  and  $h_4$ .

Dunn et al. [3] proved that caterpillar  $H_d$  (see Figure 8) is the smallest tree  $T$  such that  $\chi_g(T) = 4$ . We study  $\chi_g^b(H_d)$  and we establish a relation between having  $H_d$  as an induced subcaterpillar and the game chromatic number of a caterpillar.



**Fig. 8** The smallest tree  $H_d$  with  $\chi_g(H_d) = 4$ .

**Lemma 25** *If a caterpillar  $H$  has an induced subcaterpillar  $H_d$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* We know that  $\chi_g^a(H_d) = 4$  by Theorem 18 of [3]. Let us prove that  $\chi_g^b(H_d) = 4$ . Bob colors  $v_1 \in V(H_d)$  with color 1. To prevent the hypothesis of Lemma 24, Alice can color a spine vertex or a leg leaf. If she colors  $v_2$  with color 2 (or  $v_3$  with color 1), then Bob colors  $v_5$  with color 2 (or  $v_6$  with color 1, resp.) and, by Lemma 1.4,  $\chi_g^a(H) \geq 4$ . If Alice colors a leg leaf adjacent to  $v_2$  (or  $v_3$ ), then Bob colors the other leg leaf adjacent to  $v_2$  (or  $v_3$ , resp.) with a different color, forcing Alice to color  $v_2$  ( $v_3$ ), and by Lemma 24,  $\chi_g^b(H) = 4$ .



Thus,  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ , by Theorem 4.  $\square$

Let  $H_{33}$  be the caterpillar  $cat(0, 2, 2, 2, 0, 2, 2, 2, 0)$ , as in Figure 9, with spine vertices  $v_1, \dots, v_9$ .



**Fig. 9** The caterpillar  $H_{33}$ .

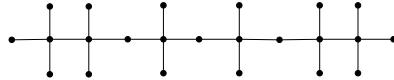
**Lemma 26** *If a caterpillar  $H$  has an induced subcaterpillar  $H_{33}$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* First, we prove that  $\chi_g^a(H_{33}) = 4$ . To prevent the hypothesis of Lemma 24, Alice does not color  $v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_8$  and  $v_9$ . If Alice colors  $v_3$  ( $v_7$  is a symmetric case), then Bob colors  $v_5$  with a different color, forcing Alice to color  $v_4$ , and, by Lemma 24,  $\chi_g^a(H_{33}) = 4$ . If Alice colors a leg leaf adjacent to  $v_i$ , then Bob colors the other leg leaf adjacent to  $v_i$  with a different color, forcing Alice to color  $v_i$ .

If Bob is the first to play, he colors  $v_5$ , and, by Lemma 24,  $\chi_g^b(H_{33}) = 4$ .

Thus,  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ , by Theorem 4.  $\square$

Let  $H_{[\alpha]}$  be the caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+5})$ , such that  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+5} = 0$  and  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4} = 2$ , for  $\alpha \geq 1$ . See an example of  $H_{[3]}$  in Figure 10. In other words,  $H_{[\alpha]}$  has two edge disjoint  $H_4$  as induced subcaterpillars, and between them there exists an alternating sequence of spine vertices of degree 2 and 4, with  $\alpha$  vertices of degree 2. Consider  $v_1, \dots, v_{2\alpha+5}$  the spine vertices, and observe that  $|V(H_{[\alpha]})| = 4\alpha + 11$ .



**Fig. 10** The caterpillar  $H_{[3]}$  with 11 vertices in the spine.

**Lemma 27** *If a caterpillar  $H$  has an induced caterpillar  $H_{[\alpha]}$ , for  $\alpha \geq 1$ , then  $\chi_g^b(H) = 4$ . Moreover, if  $H$  has two edge disjoint induced subcaterpillars  $H_{[\alpha]}$  and  $H_{[\beta]}$ , for  $\alpha, \beta \geq 1$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

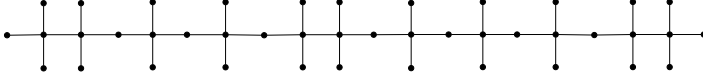
*Proof* First, we prove that  $\chi_g^b(H_{[\alpha]}) = 4$ . Bob colors  $v_4$  and, to prevent the hypothesis of Lemma 1.4, Alice colors  $v_2$  or  $v_3$ . Now, Bob colors  $v_6$  with a

different color of  $v_4$ , forcing Alice to color  $v_5$ . Bob colors  $v_8$  with a different color of  $v_6$ , forcing Alice to color  $v_7$ , and he uses this strategy until he colors  $v_{2\alpha+2}$  with a different color of  $v_{2\alpha}$ , forcing Alice to color  $v_{2\alpha+1}$ . So, Bob colors  $v_{2\alpha+5}$  with the same color of  $v_{2\alpha+3}$  and, by Lemma 24,  $\chi_g^b(H_{[\alpha]}) = 4$ . Thus, if  $H$  has an induced caterpillar  $H_{[\alpha]}$ , then  $\chi_g^b(H) = 4$ .

If  $H$  has two edge disjoint induced subcaterpillars  $H_{[\alpha]}$  and  $H_{[\beta]}$ , for  $\alpha, \beta \geq 1$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ , by Theorem 5.  $\square$

We denote by  $H_{[\alpha]} \cup H_{[\beta]}$  the caterpillar that has two edge disjoint induced subcaterpillars  $H_{[\alpha]}$  and  $H_{[\beta]}$ , for  $\alpha, \beta \geq 1$ .

Let  $H_{[\alpha][\beta]}$  be the caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+2\beta+6})$ , such that  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+5}, k_{2\alpha+7}, k_{2\alpha+9}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+1}, k_{2\alpha+2\beta+3}, k_{2\alpha+2\beta+6} = 0$  and  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4}, k_{2\alpha+6}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+4}, k_{2\alpha+2\beta+5} = 2$ . See an example of  $H_{[3][4]}$  in Figure 11. In other words,  $H_{[\alpha][\beta]}$  has exactly three edge disjoint  $H_4$  as induced subcaterpillars, and between them there exists an alternating sequence of spine vertices of degree 2 and 4, with  $\alpha$  and  $\beta$  vertices of degree 2, respectively.



**Fig. 11** The caterpillar  $H_{[3][4]}$ .

**Lemma 28** *If the caterpillar  $H$  has an induced subcaterpillar  $H_{[\alpha][\beta]}$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* Similarly to the proof of Lemma 27,  $\chi_g^b(H_{[\alpha]}) = \chi_g^b(H_{[\beta]}) = 4$ . So, if Bob starts, then he colors in  $V(H_{[\alpha]})$  (or  $V(H_{[\beta]})$ ) and  $\chi_g^b(H) = 4$ .

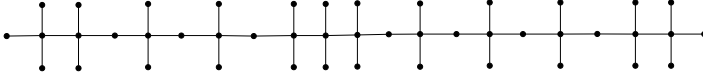
Now, we prove that  $\chi_g^a(H_{[\alpha][\beta]}) = 4$ . If Alice colors a vertex of the induced subcaterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+1})$ , then Bob colors in the induced subcaterpillar  $cat(k_{2\alpha+2}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+6}) = H_{[\beta]}$ . If Alice colors a vertex of the induced subcaterpillar  $cat(k_{2\alpha+6}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+6})$ , then Bob colors in the induced subcaterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+5}) = H_{[\alpha]}$ . We note that she can not color  $v_{2\alpha+2}$  and  $v_{2\alpha+5}$  to prevent the hypothesis of Lemma 24.

If she colors  $v_{2\alpha+3}$  ( $v_{2\alpha+3}$  is analogous), then Bob colors  $v_{2\alpha+5}, v_{2\alpha+7}, \dots, v_{2\alpha+2\beta+3}$  forcing her to color  $v_{2\alpha+4}, v_{2\alpha+6}, \dots, v_{2\alpha+2\beta+2}$ , respectively, and, by Lemma 24,  $\chi_g^a(H_{[\alpha][\beta]}) = 4$ .

