



## COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS POTÊNCIA DE CICLO

Alesom Zorzi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de  
Figueiredo  
Raphael Carlos Santos Machado

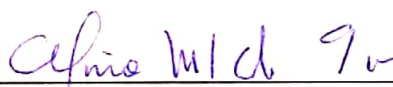
Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2019

# COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS POTÊNCIA DE CICLO

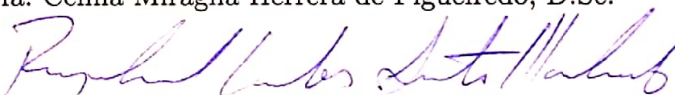
Alesom Zorzi

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:



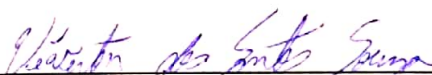
Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



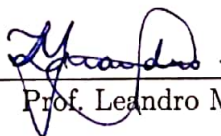
Prof. Raphael Carlos Santos Machado, D.Sc.



Prof. Diana Sasaki Nobrega, D.Sc.



Prof. Uéverton dos Santos Souza, D.Sc.



Prof. Leandro Miranda Zatesko, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2019

Zorzi, Alesom

Coloração total em grafos potência de ciclo/Alesom Zorzi. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

X, 43 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Raphael Carlos Santos Machado

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 40 – 43.

1. Grafos. 2. Coloração total. 3. Conjectura da Coloração Total. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS POTÊNCIA DE CICLO

Alesom Zorzi

Fevereiro/2019

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Raphael Carlos Santos Machado

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$  é um grafo obtido de um ciclo sem cordas  $C_n$  adicionando arestas entre todos os vértices à distância de no máximo  $k$ . Os grafos Potência de Ciclo têm sido extensivamente estudados na literatura, principalmente quando tratamos de problemas de coloração. Problemas clássicos, como Coloração de Vértices e Coloração de Arestas, foram totalmente resolvidos nos grafos Potência de Ciclo [7, 32]. Entretanto, o problema da Coloração Total permanece aberto para esta classe de grafos. E mesmo que os trabalhos de Campos e de Mello [9] e de Almeida et al. [1] mostrem avanços significativos para valores específicos de  $n$  e  $k$ , o problema da Coloração Total está longe de ser resolvido para a classe. Uma conjectura notável, proposta por Campos e de Mello [9], estabelece que  $C_n^k$ , com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ , é *Tipo 2* se e somente se  $n$  é ímpar e  $n < 3(k + 1)$ , caso contrário é *Tipo 1*. Em particular, esta conjectura implica que, para cada  $k \geq 2$ , o número de grafos *Tipo 2* é finito e que todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n \geq 3(k + 1)$ , é *Tipo 1*. No presente trabalho, mostramos que todo grafo Potência de Ciclo com  $k$  par,  $k \geq 2$  e  $n \geq 4k^2 + 2k$  é *Tipo 1*. Além disso, utilizando a mesma técnica, classificamos todos os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k = 3$  e  $k = 4$  e também obtemos um limitante para que os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k = 5$  e  $k = 7$ , sejam *Tipo 2*. Também apresentamos um algoritmo para gerar uma Coloração Harmônica Equilibrada para os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n$  par ou  $n$  ímpar e  $n \geq 3(k + 1)$ , em um passo necessário para a construção de uma Coloração Total Equilibrada *Tipo 1*. Ademais, apresentamos uma família infinita de grafos Potência de Ciclo em que a Coloração Total Equilibrada é ótima.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## TOTAL COLORING ON POWER OF CYCLE GRAPHS

Alesom Zorzi

February/2019

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Raphael Carlos Santos Machado

Department: Systems Engineering and Computer Science

A power of cycle graph  $C_n^k$  is the graph obtained from the chordless cycle  $C_n$  by adding an edge between any pair of vertices of distance at most  $k$ . Power of cycle graphs have been extensively studied in the literature, in particular with respect to coloring problems, and both vertex-coloring and edge-coloring problems have been solved in the class. The total-coloring problem, however, is still open for power of cycle graphs. Although recent works from Campos and de Mello [9] and from Almeida et al. [1] point partial results for specific values of  $n$  and  $k$ , the total-coloring problem is far from being solved in the class. One remarkable conjecture from Campos and de Mello [9] states that  $C_n^k$ , with  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ , is *Type 2* if and only if  $n$  is odd and  $n < 3(k + 1)$ . In particular, the conjecture would imply that, for each  $k \geq 2$ , the number of *Type 2* graphs is finite and every power of cycle graph  $C_n^k$  with  $n \geq 3(k + 1)$  would be *Type 1*. We show that for even power of cycle graphs  $C_n^k$  with  $k \geq 2$  and  $n \geq 4k^2 + 2k$  are *Type 1*. Moreover, our proof also classifies the graphs power of cycle  $C_n^k$ , with  $k = 3$  and  $k = 4$ , and also shows a threshold for the graphs  $C_n^k$ , with  $k = 5$  and  $k = 7$ , to be *Type 2*. We also present a framework to decompose any power of cycle graph into two other power of cycles, an algorithm to generate an equitable conformable total coloring for all the graphs power of cycle that possibly have a equitable total coloring, and an infinite family of power of cycle graphs that have an optimal equitable total coloring.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Problemas de Coloração em Grafos . . . . .	2
1.2 Coloração Total . . . . .	5
1.3 Conjectura da Coloração Total (TCC) . . . . .	5
1.4 Coloração Harmônica . . . . .	6
1.5 Coloração Total Equilibrada . . . . .	7
1.6 Grafos Potência de Ciclo . . . . .	7
1.7 Definições . . . . .	8
<b>2 O Estado da Arte da Coloração Total nos Grafos Potência de Ciclo</b>	<b>14</b>
2.1 Coloração Total do $C_n$ e do $K_n$ , grafos com Grau Máximo Alto e Grafos Potência de Ciclo não Harmônicos . . . . .	14
2.2 Número Cromático Total das Potências de Ciclo com $k = 2$ . . . . .	17
2.3 Verificação da TCC para as Potências de Ciclo com um Número Par de Vértices . . . . .	18
2.4 A Conjectura da Coloração Total dos Grafos Potência de Ciclo e Coloração Total dos Grafos $C_n^3$ e $C_n^4$ . . . . .	19
<b>3 Novos resultados em Coloração Total dos Grafos Potência de Ciclo</b>	<b>21</b>
3.1 Compatibilidade e Composição de Grafos Potência de Ciclo . . . . .	21
3.2 Todo Grafo Potência par de Ciclo com muitos vértices é <i>Tipo 1</i> . . . . .	23
3.3 Coloração Total dos Grafos $C_n^3$ e $C_n^4$ . . . . .	27
3.4 Todo Grafo Potência 5 ou 7 de Ciclo com muitos vértices é <i>Tipo 1</i> . . . . .	28
3.5 Decomposição de Grafos Potência de Ciclo . . . . .	29
3.6 Coloração Harmônica para Grafos Potência de Ciclo . . . . .	30
<b>4 Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>33</b>
4.1 Resultados Relacionados ao <i>VGNC</i> . . . . .	34

4.2	Resultados Preliminares em Coloração Total Equilibrada . . . . .	37
4.3	Coloração de Arestas em Prismas Complementares e outros Problemas em Aberto . . . . .	38
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>40</b>

# Lista de Figuras

1.1	Ilustração da Cidade de Königsberg, em 1554 . . . . .	1
1.2	Mapa da Inglaterra colorido . . . . .	3
1.3	Conversão do mapa da Inglaterra para um grafo . . . . .	4
1.4	(a) Grafo $K_3$ . (b) Grafo $C_4$ . . . . .	11
1.5	(a) Os vértices do conjunto $N^-(v_3)$ são os vértices $v_0, v_1, v_2$ . (b) Os vértices do conjunto $N^+(v_2)$ são os vértices $v_3, v_4, v_5$ . (c) As arestas $N^-(v_3)N^+(v_2)$ estão representadas pela cor cinza. . . . .	13
3.1	Uma ilustração do processo de decomposição, onde nota-se que o vértice $w_x \in C_n^k$ representa o vértice $v_i \in C_{n_1}^k$ e o vértice $w_y \in C_n^k$ representa o vértice $u_j \in C_{n_2}^k$ . (a) O grafo $C_n^k$ , com $n = 18$ e $k = 3$ . As arestas tracejadas em vermelho representam os conjuntos $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$ e $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ . (b) O vértice $v_i$ representa o primeiro vértice do grafo $P_{10}^3$ , o mesmo ocorre com o vértice $u_j$ que é o primeiro vértice do grafo $P_8^3$ . As arestas dos conjuntos $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$ e $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ foram omitidas para realçar os grafos $P_8^3$ e $P_{10}^3$ , entretanto, podem ser vistas na Tabela 3.1a. . . . .	22



# Lista de Tabelas

2.1	Quadrado Latino de ordem 5. . . . .	15
2.2	O estado da arte dos problemas da TCC e da Coloração Total na classe dos grafos Potência de Ciclo $C_n^k$ . As linhas da tabela representam o parâmetro $k$ e as colunas representam o parâmetro $n$ , escrito em função de $k$ . A entrada $\Delta + 1$ representa os grafos que são <i>Tipo 1</i> ; $\Delta + 2$ representa os grafos que são <i>Tipo 2</i> ; TCC representa que a TCC foi mostrada para o grafo, entretanto a classificação entre <i>Tipo 1</i> e <i>Tipo 2</i> ainda permanece aberta; O símbolo O representa os grafos em que a TCC está aberta; e C corresponde aos grafos $C_n^k$ , com $n$ ímpar e $n < 3(k + 1)$ , que, pelo Lema 2.7, não possuem uma Coloração Harmônica. Todas as entradas $\Delta + 2$ e algumas entradas O na tabela também satisfazem a condição C. A linha $k = 2$ está totalmente resolvida (Teorema 2.8). As linhas $k = 3$ e $k = 4$ estão resolvidas [1] (não publicado) ou no Teorema 3.9. A coluna $2k + 1$ é formada por grafos completos, já que $2k + 1$ é ímpar, tais grafos são <i>Tipo 1</i> (Teorema 2.2). A coluna $2k + 2$ está totalmente resolvida (Teorema 2.4). A TCC foi provada para as colunas $2k + 3$ até $2k + 5$ (Teorema 2.5). As colunas $2k + 3$ e $2k + 5$ satisfazem a condição C e por isso são entradas $\Delta + 2$ . A TCC foi provada para $n$ par (Teorema 2.9). A TCC foi provada para $C_n^k$ , com $n \equiv 0 \pmod{(k + 1)}$ (Teorema 2.11). A TCC foi provada para $C_n^k$ , com $n \equiv k \pmod{(k + 1)}$ (Lema 2.14). Os grafos $C_n^k$ , com $n$ par, $k$ par e $n \equiv 0 \pmod{(k + 1)}$ são <i>Tipo 1</i> (Teorema 2.12). Os grafos $C_n^k$ , com $n \equiv 0 \pmod{(2k + 1)}$ são <i>Tipo 1</i> (Teorema 2.13). A Conjectura 2.16, formulada por Campos e de Mello, estabelece que toda entrada C é entrada $\Delta + 2$ , e que toda entrada que não satisfaz a condição C é entrada $\Delta + 1$ . . . . .	20

3.1	As células em preto representam arestas que não existem no grafo $C_{2k+2}^k$ ; Cada tom de cinza representa um dos conjuntos: $N^-(v_4)N^+(v_3)$ , $N^-(v_4)$ e $N^+(v_3)$ . (a) O Quadrado Latino $L$ representa uma coloração <i>Tipo 1</i> do grafo $C_{2k+1}^k$ . (b) A matriz $M$ depois do procedimento de recoloração, representando uma Coloração Total <i>Tipo 1</i> do grafo $C_{2k+2}^k$ , que é compatível com a coloração de $L$ para o grafo $C_{2k+1}^k$ . (c) A matriz $M$ no início do procedimento. As células destacadas representam as cores dos vértices que serão trocados para gerarmos uma Coloração Harmônica. (d) A matriz $M$ depois das trocas de cores. (e) A matriz $M$ depois de adicionar as cores das células que estão em $M$ , mas não estão em $L$ . . . . .	24
3.2	Sementes iniciais de Coloração Total para colorir totalmente qualquer grafo $C_n^3$ , com $n \geq 14$ ; (a) $C_7^3$ ; (b) $C_8^3$ ; (c) $C_{10}^3$ ; (d) $C_{12}^3$ . . . . .	28
3.3	Sementes iniciais de Coloração Total para colorir totalmente qualquer grafo $C_n^4$ , com $n \geq 16$ . (a) $C_9^4$ ; (b) $C_{10}^4$ ; (c) $C_{12}^4$ ; (d) $C_{14}^4$ ; (e) $C_{16}^4$ . . . . .	29
3.4	Coloração Total do grafo $C_{17}^4$ , com $\Delta = 9$ cores. . . . .	30
3.5	Sementes iniciais de Coloração Total $C_n^5$ , com $n \geq 110$ . Colorações Totais, usando $\Delta + 1 = 11$ cores, dos grafos: (a) $C_{11}^5$ ; (b) $C_{12}^5$ . . . . .	30
3.6	Sementes iniciais de Coloração Total $C_n^7$ , com $n \geq 210$ . Colorações Totais, usando $\Delta + 1 = 15$ cores, dos grafos: (a) $C_{15}^7$ ; (b) $C_{16}^7$ . . . . .	31
4.1	As contribuições do presente trabalho para Coloração Total em grafos Potência de Ciclo. Destacamos as linhas $k = 3$ e $k = 4$ , onde a TCC já estava estabelecida e por isso foi possível obter a classificação completa. Nas demais linhas a TCC ainda está aberta. Os resultados omitidos podem ser vistos na Tabela 2.2 sobre o estado da arte. . . . .	34

# Capítulo 1

## Introdução

A cidade de *Königsberg*, na antiga Prússia (atualmente, *Kaliningrado*, na Rússia) era formada por duas ilhas e uma parte continental cortada pelo rio *Pregel* e conhecida após o matemático *Leonhard Paul Euler* provar, em 1736, que não é possível sair de um ponto da cidade, passar por todas as sete pontes apenas uma vez e retornar ao mesmo ponto. Para resolver o problema, Euler utilizou uma estrutura matemática chamada *grafo*. Um grafo é constituído por dois conjuntos de elementos: um conjunto de *vértices* e um conjunto de *arestas*, sendo que os vértices modelam objetos e as arestas representam as relações entre os objetos. Na modelagem do problema, Euler representou as ilhas e a parte continental como vértices do grafo e as pontes foram representadas por arestas. O problema resolvido por Euler ficou conhecido como *Problema das Sete Pontes de Königsberg* [10]. A Figura 1.1 é uma ilustração feita em 1554 da cidade de Königsberg.



Figura 1.1: Ilustração da Cidade de Königsberg, em 1554<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Adaptado de: <https://visualhistory.livejournal.com/39249.html> (em Russo). Acesso em: 19 jan. 2019.

Após o Problema das Sete Pontes de Königsberg, que é considerado o primeiro problema de Teoria dos Grafos [5], diversos outros problemas motivaram o estudo da Teoria dos Grafos, como, por exemplo, o *Problema das Quatro Cores*, descoberto por Frederick Guthrie.

Em 23 de outubro de 1852, o pesquisador britânico Frederick Guthrie foi ao encontro de seu professor de Matemática, Augustus De Morgan, com uma possível descoberta em mãos [10]. Seu irmão mais velho, Francis Guthrie, ao pintar um mapa da Inglaterra, constatou que não eram necessárias mais de quatro cores para colorir tal mapa de forma que duas regiões que compartilhassem alguma fronteira recebessem cores distintas. Observando este fato, Francis conjecturou: “As regiões de qualquer mapa podem ser pintadas com no máximo quatro cores de tal forma que duas regiões que compartilhem uma fronteira sejam pintadas com cores distintas”. A Figura 1.2 ilustra o mapa da Inglaterra colorido da forma proposta por Francis Guthrie.

A *Conjectura das Quatro Cores*, como foi chamada, despertou o interesse de vários matemáticos da época, inclusive de De Morgan. Francis tentou formalizar uma demonstração para sua conjectura, mas seus esforços foram em vão [10]. Mais de cem anos depois a conjectura foi provada, já com a ajuda de computadores [2].

A Conjectura das Quatro Cores motivou uma série de outros problemas relacionados, como, por exemplo, os clássicos *Coloração de Vértices* e *Coloração de Arestas*, que serão definidos na Seção 1.1. O principal foco do presente trabalho é a *Coloração Total* nos grafos *Potência de Ciclo*, uma classe de grafos extensamente estudada em problemas de coloração em grafos. O Problema da Coloração Total será abordado na Seção 1.2 e na Seção 1.6 serão abordados mais problemas de coloração na classe dos grafos Potência de Ciclo.

No presente Capítulo definimos os principais conceitos utilizados neste trabalho. Na Seção 1.7, definimos formalmente todos os conceitos abordados no presente trabalho, bem como as notações utilizadas. No Capítulo 2, abordamos os principais resultados presentes na literatura relacionados à Coloração Total nos grafos Potência de Ciclo. No Capítulo 3, apresentamos as contribuições deste trabalho. Finalmente, o Capítulo 4, abordará as considerações finais e diretrizes futuras para a pesquisa.