If she colors a leg leaf adjacent to  $v_i$  of  $V(H_{[\alpha][\beta]})$ , then Bob colors other leg leaf adjacent to  $v_i$  with a different color, forcing Alice to color  $v_i$  and the result follows as in the previous cases analyzed.

Since  $\chi_g^a(H_{[\alpha][\beta]}) = \chi_g^b(H_{[\alpha][\beta]}) = 4$ , we have that  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ , by Theorem 4.  $\square$

Let  $H_{[\alpha]3[\beta]}$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_{2\alpha+2\beta+7})$ , such that  $k_1, k_4, k_6, k_8, \dots, k_{2\alpha+2}, k_{2\alpha+6}, k_{2\alpha+8}, k_{2\alpha+10}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+2}, k_{2\alpha+2\beta+4}, k_{2\alpha+2\beta+7} = 0$  and  $k_2, k_3, k_5, k_7, k_9, \dots, k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+3}, k_{2\alpha+4}, k_{2\alpha+5}, k_{2\alpha+7}, \dots, k_{2\alpha+2\beta+5}, k_{2\alpha+2\beta+6} = 2$ . See an example of  $H_{[3]3[4]}$  in Figure 11. In other words,  $H_{[\alpha]3[\beta]}$  has two pairs of edge disjoint  $H_4$  as induced subcaterpillars, three consecutive vertices of degree 4, and between them there exists an alternating sequence of spine vertices of degree 2 and 4, with  $\alpha$  and  $\beta$  vertices of degree 2, respectively.



**Fig. 12** The caterpillar  $H_{[3]3[4]}$ .

**Lemma 29** *If a caterpillar  $H$  has an induced subcaterpillar  $H_{[l]3[r]}$ , then  $\chi_g^a(H) = \chi_g^b(H) = 4$ .*

*Proof* Similar to the proof of Lemma 28.  $\square$

**Lemma 30** *If  $H$  is a caterpillar without vertex of degree 3,  $\chi_g^a(H) = 3$ ,  $H$  has no induced subcaterpillar with game chromatic number 4, and  $H$  is minimal with respect to  $\chi_g^b(H) = 4$ , then  $H$  does not have consecutive vertices of degree 2.*

*Proof* Suppose that there are at least two consecutive vertices of degree 2 in  $V(H)$ . Let  $H = cat(k_1, \dots, k_p, \dots, k_q, \dots, k_s)$  such that  $k_i = 0$ ,  $p \leq i \leq q$  and  $p \neq q$ . Let  $H' = cat(k_1, \dots, k_p)$  and  $H'' = cat(k_q, \dots, k_s)$  be two induced subcaterpillars of  $H$ . Since  $H$  is minimal with respect to  $\chi_g^b(H) = 4$ , we have that  $\chi_g^b(H'), \chi_g^b(H'') \leq 3$ ; and since there are no induced subcaterpillar with game chromatic number 4, we have that  $\chi_g^a(H'), \chi_g^b(H'') \leq 3$ . By Lemma 14,  $\chi_g^b(H) = 3$ , which is a contradiction.  $\square$

**Lemma 31**  *$H$  is a caterpillar without vertex of degree 3,  $\chi_g^a(H) = 3$ ,  $H$  has no induced subcaterpillar with game chromatic number 4, and  $H$  is minimal with respect to  $\chi_g^b(H) = 4$  if, and only if,  $H = H_{[\alpha]}$ , for  $l \geq 1$ .*

*Proof* By Lemma 23,  $H$  need at least two consecutive vertices of degree at least 4 to obtain  $\chi_g(H) = 4$ . By Lemma 25, we know that  $\chi_g^b(H_d) = 4$ , but  $\chi_g^a(H_d) = 4$  by Theorem 18 of [3]. So, we search caterpillars with two or three consecutive vertices of degree at least 4.

Assume that  $H$  has two consecutive vertices of degree at least 4. Let us construct this caterpillar:  $d(v_1) = 0$ ,  $d(v_2), d(v_3) \geq 4$  and, necessarily,  $d(v_4) =$

2. By Lemma 30,  $d(v_5) \geq 4$ . If  $d(v_6) \geq 4$ , then we have a minimal caterpillar with respect to  $\chi_g^b(H) = 4$  and  $\chi_g^a(H) = 3$ , that is  $H_{[1]} = \text{cat}(0, 2, 2, 0, 2, 2, 0)$ . If  $d(v_6) = 2$ , then we analyze  $v_7$ . By Lemma 30,  $d(v_7) \geq 4$ . We can construct a sequence of  $d_{4+2j} = 2$  and  $d_{5+2j} \geq 4$ , for  $i \geq 1$  and it is not sufficient to get  $\chi_g^b(H) = 4$ . We finish this sequence with two consecutive vertices of degree at least 4, getting exactly  $H_{[\alpha]}$ .

Assume that  $H$  has three consecutive vertices of degree at least 4. So, we have that  $d(v_1) = 0$ ,  $d(v_2), d(v_3), d(v_4) \geq 4$  and  $d(v_5) = 2$ . By Lemma 30,  $d(v_6) \geq 4$ . If  $d(v_7) \geq 4$ , then  $H$  has an induced subcaterpillar  $H_{[1]}$  that has  $\chi_g^b(H_{[1]}) = 4$ . So,  $d(v_7) = 2$ . By Lemma 30,  $d(v_8) \geq 4$ , and we can construct a sequence of  $d_{5+2j} = 2$  and  $d_{6+2j} \geq 4$ , for  $i \geq 1$  and it is not sufficient to get  $\chi_g^b(H) = 4$ . We finish this sequence with two adjacent vertices of degree at least 4, getting a caterpillar  $H$  that has  $H_{[\alpha]}$  as an induced subcaterpillar. So,  $H$  is not minimal with respect to  $\chi_g^b(H) = 4$ .

Conversely, we have that  $H_{[\alpha]}$  does not have vertex of degree 3. If Alice starts, then she colors  $v_3$  and  $\chi_g^a(H_{[1]}) = 3$ . If Bob starts, then he colors  $v_4$  and  $\chi_g^b(H_{[\alpha]}) = 4$ .  $\square$

Let *family*  $Q$  be the set of caterpillars  $H_d, H_{33}, H_{[\alpha]} \cup H_{[\beta]}, H_{[\alpha][\beta]}$  and  $H_{[\alpha]3[\beta]}$ .

**Theorem 32** *A caterpillar  $H$  without vertex of degree 3 has  $\chi_g(H) = 4$  if, and only if,  $H$  has a caterpillar of family  $Q$  as an induced subcaterpillar.*

*Proof* First, if caterpillar  $H$  without vertex of degree 3 has  $\chi_g(H) = 4$ , then  $H$  has at least four vertices of degree at least 4, by Theorem 13. Moreover,  $H$  does not have consecutive vertices of degree 2 or there exists two minimal induced subcaterpillars with respect to game chromatic number 4 when Bob starts the game, by Theorem 15.

Let us analyze  $H$  without consecutive vertices of degree 2. According to Lemma 31, since  $H$  has no vertex of degree 3, the unique caterpillar that has game chromatic number 4 when Bob starts the game is  $H_{[\alpha]}$ . So, the caterpillar that has no vertex of degree 3 and two induced subcaterpillars with game chromatic number 4 when Bob starts the game is  $H_{[\alpha]} \cup H_{[\beta]}$ , for  $\alpha, \beta \geq 1$ .

Analyzing the case in which  $H$  does not have consecutive vertices of degree 2, we have the following. If  $H$  has four consecutive vertices of degree at least 4, then we have  $H = H_d$ , that is minimal with respect to  $\chi_g(H_d) = 4$ . By Lemma 23,  $H$  should have consecutive vertices of degree at least 4 to satisfy  $\chi_g(H) = 4$ . So, we have to study the case when  $H$  has two or three consecutive vertices of degree at least 4. We assume that  $d(v_1) = 0$ .