## 1.1 Problemas de Coloração em Grafos

O Problema da Coloração de Vértices consiste em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Este número é chamado de *Número Cromático* ( $\chi(G)$ , para um dado grafo  $G$ ). A Conjectura das Quatro Cores pode ser vista como o Problema da Coloração de Vértices associando a cada região do mapa um vértice

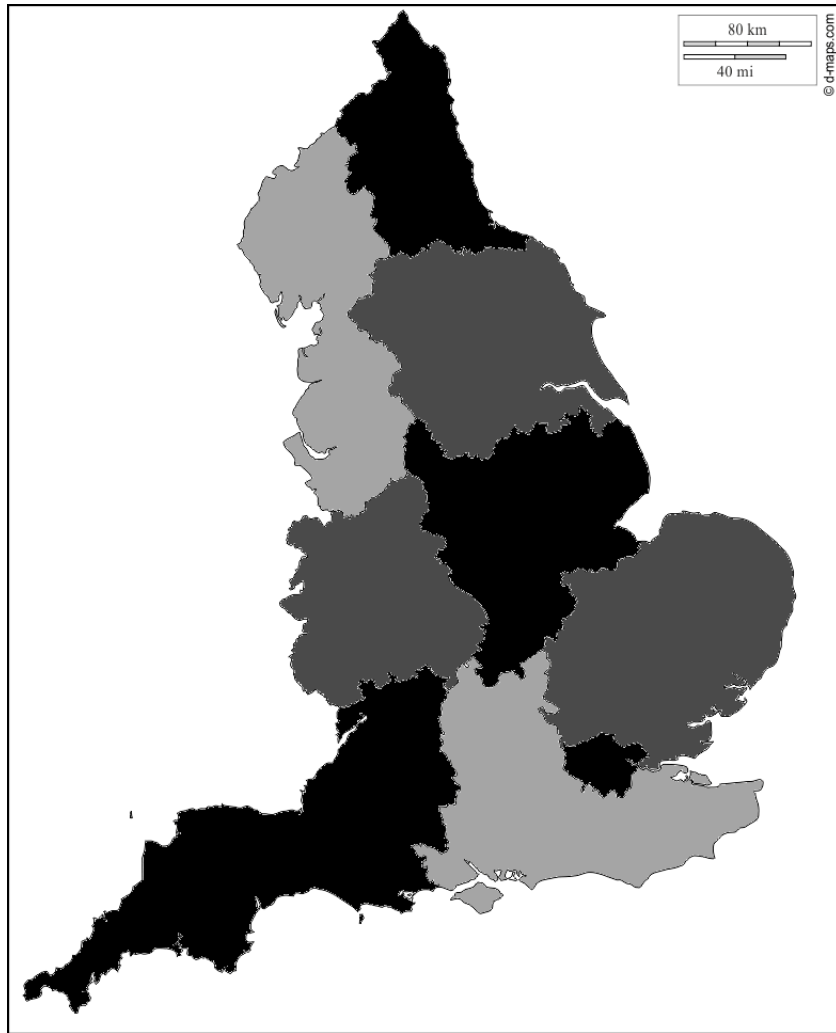


Figura 1.2: Mapa da Inglaterra colorido com apenas três cores de modo que regiões que compartilham uma fronteira possuam cores distintas<sup>2</sup>.

e criando aresta entre dois vértices se e somente se as regiões associadas aos vértices compartilham uma fronteira. A Figura 1.3 ilustra esse processo.

O Problema da Coloração de Vértices é um dos problemas mais antigos da Teoria dos Grafos, sendo um dos 21 problemas  $\mathcal{NP}$ -completos mostrados por Karp em 1972 [28], o que motivou ainda mais o estudo do problema.

Outro problema associado à coloração de grafos é o Problema da Coloração de Arestas, que consiste em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas incidentes a um vértice recebam cores distintas, este número é chamado de *Índice Cromático* ( $\chi'(G)$ , para um dado grafo  $G$ ). Se olharmos para um único vértice  $v$  de um grafo  $G$ , podemos notar da definição do problema que o número de cores necessárias para colorir todas as arestas incidentes em  $v$  é exatamente o número de arestas incidentes em  $v$ , i.e. *ograu* de  $v$ . O

<sup>2</sup>Adaptado de: [https://d-maps.com/carte.php?num\\_car=18179&lang=pt](https://d-maps.com/carte.php?num_car=18179&lang=pt). Acesso em: 16 jan. 2019.

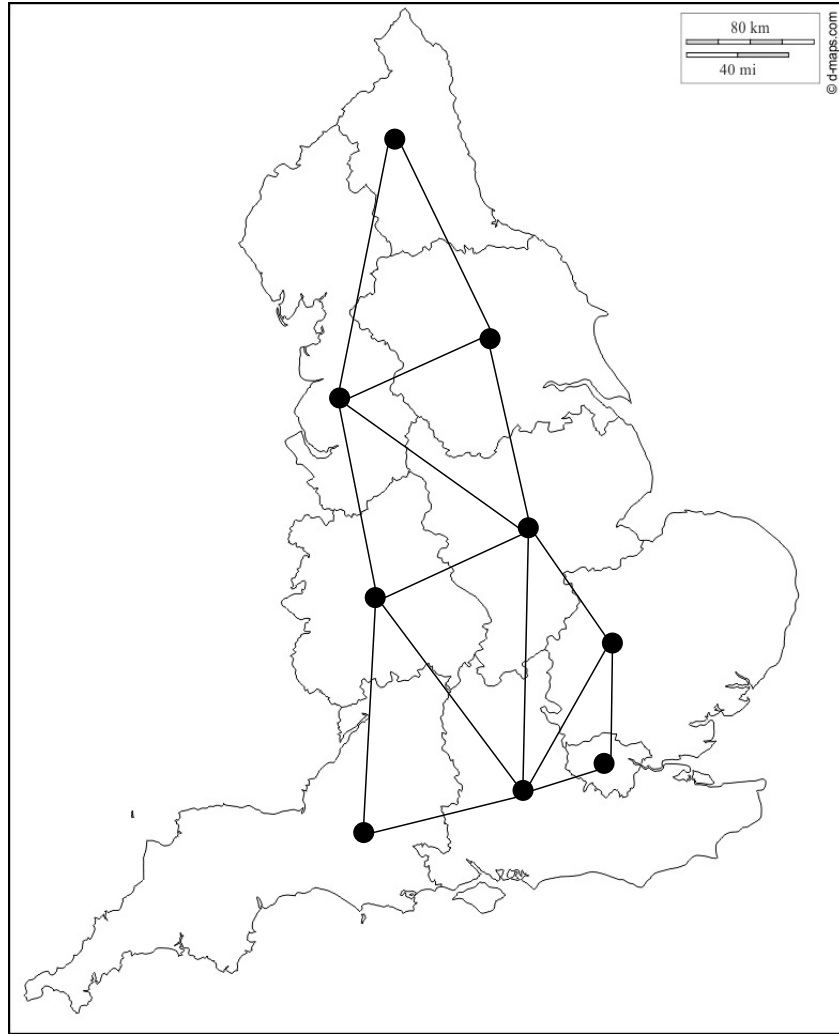


Figura 1.3: Conversão do mapa da Inglaterra para um grafo<sup>3</sup>.

*grau máximo* ( $\Delta(G)$ , para um dado grafo  $G$ ) é um limite inferior trivial para o Índice Cromático de um grafo  $G$ . Vizing [36], em 1964, provou que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , no que ficou conhecido como o *Teorema de Vizing*. O Problema da Coloração de Arestas divide os grafos em dois conjuntos: um grafo  $G$  é dito *Classe 1* se pode ser colorido com  $\Delta(G)$  cores, ou é dito *Classe 2* se não pode (necessitando, portanto, de  $\Delta(G) + 1$  cores, pelo Teorema de Vizing). Decidir se um grafo é *Classe 1* é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo [26].

O objeto de estudo do presente trabalho é um problema que combina os clássicos Coloração de Vértices e Coloração de Arestas, denominado Problema da Coloração Total. O Problema da Coloração Total consiste em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os elementos de um dado grafo  $G$ , de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas. Este número é chamado de *Número Cromático Total* ( $\chi_T(G)$ , para um dado grafo  $G$ ).

<sup>3</sup>Adaptado de: [https://d-maps.com/carte.php?num\\_car=18179&lang=pt](https://d-maps.com/carte.php?num_car=18179&lang=pt). Acesso em: 16 jan. 2019.

## 1.2 Coloração Total

Assim como o Problema da Coloração de Arestas, que divide os grafos em dois conjuntos, o Problema da Coloração Total também define os grafos em dois conjuntos: um grafo é dito *Tipo 1* se pode ser colorido com  $\Delta(G) + 1$  cores, que é um limitante trivial para o problema, e é dito *Tipo 2* se não é *Tipo 1* e pode ser colorido com  $\Delta(G) + 2$  cores. No caso da Coloração Total não há um limitante superior justo para o problema, entretanto, existe uma conjectura notável, denominada *Conjectura da Coloração Total (TCC)*, que estabelece que  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Na Seção 1.3 abordaremos com mais detalhes a TCC.

O Problema da Coloração Total é um problema  $\mathcal{NP}$ -difícil [33] e a redução que provou a  $\mathcal{NP}$ -dificuldade do problema foi feita através do Problema da Coloração de Arestas, mostrando que o Problema da Coloração Total é tão desafiador, ou mais, do que o Problema da Coloração de Arestas para grafos no geral. Mesmo para classes consideravelmente restritas, como, por exemplo Grafos bipartidos regulares, o problema ainda continua  $\mathcal{NP}$ -difícil [31]. Entretanto, é oportuno ressaltar que existem classes de grafos em que o Problema da Coloração de Arestas é  $\mathcal{NP}$ -difícil, já o Problema da Coloração Total é polinomial, como é o caso dos grafos *{square, unichord}-free* não completos com grau máximo pelo menos 4 [29].

Mesmo com a dificuldade do problema, muitos estudos foram desenvolvidos com o intuito de encontrar o Número Cromático Total ou provar a TCC, como, por exemplo: [6, 9, 11, 13, 15–17, 20, 21, 23, 34, 38, 39]. Nota-se que alguns desses estudos são consideravelmente atuais, como o trabalho de Golubic [23], de 2018.

## 1.3 Conjectura da Coloração Total (TCC)

A Conjectura da Coloração Total (TCC), do inglês *Total Coloring Conjecture*, foi definida independentemente por Behzad [3] e Vizing [37] e enuncia que  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Desde que foi proposta, é uma das perguntas abertas mais intrigantes e importantes da Teoria dos Grafos<sup>4</sup>.

A TCC foi provada para classes restritas de grafos, como os grafos  $r$ -bipartidos Completos [4], grafos split [21], grafos dualmente cordais [21] e grafos com um grau máximo alto [40]. Entretanto, apesar dos esforços, a TCC está longe de ser provada para grafos no geral, permanecendo aberta para classes de grafos tão restritas quanto Potência de Ciclo e *Rooted Directed Path*, uma subclasse dos grafos Cordais. É importante notar que existem classes de grafos em que a TCC já foi estabelecida, mas determinar o Número Cromático Total de um grafo da classe é  $\mathcal{NP}$ -difícil, como

---

<sup>4</sup>No site Open Problem Garden ([http://www.openproblemgarden.org/op/behzads\\_conjecture](http://www.openproblemgarden.org/op/behzads_conjecture)) a importância da TCC é listada como alta. Acesso em: 19 jan. 2019.

é o caso dos grafos bipartidos [33]; por outro lado, existem classes em que determinar o Número Cromático de um dado grafo da classe é polinomial, mas a TCC ainda não está estabelecida, como é o caso dos grafos com *tree-width* limitada [27].

## 1.4 Coloração Harmônica

Devido à complexidade dos problemas da Coloração de Arestas e da Coloração Total, muito esforço tem sido feito para encontrar condições suficientes para provar que um dado grafo é *Classe 1* ou *Tipo 1*. Para a Coloração de Arestas, temos os grafos não-sobrecarregados<sup>5</sup>, que são uma condição necessária para um grafo ser *Classe 1*. Um grafo é Sobrecarregado se  $|E(G)| > \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor \Delta(G)$ .

Uma condição semelhante aplicada à Coloração Total é a condição Harmônica<sup>6</sup>, que foi introduzida por Chetwynd e Hilton [15]. Para definir uma Coloração Harmônica em um grafo  $G$ , antes definiremos *deficiência* de  $G$ , denotada por  $def(G)$ :

$$def(G) = \sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - d_G(v)).$$

Seja  $\mathcal{C}$  uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração dos vértices de  $G$ . Vamos chamar de *classe de coloração* o conjunto de vértices que foram coloridos por uma determinada cor. Seja  $r$  o número de classes de coloração de  $\mathcal{C}$  cujo tamanho tem a mesma paridade de  $|V(G)|$ . Se  $def(G) \geq \Delta(G) + 1 - r$ , dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma Coloração Harmônica. Se  $G$  possui alguma Coloração Harmônica, dizemos então que  $G$  é Harmônico. Para um grafo regular  $G$ , temos  $def(G) = 0$ , e portanto toda Coloração Harmônica  $\mathcal{C}$  satisfaz  $r = \Delta(G) + 1$ . Logo, cada classe de coloração de uma Coloração Harmônica  $\mathcal{C}$  precisa colorir um número de vértices  $x$ , tal que  $x$  tem a mesma paridade da ordem de  $G$ . Todo grafo regular  $G$  que é *Tipo 1* é um grafo Harmônico, porque qualquer Coloração Total com  $\Delta(G) + 1$  cores define uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices que é uma Coloração Harmônica.

Chetwynd e Hilton [15] provam que o grafo ser Harmônico é uma condição necessária para tal grafo ser *Tipo 1*. Entretanto, a complexidade de encontrar uma Coloração Harmônica é uma incógnita inclusive para grafos regulares. Os ciclos  $C_n$  com  $n$  par e  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  definem uma classe de grafos Harmônicos *Tipo 2*. Durante a pesquisa, não foram encontrados resultados sobre Coloração Harmônica de forma isolada da Coloração Total, apesar da relevância da existência, ou da confirmação da não existência, de uma Coloração Harmônica para resolver o Problema da Coloração Total.

Outra similaridade entre os problemas da Coloração de Arestas e da Coloração

---

<sup>5</sup>Do inglês, *Overfull*

<sup>6</sup>Do inglês, *Conformable*



Total é o trabalho de Hilton, Holroyd e Zhao [25] que relaciona duas conjecturas: a Conjectura dos Grafos Sobrecarregados e a Conjectura dos Grafos Harmônicos. A Conjectura dos Grafos Sobrecarregados foi proposta inicialmente por Chetwynd e Hilton [14] e após algumas modificações ficou definida como:

**CONJECTURA 1.1** (Conjectura dos Grafos Sobrecarregados [14]). Se  $G$  é um grafo que satisfaz  $\Delta(G) > \frac{1}{3}|V(G)|$ , então  $G$  é *Classe 2* se e somente se  $G$  tem um subgrafo Sobrecarregado  $H$ , tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .

Já a Conjectura dos Grafos Harmônicos foi proposta por Chetwynd e Hilton [15] e também após algumas modificações pode ser definida como:

**CONJECTURA 1.2** (Conjectura dos grafos Harmônicos [15]). Se  $G$  é um grafo que satisfaz  $\Delta(G) \geq \frac{1}{2}(|V(G)| + 1)$ , então  $G$  é *Tipo 2* se e somente se  $G$  tem um subgrafo  $H$  com  $\Delta(G) = \Delta(H)$ , e tal que ou  $H$  é não Harmônico ou  $H$  consiste do  $K_{\Delta(G)+1}$  com uma aresta subdividida quando  $\Delta(G)$  é par.

Ambas as conjecturas permanecem abertas por mais de quarenta anos.

## 1.5 Coloração Total Equilibrada

Uma Coloração Total é Equilibrada se as cardinalidades de quaisquer duas classes de coloração diferem em no máximo um.

Sempre que temos uma Coloração de Arestas com  $t$  cores em um grafo  $G$ , McDiarmid [30] mostrou que também temos uma Coloração de Arestas Equilibrada com  $t$  cores. Entretanto, quando tratamos de Coloração Total, esta igualdade não foi provada. O menor número de cores necessárias para colorir todos os elementos de um grafo  $G$  de forma Equilibrada é denotado por  $\chi_{T_e}(G)$ . Wang conjecturou, em 2002, que  $\chi_{T_e}(G) \leq \Delta(G) + 2$ . No mesmo trabalho, Wang mostrou que a conjectura é válida para grafos cúbicos. Entretanto, essa conjectura permanece em aberto para grafos no geral, sendo outra pergunta motivadora do estudo do assunto.

## 1.6 Grafos Potência de Ciclo

Os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$  podem ser definidos como:  $V(C_n^k) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(C_n^k) = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$ , onde  $E^i = \{v_j v_{(j+i) \pmod n} \mid 0 \leq j \leq n-1\}$ . A classe dos grafos Potência de Ciclo é superclasse dos grafos Ciclo e dos grafos Completos. Se  $C_n^k$  tem  $k = 1$ , então  $C_n^k$  é isomorfo ao  $C_n$  e se  $C_n^k$  tem  $n \leq 2k + 1$ , então  $C_n^k$  é isomorfo ao  $K_n$ .

Os grafos Potência de Ciclo são uma classe estudada de grafos, principalmente quando falamos sobre problemas de Coloração.

No trabalho que serviu como uma das bases para a presente pesquisa, Campos [7] mostra uma Coloração de Vértices para a classe:

**TEOREMA 1.3** ([7]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo com  $n = a(k + 1) + r$ ,  $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$  e  $0 \leq r \leq k$ . Então  $\chi(C_n^k) = k + 1 + \lceil r/a \rceil$ .