Assume that  $H$  has two consecutive vertices of degree at least 4. So, we have two vertices of degree at least 4 followed by a vertex of degree 2 (because  $H$  has no vertex of degree 3), that is followed by a vertex of degree at least 4 (because  $H$  has no consecutive vertices of degree 2). We can have an arbitrary sequence of vertices of degree 2 and at least 4, but this caterpillar has game chromatic number 3, because Alice colors  $v_3$ . So, this sequence need to finish for obtain

$\chi_g(H) = 4$ , and we do this avoiding other pair of consecutive vertices of degree at least 4. At this point, we constructed  $H_{[\alpha]}$ , for  $\alpha \geq 1$ , but  $\chi_g(H_{[\alpha]}) = 3$ , which made us continue with a sequence of vertices of degree 2 and at least 4, getting a game chromatic number 3 yet, by Alice coloring vertex  $v_5$ . So, we finish this sequence, and we do this avoiding another pair of consecutive vertices of degree at least 4, constructing  $H_{[\alpha][\beta]}$ , that is minimal with respect to  $\chi_g(H_{[\alpha][\beta]}) = 4$ .

Now, assume that  $H$  has three consecutive vertices of degree at least 4. So, we have three vertices of degree at least 4 followed by a vertex of degree 2 (because  $H$  has no vertex of degree 3), that is followed by a vertex of degree at least 4 (because  $H$  has no consecutive vertices of degree 2). We can have an arbitrary sequence of vertices of degree 2 and at least 4, but this caterpillar has game chromatic number 3, because Alice colors  $v_3$ . So, we finish this sequence for obtain  $\chi_g(H) = 4$ , and we do this avoiding other three consecutive vertices of degree at least 4 (to distinguish from the last case). At this point, the game chromatic number is 3, which made us continue with a sequence of vertices of degree 2 and at least 4, getting a game chromatic number 3 yet, by Alice coloring vertex  $v_6$ . So, we finish this sequence, and we do this avoiding another pair of consecutive vertices of degree at least 4. This caterpillar has  $H_{[\alpha]3[\beta]}$  as an induced subcaterpillar, which is minimal with respect to  $\chi_g(H_{[t]3[r]}) = 4$ .

Assuming that  $H$  has at most three consecutive vertices of degree at least 4 is also possible that we have these three vertices of degree at least 4 followed by a vertex of degree 2 (because  $H$  has no vertex of degree 3), that is followed by three vertices of degree at least 4. So, we construct  $H_{33}$ , that is minimal with respect to  $\chi_g(H_{33}) = 4$ .

Conversely, the result follows by Lemmas 25, 26, 27 and 28. □

### 3 Forest

First, we observe that  $\chi_g^b(F) \leq 4$ , for  $F$  forest, using the same idea of Faigle's algorithm to prove that  $\chi_g^a(F) \leq 4$ .

**Theorem 33**  $\chi_g^b(T) \leq 4$ , for a tree  $T$ .

*Proof* Initially, Bob chooses an arbitrary vertex  $r \in V(T)$ , that we assume as the root of  $T$ . Alice colors with an available color a neighbor  $s$  of  $r$  (not leaf).

Let  $T_0 = \{r, s\}$  at this point of the game. During the whole game, Alice maintains a subtree  $T_0$  of  $T$  that contains all the vertices colored so far.

Suppose now that Bob has colored vertex  $v$ . Let  $P$  be the (unique) directed path from  $r$  to  $v$  in  $T$  and let  $u$  be the last vertex  $P$  has in common with  $T_0$ . Thus, Alice does the following:

1. Update  $T_0 = T_0 \cup P$ .
2. If  $u$  is uncolored, then assign a feasible color to  $u$ .

3. If  $u$  is colored and  $T_0$  contains an uncolored vertex  $w$ , then assign a feasible color to  $w$ .
4. If all vertices in  $T_0$  are colored, then color any vertex  $w$  adjacent to  $T_0$  and update  $T_0$ .

□

**Theorem 34** *Let  $T$  be a tree. We have that  $(\chi_g^a(T), \chi_g^b(T)) \subseteq \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ .*

*Proof* If  $\chi_g^a(T) = 1$  or  $\chi_g^b(T) = 1$ , then  $T = P_1$  and  $\chi_g^a(T) = \chi_g^b(T) = 1$ .

If  $\chi_g^a(T) = 2$ , then  $T$  is a star, and  $\chi_g^b(T) = 2$  too. If  $\chi_g^b(T) = 2$ , then  $T$  is a  $P_4$  or a star, and  $\chi_g^a(T) = 3$  or  $2$ , respectively.

If  $\chi_g^a(T) = 3$ , then  $\chi_g^b(T) > 1$ . If  $\chi_g^a(T) = 3$  and  $\chi_g^b(T) = 2$ , then  $T = P_4$ . If  $T \neq P_4$ , then  $\chi_g^a(T) = 3$  implies  $\chi_g^b(T) \in \{3, 4\}$ .

If  $\chi_g^a(T) = 4$ , then  $\chi_g^b(T) > 2$ . So, the possible values to  $\chi_g^b(T)$  is  $3$  and  $4$ , but we just know example when  $\chi_g^a(T) = \chi_g^b(T) = 4$ .

□

Finally, we analyze the game chromatic number of a forest.

**Theorem 35** *Let  $F$  be a forest composed by  $r$  trees  $T_1, \dots, T_r$ . Assume that  $\chi_g^a(T_1) \leq \chi_g^a(T_2) \leq \dots \leq \chi_g^a(T_r)$ , and, if there exist two trees with the same game chromatic number, then  $T_i$  and  $T_j$  are ordered in a way that  $\chi_g^b(T_i) \leq \chi_g^b(T_j)$ , for  $i < j$ . We have that:*

1. If  $\chi_g^b(T_r) > \chi_g^a(T_r), \chi_g^b(T_{r-1})$ , then  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r)$ ;
2. If  $\chi_g^b(T_r) = \chi_g^b(T_{r-1}) > \chi_g^a(T_r)$ , then  $\chi_g(F) = \chi_g^b(T_r)$ ;
3. If  $\chi_g^a(T_r) = \chi_g^b(T_r)$ , then  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r) = \chi_g^b(T_r)$ ;
4. If  $\chi_g^b(T_r) < \chi_g^a(T_r)$  and  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  is even, then  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r)$ ;
5. If  $\chi_g^b(T_r) < \chi_g^a(T_r)$  and  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  is odd, then  $\chi_g(F) = \max \{ \chi_g^a(F \setminus T_r), \chi_g^b(T_r) \}$ .

*Proof*

1. Alice plays in  $T_r$  to avoid that Bob starts in  $T_r$  in his first turn. So,  $\chi_g(F) = \max \{ \chi_g^a(T_r), \chi_g^b(T_{r-1}) \} = \chi_g^a(T_r)$ .
2. Independent of where Alice plays, Bob can start playing in  $T_{r-1}$  or  $T_r$ . So,  $\chi_g(F) = \chi_g^b(T_r)$ .
3. Since  $\chi_g^a(T_r)$  and  $\chi_g^b(T_r)$  are maximum values of game chromatic numbers in  $F$ , independent of who starts in  $T_r$ ,  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r) = \chi_g^b(T_r)$ .
4. Since  $\chi_g^a(T_r)$  is the maximum value of game chromatic numbers in  $F$ , Alice tries not to play in  $T_r$ , but as  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  is even, Bob can force she to start in  $T_r$ . So,  $\chi_g(F) = \chi_g^a(T_r)$ .
5. Since  $\chi_g^a(T_r)$  is the maximum value of game chromatic numbers in  $F$ , Alice tries not to play in  $T_r$ , and as  $\sum_{i=1}^{r-1} |V(T_i)|$  is odd, Alice can force Bob to start in  $T_r$ . So,  $\chi_g(F) = \max \{ \chi_g^a(F \setminus T_r), \chi_g^b(T_r) \}$ .

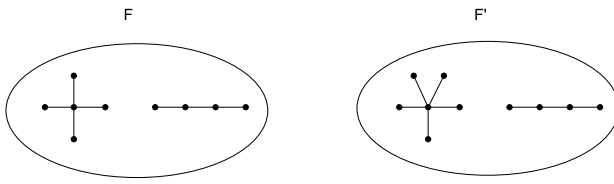
□

#### 4 A reduction

Similar to Dunn et al. [3], we never distinguish between vertices of degree exactly 4 and vertices of degree at least 4. We propose a conjecture to address this point in caterpillars.