Já para Coloração de Arestas, Meidanis [32] mostrou que a Conjectura dos Grafos Sobrecarregados se aplica à classe, provando o seguinte Teorema:

**TEOREMA 1.4** ([32]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo com  $n > 2k + 1$ . Então  $C_n^k$  é *Classe 1* se e somente se  $n$  é par.

Visto que todo grafo  $C_n^k$ , com  $n > 2k + 1$  e  $n$  ímpar é Sobrecarregado, a Conjectura dos Grafos Sobrecarregados é válida na classe. Além dos trabalhos supramencionados, existem outros trabalhos que visam resolver problemas de coloração na classe dos grafos Potência de Ciclo, como o trabalho de Macêdo Filho et al. [22] que trata de uma coloração especial nos grafos Potência de Ciclo. Os trabalhos que tratam de Coloração Total em Grafos Potência de Ciclo serão abordados no Capítulo 2.

## 1.7 Definições

Nesta Seção definimos de modo formal conceitos importantes que são utilizados ao longo deste trabalho.

**Definição 1.5** (Grafo). Um *grafo*  $G = (V(G), E(G))$  é uma estrutura matemática que é formada de um conjunto finito de vértices  $V(G)$  e um conjunto finito de arestas  $E(G)$  que representam pares de vértices. Os grafos abordados neste trabalho são simples, sem peso nas arestas e não-dirigidos, o que significa que cada aresta é um conjunto de exatamente dois vértices distintos.

A cardinalidade do conjunto de vértices do grafo  $G$ , também conhecida como *ordem* do grafo  $G$ , é denotada por  $|V(G)|$ . O conjunto de arestas do grafo  $G$  é denotado por  $E(G)$ . Dois vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* se existe uma aresta  $uv \in E(G)$ . Neste caso dizemos que um *extremo* da aresta  $uv$  está em  $v$  e o outro extremo está em  $u$ . Podemos dizer também que  $uv$  *incide* nos vértices  $u$  e  $v$ , ou que  $uv$  é adjacente a  $u$  e a  $v$ . Duas arestas  $e_1$  e  $e_2$  são *adjacentes* se existe um vértice  $v$ , tal que  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $v$ .

**Definição 1.6** (Subgrafo). Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Definição 1.7** (Grau do vértice e grau máximo). O número de arestas incidentes a um dado vértice  $v$  é chamado de *grau* do vértice  $v$  e denotado por  $d_G(v)$ . O maior

grau de um vértice em  $G$  é chamado de *grau máximo* de  $G$  e denotado por  $\Delta(G)$ , ou simplesmente  $\Delta$  quando o contexto for livre de ambiguidade. Um vértice de grau máximo é chamado de  $\Delta$ -vértice.

Um subgrafo  $H$  de  $G$  é *induzido* se e só se, para todo  $u$  e todo  $v$  em  $V(H)$ ,  $uv \in E(H)$  se  $uv \in E(G)$ .

**Definição 1.8** (Coloração de Vértices). Uma Coloração de Vértices de um grafo  $G$  é uma função  $\mathcal{C}: V(G) \rightarrow [t]$ , onde  $[t] = \{0, \dots, t\}$  e elementos adjacentes devem receber cores distintas.

**Problema 1.9** (Problema da Coloração de Vértices). Dado um grafo  $G$ , qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de  $G$ , de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas?

**Definição 1.10** (Número Cromático). O menor número de cores necessárias para colorir todos os vértices de um grafo  $G$ , de forma que vértices adjacentes recebam cores distintas, é chamado de *Número Cromático* e é denotado por  $\chi(G)$ .

**Definição 1.11** (Coloração de Arestas). Uma Coloração de Arestas de um grafo  $G$  é uma função  $\mathcal{C}: E(G) \rightarrow [t]$ , onde  $[t] = \{0, \dots, t\}$  e elementos adjacentes devem receber cores distintas.

**Problema 1.12** (Problema da Coloração de Arestas). Dado um grafo  $G$ , qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas de  $G$ , de tal forma que arestas incidentes no mesmo vértice tenham cores distintas?

**Definição 1.13** (Índice Cromático). O menor número de cores necessárias para colorir todas as arestas de um grafo  $G$ , de forma que arestas incidentes ao mesmo vértice recebam cores distintas, é chamado de *Índice Cromático* e é denotado por  $\chi'(G)$ .

**Definição 1.14** (Coloração Total). Uma Coloração Total de um grafo  $G$ , denotada por  $\mathcal{C}_G$  ou  $\mathcal{C}$  se o contexto for livre de ambiguidades, é uma função  $\mathcal{C}: E(G) \cup V(G) \rightarrow [t]$ , onde  $[t] = \{0, \dots, t\}$  e elementos adjacentes devem receber cores distintas.

A cor de um vértice  $v_i$  será denotada por  $\mathcal{C}(v_i)$ . Similarmente, a cor de uma aresta  $v_i v_j$  será denotada por  $\mathcal{C}(v_i v_j)$ .

**Problema 1.15** (Problema da Coloração Total). Dado um grafo  $G$ , qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os elementos  $G$ , de tal forma que elementos adjacentes tenham cores distintas?

**Definição 1.16** (Número Cromático Total). O menor número de cores necessárias para colorir todos os elementos (vértices e arestas) de um grafo  $G$ , de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas, é chamado de *Número Cromático Total* e é denotado por  $\chi_T(G)$ .

**CONJECTURA 1.17** (Conjectura da Coloração Total (TCC)). Dado um grafo  $G$ ,  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

**Problema 1.18** (Problema da TCC). Dado um grafo  $G$ ,  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ ?

**Definição 1.19** (Coloração Total Equilibrada). Uma Coloração Total é Equilibrada se as cardinalidades de quaisquer duas classes de coloração diferem em no máximo um.

**Problema 1.20** (Problema da Coloração Total Equilibrada). Dado um grafo  $G$ , qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os elementos de  $G$ , de tal forma que elementos adjacentes tenham cores distintas e que as cardinalidades de quaisquer duas classes de coloração difiram em no máximo um?

**Definição 1.21** (Número Cromático Total Equilibrado). O menor número de cores necessárias para colorir todos os elementos (vértices e arestas) de um grafo  $G$ , de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas e que as cardinalidades de quaisquer duas classes de coloração difiram em no máximo um, é chamado de *Número Cromático Total Equilibrado* e é denotado por  $\chi_{Te}(G)$ .

**Definição 1.22** (Classe de Coloração). O conjunto de elementos coloridos por uma mesma cor é chamado de *classe de coloração*.

**Definição 1.23** (Vizinhança aberta e fechada). A *vizinhança aberta* de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é representada por  $N(v) = \{u \mid vu \in E(G)\}$ . Ou seja,  $N(v)$  é o conjunto de vértices que são adjacentes a  $v$  no grafo  $G$ . A *vizinhança fechada* de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é representada por  $N[v] = \{u \mid vu \in E(G)\} \cup \{v\}$ . Ou seja,  $N[v]$  é o conjunto de vértices que são adjacentes a  $v$  no grafo  $G$ , incluindo  $v$ .

**Definição 1.24** (*Pullback*). O *pullback* de um grafo  $G$  para um grafo  $G'$  é uma função  $f : V(G) \rightarrow V(G')$ , tal que:

- $f$  é um homomorfismo, i.e., se  $pq \in E(G)$ , então  $f(p)f(q) \in E(G')$ ;
- $f$  é injetiva quando restrita a  $N(p)$ , onde  $p \in V(G)$ .

**Definição 1.25** (Emparelhamento). Um emparelhamento em um grafo  $G$  é um conjunto de arestas não adjacentes entre si. O tamanho do maior emparelhamento em  $G$  é denotado por  $\alpha'(G)$ .

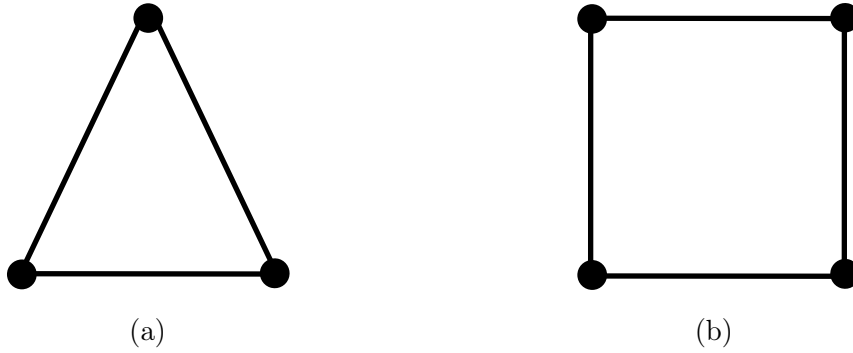


Figura 1.4: (a) Grafo  $K_3$ . (b) Grafo  $C_4$ .

**Definição 1.26** (Grafo Regular). Um grafo  $G$  é *regular* se todo vértice  $v \in V(G)$  tem o mesmo grau.

Nos grafos das Figuras 1.4a e 1.4b é possível observar que o grau de todos os vértices é dois, portanto, podemos dizer que ambos os grafos são regulares.

**Definição 1.27** (Grafo Bipartido). Um grafo  $G$  é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices  $V(G)$  pode ser particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , tal que toda aresta  $uv \in E(G)$  tem um extremo em  $V_1$  e o outro extremo em  $V_2$ .

**Definição 1.28** (Grafo Completo). Um grafo  $G$  é um grafo *completo* se para cada par de vértices  $u, v \in V(G)$  existe a aresta  $uv$ .  $G$  é denotado por  $K_n$  se  $G$  é um grafo completo com exatamente  $n$  vértices. A Figura 1.4a ilustra o grafo completo  $K_3$ .

**Definição 1.29** (Grafo Estrela). Um grafo  $G$  é um *grafo estrela* se  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(G) = \{v_0v_i \mid 0 < i \leq n\}$ . Um grafo  $G$  é denotado  $S_n$  se  $G$  é um grafo estrela com exatamente  $n + 1$  vértices.

**Definição 1.30** (Caminho). Um caminho em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices distintos  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ , tal que  $v_i$  é adjacente a  $v_{i+1}$ , com  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$ .

**Definição 1.31** (Grafo Potência de Caminho). Um grafo é *Potência de Caminho*,  $P_n^k$ , se  $V(P_n^k) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(P_n^k) = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$ , onde  $E^i = \{v_jv_{(j+i)} \mid 0 \leq j \leq n - 1\}$ .

**Definição 1.32** (Ciclo). Um ciclo em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices distintos  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ , tal que  $v_i$  é adjacente a  $v_{i+1}$ , com  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$  e  $v_0$  é adjacente a  $v_{k-1}$ .

**Definição 1.33** (Grafo Ciclo). Um grafo  $G$  é um *grafo ciclo* se  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(G) = \{v_iv_{(i+1) \pmod n}\}$ . Um grafo  $G$  é  $C_n$  se  $G$  é um grafo ciclo com exatamente  $n$  vértices. As Figuras 1.4a e 1.4b ilustram grafos ciclo  $C_3$  e  $C_4$ .

**Definição 1.34** (Grafo Potência de Ciclo). Um grafo é Potência de Ciclo,  $C_n^k$ , se  $V(C_n^k) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(C_n^k) = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$ , onde  $E^i = \{v_j v_{(j+i \pmod n)} \mid 0 \leq j \leq n-1\}$ . Durante o presente trabalho, sempre que mencionarmos um vértice  $v_i \in V(C_n^k)$  estaremos tratando de  $i$  em módulo  $n$ .

**Definição 1.35** (Alcance). O *alcance* de uma aresta  $uv \in E(C_n^k)$  é a distância entre o vértice  $v$  e o vértice  $u$  no ciclo induzido pelas arestas de  $E^1$  da potência de ciclo. O mesmo se aplica às arestas de um grafo Potência de Caminho.

**Definição 1.36** (Semi-corte de vértices). Um semi-corte de vértices de um grafo  $C_n^k$ , é um conjunto de  $k$  vértices consecutivos em  $V(C_n^k)$ , considerando a ordem  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  do ciclo. Neste trabalho são destacados dois semi-cortes especiais, tendo como referência um vértice  $v_x$ :  $N^-(v_x) = \{v_q \mid x - k \leq q < x\}$  e  $N^+(v_{x-1}) = \{v_q \mid x \leq q < x + k\}$ .

**Definição 1.37** (Semi-corte de arestas). Um semi-corte de arestas de um grafo  $C_n^k$ , é um conjunto de arestas denotado  $N^-(v_x)N^+(v_{x-1})$  que representa as arestas que tem um extremo em  $N^-(v_x)$  e o outro extremo em  $N^+(v_{x-1})$ . Mais formalmente,  $N^-(v_x)N^+(v_{x-1}) = \{v_q v_l \mid x - k \leq q < x, x \leq l < x + k \text{ e } l - q \leq k\}$ .

A Figura 1.5 ilustra um grafo  $C_{10}^3$  e os conjuntos  $N^-(v_3)$ ,  $N^+(v_2)$  e  $N^-(v_3)N^+(v_2)$ . Cada conjunto é representado por uma cor na tabela. As tabelas ilustram uma Coloração Total, de forma que a cor de uma aresta  $v_i v_j$  está representada na célula  $i, j$  da matriz. A cor do vértice  $v_i$  está representada pela célula  $i, i$ .

Sempre que mencionarmos *ciclo induzido* de um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , estaremos nos referindo ao subgrafo gerador isomorfo a  $C_n$ , definido pelas arestas de  $E^1$ . O mesmo ocorre quando mencionamos *caminho induzido* de um grafo Potência de Caminho  $P_n^k$ .

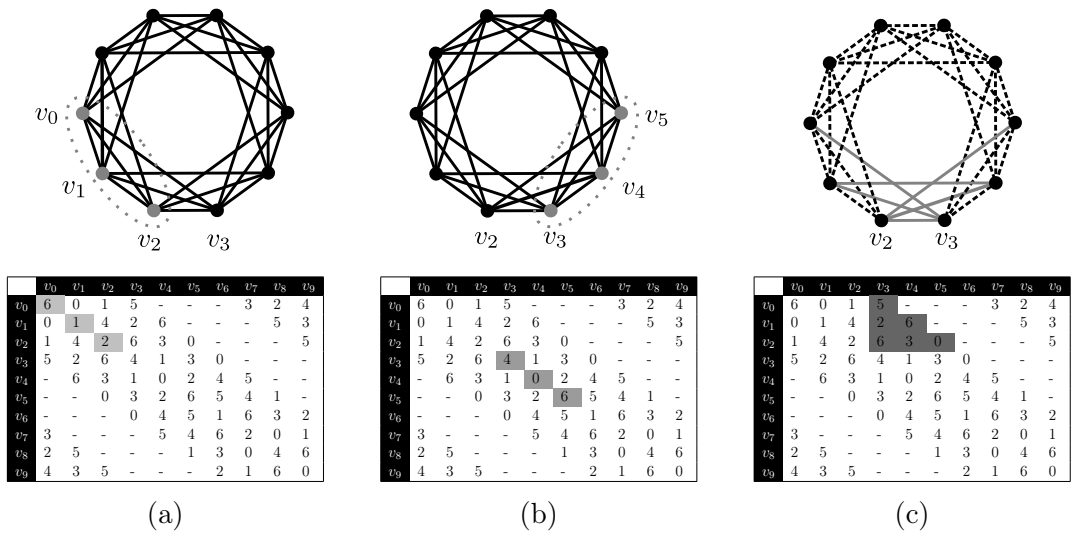


Figura 1.5: (a) Os vértices do conjunto  $N^-(v_3)$  são os vértices  $v_0, v_1, v_2$ . (b) Os vértices do conjunto  $N^+(v_2)$  são os vértices  $v_3, v_4, v_5$ . (c) As arestas  $N^-(v_3)N^+(v_2)$  estão representadas pela cor cinza.

## Capítulo 2

# O Estado da Arte da Coloração Total nos Grafos Potência de Ciclo

No presente capítulo, abordaremos os principais trabalhos encontrados na literatura que influenciaram na evolução do estado da arte do Problema da Coloração Total nos grafos Potência de Ciclo e problemas relacionados. Na Seção 2.1 serão abordados os resultados que estabelecem o Número Cromático Total dos grafos  $C_n$  e  $K_n$ , além de resultados que estabelecem limitantes para o Número Cromático Total de grafos com grau máximo alto. Na mesma seção, também será abordado um algoritmo, proposto por Golubic, denominado VGNC. Bem como um resultado importante de Campos e de Mello que estabelece que alguns grafos Potência de Ciclo não são *Tipo 1* por não possuírem uma Coloração Harmônica. Na Seção 2.2 serão apresentados os resultados de Campos e de Mello [8], onde o Número Cromático Total dos grafos  $C_n^2$  é estabelecido. Na Seção 2.3 serão apresentados os resultados de Campos e de Mello [9] onde as autoras mostram que a TCC vale para todo grafo  $C_n^k$ , com  $n$  par. Na Seção 2.4 são apresentados os resultados da Tese de Doutorado de Campos [7] e uma conjectura proposta por Campos e de Mello [7] que tem grande importância na elaboração do presente trabalho.

### 2.1 Coloração Total do $C_n$ e do $K_n$ , grafos com Grau Máximo Alto e Grafos Potência de Ciclo não Harmônicos

O livro *Total Colourings of Graphs*, de Yap [40], apresenta um excelente guia para o estudo da Coloração Total. No referido livro, encontram-se resultados que representam famílias infinitas de grafos Potência de Ciclo. O Teorema 2.1 apresenta a classificação entre *Tipo 1* e *Tipo 2* dos grafos ciclo.



0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Tabela 2.1: Quadrado Latino de ordem 5.

**TEOREMA 2.1** ([40]). Para um grafo  $C_n$ :

$$\chi_T(C_n) = \begin{cases} \Delta(C_n) + 1, & \text{se } n \text{ é divisível por } 3 \\ \Delta(C_n) + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O Teorema 2.2 define o Número Cromático Total para os grafos completos.

**TEOREMA 2.2** ([40]). Para um grafo  $K_n$ :

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \Delta(K_n) + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Qualquer Coloração Total de um grafo completo  $K_n$  gera um *Quadrado Latino*<sup>1</sup> de ordem  $n$ . Um Quadrado Latino de ordem  $n$  é uma matriz quadrada em que cada linha e coluna é uma permutação de  $n$  elementos. A Tabela 2.1 ilustra um Quadrado Latino em que cada entrada  $[i, j]$  da matriz recebe o valor  $(i + j) \pmod{n}$ . Nota-se que na definição do Quadrado Latino a diagonal principal não necessariamente apresenta uma permutação de  $n$  inteiros. Entretanto, se o Quadrado Latino foi gerado com base em uma Coloração Total, o mesmo deve conter esta propriedade para garantir que não haja conflito de cores nos vértices.

Os Quadrados Latinos são comumente utilizados em operações que transferem uma Coloração Total de um grafo  $G$  para um grafo  $G'$ . O trabalho de de Figueiredo, Meidanis e de Mello [21] mostra uma Coloração Total ótima para todo grafo Duplamente Cordal com grau máximo par, além de provar a TCC para os demais grafos da classe. Neste mesmo trabalho, os autores definiram o *pullback*, técnica que pode fazer uso dos Quadrados Latinos para transferir uma Coloração Total de um grafo completo  $K_n$  para outro grafo qualquer  $G$ . Mais formalmente, o *pullback* de um grafo  $G$  para  $G'$  é uma função  $f : V(G) \rightarrow V(G')$ , tal que: (i)  $f$  é um homomorfismo, i.e., se  $pq \in E(G)$ , então  $f(p)f(q) \in E(G')$ ; (ii)  $f$  é injetiva quando restrita a  $N(p)$ , onde  $p \in V(G)$ . O *pullback* também pode ser utilizado para gerar uma Coloração Total ótima para uma família infinita de grafos Potência de Ciclo, os grafos  $C_n^k$ , com  $n = r(2k + 1)$ .

---

<sup>1</sup>Do inglês, Latin Square

Outro resultado importante que pode colorir a mesma família infinita de grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n = r(2k + 1)$ , como é mostrado no Teorema 4.5, é o resultado de Golubic [23]. Golubic apresenta um algoritmo denominado *VGNC* (*Very Greedy Neighborhood Coloring*), que atribui uma coloração aos vértices de um grafo  $G$ , não necessariamente própria, i.e., vértices vizinhos podem receber a mesma cor. Entretanto, quando restrito aos grafos *Rooted Path*, além de gerar uma coloração própria dos vértices, a coloração de vértices gerada permite utilizar um Quadrado Latino para colorir as arestas do grafo, formando assim uma Coloração Total. O VGNC está descrito no Algoritmo 2.1. As implicações do algoritmo VGNC

---

**Algoritmo 2.1:** Algoritmo VGNC proposto por Golubic [23].

---

**Entrada:** Um grafo  $G$ , com  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ .

**Saída:** Uma coloração dos vértices do grafo  $G$ , não necessariamente própria.

**1 para**  $i = 0$  até  $n - 1$  **faça**

**2**     Atribua cores distintas a todos os vértices de  $N[v_i]$  ainda não coloridos, garantindo que as cores atribuídas são distintas das cores utilizadas na coloração parcial de  $N[v_i]$ .

**3 retorna**  $G$  colorido.

---

para os grafos Potência de Ciclo serão abordadas na Seção 4.1.

Os grafos completos  $K_n$  satisfazem  $\Delta(K_n) = |V(K_n)| - 1$ . Hilton [24] apresenta a classificação entre *Tipo 1* e *Tipo 2* de todos os grafos  $G$  que satisfazem  $\Delta(G) = |V(G)| - 1$ . Observe que os grafos completos  $K_n = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$  são precisamente os grafos regulares que satisfazem  $\Delta(G) = |V(G)| - 1$ .

**TEOREMA 2.3** ([24]). Seja  $G$  um grafo com ordem  $2t$  com  $\Delta(G) = 2t - 1$ , então  $G$  é *Tipo 1* se e somente se  $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \geq t$ .

Chen e Fu [12] apresentaram a classificação entre *Tipo 1* e *Tipo 2* de todos os grafos  $G$  de ordem par e  $\Delta(G) = |V(G)| - 2$ , que são precisamente os grafos  $C_n^k$  com  $n = 2k + 2$ . Nota-se que todos os grafos  $C_n^k$  de ordem ímpar são *Tipo 1*.

**TEOREMA 2.4** ([12]). Seja  $G$  um grafo com ordem  $2t$  com  $\Delta(G) = 2t - 2$ , então  $G$  é *Tipo 2* se e somente se  $\overline{G} = S_{2t-3} \cup S_1$ .

Yap [40] estabelece a TCC para os grafos que satisfazem  $\Delta(G) \geq |V(G)| - 5$ , o que implica que a TCC vale para os grafos  $C_n^k$ , com  $k \geq \frac{n-5}{2}$ .

**TEOREMA 2.5** ([40]). Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G) \geq |V(G)| - 5$ , então  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

No Teorema 2.6 Campos e de Mello [8] mostraram uma condição suficiente para um grafo não ser *Tipo 1*.

**TEOREMA 2.6** ([8]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo com  $n$  ímpar e  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ . Se  $k > n/3 - 1$ , então  $C_n^k$  não é *Tipo 1*.

A demonstração do Teorema 2.6 foi feita através do Lema 2.7.

**LEMA 2.7** ([8]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo com  $n$  ímpar e  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ . Se  $C_n^k$  é Harmônico, então  $k \leq n/3 - 1$ .

Chetwynd e Hilton [15] mostraram que uma condição necessária para um grafo ser *Tipo 1* é possuir uma Coloração Harmônica. Como os grafos do Teorema 2.6 tem ordem ímpar e todo grafo Potência de Ciclo é regular, toda classe de coloração numa Coloração Harmônica deve colorir um número ímpar de vértices. Entretanto, pela densidade  $k > n/3 - 1$  dos grafos, nenhuma classe de coloração pode colorir mais de dois vértices. Como os grafos não são completos  $n > \Delta + 1$  e, se cada classe de coloração colorir apenas um vértice não teremos uma Coloração Total com  $\Delta + 1$  cores.

## 2.2 Número Cromático Total das Potências de Ciclo com $k = 2$

Os resultados apresentados na presente seção são de Campos e de Mello [8] e representam o primeiro trabalho no Problema da Coloração Total na classe dos grafos Potência de Ciclo, além das técnicas apresentadas na Seção 2.1.

**TEOREMA 2.8.** Seja  $C_n^2$  um grafo Potência de Ciclo não completo:

$$\chi_T(C_n^2) = \begin{cases} \Delta(C_n^2) + 2, & \text{se } n = 7 \\ \Delta(C_n^2) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Campos e de Mello, utilizam uma técnica de *colagem* do grafo  $C_6^2$  com o grafo  $C_{n-4}^2$  para formar um novo grafo  $C_n^2$ , já colorido otimamente. Como *sementes* iniciais do procedimento de colagem são utilizados os grafos  $C_6^2$ ,  $C_8^2$ ,  $C_9^2$  e  $C_{11}^2$ , assim os demais grafos podem ser gerados a partir dos grafos supramencionados.

Na técnica empregada por Campos e de Mello, é feita uma análise cuidadosa dos casos de cada uma das cores incidentes nos vértices envolvidos no procedimento, o que apesar de eficiente para os grafos  $C_n^2$ , torna-se difícil generalizar para  $k$  maiores.

## 2.3 Verificação da TCC para as Potências de Ciclo com um Número Par de Vértices

No trabalho intitulado *A result on the total colouring of powers of cycles*, Campos e de Mello mostram que todo grafo  $C_n^k$ , com  $n$  par, pode ser colorido com no máximo  $\Delta(C_n^k) + 2$  cores. O Teorema 2.9 é o principal teorema do trabalho.

**TEOREMA 2.9** ([9]). Todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n$  par, tem  $\chi_T(C_n^k) \leq \Delta(C_n^k) + 2$ .

Para provar o Teorema 2.9, Campos e de Mello decompueram um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$  em dois grafos  $G_I$  e  $G_P$ . Sendo que o grafo  $G_I$  é o grafo induzido pelas arestas de alcance ímpar de  $E(C_n^k)$  e  $G_P$  é o grafo induzido pelas arestas de alcance par. Mais formalmente,  $V(G_P) = V(C_n^k)$  e  $E(G_P) = \{uv \in E^i \mid i \equiv 0 \pmod{2}\}$  e  $V(G_I) = V(C_n^k)$  e  $E(G_I) = \{uv \in E^i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\}$ .

A técnica se inicia colorindo totalmente o grafo  $G_P$ , com  $k+1+r$  cores, onde  $r = n \pmod{(k+1)}$ , realizando a coloração do grafo por blocos, denominados *alpha blocks*, de tamanho  $k+1$  e depois colorindo os elementos que ficaram no bloco *residual*, que possui tamanho  $r$ . Após este procedimento, é construída uma  $(k+1-r)$ -aresta coloração para as arestas restantes do grafo  $G_I$ , que é bipartido, como mostra o Lema 2.10.

**LEMA 2.10** ([9]). Se o grafo  $C_n^k$  tem  $n$  par, então  $G_I$  é um grafo bipartido.

Outro resultado de Campos e de Mello, prova a TCC para alguns grafos com  $n$  ímpar:

**TEOREMA 2.11** ([9]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo. Se  $n \equiv 0 \pmod{(k+1)}$ , então  $\chi_T(C_n^k) \leq \Delta(C_n^k) + 2$ .

A técnica empregada é a mesma utilizada para mostrar o Teorema 2.9.

Além disso, pela construção da demonstração, no caso em que  $n$  e  $k$  são pares e  $n \equiv 0 \pmod{(k+1)}$ , temos grafos *Tipo 1*, este resultado foi mostrado por Campos em sua tese de Doutorado.

**COROLÁRIO 2.12** ([7]). Se o grafo  $C_n^k$  tem  $n$  par,  $k$  par e  $n \equiv 0 \pmod{(k+1)}$ , então  $\chi_T(C_n^k) \leq \Delta(C_n^k) + 1$ .

Outro resultado que gera uma Coloração Total ótima para uma família infinita de grafos Potência de Ciclo é o Corolário 2.13, que é corolário de um resultado de de Figueiredo, Meidanis e de Mello [21], um trabalho pioneiro na utilização da técnica de *pullback* para Coloração Total em grafos.

**COROLÁRIO 2.13** ([9]). Para todo grafo  $C_n^k$  com  $n \equiv 0 \pmod{2k+1}$ ,  $C_n^k$  é *Tipo 1*.

## 2.4 A Conjectura da Coloração Total dos Grafos Potência de Ciclo e Coloração Total dos Grafos $C_n^3$ e $C_n^4$

Na presente Seção, trataremos de outros resultados que contribuem de alguma forma para o estado da arte da Coloração Total nos grafos Potência de Ciclo. A Tese de Doutorado de Campos [7] apresenta um marco no estudo do problema referido, já que compila diversos resultados relacionados e pavimenta o rumo das pesquisas na área. O Lema 2.14 mostra a TCC para uma família de grafos Potência de Ciclo.

**LEMA 2.14** ([7]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo. Se  $n \equiv k \pmod{(k+1)}$ , então  $\chi_T(C_n^k) \leq \Delta(C_n^k) + 2$

Uma contribuição que fomentou os resultados posteriores foi o seguinte Teorema:

**TEOREMA 2.15** ([7]). Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo. Se  $k = 3$  ou  $k = 4$ , então  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

A demonstração é uma modificação do resultado apresentado no Teorema 2.9 utilizando o Lema 2.14. Este resultado motivou o estudo para a classificação completa dos grafos  $C_n^3$  e  $C_n^4$ .

Na mesma tese, Campos mostrou Colorações Totais com 7 cores para os grafos  $C_8^3$ ,  $C_{13}^3$ ,  $C_{10}^3$ ,  $C_{12}^3$  e  $C_{13}^3$ , além disso, mostrou Colorações Totais com 9 cores para os grafos  $C_{10}^4$ ,  $C_{12}^4$ ,  $C_{14}^4$  e  $C_{15}^4$ . Nota-se que todos os grafos que podem ser coloridos pelas colorações supramencionadas são *Tipo 1*.

Após os resultados do Teorema 2.8, do Teorema 3.9 e dos grafos *Tipo 1* mencionados no parágrafo anterior, Campos e de Mello propuseram uma conjectura que permanece aberta por mais de dez anos:

**CONJECTURA 2.16** ([9]). Para todo grafo  $C_n^k$  com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ :

$$\chi_T(C_n^k) = \begin{cases} \Delta(C_n^k) + 2, & \text{se } k > n/3 - 1 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ \Delta(C_n^k) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nota-se que a condição estabelecida pela Conjectura 2.16 é a mesma estabelecida no Teorema 2.6 e no Lema 2.7. Ou seja, para Campos e de Mello os únicos grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ , *Tipo 2* são os grafos que não possuem Coloração Harmônica (segundo o Lema 2.7).

Uma técnica semelhante à apresentada na Seção 2.2 foi utilizada em uma apresentação no *VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, em 2014, desenvolvida por Almeida et al. [1]. Na apresentação, foi exibido o Número Cromático Total de

todos grafos Potência de Ciclo  $C_n^3$  e  $C_n^4$ , classificando tais grafos da seguinte forma: os grafos  $C_n^3$  não completos são *Tipo 2* se  $n = 9$  ou  $n = 11$  e *Tipo 1* caso contrário; já os grafos  $C_n^4$  não completos são *Tipo 2* se  $n = 11$  ou  $n = 13$  e *Tipo 1* caso contrário. Este resultado mostra que a Conjectura 2.16 vale para  $C_n^k$  para  $k = 3$  e  $k = 4$ . Entretanto, o trabalho completo não foi publicado posteriormente.

A Tabela 2.2 ilustra os resultados mencionados até o momento.

$k \backslash n$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	$2k+4$	$2k+5$	$2k+6$	$2k+7$	...	$n$ ímpar $< 3(k+1)$	$r(2k+1)$	$r(2k+1) + k$	...	$n$ par	$n$ ímpar $\geq 3(k+1)$
2	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	C	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	$\Delta+1$	$\Delta+1$
3	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	C	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	$\Delta+1$	$\Delta+1$
4	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	C	$\Delta+1$	$\Delta+1$	...	$\Delta+1$	$\Delta+1$
5	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
6	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
7	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
8	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
9	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
10	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
11	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
12	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
13	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
14	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$k$	$\Delta+1$	$\Delta+1$	$\Delta+2$	TCC	$\Delta+2$	TCC	O	...	C	$\Delta+1$	TCC	...	TCC	O

Tabela 2.2: O estado da arte dos problemas da TCC e da Coloração Total na classe dos grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ . As linhas da tabela representam o parâmetro  $k$  e as colunas representam o parâmetro  $n$ , escrito em função de  $k$ . A entrada  $\Delta + 1$  representa os grafos que são *Tipo 1*;  $\Delta + 2$  representa os grafos que são *Tipo 2*; TCC representa que a TCC foi mostrada para o grafo, entretanto a classificação entre *Tipo 1* e *Tipo 2* ainda permanece aberta; O símbolo O representa os grafos em que a TCC está aberta; e C corresponde aos grafos  $C_n^k$ , com  $n$  ímpar e  $n < 3(k+1)$ , que, pelo Lema 2.7, não possuem uma Coloração Harmônica. Todas as entradas  $\Delta + 2$  e algumas entradas O na tabela também satisfazem a condição C. A linha  $k = 2$  está totalmente resolvida (Teorema 2.8). As linhas  $k = 3$  e  $k = 4$  estão resolvidas [1] (não publicado) ou no Teorema 3.9. A coluna  $2k+1$  é formada por grafos completos, já que  $2k+1$  é ímpar, tais grafos são *Tipo 1* (Teorema 2.2). A coluna  $2k+2$  está totalmente resolvida (Teorema 2.4). A TCC foi provada para as colunas  $2k+3$  até  $2k+5$  (Teorema 2.5). As colunas  $2k+3$  e  $2k+5$  satisfazem a condição C e por isso são entradas  $\Delta + 2$ . A TCC foi provada para  $n$  par (Teorema 2.9). A TCC foi provada para  $C_n^k$ , com  $n \equiv 0 \pmod{(k+1)}$  (Teorema 2.11). A TCC foi provada para  $C_n^k$ , com  $n \equiv k \pmod{(k+1)}$  (Lema 2.14). Os grafos  $C_n^k$ , com  $n$  par,  $k$  par e  $n \equiv 0 \pmod{(k+1)}$  são *Tipo 1* (Teorema 2.12). Os grafos  $C_n^k$ , com  $n \equiv 0 \pmod{(2k+1)}$  são *Tipo 1* (Teorema 2.13). A Conjectura 2.16, formulada por Campos e de Mello, estabelece que toda entrada C é entrada  $\Delta + 2$ , e que toda entrada que não satisfaz a condição C é entrada  $\Delta + 1$ .