**Conjecture 1:** Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , with  $\chi_g(H) = 4$ , and  $H'$  be a caterpillar  $cat(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , such that  $\gamma_i = k_i$ , if  $k_i \leq 2$ , and  $\gamma_i = 2$ , if  $k_i > 2$ . We have that  $\chi_g(H') = 4$ .

We know that Conjecture 1 is false for forests. In Figure 13, we present an example of forests  $F$  and  $F'$  such that  $\chi_g(F) = 2$  and  $\chi_g(F') = 3$ .



**Fig. 13** Forests  $F$  and  $F'$  with  $\chi_g(F) = 2$  and  $\chi_g(F') = 3$ , respectively.

Although Conjecture 1 is false for forests, we prove that it is true for a caterpillar  $H$  that has  $\chi_g^a(H) = 4$ . We use Faigle's algorithm in our proof.

**Faigle's algorithm to color a tree with at most 4 colors:**

Initially, Alice chooses an arbitrary vertex  $r \in V(T)$ , that we assume as the root of  $T$ . Let  $T_0 = \{r\}$  at this point of the game.

During the whole game, Alice maintains a subtree  $T_0$  of  $T$  that contains all the vertices colored so far.

Bob colors a vertex  $v$ . Let  $P$  be the (unique) directed path from  $r$  to  $v$  in  $T$  and let  $u$  be the last vertex  $P$  has in common with  $T_0$ . Thus, Alice do the following:

1. Update  $T_0 = T_0 \cup P$ .
2. If  $u$  is uncolored, then assign a feasible color to  $u$ .
3. If  $u$  is colored and  $T_0$  contains an uncolored vertex  $w$ , then assign a feasible color to  $w$ .
4. If all vertices in  $T_0$  are colored, then color any vertex  $w$  adjacent to  $T_0$  and update  $T_0$ .

**Theorem 36** Let  $H$  be a caterpillar  $cat(k_1, \dots, k_s)$ , with  $\chi_g(H) = 4$ , and  $H'$  be a caterpillar  $cat(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , such that  $\gamma_i = k_i$ , if  $k_i \leq 2$ , and  $\gamma_i = 2$ , if  $k_i > 2$ . We have that  $\chi_g(H') = 4$ .

*Proof* Since  $\chi_g^a(H) = 4$ , Alice can use Faigle’s algorithm.

Let  $s$  be the vertex that is impossible to be proper colored with three colors, i.e,  $s$  is the vertex that needs the fourth color. So, during the game  $s$  has three adjacent vertices colored with different colors.

To color the maximum of leaves adjacent to  $s$ , the first vertex adjacent to  $s$  colored is the father of  $s$  (it is not important who has colored it). If Bob colors a son of  $s$  (that can be a leaf) with a different color, then if possible, Alice colors a vertex of  $T_0$ . Bob colors another son of  $s$  (that can be a leaf) with a different color and, by the algorithm, Alice colors  $s$  with the fourth color. So, having four colors, after Bob colors the second son of  $s$ , Alice necessarily colors  $s$ . So, when  $\chi_g^a(H) = 4$  we need just two adjacent leaves to  $s$ , and if  $s$  has more adjacent leaves, then it does not change the result that  $\chi_g^a(H) = 4$ .  $\square$

### 5 Conclusion

We have studied the following cases with respect to the game chromatic number of a caterpillar  $H$  (see Table 1):

**Table 1** Summary of Results

$\Delta(H)$	$\chi_g(H) = 1$	$\chi_g(H) = 2$	$\chi_g(H) = 3$	$\chi_g(H) = 4$
0	$S_1$	-	-	-
1	-	$P_2$	-	-
2	-	$P_3$	$P_n, n \geq 4$	-
3	-	star	not a star	-
4	-	star not a star and not in Figure 14	see Figure 14	see Figure 14

The cases when the caterpillar  $H$  has  $\Delta(H) \geq 4$  and  $\chi_g(H)$  is 3 or 4 are the difficult cases to analyze. In order to facilitate viewing the results, in diagram of Figure 14 we show the caterpillars  $H$  with  $\Delta(H) \geq 4$  and that are minimal with respect to  $\chi_g(H) = 4$  (so, all the caterpillars presented in Figure 14 have at least four vertices of degree at least 4). Although we are able to characterize all such minimal caterpillars, by imposing the additional conditions of without vertex of degree 2 or 3, so far we have only examples of such minimal caterpillars where vertices of degree 1, 2, 3 and at least 4 are present.

We have determined the game chromatic number of an arbitrary forest, once we know the two parameters  $\chi_g^a(T)$  and  $\chi_g^b(T)$  for each connected component.

We can now answer, for caterpillars, Question 32 of Dunn et al. [3] that says: *does there exist a polynomial time algorithm to determine if a forest with maximum degree 3 has game chromatic number 4?* For a forest composed by



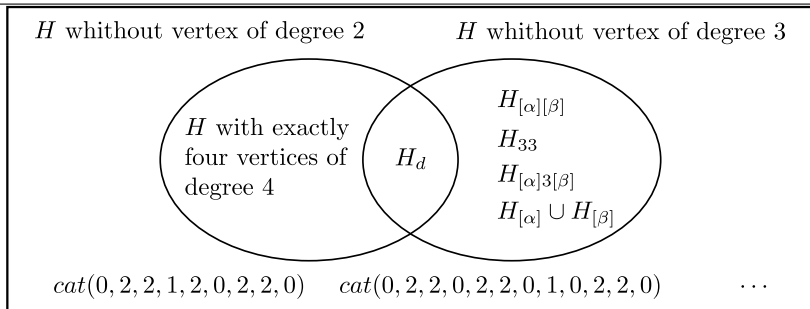


Fig. 14 Caterpillars  $H$  with  $\Delta(H) \geq 4$  that are minimal with respect to  $\chi_g(H) = 4$ .

caterpillars, there is no forest with maximum degree 3 and game chromatic number 4, by Theorem 2. So, we answer “no” in constant time ( $O(1)$ ).

A fact that could help us to study the game chromatic number in any forest is:

**Conjecture 2:**  $\chi_g^a(T) \leq \chi_g^b(T)$ , for a tree  $T$ , except for  $T = P_4$ .

We know that Conjecture 2 is false for an arbitrary graph  $G$ . In Figure 15, we present an example of graph  $G$  that has  $\chi_g^a(G) = 5$  and  $\chi_g^b(G) = 3$ .

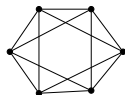


Fig. 15 Graph  $G$  with  $\chi_g^a(G) = 5$  and  $\chi_g^b(G) = 3$ .

References

1. H. Bodlaender., On the complexity of some coloring games, Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, vol. 484 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 30–40, 1991.
2. S. Charmaine., The Game Chromatic Number of Some Families of Cartesian Product Graphs, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 6 (2), pp. 315-327, 2009.
3. C. Dunn and V. Larsen and K. Lindke and T. Retter and D. Toci., The game chromatic number of trees and forests, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 2(17):31–48, 2015.
4. U. Faigle and W. Kern and H. Kierstead A. and W. Trotter., On the game chromatic number of some classes of graphs, Ars Combinatoria (35), pp. 143–150, 1993.
5. M. Gardner., Mathematical Games, Scientific American. Vol. 23, 1981.
6. D. Guan and X. Zhu, Game chromatic number of outerplanar graphs, Journal of Graph Theory (30), pp. 67–70, 1999.
7. H. A. Kierstead and A. V. Kostochka. *Efficient Graph Packing via Game Colouring*, Combinatorics, Probability and Computing (18), pp. 765–774, 2009.
8. A. Raspaud and W. Jiaojiao., Game chromatic number of toroidal grids, Information Processing Letters 109 (21-22), pp. 1183–1186, 2009.
9. X. Zhu., Game coloring of planar graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B, (75), pp. 245–258, 1999.
10. X. Zhu., The game coloring number of pseudo partial k-trees, Discrete Mathematics 215 (1-3), pp. 245–262, 2000.