# Capítulo 3

## Novos resultados em Coloração Total dos Grafos Potência de Ciclo

No presente capítulo, apresentaremos as principais contribuições deste trabalho. A Seção 3.1 apresenta as ferramentas utilizadas para os procedimentos exibidos na Seção 3.2, onde apresentamos uma técnica que colore otimamente todos os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k$  par e  $n \geq 4k^2 + 2k$ . Na Seção 3.3 são classificados todos os grafos Potência de Ciclo  $C_n^3$  e  $C_n^4$ . Na Seção 3.4 mostramos que a técnica aplicada na Seção 3.2 também vale para alguns grafos com  $k$  ímpar. Finalmente, a Seção 3.5 apresenta uma técnica para decompor grafos Potência de Ciclo em outros grafos Potência de Ciclo de menor ordem. Os resultados das Seções 3.1, 3.2 e 3.5 foram submetidos em conjunto com Celina de Figueiredo, Raphael Machado e Uéverton Souza para o *X Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS)*. Já os resultados descritos na Seção 3.3 foram apresentados no *VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* em um trabalho em conjunto com Celina de Figueiredo e Raphael Machado.

### 3.1 Compatibilidade e Composição de Grafos Potência de Ciclo

Nesta seção serão definidas operações que possibilitam, a partir de dois grafos já coloridos totalmente,  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$ , colorir totalmente um grafo  $C_n^k$ , tal que  $n = n_1 + n_2$ .

Iremos decompor um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$  em dois grafos Potência de Caminho  $P_{n_1}^k$  e  $P_{n_2}^k$ , com  $n_1 + n_2 = n$ , e dois conjuntos de arestas  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ , tal que é possível usar uma Coloração Total dos grafos  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  para colorir totalmente  $P_{n_1}^k$  e  $P_{n_2}^k$ , respectivamente, utilizando as cores das arestas  $E(C_{n_1}^k) \setminus E(P_{n_1}^k)$  e  $E(C_{n_2}^k) \setminus E(P_{n_2}^k)$  para colorir as arestas de  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$  para obter uma Coloração Total de  $C_n^k$ .

As operações serão formalizadas nas Definições 3.1 e 3.2.

**Definição 3.1** ( $k$ -decomposição em Potência de Caminho). A  $k$ -decomposição em Potência de Caminho de um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$  é uma decomposição em dois grafos Potência de Caminho,  $P_{n_1}^k$  e  $P_{n_2}^k$ , e dois conjuntos de arestas,  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ , com a distância no ciclo entre  $w_x \in C_n^k$  e  $w_y \in C_n^k$  maior que  $2k$ .  $w_x$  representa o vértice  $v_i \in P_{n_1}^k$  que é o primeiro vértice do caminho induzido do grafo  $P_{n_1}^k$  e  $w_y$  representa o vértice  $u_j \in P_{n_2}^k$  que é o primeiro vértice do caminho induzido do grafo  $P_{n_2}^k$ . Nota-se que todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n \geq 4k + 2$ , possui uma  $k$ -decomposição em Potência de Caminho. A Figura 3.1 ilustra uma 3-decomposição em Potência de Caminho do grafo  $C_{18}^3$ .

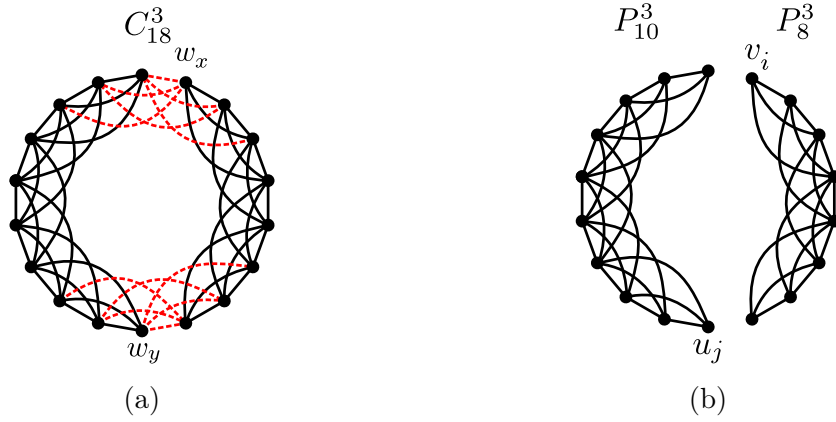


Figura 3.1: Uma ilustração do processo de decomposição, onde nota-se que o vértice  $w_x \in C_n^k$  representa o vértice  $v_i \in C_{n_1}^k$  e o vértice  $w_y \in C_n^k$  representa o vértice  $u_j \in C_{n_2}^k$ . (a) O grafo  $C_n^k$ , com  $n = 18$  e  $k = 3$ . As arestas tracejadas em vermelho representam os conjuntos  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ . (b) O vértice  $v_i$  representa o primeiro vértice do grafo  $P_{10}^3$ , o mesmo ocorre com o vértice  $u_j$  que é o primeiro vértice do grafo  $P_8^3$ . As arestas dos conjuntos  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$  foram omitidas para realçar os grafos  $P_8^3$  e  $P_{10}^3$ , entretanto, podem ser vistas na Tabela 3.1a.

**Definição 3.2** (Compatibilidade). Dizemos que dois grafos  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  são *Tipo 1-compatíveis* se cada grafo tem uma Coloração Total *Tipo 1*,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , e vértices pivô  $v_i$  e  $u_j$ , respectivamente, tal que: (a)  $N^-(v_i)$  é compatível com  $N^+(u_{j-1})$ , ou seja,  $\mathcal{C}_1(v_{i-r}) \neq \mathcal{C}_2(u_{j+s})$ ; (b)  $N^+(v_{i-1})$  é compatível com  $N^-(u_j)$ , ou seja,  $\mathcal{C}_1(v_{i+s}) \neq \mathcal{C}_2(u_{j-r})$ , para todo  $r \in \{0, \dots, k-1\}$  e todo  $s \in \{1, \dots, k-r\}$ ; (c)  $N^-(v_i)N^+(v_{i-1})$  é compatível com  $N^-(u_j)N^+(u_{j-1})$ , ou seja,  $\mathcal{C}_1(v_{i-r}v_{i+s}) = \mathcal{C}_2(u_{j-r}u_{j+s})$ , para todo  $r \in \{0, \dots, k-1\}$  e todo  $s \in \{1, \dots, k\}$ .



## 3.2 Todo Grafo Potência par de Ciclo com muitos vértices é *Tipo 1*

Na presente seção, mostraremos que todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k$  par e  $n \geq 4k^2 + 2k$ , é *Tipo 1*.

**TEOREMA 3.3.** Se dois grafos  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  são *Tipo 1*-compatíveis, então o grafo  $C_n^k$ , com  $n = n_1 + n_2$ , é *Tipo 1*-compatível com  $C_{n_1}^k$  e com  $C_{n_2}^k$ .

*Demonstração.* Já que  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  são *Tipo 1*-compatíveis, existem duas Colorações Totais *Tipo 1*,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , sendo que cada Coloração Total tem vértices pivô  $v_i \in V(C_{n_1}^k)$  e  $u_j \in V(C_{n_2}^k)$ , que se enquadram nas restrições da Definição 3.2.

O grafo  $P_{n_1}^k$  é formado a partir do grafo  $C_{n_1}^k$  removendo as arestas de  $N^-(v_i)N^+(v_{i-1})$ . E o grafo  $P_{n_2}^k$  é formado a partir do grafo  $C_{n_2}^k$  removendo as arestas de  $N^-(u_j)N^+(u_{j-1})$ .

Já que o grafo  $C_n^k$  possui uma  $k$ -decomposição em Potência de Caminho, nós podemos usar um *pullback* da Coloração Total dos grafos  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  para os grafos  $P_{n_1}^k$  e  $P_{n_2}^k$ . Então, apenas resta colorir as arestas dos conjuntos  $N^-(w_x)N^+(w_{x-1})$  e  $N^-(w_y)N^+(w_{y-1})$ , mas podemos fazer o mesmo *pullback* para as cores de  $N^-(v_i)N^+(v_{i-1})$  e  $N^-(u_j)N^+(u_{j-1})$ .  $\square$

No próximo teorema, é feito um procedimento de recoloração a partir do famoso *Quadrado Latino* de ordem  $2k + 1$   $L$ , gerando uma Coloração Total válida representada pela matriz  $M$ , de ordem  $2k + 2$ , de tal forma que essa matriz representa uma Coloração Total *Tipo 1* do grafo  $C_{2k+2}^k$ , que é compatível com a coloração dada pelo *Quadrado Latino*.

O procedimento é feito em três passos: Primeiramente, a partir da condição harmônica, sabe-se que é necessário trocar as cores de alguns vértices do grafo representado por  $L$ . Para realizar essa troca utilizaremos o fato de que a matriz  $M$  tem células que representam arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$ . O segundo passo é a inclusão das cores que não existiam em  $L$  na matriz  $M$ . E o último passo é feito para garantir que as duas colorações totais sejam compatíveis.

Combinando o Teorema 3.4 com o Teorema 3.3, mostraremos que todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k$  par, é *Tipo 1*, exceto por  $2k^2 - k$  grafos, para um dado  $k$  fixo.

**TEOREMA 3.4.** Os grafos  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+2}^k$ , com  $k$  par, são *Tipo 1*-compatíveis.

*Demonstração.* A matriz  $M$  representa uma Coloração Total do grafo  $C_{2k+2}^k$ .

A ordem de  $M$  é  $2k + 2$  e  $M$  possui as mesmas propriedades do *Quadrado Latino*  $L$ . As células diagonais de  $M$  representam as cores dos vértices e demais células

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	0
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	0	1
$v_3$	3	4	5	6	7	8	0	1	2
$v_4$	4	5	6	7	8	0	1	2	3
$v_5$	5	6	7	8	0	1	2	3	4
$v_6$	6	7	8	0	1	2	3	4	5
$v_7$	7	8	0	1	2	3	4	5	6
$v_8$	8	0	1	2	3	4	5	6	7

(a)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	1	0	2	3	4	5	6	7	8	5
$v_1$	0	2	3	4	5	6	7	8	1	7
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	0	1	1
$v_3$	3	4	5	6	7	8	0	1	2	2
$v_4$	4	5	6	7	8	0	1	3	2	3
$v_5$	5	6	7	8	0	1	3	2	5	4
$v_6$	6	7	8	0	1	3	2	5	4	6
$v_7$	7	8	0	1	3	2	5	4	7	0
$v_8$	8	1	0	2	5	4	7	6	3	3
$v_9$	5	7	1	2	4	6	0	3	8	8

(b)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	-
$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	0	-
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	0	1	-
$v_3$	3	4	5	6	7	8	0	1	2	-
$v_4$	4	5	6	7	8	0	1	2	3	-
$v_5$	5	6	7	8	0	1	2	3	4	-
$v_6$	6	7	8	0	1	2	3	4	5	-
$v_7$	7	8	0	1	2	3	4	5	6	-
$v_8$	8	0	1	2	3	4	5	6	7	-
$v_9$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(c)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	-
$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	0	-
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	0	1	-
$v_3$	3	4	5	6	7	8	1	0	2	-
$v_4$	4	5	6	7	8	1	0	3	2	-
$v_5$	5	6	7	8	1	0	3	2	5	-
$v_6$	6	7	8	1	0	3	2	5	4	-
$v_7$	7	8	0	0	3	2	5	4	7	-
$v_8$	8	0	1	2	2	5	4	7	6	-
$v_9$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(d)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	5
$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	0	7
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	0	1	0
$v_3$	3	4	5	6	7	8	1	0	2	2
$v_4$	4	5	6	7	8	1	0	3	2	3
$v_5$	5	6	7	8	1	0	3	2	5	4
$v_6$	6	7	8	1	0	3	2	5	4	6
$v_7$	7	8	0	0	3	2	5	4	7	1
$v_8$	8	0	1	2	2	5	4	7	6	3
$v_9$	5	7	0	2	4	6	1	3	8	8

(e)

Tabela 3.1: As células em preto representam arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$ ; Cada tom de cinza representa um dos conjuntos:  $N^-(v_4)N^+(v_3)$ ,  $N^-(v_4)$  e  $N^+(v_3)$ . (a) O Quadrado Latino  $L$  representa uma coloração *Tipo 1* do grafo  $C_{2k+1}^k$ . (b) A matriz  $M$  depois do procedimento de recoloração, representando uma Coloração Total *Tipo 1* do grafo  $C_{2k+2}^k$ , que é compatível com a coloração de  $L$  para o grafo  $C_{2k+1}^k$ . (c) A matriz  $M$  no início do procedimento. As células destacadas representam as cores dos vértices que serão trocados para gerarmos uma Coloração Harmônica. (d) A matriz  $M$  depois das trocas de cores. (e) A matriz  $M$  depois de adicionar as cores das células que estão em  $M$ , mas não estão em  $L$ .

representam as cores das arestas. Atribua para cada célula  $L[i, j] = M[i, j]$  a cor  $(i + j) \pmod{(2k + 1)}$ , com  $0 \leq i, j \leq 2k$ . A Tabela 3.1a representa a matriz  $L$  e a Tabela 3.1c representa a matriz  $M$ . Nota-se que as células  $M[x, k + 1 + x]$ , com  $x \in \{0, \dots, k\}$  representam arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$  e, portanto, tais células podem ser ignoradas em nosso processo. A Tabela 3.1d mostra os vértices que dão início ao procedimento de recoloração de estados.

Faremos o procedimento de recoloração em três passos:

1. Para  $s \in \{1, \dots, k/2\}$  trocaremos as cores das células  $M[k + s - r, k + s + r]$  pelas cores das células  $M[k + s - r - 1, k + s + r]$ , com  $r \in \{0, \dots, k/2\}$ . Nota-se que as células  $M[k + s - k/2 + 1 - 1, k + s + k/2 + 1] = M[k/2 + s, k/2 + s + k + 1]$  representam as arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$  e, portanto, podemos parar o procedimento sem conflito de cores em  $M$ .
2. Para  $s = k/2 + 1$  trocaremos as cores das células  $M[k + s - r, k + s + r]$  pelas cores das células  $M[k + s - r - 1, k + s + r]$ , com  $r \in \{0, \dots, k/2 - 1\}$ . Nota-se que a célula  $M[k + s - (k/2 - 1), k + k/2 + 1 + k/2 - 1] = M[k + 2, 2k]$  foi

colorida com a cor da célula  $M[k + 1, 2k] = k + 1 = M[0, k + 1]$ , que também é uma célula que representa uma aresta que não existe no grafo  $C_{2k+2}^k$ . Isso nos permite finalizar esse passo sem conflito de cores.

3. Para o caso  $s \in \{k/2+2, \dots, k\}$  trocaremos as cores das células  $M[k+s-r, k+s+r]$  pelas cores das células  $M[k+s-r-1, k+s+r]$ , com  $r \in \{0, \dots, k/2-1\}$ . Nota-se que neste caso todas as operações são feitas em módulo  $2k + 1$ . As células  $M[k+s-(k/2-1)-1, k+s+(k/2-1)] = M[k/2+s, (k+k/2+s-1) \pmod{(2k+1)}]$  representam arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$  e, assim, podemos parar o procedimento com uma coloração válida  $M$ .

Para colorir as células da coluna  $2k+1$  de  $M$ , usaremos o seguinte procedimento:  $M[k+i+1, 2k+1] = L[i, k+1]$ , representando as arestas que não existem no grafo. E  $M[i, 2k+1] = L[i, k]$ , representando as cores que foram trocadas durante o procedimento de recoloração, com  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . E a célula  $M[2k+1, 2k+1] = 2k$ , a única cor possível para obtermos uma coloração válida. O procedimento descrito pode ser visto na Tabela 3.1e.

Para mostrar que a matriz  $M$  é uma Coloração Total válida para o grafo  $C_{2k+2}^k$  é necessário mostrar que:

- As células da diagonal principal representam uma Coloração de Vértices válida: Já que usamos como base a coloração de  $L$ , a qual todas as células da diagonal principal foram coloridas com cores distintas, nós apenas precisamos nos preocupar com as cores que foram alteradas durante o procedimento. Mas como as cores das células  $M[k+i+1, k+i+1]$  foram trocadas pelas cores das células  $L[k+i, k+i+1] = (2k+2i+1) \pmod{(2k+1)} = 2i$ , com  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , e a cor  $2k$  foi atribuída para a célula  $M[2k+1, 2k+1]$ , podemos notar que a distância no ciclo é  $k+1$  e, portanto, temos uma Coloração de Vértices válida.
- Toda linha e coluna de  $M$ , com exceção das células que representam as arestas que não existem no grafo  $C_{2k+2}^k$ , não repetem cores: Visto que utilizamos como base a coloração do Quadrado Latino  $L$ , que têm como propriedade que cada linha e coluna é uma permutação de inteiros e, além disso, sempre que alteramos uma cor em uma célula verificamos a existência de conflito no processo, temos que  $M$  representa uma Coloração Total válida com  $2k+1 = \Delta(G) + 1$  cores.

Agora, para garantir a compatibilidade entre as colorações representadas por  $L$  e  $M$ , trocaremos a cor da células  $M[i, i]$  pelas cores das células  $M[i, i+1]$  em toda a matriz, com  $i \in \{0, \dots, k/2-2\}$  e  $k > 2$ . Nota-se que este procedimento não altera nenhuma propriedade supramencionada.

Assim,  $M$  e  $L$  representam uma Coloração Total *Tipo 1* dos grafos  $C_{2k+2}^k$  e  $C_{2k+1}^k$ , respectivamente, de tal maneira que o primeiro vértice do ciclo induzido é representado pelo primeiro vértice da linha (ou coluna) da matriz, o segundo vértice é representado pela segunda linha (ou coluna) e assim por diante.

Para mostrar que as colorações de  $C_{2k+2}^k$  e  $C_{2k+1}^k$  são compatíveis é preciso garantir que as condições da Definição 3.2 sejam satisfeitas.

Chamaremos  $C_{2k+2}^k$  de  $C_{n_1}^k$  e  $C_{2k+1}^k$  de  $C_{n_2}^k$ , o vértice  $v_i \in C_{n_1}^k$ , com  $i = k - 1$  e  $u_j \in C_{n_2}^k$  com  $j = k - 1$ .

Para mostrar que a restrição (a) da Definição 3.2 vale: Note que  $N^-(v_{i-1})$  tem vértices  $v_p$ , com  $p \in \{0, \dots, k - 1\}$ , e  $\mathcal{C}_1(v_p) = 2p$ . E note também que  $N^+(u_{j-1})$  tem vértices  $u_q$ , com  $q \in \{k, \dots, 2k - 1\}$ , e  $\mathcal{C}_2(u_q) = 2(q - k)$ , se  $q > k$  e se  $q = k$ ,  $\mathcal{C}_2(u_q) = 2k$ . Então a distância entre vértices com a mesma cor é  $k + 1$  e, claramente,  $N^-(v_{i-1})$  e  $N^+(u_{j-1})$  são compatíveis.

Para provar a condição (b) da Definição 3.2: Nota-se que  $N^+(v_{i-1})$  tem vértices  $v_p$ , com  $p \in \{k, \dots, 2k - 1\}$ , e  $\mathcal{C}_2(v_p) = 2(p - k)$ , se  $p > k$  e se  $p = k$ ,  $\mathcal{C}_1(v_p) = 2k$ . Nota-se que  $N^-(u_{j-1})$  tem vértices  $u_q$ , com  $q \in \{0, \dots, k - 1\}$ , e  $\mathcal{C}_1(u_q) = 2p + 1$ , se  $q \leq k/2 - 1$  e  $\mathcal{C}_1(u_q) = 2q$ , caso contrário.

Para provar a condição (c) da Definição 3.2: Já que utilizamos o mesmo Quadrado Latino  $L$  para gerar as Colorações Totais, as únicas células alteradas pelo procedimento de recoloração foram as células recoloridas no Item (1), que foram posteriormente alteradas para que  $M$  mantivesse as cores originais em tais células, garantindo a compatibilidade das Colorações Totais.

A Tabela 3.1b mostra a matriz  $M$  representando uma Coloração Total válida que é compatível com a coloração representada pelo Quadrado Latino  $L$ .  $\square$

O Lema 3.5 é utilizado no Teorema 3.7 para mostrar um de nossos principais resultados.

**LEMA 3.5.** Se  $z \geq a^2 - a$ ,  $\exists x, y \geq 0$ , tal que  $z = xa + y(a + 1)$ .

*Demonstração.* A prova será feita por indução em  $z$ . Se  $z = a^2 - a$ , então  $z = xa + 0(a + 1)$ , com  $x = a - 1$ . Suponha que para todo  $z_1 > a^2 - a$ ,  $z_1 = x_1a + y_1(a + 1)$ . Para  $z_2 = z_1 + 1$ : se  $x_1 > 0$ , então  $z_2 = (x_1 - 1)a + (y_1 + 1)(a + 1)$ . Se  $x_1 = 0$ , então:  $z_1 = 0a + y_1(a + 1)$  e como  $z_1 > a^2 - a$ ,  $y_1 \geq a - 1$ . Podemos escrever  $z_1 = (a + 1)(a - 1) + (y_1 - (a - 1))(a + 1) = a^2 - 1 + (y_1 - (a - 1))(a + 1)$  e então  $z_2 = x_2a + y_2(a + 1)$ , com  $x_2 = a$  e  $y_2 = y_1 - (a - 1)$ .  $\square$

Nota-se que o limitante mostrado no Lema 3.5 é bastante justo, uma vez que esse é um resultado clássico da Equação Linear Diofantina e sabemos que se  $z = a^2 - a - 1$ , então  $z = xa + y(a + 1)$  não possui soluções inteiras válidas.

**TEOREMA 3.6.** Se dois grafos Potência de Ciclo  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+2}^k$  são *Tipo 1*-compatíveis, então todo grafo  $C_n^k$ , com  $n \geq 4k^2 + 2k$  é *Tipo 1*.

*Demonstração.* Seguindo o Lema 3.5,  $n = x(2k + 1) + y(2k + 2)$ , então nós apenas precisamos colar o grafo  $C_{2k+1}^k$   $x$  vezes e o grafo  $C_{2k+2}^k$   $y$  vezes.  $\square$

**COROLÁRIO 3.7.** Todo grafo  $C_n^k$ , com  $k \geq 2$  par e  $n \geq 4k^2 + 2k$ , é *Tipo 1*.

*Demonstração.* Já que todo grafo  $C_{2k+1}^k$  é compatível com  $C_{2k+2}^k$  para  $k$  par, basta aplicarmos o Teorema 3.6.  $\square$

**PROPOSIÇÃO 3.8.** Se  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+2}^k$  são *Tipo 1*-compatíveis, então apenas  $2k^2 - k$  grafos  $C_n^k$ , com  $2k + 1 \leq n \leq 4k^2 + 2k$ , não são *Tipo 1*.

*Demonstração.* A prova pode ser feita por indução em  $s$ , que denota o número de grafos que serão colados.

Para  $s = 2$ , temos os grafos  $C_{4k+2}^k$ ,  $C_{4k+3}^k$  e  $C_{4k+4}^k$ , que têm uma Coloração Total *Tipo 1* apenas colando os grafos  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+1}^k$ . Nota-se que  $2k - 2$  grafos — os grafos  $C_n^k$  com  $2k + 3 \leq n \leq 4k + 1$  — não foram coloridos. Para  $s = 3$ , temos os grafos  $C_{6k+3}^k$ ,  $C_{6k+4}^k$ ,  $C_{6k+5}^k$ , e  $C_{6k+6}^k$ , a Coloração Total desses grafos pode ser obtida colando  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+2}^k$  nos grafos obtidos no passo em que  $s = 2$ . Nota-se que  $2k - 3$  grafos não foram coloridos. Para um dado  $3 < s < 2k$ , temos os grafos  $C_{(2s)k+s+l}^k$ , com  $l \in \{0, \dots, s\}$ , obtidos colando os grafos  $C_{2k+1}^k$  e  $C_{2k+2}^k$  nos grafos obtidos no passo  $s - 1$ . Nota-se que  $2k - s$  grafos não foram coloridos. E para todo  $C_n^k$ , com  $n \geq 4k^2 + 2k$ , todos os grafos são *Tipo 1*.

Nota-se que, para cada  $2 \leq s \leq 2k$ , apenas  $2k - s$  grafos não foram coloridos, portanto apenas  $2k^2 - k$  grafos não foram coloridos pelo procedimento descrito.  $\square$

### 3.3 Coloração Total dos Grafos $C_n^3$ e $C_n^4$

Nesta seção mostraremos a definição do Número Cromático para os grafos  $C_n^3$  e  $C_n^4$ .

**TEOREMA 3.9.** Um grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$  não completo, com  $k = 3$  ou  $k = 4$ , é *Tipo 2* se  $n$  é ímpar e  $k > n/3 - 1$  e *Tipo 1* caso contrário.

*Demonstração.* Primeiramente, nota-se que, em sua Tese de Doutorado, Campos [7] provou que a TCC vale para os grafos  $C_n^k$ , com  $k = 3$  e  $k = 4$  (Teorema 2.15). É possível usar o conjunto de *sementes* de Coloração Total apresentado nas Tabelas 3.2 e 3.3 para formar qualquer grafo  $C_n^k$ , com  $n \geq 14$ , se  $k = 3$  e  $n \geq 18$ , se  $k = 4$ .

Nota-se que toda vez que é feita uma colagem de duas Colorações Totais geramos outra Coloração Total que é compatível com todas as outras Colorações Totais do conjunto de sementes. Os grafos  $C_9^3$ ,  $C_{11}^3$ ,  $C_{11}^4$  e  $C_{13}^4$  são conhecidamente *Tipo 2*.

Então, os únicos grafos que não foram cobertos são os grafos  $C_{13}^3$ ,  $C_{15}^4$  e  $C_{17}^4$ , entretanto, os grafos  $C_{13}^3$  e  $C_{15}^4$  possuem uma coloração total *Tipo 1* mostrada em [7]. E mostraremos uma Coloração Total para o grafo  $C_{17}^4$  na Tabela 3.4.  $\square$

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_0$	0	4	1	5	2	6	3
$v_1$	4	1	5	2	6	3	0
$v_2$	1	5	2	6	3	0	4
$v_3$	5	2	6	3	0	4	1
$v_4$	2	6	3	0	4	1	5
$v_5$	6	3	0	4	1	5	2
$v_6$	3	0	4	1	5	2	6

(a)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$v_0$	0	3	1	5	-	2	6	4
$v_1$	3	1	4	2	6	-	5	0
$v_2$	1	4	2	6	3	0	-	5
$v_3$	5	2	6	3	1	4	0	-
$v_4$	-	6	3	1	0	5	4	2
$v_5$	2	-	0	4	5	1	3	6
$v_6$	6	5	-	0	4	3	2	1
$v_7$	4	0	5	-	2	6	1	3

(b)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	6	0	1	5	-	-	-	3	2	4
$v_1$	0	1	4	2	6	-	-	-	5	3
$v_2$	1	4	2	6	3	0	-	-	-	5
$v_3$	5	2	6	4	1	3	0	-	-	-
$v_4$	-	6	3	1	0	2	4	5	-	-
$v_5$	-	-	0	3	2	6	5	4	1	-
$v_6$	-	-	-	0	4	5	1	6	3	2
$v_7$	3	-	-	-	5	4	6	2	0	1
$v_8$	2	5	-	-	-	1	3	0	4	6
$v_9$	4	3	5	-	-	-	2	1	6	0

(c)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_0$	0	3	4	5	-	-	-	-	-	1	2	6
$v_1$	3	1	5	2	6	-	-	-	-	-	0	4
$v_2$	4	5	2	6	3	0	-	-	-	-	-	1
$v_3$	5	2	6	3	0	1	4	-	-	-	-	-
$v_4$	-	6	3	0	4	2	1	5	-	-	-	-
$v_5$	-	-	0	1	2	5	3	4	6	-	-	-
$v_6$	-	-	-	4	1	3	0	2	5	6	-	-
$v_7$	-	-	-	-	5	4	2	1	3	0	6	-
$v_8$	-	-	-	-	6	5	3	2	4	1	0	-
$v_9$	1	-	-	-	-	6	0	4	3	5	2	-
$v_{10}$	2	0	-	-	-	-	6	1	5	4	3	-
$v_{11}$	6	4	1	-	-	-	-	0	2	3	5	-

(d)

Tabela 3.2: Sementes iniciais de Coloração Total para colorir totalmente qualquer grafo  $C_n^3$ , com  $n \geq 14$ ; (a)  $C_7^3$ ; (b)  $C_8^3$ ; (c)  $C_{10}^3$ ; (d)  $C_{12}^3$ .

### 3.4 Todo Grafo Potência 5 ou 7 de Ciclo com muitos vértices é *Tipo 1*

Na presente seção apresentaremos resultados que mostram que todos os grafos  $C_n^5$ , com  $n \geq 110$ , e  $C_n^7$ , com  $n \geq 210$ , são *Tipo 1*.

**TEOREMA 3.10.** Todo grafo  $C_n^k$ , com  $k = 5$  ou  $k = 7$  e  $n \geq 4k^2 + 2k$ , é *Tipo 1*.

*Demonstração.* As Tabelas 3.5a e 3.5b mostram duas Colorações Totais *Tipo 1*-compatíveis dos grafos  $C_{11}^5$  e  $C_{12}^5$ . E as Tabelas 3.6a e 3.6b mostram duas Colorações Totais *Tipo 1*-compatíveis dos grafos  $C_{15}^7$  e  $C_{16}^7$ . Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.6.  $\square$

**PROPOSIÇÃO 3.11.** No máximo, apenas 45 grafos  $C_n^5$ , com  $n > 2k + 1 = 11$ , não são *Tipo 1*. E, no máximo, apenas 91 grafos  $C_n^7$ , com  $n > 2k + 1 = 15$ , não são *Tipo 1*.

*Demonstração.* Basta apenas aplicarmos a Proposição 3.8.  $\square$

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_0$	0	5	1	6	2	7	3	8	4
$v_1$	5	1	6	2	7	3	8	4	0
$v_2$	1	6	2	7	3	8	4	0	5
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	1
$v_4$	2	7	3	8	4	0	5	1	6
$v_5$	7	3	8	4	0	5	1	6	2
$v_6$	3	8	4	0	5	1	6	2	7
$v_7$	8	4	0	5	1	6	2	7	3
$v_8$	4	0	5	1	6	2	7	3	8

(a)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
$v_0$	0	4	1	6	2	-	5	8	7	3
$v_1$	4	1	0	2	7	3	-	6	5	8
$v_2$	1	0	2	7	3	8	4	-	6	5
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	-	1
$v_4$	2	7	3	8	4	5	6	0	1	-
$v_5$	-	3	8	4	5	0	7	1	2	6
$v_6$	5	-	4	0	6	7	1	3	8	2
$v_7$	8	6	-	5	0	1	3	2	4	7
$v_8$	7	5	6	-	1	2	8	4	3	0
$v_9$	3	8	5	1	-	6	2	7	0	4

(b)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_0$	8	0	1	6	2	-	-	-	7	4	3	5
$v_1$	0	1	5	2	7	3	-	-	-	6	8	4
$v_2$	1	5	2	7	3	8	4	-	-	-	0	6
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	-	-	-	1
$v_4$	2	7	3	8	5	1	6	0	4	-	-	-
$v_5$	-	3	8	4	1	0	2	6	5	7	-	-
$v_6$	-	-	4	0	6	2	8	3	1	5	7	-
$v_7$	-	-	-	5	0	6	3	1	8	2	4	7
$v_8$	-	-	-	-	4	5	1	8	2	0	6	3
$v_9$	4	6	-	-	7	5	2	0	3	1	8	-
$v_{10}$	3	8	0	-	-	7	4	6	1	5	2	-
$v_{11}$	5	4	6	1	-	-	7	3	8	2	0	-

(c)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$
$v_0$	0	4	1	6	2	-	-	-	-	7	5	8	3	-
$v_1$	4	1	5	2	7	3	-	-	-	-	6	0	8	-
$v_2$	1	5	2	7	3	8	4	-	-	-	-	6	0	-
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	-	-	-	-	1	-
$v_4$	2	7	3	8	4	0	1	6	5	-	-	-	-	-
$v_5$	-	3	8	4	0	5	2	1	6	7	-	-	-	-
$v_6$	-	-	4	0	1	2	6	3	7	5	8	-	-	-
$v_7$	-	-	-	5	6	1	3	0	2	8	4	7	-	-
$v_8$	-	-	-	-	5	6	7	2	1	3	0	8	4	-
$v_9$	-	-	-	-	-	7	5	8	3	2	6	0	1	4
$v_{10}$	7	-	-	-	-	8	4	0	6	3	1	2	5	-
$v_{11}$	5	6	-	-	-	-	7	8	0	1	4	3	2	-
$v_{12}$	8	0	6	-	-	-	-	4	1	2	3	5	7	-
$v_{13}$	3	8	0	1	-	-	-	-	4	5	2	7	6	-

(d)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$	$v_{15}$
$v_0$	0	4	1	6	2	-	-	-	-	-	5	7	3	8	-	-
$v_1$	4	1	0	2	7	3	-	-	-	-	-	6	8	5	-	-
$v_2$	1	0	2	7	3	8	4	-	-	-	-	-	5	6	-	-
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	-	-	-	-	-	1	-	-
$v_4$	2	7	3	8	4	0	1	6	5	-	-	-	-	-	-	-
$v_5$	-	3	8	4	0	5	2	1	6	7	-	-	-	-	-	-
$v_6$	-	-	4	0	1	2	6	3	7	5	8	-	-	-	-	-
$v_7$	-	-	-	5	6	1	3	7	2	0	4	8	-	-	-	-
$v_8$	-	-	-	-	5	6	7	2	0	4	3	1	8	-	-	-
$v_9$	-	-	-	-	-	7	5	0	4	1	6	2	3	8	-	-
$v_{10}$	-	-	-	-	-	-	8	4	3	6	2	5	7	0	1	-
$v_{11}$	-	-	-	-	-	-	-	8	1	2	5	3	6	4	7	0
$v_{12}$	5	-	-	-	-	-	-	-	8	3	7	6	4	1	0	2
$v_{13}$	7	6	-	-	-	-	-	-	-	8	0	4	1	5	2	3
$v_{14}$	3	8	5	-	-	-	-	-	-	-	1	7	0	2	6	4
$v_{15}$	8	5	6	1	-	-	-	-	-	-	-	0	2	3	4	7

(e)

Tabela 3.3: Sementes iniciais de Coloração Total para colorir totalmente qualquer grafo  $C_n^4$ , com  $n \geq 16$ . (a)  $C_9^4$ ; (b)  $C_{10}^4$ ; (c)  $C_{12}^4$ ; (d)  $C_{14}^4$ ; (e)  $C_{16}^4$ .

### 3.5 Decomposição de Grafos Potência de Ciclo

Chamaremos  $f(k)$  o número de colorações distintas de  $C_n^k[N[v]]$ .