## Apêndice C

Manuscrito “On Nordhaus-Gaddum  
type inequalities for the Game  
Chromatic and Game Coloring  
Numbers”

# On Nordhaus-Gaddum type inequalities for the Game Chromatic and Game Coloring numbers

Clément Charpentier

*Université Grenoble Alpes, France.*

Simone Dantas

*IME, Universidade Federal Fluminense, Brasil.*

Celina M. H. de Figueiredo

*COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.*

Ana Furtado

*CEFET-RJ/ COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.*

Sylvain Gravier

*CNRS, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France.*

---

## Abstract

A seminal result by Nordhaus and Gaddum states that  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$  for every graph  $G$  of order  $n$ , where  $\overline{G}$  is the complement of  $G$  and  $\chi$  is the chromatic number. We study similar inequalities for  $\chi_g(G)$  and  $col_g(G)$ , which denote, respectively, the game chromatic number and the game coloring number of  $G$ . Those graph invariants give the score for, respectively, the coloring and marking games on  $G$  when both players use their best strategies.

*Keywords:* Nordhaus-Gaddum type inequalities, coloring game, marking game.

---

<sup>☆</sup>Partially supported by CAPES/MATHAmSud 021/14, CNPq and FAPERJ. Email: [clement.charpentier@ujf-grenoble.fr](mailto:clement.charpentier@ujf-grenoble.fr), [sdantas@im.uff.br](mailto:sdantas@im.uff.br), [celina@cos.ufrj.br](mailto:celina@cos.ufrj.br), [alcf@cos.ufrj.br](mailto:alcf@cos.ufrj.br), [sylvain.gravier@ujf-grenoble.fr](mailto:sylvain.gravier@ujf-grenoble.fr)

## 1. Introduction

In the present paper, every graph is simple, finite, and undirected. For an integer  $k$ , a *proper  $k$ -coloring* of a graph  $G$  is a function that assigns a color to every vertex of  $G$  such that two adjacent vertices have distinct colors and the color set has size  $k$ . The *chromatic number* of  $G$ , denoted by  $\chi(G)$ , is the smallest  $k$  such that  $G$  has a proper  $k$ -coloring.

The *coloring game* is a two player non-cooperative game conceived by Brams, firstly published in 1981 by Gardner [6] as a *map-coloring game*, and rediscovered in 1991 by Bodlaender [3], who studied the game in the context of graphs. Given a set of  $k$  colors, Alice and Bob take turns properly coloring an uncolored vertex. The goal of Alice is to color the input graph with  $k$  colors, and Bob does his best to prevent it. Alice wins when the graph is completely colored with  $k$  colors; otherwise, Bob wins. The *game chromatic number*  $\chi_g(G)$  of  $G$  is the smallest number  $k$  of colors that ensures that Alice wins.

In order to study the game chromatic number, in 1999, Zhu [9] introduced the *marking game* as a “colorblind” version of the coloring game: the two players take turns selecting an unselected vertex of a graph  $G$  in a non-cooperative way. Let  $b(v)$  be the number of neighbors of  $v \in V(G)$  that were selected before  $v$ . Let  $s = 1 + \max\{b(v); v \in V(G)\}$  be the *score* of the game. Alice’s goal is to minimize  $s$ , while Bob tries to maximize  $s$ . The *game coloring number* of  $G$ , denoted by  $col_g(G)$ , is the smallest value of  $s$  which ensures that Alice wins. Observe that  $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq col_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ . The complete bipartite graph  $K_{3,3}$ , see Figure 1, is an example of a graph such that  $3 = \chi_g(K_{3,3}) < col_g(K_{3,3}) = 4$ . On the other hand, a star  $K_{1,p}$  is a complete bipartite graph such that  $\chi_g(K_{1,p}) = col_g(K_{1,p}) = 2$ , for  $p \geq 1$ .

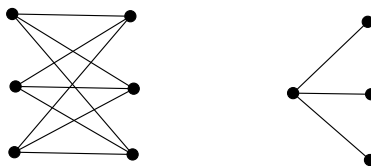


Figure 1: Graphs  $K_{3,3}$  and  $K_{1,3}$  have  $\chi_g(G) < col_g(G)$  and  $\chi_g(G) = col_g(G)$ , respectively.

These two graph invariants, game chromatic number and game coloring number, have been extensively studied over the past twenty years, mainly in terms of upper bounds for standard classes of graphs, see for example [5, 7, 10].

In 1956, Nordhaus and Gaddum [8] showed lower and upper bounds on the sum of the chromatic number of a graph and its complement, in terms of the order of the graph.

**Theorem 1.1.** [8] *If  $G$  is a graph of order  $n$ , then  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ . These bounds are best possible for infinitely many values of  $n$ .*

Since then, relations of a similar type have been proposed for many other graph invariants, as exposed in a recent survey by Aouiche and Hansen [2] that brings together three hundred and sixty articles. To the best of our knowledge, the only Nordhaus-Gaddum type inequality existing for invariants related to games on graphs is by Alon et al. [1] and concerns the game domination number.

In this paper, we present Nordhaus-Gaddum type relations for the game chromatic and game coloring numbers. In Section 2 we study the Coloring Game and we prove Theorem 1.2.

**Theorem 1.2.** *For any graph  $G$  of order  $n$ , we have that  $2\sqrt{n} \leq \chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ . Moreover, the bounds are best possible asymptotically:*

1. *for infinitely many values of  $n$ , there are graphs  $G$  of order  $n$  with  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = \lceil \frac{4n}{3} \rceil - 1$ ;*
2. *for infinitely many values of  $n$ , there are graphs  $G$  of order  $n$  with  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = 2\sqrt{2n} - 1$ .*

In Section 3 we study the Marking Game and we prove Theorem 1.3.

**Theorem 1.3.** *For any graph  $G$  of order  $n$ , we have that  $2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq col_g(G) + col_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{8n-2}{5} \rceil$ . The lower bound is best possible for infinitely many values of  $n$ . Moreover, for infinitely many values of  $n$ , there are graphs  $G$  of order  $n$  with  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil - 1$ .*

## 2. Coloring Game

In order to prove Theorem 1.2, note that the lower bound follows from Theorem 1.1 and the inequality  $\chi(G) \leq \chi_g(G)$ , and this lower bound is tight and we reach it with  $G = P_1$ . In this section, we prove the upper bound, which follows by Lemma 2.1. Moreover, in Lemmas 2.2 and 2.3 we present the two required infinite families.

**Lemma 2.1.** For any graph  $G$  of order  $n$ ,  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ .

*Proof.* We proceed by analyzing two cases, according to the parity of  $n$ .  
*Case 1)  $n$  is even.*

Let  $A(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in A(G)$  has  $d(v) < \frac{n}{2}$ .

Let  $B(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in B(G)$  has  $d(v) = \frac{n}{2}$ .

Let  $C(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in C(G)$  has  $d(v) > \frac{n}{2}$ , and  $a = |A(G)|$ ,  $b = |B(G)|$  and  $c = |C(G)|$ .

We define  $A(\overline{G})$ ,  $B(\overline{G})$  and  $C(\overline{G})$  analogously. So,  $|A(\overline{G})| = b + c$  and  $|B(\overline{G}) \cup C(\overline{G})| = a$ .

Let us assume that Alice first colors all vertices in  $B(G) \cup C(G)$ , and that  $\frac{n}{2}$  turns have been done. Thus,  $x \leq \frac{n}{2}$  colors have been used.

1.1) Assume  $b + c < \lceil \frac{n}{4} \rceil$ . So, all remaining uncolored  $\frac{n}{2}$  vertices belong to  $A(G)$ . Since these vertices  $v$  have  $d(v) < \frac{n}{2}$ , in the remaining  $\frac{n}{2}$  turns, we are able to complete the coloring of the whole graph using the  $x$  colors already used and at most  $\frac{n}{2} - x$  extra colors.

Hence,  $\chi_g(G) \leq \frac{n}{2}$ . As  $\chi_g(\overline{G}) \leq n$ , then  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \frac{3n}{2}$ .