O Teorema 3.12 mostra que todo grafo Potência de Ciclo com um certo número de vértices —  $n > f(k)$  — pode ser decomposto em grafos compatíveis de tamanho reduzido.

**TEOREMA 3.12.** Se  $n > f(k)$ , então  $C_n^k$  pode ser decomposto em dois grafos Potência de Ciclo  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$ , tal que  $n = n_1 + n_2$  e  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  são compatíveis.

*Demonstração.* Suponha que  $C_n^k$  tem uma Coloração Total com  $t$  cores e  $n > f(k)$ .

Já que  $n > f(k)$ , então, pelo princípio da casa dos pombos, existe ao menos um par de vértices  $w_x, w_y \in V(C_n^k)$  tal que  $C_n^k[N[w_x]]$  e  $C_n^k[N[w_y]]$  possuem a mesma Coloração Total (preservando a ordem cíclica dos elementos).

Assim, podemos decompor  $C_n^k$  em dois grafos Potência de Ciclo  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$ , com  $n_1 + n_2 = n$ , utilizando a mesma ideia aplicada no Teorema 3.3, com  $w_x$  representando o vértice  $v_j$  e  $w_y$  representando o vértice  $u_j$ . □

N. Trotignon e K. Vušković [35] definiram que uma decomposição é dita *extremal* se ao menos um dos blocos de decomposição é *simples*, i.e., não pode ser decomposto em blocos menores.

Se aplicarmos a ideia do Teorema 3.12 recursivamente, podemos gerar uma *árvore de decomposição extremal*, tal que: a raiz da árvore é o grafo Potência de Ciclo original, dois nós irmãos são grafos compatíveis, a colagem destes grafos gera o nó pai e todo

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$	$v_{15}$	$v_{16}$
$v_0$	0	4	1	6	2	-	-	-	-	-	-	-	-	5	8	3	7
$v_1$	4	1	0	2	7	3	-	-	-	-	-	-	-	-	5	8	6
$v_2$	1	0	2	7	3	8	4	-	-	-	-	-	-	-	-	6	5
$v_3$	6	2	7	3	8	4	0	5	-	-	-	-	-	-	-	-	1
$v_4$	2	7	3	8	4	1	5	0	6	-	-	-	-	-	-	-	-
$v_5$	-	3	8	4	1	0	2	6	5	7	-	-	-	-	-	-	-
$v_6$	-	-	4	0	5	2	1	3	7	6	8	-	-	-	-	-	-
$v_7$	-	-	-	5	0	6	3	2	1	4	7	8	-	-	-	-	-
$v_8$	-	-	-	-	6	5	7	1	3	0	2	4	8	-	-	-	-
$v_9$	-	-	-	-	-	7	6	4	0	5	1	2	3	8	-	-	-
$v_{10}$	-	-	-	-	-	-	8	7	2	1	0	3	5	6	4	-	-
$v_{11}$	-	-	-	-	-	-	-	8	4	2	3	1	6	0	7	5	-
$v_{12}$	-	-	-	-	-	-	-	-	8	3	5	6	2	7	0	1	4
$v_{13}$	5	-	-	-	-	-	-	-	-	8	6	0	7	3	1	4	2
$v_{14}$	8	5	-	-	-	-	-	-	-	-	4	7	0	1	6	2	3
$v_{15}$	3	8	6	-	-	-	-	-	-	-	-	5	1	4	2	7	0
$v_{16}$	7	6	5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	4	2	3	0	8

Tabela 3.4: Coloração Total do grafo  $C_{17}^4$ , com  $\Delta = 9$  cores.

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$
$v_0$	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$v_1$	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5	0
$v_2$	1	7	2	8	3	9	4	10	5	0	6
$v_3$	7	2	8	3	9	4	10	5	0	6	1
$v_4$	2	8	3	9	4	10	5	0	6	1	7
$v_5$	8	3	9	4	10	5	0	6	1	7	2
$v_6$	3	9	4	10	5	0	6	1	7	2	8
$v_7$	9	4	10	5	0	6	1	7	2	8	3
$v_8$	4	10	5	0	6	1	7	2	8	3	9
$v_9$	10	5	0	6	1	7	2	8	3	9	4
$v_{10}$	5	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10

(a)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_0$	0	2	1	6	3	8	-	9	5	10	7	4
$v_1$	2	1	0	7	8	3	9	-	4	5	10	6
$v_2$	1	0	2	8	7	9	4	10	-	6	5	3
$v_3$	6	7	8	3	2	4	10	5	0	6	1	-
$v_4$	3	8	7	2	4	10	5	0	6	1	-	9
$v_5$	8	3	9	4	10	5	1	2	7	0	6	-
$v_6$	-	9	4	10	5	1	0	6	3	7	2	8
$v_7$	9	-	10	5	0	2	6	1	8	4	3	7
$v_8$	5	4	-	0	6	7	3	8	2	9	1	10
$v_9$	10	5	6	-	1	0	7	4	9	3	8	2
$v_{10}$	7	10	5	9	-	6	2	3	1	8	4	0
$v_{11}$	4	6	3	1	9	-	8	7	10	2	0	5

(b)

Tabela 3.5: Sementes iniciais de Coloração Total  $C_n^5$ , com  $n \geq 110$ . Colorações Totais, usando  $\Delta + 1 = 11$  cores, dos grafos: (a)  $C_{11}^5$ ; (b)  $C_{12}^5$ .

nó folha é um bloco simples -  $C_{n_\ell}^k$ , com  $n_\ell \leq f(k)$ . Nota-se que esse procedimento nos leva a um algoritmo linear para decomposição de um grafo Potência de Ciclo.

### 3.6 Coloração Harmônica para Grafos Potência de Ciclo

Campos e de Mello mostraram que os grafos Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $n$  ímpar,  $2 \leq k$  e  $2k + 1 < n < 3(k + 1)$ , não possuem Coloração Harmônica. Nesta seção consideramos os demais grafos não completos da classe. E estabelecemos que todos admitem uma Coloração Harmônica.

**LEMA 3.13.** Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo. Se  $n$  é par e  $n \geq 4k + 2$ , ou se  $n$  é ímpar e  $n \geq 6k + 3$ , então  $C_n^k$  possui uma Coloração Harmônica.

*Demonstração.* Tome um grafo  $C_n^k$  que se adéqua às restrições do Lema 3.13. Se  $n = r(2k+1)$ , com  $r \equiv 0 \pmod{2}$ , então  $\mathcal{C}(v_i) = i \pmod{(2k+1)}$ ,  $v_i \in V(C_n^k)$ . Note que esta coloração é Harmônica, todas as classes de cores colorem  $r$  vértices e, além



	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0
$v_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1
$v_3$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2
$v_4$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3
$v_5$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4
$v_6$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5
$v_7$	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6
$v_8$	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7
$v_9$	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_{10}$	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{11}$	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_{12}$	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$v_{13}$	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{14}$	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

(a)

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$	$v_{15}$
$v_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	-	8	10	9	14	13	11	12
$v_1$	1	2	0	4	3	6	5	8	9	-	12	14	11	7	10	13
$v_2$	2	0	4	1	5	3	7	9	10	11	-	12	13	8	14	6
$v_3$	3	4	1	6	2	7	8	10	11	12	13	-	9	14	0	5
$v_4$	4	3	5	2	8	9	10	11	12	13	14	0	-	6	1	7
$v_5$	5	6	3	7	9	10	11	12	13	14	0	1	2	-	8	4
$v_6$	6	5	7	8	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	-	9
$v_7$	7	8	9	10	11	12	13	14	1	3	2	4	0	5	6	-
$v_8$	-	9	10	11	12	13	14	1	0	4	3	5	6	2	7	8
$v_9$	8	-	11	12	13	14	0	3	4	2	6	7	5	1	9	10
$v_{10}$	10	12	-	13	14	0	1	2	3	6	4	8	7	9	5	11
$v_{11}$	9	14	12	-	0	1	2	4	5	7	8	6	10	11	13	3
$v_{12}$	14	11	13	9	-	2	3	0	6	5	7	10	8	12	4	1
$v_{13}$	13	7	8	14	6	-	4	5	2	1	9	11	12	10	3	0
$v_{14}$	11	10	14	0	1	8	-	6	7	9	5	13	4	3	12	2
$v_{15}$	12	13	6	5	7	4	9	-	8	10	11	3	1	0	2	14

(b)

Tabela 3.6: Sementes iniciais de Coloração Total  $C_n^7$ , com  $n \geq 210$ . Colorações Totais, usando  $\Delta + 1 = 15$  cores, dos grafos: (a)  $C_{15}^7$ ; (b)  $C_{16}^7$ .

disso, vértices com cores iguais tem distância  $2k + 1$  e, portanto, não são adjacentes. Já se  $n$  não pode ser escrito como  $n = r(2k + 1)$ , para algum  $r$  inteiro tal que  $r \equiv n \pmod{2}$ , então tome o grafo de maior ordem  $C_{n_1}^k$ , tal que  $n_1 = r(2k + 1)$ , para algum inteiro  $r \equiv n \pmod{2}$  e atribua a  $C_{n_1}^k$  a mesma coloração atribuída anteriormente:  $\mathcal{C}(v_i) = i \pmod{(2k + 1)}$ ,  $v_i \in V(C_{n_1}^k)$ . Nota-se que  $n_1 \equiv n \pmod{2}$ , portanto, podemos adicionar  $n - n_1$  vértices, dois a dois, para gerar uma coloração para o grafo  $C_n^k$  a partir da coloração de vértices do grafo  $C_{n_1}^k$ . Cada par de vértices  $s_i$  será colorido com a cor  $i$ . Nota-se que  $n - n_1 < 4k + 2$ , portanto, adicionaremos no máximo  $2k$  conjuntos  $S_i$ . Já que partimos de uma coloração em que todo par de vértices coloridos com a cor  $i$  têm distância  $2k + 1$ , podemos adicionar  $\frac{n - n_1}{2}$  conjuntos de vértices  $S_i$ , sendo que o primeiro vértice de  $S_i$  será adicionado exatamente entre os vértices  $v_{i+k}$  e  $v_{i+k+1}$  e o segundo vértice será adicionado entre os vértices  $v_{n-k}$  e  $v_{n-k-1}$ . Nota-se que não há conflito de cores, já que a distância entre os vértices coloridos com uma cor  $i$  é no mínimo  $k + 1$ , o que garante que tais vértices não são adjacentes.  $\square$

**TEOREMA 3.14.** Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo, com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ . Se  $n$  é par, ou se  $n$  é ímpar e  $n \geq 3(k + 1)$ , então  $C_n^k$  possui uma Coloração Harmônica.

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em dois casos: Se  $n$  é par, todo grafo  $C_n^k$  não completo tem  $n \geq 2k + 2$  e utilizando-se do Lema 3.13, só precisamos atribuir uma Coloração Harmônica para os grafos  $C_n^k$  com  $n$  par tal que  $2k + 1 < n < 4k + 2$ , ou seja, os grafos  $C_{2k+2}^k, C_{2k+4}^k, \dots, C_{2k+2k}^k$ , mas cada um desses grafos pode ser colorido de forma Harmônica, sendo que cada cor irá colorir sempre dois elementos e a quantidade de cores utilizadas será  $n/2$  e os vértices que receberão a mesma cor serão os vértices antipodais do ciclo, ou seja, a distância entre dois vértices coloridos com a mesma cor será sempre maior ou igual a  $k + 1$ .

Já se  $n$  é ímpar,  $C_n^k$  com  $3(k + 1) \leq n < 3(2k + 1)$ , uma vez que utilizando-se do Lema 3.13 se  $n < 3(2k + 1)$  já temos uma Coloração Harmônica, podemos escrever

$n = 2x + 2k + 1$  para algum inteiro  $k \leq x \leq 2k$ . Se  $x > k$ , a coloração dos vértices de  $C_n^k$  será:  $\mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_{i+x}) = i$ , para todo  $0 \leq i \leq x - 1$ ; e  $\mathcal{C}(v_i) = i - 2x$ , para todo  $2x \leq i < n$ . Nota-se que a distância entre dois vértices coloridos com a mesma cor é sempre maior do que  $k + 1$ , portanto não há conflitos. Já se  $x = k$  podemos colorir os vértices da seguinte forma:  $\mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_{i+x+1}) = i$ , para todo  $0 \leq i \leq x - 1$ ;  $\mathcal{C}(v_i) = i - 2x - 1$ , para todo  $2x + 1 < i < n$ ;  $\mathcal{C}(v_x) = 2k$  e  $\mathcal{C}(v_{2x+1}) = 2k + 1$ . Nota-se que a menor distância entre vértices da mesma cor também é  $k + 1$ , portanto não são adjacentes.  $\square$

**COROLÁRIO 3.15.** Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo não completo.  $C_n^k$  não possui uma Coloração Harmônica se e somente se  $n$  é ímpar,  $2 \leq k$  e  $k > n/3 - 1$ .

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Por contrapositiva do Teorema 3.14. Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo não completo. Se  $C_n^k$  possui uma Coloração Harmônica, então  $n$  é par, ou  $n$  é ímpar e  $n \geq 3(k + 1)$ .

( $\leftarrow$ ) Seja  $C_n^k$  um grafo Potência de Ciclo não completo. Se  $C_n^k$  tem  $n$  ímpar,  $2 \leq k$  e  $k > n/3 - 1$ , então  $C_n^k$  não possui Coloração Harmônica. Suponha que  $C_n^k$  possua uma Coloração Harmônica. Pelo Lema 2.7 [8], isso é um absurdo.  $\square$

# Capítulo 4

## Conclusão e Trabalhos Futuros

Apesar dos diversos trabalhos relacionados ao Problema da Coloração Total, a TCC ainda está longe de ser provada, já que permanece em aberto para classes restritas de grafos. Motivado principalmente pela TCC, o presente trabalho visou abordar o problema da Coloração Total em uma classe de grafos relevante que já tivesse sido estudada no problema da Coloração Total e também em outros problemas de coloração. Por este motivo, a classe dos grafos Potência de Ciclo foi escolhida. Os grafos Potência de Ciclo são superclasse dos grafos Ciclo e dos grafos Completos, duas das classes mais relevantes e estudadas quando tratamos de qualquer problema na Teoria dos Grafos.

A notável Conjectura 2.16 afirma que um grafo  $C_n^k$ , com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ , é *Tipo 2* se e somente se  $n$  é ímpar e  $k > n/3 - 1$ . O Lema 2.7 estabelece que um grafo  $C_n^k$ , com  $2 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n$  ímpar e  $k > n/3 - 1$  não é Harmônico, e portanto não é *Tipo 1*. Para os grafos  $C_n^k$ , com  $k < \lfloor n/2 \rfloor$ , apresentamos no Teorema 3.14 Colorações Harmônicas para todo  $n$  par e para todo  $n$  ímpar com  $k \leq n/3 - 1$ , uma condição necessária para a validade da Conjectura 2.16. Nota-se que isso implica que os únicos grafos Potência de Ciclo que não possuem Coloração Harmônica são precisamente os grafos  $C_n^k$ , com  $k < \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n$  ímpar e  $k > 3/n - 1$ , um indício de que a Conjectura 2.16 de Campos e de Mello é válida.

Ademais, apresentamos uma técnica de composição de colorações totais de grafos Potência de Ciclo que nos permitiu mostrar que todo grafo Potência de Ciclo  $C_n^k$ , com  $k$  par, ou  $k = 5$ , ou  $k = 7$ , e  $n \geq 4k^2 + 2k$  é *Tipo 1*, mais do que isso, mostramos que se  $k$  é par, ou  $k = 5$ , ou  $k = 7$ , temos apenas  $2k^2 - k$  grafos não completos que não possuem uma coloração *Tipo 1*, o que mostra outra forte evidência em relação à Conjectura 2.16. Utilizando a mesma técnica, mostramos a definição do Número Cromático Total para os grafos  $C_n^3$  e  $C_n^4$ . Os resultados apresentados no Capítulo 3 podem ser vistos na Tabela 4.1. Os resultados da Seção 3.6 foram omitidos da Tabela 4.1, já que não apresentam uma Coloração Total.

Além disso, mostramos que qualquer grafo  $C_n^k$ , com  $n > f(k)$ , possui uma de-

k \ n	2k+1	2k+2	...	4k+1	4k+2	4k+3	4k+4	4k+5	...	n ≥ 4k <sup>2</sup> +2k
3	Δ+1	Δ+1	...	Δ+1	Δ+1	Δ+1	Δ+1	Δ+1	...	Δ+1
4	Δ+1	Δ+1	...	Δ+1	Δ+1	Δ+1	Δ+1	Δ+1	...	Δ+1
5	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
6	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
7	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
8	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
9	Δ+1	Δ+1	...	O	TCC	O	TCC	O	...	-
10	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
11	Δ+1	Δ+1	...	O	TCC	O	TCC	O	...	-
12	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
13	Δ+1	Δ+1	...	O	TCC	O	TCC	O	...	-
14	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	-
k par	Δ+1	Δ+1	...	O	Δ+1	Δ+1	Δ+1	O	...	Δ+1
k ímpar	Δ+1	Δ+1	...	O	TCC	O	TCC	O	...	-

Tabela 4.1: As contribuições do presente trabalho para Coloração Total em grafos Potência de Ciclo. Destacamos as linhas  $k = 3$  e  $k = 4$ , onde a TCC já estava estabelecida e por isso foi possível obter a classificação completa. Nas demais linhas a TCC ainda está aberta. Os resultados omitidos podem ser vistos na Tabela 2.2 sobre o estado da arte.

composição *extremal*, o que gera um algoritmo polinomial, com  $k$  fixo, para resolver o problema na classe. O mesmo resultado também mostra que, para um dado  $k$ , o número de grafos que precisamos analisar para colorir todos os grafos  $C_n^k$  é finito.