1.2) Assume  $b + c \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ . So, there are at most  $b + c - \lceil \frac{n}{4} \rceil$  uncolored vertices in  $B(G) \cup C(G)$ . Moreover, all remaining vertices of  $A(G)$  can be colored using the  $x$  colors already used and at most  $\frac{n}{2} - x$  extra colors. So, although all uncolored vertices of  $B(G) \cup C(G)$  are colored with distinct colors, we have that  $\chi_g(G) \leq x + \frac{n}{2} - x + b + c - \lceil \frac{n}{4} \rceil = \frac{n}{2} + b + c - \lceil \frac{n}{4} \rceil$ .

Using exactly the same idea in  $\overline{G}$ , we have that  $\chi_g(\overline{G}) \leq \frac{n}{2} + a - \lceil \frac{n}{4} \rceil$ .

Thus,  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \frac{n}{2} + b + c - \lceil \frac{n}{4} \rceil + \frac{n}{2} + a - \lceil \frac{n}{4} \rceil = 2n - 2 \lceil \frac{n}{4} \rceil$ , because  $a + b + c = n$ .

Since  $2n - 2 \lceil \frac{n}{4} \rceil$  is maximum when  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  is minimum, i.e., when  $\lceil \frac{n}{4} \rceil = \frac{n}{4}$ , we have that  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \frac{3n}{2}$ .

*Case 2)  $n$  is odd.*

Let  $A(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in A(G)$  has  $d(v) < \frac{n-1}{2}$ .

Let  $B(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in B(G)$  has  $d(v) = \frac{n-1}{2}$ .

Let  $C(G) \subseteq V(G)$  such that each  $v \in C(G)$  has  $d(v) > \frac{n-1}{2}$ , and  $a = |A(G)|$ ,  $b = |B(G)|$  and  $c = |C(G)|$ .

We define  $A(\overline{G})$ ,  $B(\overline{G})$  and  $C(\overline{G})$  analogously. So,  $|A(\overline{G})| = c$ ,  $|B(\overline{G})| = b$  and  $|C(\overline{G})| = a$ .

Let us assume that Alice first colors all vertices in  $C(G)$ , and that  $\frac{n+1}{2}$  turns have been done. Thus,  $x \leq \frac{n+1}{2}$  colors have been used.

2.1) Assume  $c < \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ . So, all remaining uncolored  $\frac{n-1}{2}$  vertices belong to  $A(G) \cup B(G)$ . Since these vertices  $v$  have  $d(v) \leq \frac{n-1}{2}$ , in the remaining  $\frac{n-1}{2}$  turns, we are able to complete the coloring of the whole graph using the  $x$  colors already used and at most  $\frac{n+1}{2} - x$  extra colors.

Hence,  $\chi_g(G) \leq \frac{n+1}{2}$ . As  $\chi_g(\overline{G}) \leq n$ , then  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \frac{3n+1}{2} = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$ .

2.2) Assume  $c \geq \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ . So, there are at most  $c - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$  uncolored vertices in  $C(G)$ . Moreover, all remaining vertices of  $A(G) \cup B(G)$  can be colored using the  $x$  colors already used and at most  $\frac{n+1}{2} - x$  extra colors. So, although all uncolored vertices of  $C(G)$  are colored with distinct colors, we have that  $\chi_g(G) \leq x + \frac{n+1}{2} - x + c - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil = \frac{n+1}{2} + c - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ .

Using exactly the same idea in  $\overline{G}$ , we have that  $\chi_g(\overline{G}) \leq \frac{n+1}{2} + a - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ .

Thus,  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq \frac{n+1}{2} + c - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil + \frac{n+1}{2} + a - \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil \leq 2n+1 - 2 \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ , because  $a + c \leq n$ .

Since  $2n + 1 - 2 \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$  is maximum when  $\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$  is minimum, i.e., when  $\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil = \frac{n+1}{4}$ , we have that  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) \leq 2n + 1 - 2 \left( \frac{n+1}{4} \right) = \frac{3n+1}{2} = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$ .  $\square$

The upper bound presented in Lemma 2.1 is tight and it is attained by the following self-complementary graphs:  $P_4$ , for  $n$  even; and  $P_1$ , for  $n$  odd. We have that  $\chi_g(P_4) = 3$  because, regardless of where Alice colors at her first turn, Bob can always give a different color to a vertex at distance 2 of the vertex that Alice has colored, forcing the third color.

The graph join  $S_l \oplus K_p$  is the graph with vertex set  $V(S_l) \cup V(K_p)$  and all edges between  $V(S_l)$  and  $V(K_p)$ .

**Lemma 2.2.** *Let  $G_l$  be the graph join  $S_l \oplus K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ , with order  $n = l + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil \not\equiv 1 \pmod{3}$  and  $n \geq 5$ . We have that  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G_l}) = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil - 1$ .*

*Proof.* Alice colors in  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$  until all vertices are colored. On this graph, Bob's strategy consists in first coloring the vertices of the stable set  $S_l$ , using colors that are not represented in this set yet, whenever it is possible.

So, when Alice finishes to color the vertices of the clique  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ , she has used exactly  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$  colors, playing  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$  times. Bob has played in this moment  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1$  times using different colors in the stable set but, since the clique has been already colored, he can not force another color. Hence, they use exactly  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1$  colors to color  $S_l$ , and more  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$  colors to color  $K_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ .

Thus,  $\chi_g(G_l) = 2 \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1$ .

The graph  $\overline{G_l}$  is composed by a clique  $K_l$  and a stable set  $S_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}$ . So,  $\chi_g(\overline{G_l}) = \chi(\overline{G_l}) = l$ , consequently,  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G_l}) = 2 \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + l - 1$ .



Since  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + l = n$ , we have that  $n = \frac{3l}{2}$ , for  $l$  even, and  $n = \frac{3l+1}{2}$ , for  $l$  odd. Thus,  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G_l}) = \frac{4n}{3} - 1$ , for  $l = \frac{2n}{3}$  even, i.e.,  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ; and  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G_l}) = \frac{4n-2}{3}$ , for  $l = \frac{2n-1}{3}$  odd, i.e.,  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

Therefore,  $\chi_g(G_l) + \chi_g(\overline{G_l}) = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil - 1$ . □

Lemma 2.2 states that, for infinitely many  $n$ , there exists graphs  $G$  of order  $n$  with  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil - 1$ , that is part (1) of Theorem 1.2.

A *complete  $k$ -partite graph* is the graph join  $S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$  of  $k$  empty graphs  $S_1, S_2, \dots, S_k$ . On playing the coloring game on a complete  $k$ -partite graph, we call *empty* a stable set whose vertices are not colored.

**Lemma 2.3.** *Let  $G$  be a complete  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ -partite graph, such that  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  is an even integer and each  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  disjoint set of vertices has exactly  $\sqrt{2n}$  vertices. We have that  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = 2\sqrt{2n} - 1$ .*

*Proof.* Alice's strategy consists in coloring a vertex in an empty stable set until there is none. If Bob colors in an empty stable set too, then he helps Alice to minimize  $\chi_g(G)$ . So, Bob's strategy is to color with a different color in a stable set that has at least one vertex colored yet.

So, Alice needs to play  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  times to be sure that there is no more empty stable set. In this moment, Bob has already played  $\sqrt{\frac{n}{2}} - 1$  times using different colors.

At this point of the game, for every uncolored vertex  $u$ , there is a colored vertex  $v$  in the same stable set than  $u$ , and since  $u$  and  $v$  share the same neighborhood, the color of  $v$  is allowed for  $u$ . Thus, no more color will be needed for Alice to win.

Thus,  $\chi_g(G) = 2\sqrt{\frac{n}{2}} - 1 = \sqrt{2n} - 1$ .

The complement graph  $\overline{G}$  is a set of  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  cliques  $K_{\sqrt{2n}}$  that has no adjacent vertices between them. So,  $\chi_g(\overline{G}) = \chi(\overline{G}) = \sqrt{2n}$ .

Therefore,  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = \sqrt{2n} + \sqrt{2n} - 1 = 2\sqrt{2n} - 1$ .  $\square$

Lemma 2.3 allows to say that, for infinitely many  $n$ , there are graphs  $G$  of order  $n$  with  $\chi_g(G) + \chi_g(\overline{G}) = 2\sqrt{2n} - 1$ , which is part (2) of Theorem 1.2.

### 3. Marking Game

The proof of Theorem 1.3 follows directly by Lemmas 3.1, 3.2 and 3.3. Lemma 3.1 shows the lower bound and guarantees that this bound is the best possible for infinitely many values of  $n$ . Lemma 3.2 shows the upper bound, and in Lemma 3.3 we present the required infinite family.

**Lemma 3.1.** *Let  $G$  be a graph of order  $n$ .*

1. *If  $n$  is odd, then  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \geq n + 1$ ;*
2. *If  $n$  is even, then  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \geq n$ ;*
3. *These two bounds are best possible for infinitely many values of  $n$ .*

*Proof.* Let Alice and Bob play the marking game on a graph  $G$  with  $n$  vertices. We define  $\Theta$  and  $\overline{\Theta}$  as increasing sequences of the vertex degrees of  $G$  and  $\overline{G}$ , respectively. Observe that the vertices of  $\overline{\Theta}$  are in the reverse order in  $\Theta$ . Assume that Bob's strategy consists in selecting, in each turn, the unselected vertex with the smallest degree.

1. If  $n$  is odd, then let  $w$  be the vertex in the middle of the sequence  $\Theta$ , i.e.,  $w = v_{\frac{n+1}{2}}$ . The last selected vertex has degree at least  $d_G(w)$ , because Bob's strategy ensures that in  $n - 1$  turns the first  $(\frac{n-1}{2})$  vertices in  $\Theta$  have been selected. So, the last selected vertex has at least  $d_G(w)$  selected neighbors. Thus, we have  $col_g(G) \geq d_G(w) + 1$ . Since  $n$  is odd,  $w$  is also in the middle of  $\overline{\Theta}$ , i.e.,  $w = v_{\frac{n+1}{2}}$ . So,  $col_g(\overline{G}) \geq d_{\overline{G}}(w) + 1$  by similar arguments. Hence,  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \geq d_G(w) + d_{\overline{G}}(w) + 2 = n + 1$ .
2. If  $n$  is even, then let  $w$  be the  $(\frac{n}{2})$ -th vertex in  $\Theta$ . The last selected vertex has degree at least  $d_G(w)$ , similarly to the case when  $n$  is odd. So, we have  $col_g(G) \geq d_G(w) + 1$ . In  $\overline{G}$ , vertex  $w$  is the  $(\frac{n}{2} + 1)$ -th vertex in  $\overline{\Theta}$ . Bob's strategy ensures that in  $n - 2$  turns, the  $(\frac{n}{2} - 1)$  first vertices in  $\overline{\Theta}$  have been selected.

On the penultimate turn, if the degree of the selected vertex is at least  $d_{\overline{G}}(w)$ , then  $col_g(\overline{G}) \geq d_{\overline{G}}(w) - 1 + 1$ , because this vertex has at least all of its neighbors, except one of them, selected before it. Else, the degree of the selected vertex is smaller than  $d_{\overline{G}}(w)$ , i.e., the penultimate selected vertex is  $v_{\frac{n}{2}}$ . Thus, the last selected vertex has degree at least  $d_{\overline{G}}(w)$ , and  $col_g(\overline{G}) \geq d_{\overline{G}}(w) + 1$ .

Hence,  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \geq d_G(w) + d_{\overline{G}}(w) + 1 = n$ .

3. Let  $K_n$  be the complete graph with  $n$  vertices. We have that  $col_g(K_n) + col_g(\overline{K_n}) = n + 1$ , which is the bound needed for odd values of  $n$ . For each  $n \geq 6$  even, we produce a graph  $H_n$  from two copies of  $K_{\frac{n}{2}}$  as follows:

- If 4 divides  $n$ , we add a matching of size  $\frac{n}{4}$  between the two copies of  $K_{\frac{n}{2}}$  (see the matching in blue edges in Figure 2(a)).
- Otherwise, we add such a matching of size  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ , plus an edge between a vertex that is saturated by the matching, and a vertex of the other clique that is not (see the red edge in Figure 2(b)).

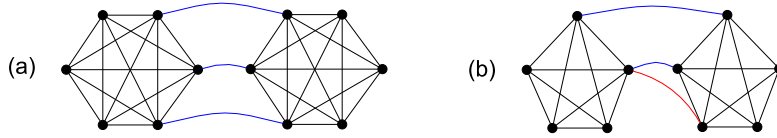


Figure 2: Graphs (a)  $H_{12}$ ; (b)  $H_{10}$ .

We have that  $col_g(H_n) = col_g(\overline{H_n}) = \frac{n}{2}$  (Alice's best strategy consists in selecting in each turn the unselected vertex with larger degree).  $\square$

**Property.** Any graph  $G$  contains a set  $X(G)$  of  $\left\lceil \frac{col_g(G) + 1}{2} \right\rceil$  vertices of degree at least  $col_g(G) - 1$ . The number of edges having exactly one endvertex in  $X(G)$  is at least  $|X(G)|(|X(G)| - 1)$ .

*Proof.* Assume that Alice's strategy is to select, at each turn, the unselected vertex with the largest degree in the graph  $G$ . Let  $k$  be the score she obtains when Bob uses its best strategy. Easily,  $k \geq col_g(G)$ . There is at least one vertex, say  $v$ , with  $k - 1$  selected neighbors. So,  $d(v) \geq k - 1$ . Since at least

$k - 1$  vertices are selected before  $v$ , we have that at least  $k - 1$  turns occurred and, consequently, Alice has selected at least  $\left\lceil \frac{k - 1}{2} \right\rceil$  vertices in  $G$  and they all have degree at least  $k - 1$ .

So there is in  $V(G)$  a set  $S$  of  $\left\lceil \frac{k - 1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{k + 1}{2} \right\rceil$  vertices with degree at least  $k - 1$ . Since  $k \geq \text{col}_g(G)$ , there exists in  $S$ , a subset  $X(G)$  of  $\left\lceil \frac{\text{col}_g(G) + 1}{2} \right\rceil$  vertices of degree at least  $\text{col}_g(G) - 1$ .

Easily, every vertex of  $X(G)$  has at least  $\text{col}_g(G) - |X(G)| \geq |X(G)| - 1$  neighbors that are not in  $X(G)$ . The number of edges having exactly one endvertex in  $X(G)$  is at least  $|X(G)|(|X(G)| - 1)$ .  $\square$

**Lemma 3.2.** *For every graph  $G$  of order  $n$ ,  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{8n - 2}{5} \right\rceil$ .*

*Proof.* By Lemma 3.1, it is known that there exist graphs such that  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) = n + 1$  and  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) = n$ . Now we analyze the case in which  $G$  is a graph such that  $\text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G}) > n + 1$ .

Let  $X = X(G)$  and  $Y = X(\overline{G})$  be as defined in the Property stated previously. Observe that there is no vertex  $v$  that is in both  $X$  and  $Y$ , since it would imply  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) > n$ . We define  $Z = V(G) - X - Y$ . To simplify the notation, let  $|X| = x$ ,  $|Y| = y$  and  $|Z| = z$ .

Without loss of generality, we can assume  $x \geq y$ . By the Property, we have  $x + y = \left\lceil \frac{\text{col}_g(G) + 1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\text{col}_g(\overline{G}) + 1}{2} \right\rceil$  and this implies that  $2x + 2y - 2 \geq \text{col}_g(G) + \text{col}_g(\overline{G})$ .

We denote by  $\varphi(G)$  the number of edges of  $G$  whose endvertices are in two different sets among  $X, Y$  and  $Z$ , and we define  $\varphi(\overline{G})$  similarly for  $\overline{G}$ . So, by the Property,  $\varphi(G) \geq x(x - 1)$  and  $\varphi(\overline{G}) \geq y(y - 1)$ .

We have  $xy + xz + yz = \varphi(G) + \varphi(\overline{G}) \geq x(x - 1) + y(y - 1)$ .

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &\geq x(x - 1) + y(y - 1) \\ z(x + y) &\geq x^2 + y^2 - x - y - xy \\ z(n - z) &\geq x^2 + (n - x - z)^2 - x - (n - x - z) - x(n - x - z) \\ z(n - z) &\geq 3x^2 + (n - z)^2 - 3x(n - z) - (n - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &\geq \frac{3x^2}{n-z} + n - z - 3x - 1 \\
2z &\geq \frac{3x^2z}{n-z} - 3x + n - 1 \\
2z &\geq \frac{3x^2}{x+y} - 3x + n - 1 \\
2z &\geq 3x\left(\frac{x}{x+y} - 1\right) + n - 1
\end{aligned}$$

This inequality must be true even if  $x = y$  in  $3x\left(\frac{x}{x+y} - 1\right)$ , and this implies that  $2z \geq -\frac{3x}{2} + n - 1$ .

Since  $n - z = x + y = 2x$ , we have that  $n = 2x + z$  and  $z \geq \frac{x}{2} - 1$ .

Again  $2x = n - z \leq n - \left(\frac{x}{2}\right) + 1$ , which implies that  $x \leq \frac{2(n+1)}{5}$ . Hence,  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) \leq 2x + 2y - 2 = 4x - 2 \leq \frac{8(n+1)}{5} - 2 \leq \left\lceil \frac{8n-2}{5} \right\rceil$ .  $\square$

Observe that this upper bound is tight. For example, if  $G = P_4$  ( $\overline{G} = P_4$ ), then  $col_g(G) = 3$ . So,  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \left\lceil \frac{8 \cdot 4 - 2}{5} \right\rceil = 6$  which agrees with Lemma 3.2.

Now, we show in Theorem 3.3, that for infinitely many  $n$ , there are graphs  $G$  of order  $n$  with  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 1$ .

**Lemma 3.3.** *Let  $G$  be the graph join  $S_l \oplus K_{l+1}$ , with  $n = 2l + 1$  odd and  $l \geq 1$ . We have that  $col_g(G) + col_g(\overline{G}) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 1$ . Let  $G'$  be the graph join  $S_l \oplus K_{l+2}$ , with  $n = 2l + 2$  even. We have that  $col_g(G') + col_g(\overline{G}') = \frac{3n}{2} - 1$ .*

*Proof.* In  $G$ , Alice colors the vertices of  $K_{l+1}$  until all vertices are colored. On this graph, Bob's strategy consists in selecting in priority the vertices of the stable set  $S_l$ . So, the last vertex to be selected in  $G$  belongs to the clique and it has degree  $2l$ . The score of the game is equal to  $2l + 1$ , and  $col_g(G) = 2l + 1$ .

The graph  $\overline{G}$  is composed by a clique  $K_l$  and a stable set  $S_{l+1}$ . So,  $col_g(\overline{G}) = \chi(\overline{G}) = l$ .

$$\text{Thus, } col_g(G) + col_g(\overline{G}) = 2l + 1 + l = 3l + 1 = \frac{3(n-1)}{2} + 1 = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 1.$$

In  $G'$ , Alice and Bob use the same previous strategy applied in  $G$ , and the last vertex to be selected in  $G'$  belongs to the clique and it has degree  $2l + 1$ . The score of the game is equal to  $2l + 2$ , and  $col_g(G') = 2l + 2$ .

The graph  $\overline{G'}$  is composed by a clique  $K_l$  and a stable set  $S_{l+2}$ . So,  $col_g(\overline{G'}) = \chi(\overline{G'}) = l$ .

$$\text{Thus, } col_g(G') + col_g(\overline{G'}) = 2l + 2 + l = 3l + 2 = \frac{3n}{2} - 1. \quad \square$$

#### 4. Conclusion

We obtain tight lower and upper bounds to the game chromatic and game coloring numbers. Regarding Theorem 1.2, we have obtained asymptotically tight lower and upper bounds, and leave as an open question the existence of infinitely many values of  $n$  for which the bounds are attained. Regarding Theorem 1.3, we leave as an open question the existence of infinitely many values of  $n$  for which the upper bound is attained. As future work, we want to characterize extremal graphs to these bounds, as in Dantas et al. [4].

#### References

- [1] Alon N.; Balogh J.; Bollobás B.; Szabó T., *Game domination number*. Discrete Math. 256 (2002), pp. 23-33.
- [2] Aouiche M.; Hansen P., *A survey of Nordhaus-Gaddum type relations*. Discrete Appl. Math. 161 (4-5) (2013), pp. 466-546.
- [3] Bodlaender H., *On the complexity of some coloring games*. Int. J. Found. Comput. Sci. 2 (2) (1991), pp. 133-147.
- [4] Dantas S.; Gravier S.; Maffray F., *Extremal graphs for the list-coloring version of a theorem of Nordhaus and Gaddum*. Discrete Appl. Math. 141 (2004), pp. 93-101.
- [5] Dinski T.; Zhu X., *Game chromatic number of graphs*. Discrete Maths 196 (1998), pp. 1-3.

- [6] Gardner M., *Mathematical Games*. Scientific American 23 (1981), pp. 18-23.
- [7] He W.; Hou X.; Lih K.-W.; Shao J.; Wang W.-F.; Zhu X., *Edge-partitions of planar graphs and their game coloring numbers*. J. Graph Theory 41 (4) (2002), pp. 307-317.
- [8] Nordhaus E.A.; Gaddum J., *On complementary graphs*. Ann. Math. Monthl 63, (1956), pp. 175-177.
- [9] Zhu X., *Game coloring of planar graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 75 (1999), pp. 245-258.
- [10] Zhu X., *Refined activation strategy for the marking game*. J. Combin. Theory Ser. B 98 (1) (2008), pp. 1-18.

## Apêndice D

### Questão da 5<sup>a</sup> Maratona de Programação da UFFS



Alice e Bob (sempre eles) estão entediados em mais um dia chuvoso em Chapecó. Já que eles não podem sair de casa por conta da chuva, eles resolveram jogar um jogo. Bob, como um bom cavalheiro, deixou Alice escolher qual jogo eles iriam jogar. Alice, muito esperta, mas péssima em jogos, escolheu o jogo TIMBER, jogo este que é especialidade de sua melhor amiga, Ana Luísa.

TIMBER é jogado em um tabuleiro que tem o formato de um grafo direcionado, um dominó é colocado em cada aresta do grafo e o objetivo do jogo é ser o último a derrubar um dominó. Caso um dominó caia todos os dominós adjacentes a ele também irão cair não importando a direção da aresta. A direção da aresta só importa na hora de dar o peteléco.

Como Bob já se mostrou ser um cavalheiro, Alice sempre será a primeira a dar o peteléco. Alice é uma menina muito insegura, e pediu para que Ana Luísa crie grafos em que, no primeiro peteléco, todos os dominós sejam derrubados, para que ela não dê chance para Bob ganhar o jogo. Entretanto, Ana Luísa está muito ocupada com seu Doutorado e pediu para que você avalie, dado um grafo direcionado com  $n$  vértices e  $m$  arestas, se o jogo TIMBER pode ser ganho por Alice com apenas um movimento.

#### Entrada

A entrada contém vários casos de teste. Na primeira linha do caso de teste serão dados dois inteiros  $n$  e  $m$ , em seguida, serão dados  $m$  pares de inteiros  $a$  e  $b$ , que indicam que existe uma aresta entre os vértices  $a$  e  $b$ , sendo que a direção da aresta é de  $a$  para  $b$ . Mas lembre-se que a direção da arestas apenas é usada na hora do peteléco.

#### Saída

Se o grafo da entrada representa uma tabuleiro do jogo TIMBER em que, com apenas um peteléco, todos os dominós podem ser derrubados seu programa deve imprimir, em uma única linha a letra Y. Caso contrário seu programa deve imprimir, em uma única linha a letra N.

Exemplos:

Entrada	Saída
5 4	
1 5	
2 5	
3 5	
4 5	

N

Entrada	Saída
5	4
2	1
2	4
3	4
4	5

Y