## 4.1 Resultados Relacionados ao VGNC

O artigo que inicialmente motivou o estudo da Coloração Total foi o artigo de Golubic [23]. A presente seção relaciona o trabalho referido com a presente pesquisa. Golubic utiliza o Algoritmo 2.1 VGNC para colorir os vértices de um grafo  $G$  de forma própria, após isso, utilizando a coloração dos vértices como base, faz uso de um Quadrado Latino para colorir as arestas do grafo. O Quadrado Latino será representado por  $M_k$ .

O Teorema 4.1 mostra que o resultado de Golubic está relacionado com o resultado de de Figueiredo, Meidanis e de Mello [21] que também faz uso de uma Coloração de vértices do grafo  $G^2$  para realizar posteriormente uma Coloração Total válida.

**TEOREMA 4.1.** A técnica de Golubic colore totalmente um grafo  $G$  se e somente se o algoritmo VGNC colore os vértices  $G^2$  de forma própria e com exatamente  $\Delta(G) + 1$  cores.

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Suponha que o algoritmo VGNC colore os vértices do grafo  $G^2$  com  $\Delta(G) + 1$  cores de forma própria. Para verificarmos se a coloração total é válida para  $G$  precisamos verificar que:

- Não há conflito entre vértices: Tome dois vértices  $u, v \in V(G)$ , tal que  $uv \in E(G)$ , então  $\mathcal{C}(u) \neq \mathcal{C}(v)$ .
- Não há conflito entre vértice e arestas: Tome um vértice  $u \in V(G)$  e uma aresta  $uv \in E(G)$ , então  $\mathcal{C}(u) \neq \mathcal{C}(uv)$ , já que na diagonal principal da matriz  $M_k$  não há repetição de vértices.
- Não há conflito entre arestas: Tome duas arestas  $uv, uw \in E(G)$ , então  $\mathcal{C}(uv) \neq \mathcal{C}(uw)$ .

Se os vértices de  $G^2$  foram coloridos de forma própria, então os vértices de  $G$  também foram coloridos de forma própria. Ou seja, vértices adjacentes receberam cores distintas. Como a aresta  $uv$  recebeu a cor  $M_{\mathcal{C}(u), \mathcal{C}(v)}$  e  $\mathcal{C}(u) \neq \mathcal{C}(v)$ , então pelas propriedades da matriz  $M_k$ ,  $\mathcal{C}(uv) \neq \mathcal{C}(u)$  e  $\mathcal{C}(uv) \neq \mathcal{C}(v)$ . Agora, para o conflito de arestas com arestas. Tome duas arestas  $uv, uw \in E(G)$ , note que as cores de cada aresta correspondem a uma posição na matriz  $M_k$  e se  $\mathcal{C}(w) \neq \mathcal{C}(v)$ , as cores de  $uv$  e  $uw$  corresponderão a posições na mesma linha/coluna da matriz  $M_k$ , entretanto, em células distintas, portanto pelas propriedades da matriz  $M_k$ , teremos cores distintas atribuídas às arestas  $uv$  e  $uw$ .

( $\leftarrow$ ) Suponha que o algoritmo de Coloração Total não colore os vértices de  $G^2$  de forma própria com  $\Delta(G) + 1$  cores. Primeiro, note que o VGNC, por definição, nunca usará mais do que  $\Delta(G) + 1$  cores.

Agora, suponha que o VGNC tenha colorido  $G^2$  de forma não própria, ou seja, em  $G^2$  existem dois vértices  $u, v \in V(G)$ , tal que  $uv \in E(G^2)$  e  $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$ . Se  $uv \in E(G)$ , então temos um conflito entre vértices e a coloração total não é válida. Se  $uv \notin E(G)$ , então existe vértice  $w \in V(G)$ , tal que  $uw, vw \in E(G)$ . Nesse caso, no segundo passo do algoritmo de Coloração Total, as arestas  $uw, vw$  receberão a mesma cor, o que gera uma Coloração Total não válida.

Agora, se VGNC não coloriu os vértices de  $G^2$  com  $\Delta(G) + 1$  cores, tome um  $\Delta$ -vértice  $w \in V(G)'$ . Pelo princípio da casa dos pombos dois vértices em  $N[w]$  receberam cores iguais, já que  $N[w] = \Delta(G) + 1$  e o VGNC usou menos do que  $\Delta(G) + 1$  cores para colorir  $G^2$ . Então, se  $\mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(v)$ , tal que  $v \in N(w)$ , então a coloração é não própria, o que torna a Coloração Total inválida. Já que dois vértices  $u, v \in N(w)$  receberam a mesma cor, as arestas  $uw$  e  $wv$  receberão a mesma cor, o que torna a Coloração Total não própria.  $\square$

O Teorema 4.3 em conjunto com o Lema 4.2 mostra que o Algoritmo VGNC colore de forma própria e ótima uma família de grafos Potência de Ciclo.

**LEMA 4.2.** O Algoritmo VGNC, tomando como entrada a sequência de vértices do ciclo iniciando do vértice  $v_{k+1}$ , ou seja  $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ , colore o grafo  $G = C_n^{2k}$ , de forma que  $\mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_{i-(2k+1)})$  e a coloração de  $G[v_{i-(2k+1)}, \dots, v_{i-1}]$  é própria, para  $2k + 1 < i \leq n$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar por indução. Seja  $step(v_i)$  a iteração em que o vértice  $v_i$  foi colorido. *Base:*  $i = 2k + 2$ , então  $c(v_i) = c(v_1)$ . Se  $i = 2k + 2$ , então  $step(v_i) = k + 2$ . Sendo que  $N[v_{k+2}]$  é formada por todos os vértices  $v_j$ , com  $2 \leq j \leq 2k + 1$ , essas cores são distintas, já que foram coloridas por  $v_{k+1}$  no primeiro passo do algoritmo. Ou seja, foram usadas  $2k$  cores distintas na coloração parcial da vizinhança fechada de  $v_{k+2}$ , portanto o VGNC só poderá atribuir uma cor para  $v_{2k+2}$ . Suponha por absurdo que esta cor seja diferente de  $\mathcal{C}(v_1)$ , então, pelo princípio da casa dos pombos a cor de  $\mathcal{C}(v_{2k+2})$  será igual a uma das cores da vizinhança de  $v_{k+2}$ , um absurdo.

*Hipótese:* Para todo vértice  $v_i$ ,  $i > 2k + 2$ ,  $\mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_{i-2k+1})$  e a coloração parcial de  $G[v_{i-(2k+1)}, \dots, v_{i-1}]$  é própria.

*Passo de indução:* Tome um vértice  $v_i$ , com  $i > 2k + 2$ , note que em  $G[v_1, \dots, v_{i-1}]$  a hipótese de indução vale. Note que  $step(v_i) = step(v_{i-k})$ , como a coloração de  $G[v_{i-(2k+1)}, \dots, v_{i-1}]$  é própria então todo vértice de  $v_j$ , com  $i - 2k \leq j \leq i - 1$  recebeu uma cor distinta, ou seja temos  $2k = \Delta(G)$  cores na vizinhança de  $v_{i-k}$ , assim, suponha que  $c(v_i) \neq \mathcal{C}(v_{i-(2k+1)})$ . Se  $v_i$  recebeu uma cor diferente de  $v_{i-(2k+1)}$ , o VGNC irá atribuir uma cor presente em  $N[v_{i-k}]$ , um absurdo.  $\square$

**TEOREMA 4.3.** A coloração VGNC do grafo  $C_n^k$  é própria se  $n$  é múltiplo de  $2k + 1$ .

*Demonstração.* O Lema 4.2 mostra que para toda aresta  $v_i v_j \in E(G)$ , com  $i < j$  e  $j - i \leq 2k$ ,  $\mathcal{C}(v_i) \neq \mathcal{C}(v_j)$ . Então, nos basta mostrar que  $\mathcal{C}(v_i) \neq \mathcal{C}(v_j)$  para as arestas  $v_i v_j \in E(G)$ , tal que  $i + n - j \leq 2k$ . Ainda pelo Lema 4.2, já que  $n$  é múltiplo de  $2k + 1$ ,  $\mathcal{C}(v_n) = \mathcal{C}(v_{2k+1})$  e  $\mathcal{C}(v_{n-1}) = \mathcal{C}(v_{2k})$ , sendo assim, podemos generalizar para  $\mathcal{C}(v_{n-l}) = \mathcal{C}(v_{2k+1-l})$ , com  $0 \leq l \leq 2k$ .

Note que  $i + n - j \leq 2k$ , então  $i, n - j \leq 2k$ . Temos que  $\mathcal{C}(v_{n-j}) = \mathcal{C}(v_i) = \mathcal{C}(v_{2k+1-j})$ , mas isso é absurdo, já que ambos  $v_i$  e  $v_{2k+1-j}$ , foram coloridos pelo vértice  $v_k$  na primeira iteração do algoritmo.  $\square$

O Lema 4.4 foi mostrado por Campos em sua Tese de Doutorado e mostra que  $G^2$  de um grafo Potência de Ciclo também é um grafo Potência de Ciclo.

**LEMA 4.4** ([7]). O grafo  $G_1 = (C_n^k)^2$  é isomorfo a  $G_2 = C_n^{2k}$ .

**COROLÁRIO 4.5.** Tome  $G = C_n^k$ , com  $n$  múltiplo de  $2k + 1$ , então  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1 = 2k + 1$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 4.4, temos que  $(C_n^k)^2$  pode ser colorido pelo algoritmo VGNC com  $2k + 1 = \Delta(G) + 1$  cores e portanto, usando o Teorema 4.1, podemos colorir o grafo  $C_n^k$ , se  $n$  é múltiplo de  $2k + 1$ , com  $\Delta(G) + 1$  cores, já que  $\Delta(G)$  é par.  $\square$

## 4.2 Resultados Preliminares em Coloração Total Equilibrada

Já no final das pesquisas, tivemos acesso à uma Dissertação de Mestrado de Anderson Gomes da Silva [18] que nos motivou a estudar as Colorações Totais geradas no presente trabalho sob a luz das Colorações Totais Equilibradas, e os resultados preliminares são apresentados na presente seção.

Um problema intrigante relacionado ao Problema da Coloração Total é o Problema da Coloração Total Equilibrada, que se encontra aberto para classes de grafos bastante restritas. Ao contrário do que acontece em Coloração de Arestas Equilibrada, existem grafos que possuem uma Coloração Total com  $t$  cores, entretanto, não possuem Coloração Total Equilibrada com  $t$  cores [19].

Dantas et al. [19] mostram uma propriedade interessante da Coloração Total Equilibrada para grafos regulares:

**PROPOSIÇÃO 4.6.** Seja  $G$  um grafo regular *Tipo 1* e  $\mathcal{C}_G$  uma Coloração Total de  $G$ . As três afirmações a seguir são equivalentes:

- $\mathcal{C}_G$  é Equilibrada;
- A Coloração de Arestas de  $\mathcal{C}_G$  é Equilibrada;
- A Coloração de Vértices de  $\mathcal{C}_G$  é Quase Equilibrada (o número de vértices coloridos por cada classe de coloração difere em no máximo 2).

A Proposição 4.6 nos permite mostrar apenas que uma das condições é verdade.

O próximo teorema mostra que, para uma família infinita de grafos Potência de Ciclo, a técnica apresentada na Seção 3.2 gera uma Coloração Total Equilibrada ótima.

**TEOREMA 4.7.** Se  $C_n^k$  pode ser decomposto em dois grafos  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$ , tal que  $n = n_1 + n_2$ ,  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}, \mathcal{C}_{C_{n_2}^k} \leq t$ ,  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}$  e  $\mathcal{C}_{C_{n_2}^k}$  são Equilibradas, e todas as classes de coloração de  $C_{n_1}^k$  colorem a mesma quantidade de elementos, então  $\chi_{T_e}(C_n^k) \leq t$ .

*Demonstração.* Já que todas as classes de coloração de  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}$  colorem a mesma quantidade de elementos e a quantidade de elementos que cada classe de coloração de  $\mathcal{C}_{C_{n_2}^k}$  colore difere em no máximo um elemento, a colagem de  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$  continua

sendo equilibrada, uma vez que no processo de colagem apresentado na Definição 3.2 a quantidade de elementos que uma dada classe de coloração de  $C_n^k$  colore é dada pela soma das classes de coloração equivalente em  $C_{n_1}^k$  e  $C_{n_2}^k$ .  $\square$

Com o Teorema 4.7, provamos que algumas famílias de grafos, além de possuírem uma Coloração Total ótima, também possuem uma Coloração Total Equilibrada ótima.

Outro resultado relacionado a Coloração Total Equilibrada é o Teorema 3.14, que, além de gerar uma Coloração Harmônica, também gera uma Coloração de Vértices Quase Equilibrada para tais grafos. Isso é um indício de que para a classe dos grafos Potência de Ciclo  $\chi_T(C_n^k) = \chi_{T_e}(C_n^k)$ .

### 4.3 Coloração de Arestas em Prismas Complementares e outros Problemas em Aberto

Também na reta final das pesquisas tivemos acesso à Tese de Doutorado de Leandro Miranda Zatesko [41], que trata do Problema da Coloração de Arestas. Em um dos resultados apresentados na tese, Zatesko mostrou uma técnica para colorir todos os grafos *Prismas* ( $GG$ ), *Prismas Complementares* ( $G\overline{G}$ ) com  $\Delta(G) \neq \Delta(\overline{G})$ , e *Prismas Complementares* ( $G\overline{G}$ ) com  $\Delta(G) = \Delta(\overline{G})$  não regulares, provando que estes grafos são todos *Classe 1*.

Uma família de grafos Prismas Complementares regulares é formada através dos grafos Potência de Ciclo: os grafos  $C_{4k+1}^k \overline{C_{4k+1}^k}$ . Como para os grafos Prismas Complementares regulares, o Problema da Coloração de Arestas ainda permanece aberto, podemos definir como trabalho futuro determinar o Índice Cromático na família  $C_{4k+1}^k \overline{C_{4k+1}^k}$ .

Além dos trabalhos supraditos, podemos apontar diversos rumos como trabalhos futuros, como por exemplo, mostrar que  $C_{2k+1}^k$  é compatível com  $C_{2k+2}^k$ , para  $k$  ímpar. No presente trabalho mostramos que isso vale para  $k = 3$ ,  $k = 5$  e  $k = 7$ , o que é um indício de que vale para os demais valores de  $k$  ímpar. Outra ideia é utilizar as mesmas ferramentas mostradas no presente trabalho, para realizar a composição e decomposição dos grafos Potência de Ciclo, para outras classes de grafos, preferencialmente, as classes em que todo grafo pode ser decomposto em outros grafos da mesma classe.

Uma pergunta bastante interessante que permanece em aberto é a complexidade de encontrarmos uma Coloração Harmônica para grafos gerais. Essa pergunta, como discutimos na Seção 3.6, representa um passo importante para mostrar que um grafo não é *Tipo 1* e ainda permanece aberto para grafos no geral. De fato, durante a nossa pesquisa não foram encontrados trabalhos endereçados para resol-



ver esse problema, portanto as únicas Colorações Harmônicas que conhecemos são as Colorações Harmônicas geradas por Colorações Totais *Tipo 1*. Esse tópico representa um estudo relevante, já que durante a pesquisa não foram encontrados estudos sobre o assunto, embora apresente uma importância significativa para a resolução do Problema da Coloração Total. Outro tópico de interesse é aproveitar a Coloração Harmônica Equilibrada mostrada no presente trabalho para gerar Colorações Totais Equilibradas *Tipo 1* para outros grafos.

Em relação a outras colorações, como por exemplo a Coloração Total Equilibrada, as técnicas apresentadas no presente trabalho, geram, na sua maioria, grafos que possuem uma Coloração Total não equilibrada. Sempre que compomos uma Coloração Total de um grafo  $\mathcal{C}_{C_n^k}$  a partir de duas colorações totais  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}$  e  $\mathcal{C}_{C_{n_2}^k}$ , tal que uma classe de coloração  $\alpha$ , pertencente às colorações de  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}$  e de  $\mathcal{C}_{C_{n_2}^k}$ , colore um elemento a mais do que uma classe de coloração  $\beta$  de  $\mathcal{C}_{C_{n_1}^k}$  e  $\mathcal{C}_{C_{n_2}^k}$ , a coloração gerada pela composição será desequilibrada. Entretanto, um caminho é investigar formas de alterar essa coloração gerada para torná-la equilibrada.

Outra possibilidade é a investigação da aplicação da técnica em outros problemas não abordados no presente trabalho, como por exemplo a Coloração Total AVD<sup>1</sup> que também é um problema bastante desafiador. Como a técnica aqui apresentada possibilita a colagem de dois grafos coloridos de forma total, desde que tais colorações sejam AVD a técnica também funcionaria, sob as devidas restrições.

---

<sup>1</sup>Do inglês, Adjacent-vertex-distinguishing-total coloring

# Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, S. M., BELOTTI, J. T., OMAI, M. M., E BRIM, J. F. H. The total coloring of the 3rd and 4th powers of cycles. *Apresentado no VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs* (2014), 257–265.
- [2] APPEL, K., E HAKEN, W. Every planar map is four colorable. *Mathematical Solitaires & Games* (1980), 145.
- [3] BEHZAD, M. *Graphs and their chromatic numbers*. Phd thesis, Michigan State University, 1965.
- [4] BEHZAD, M., CHARTRAND, G., E COOPER, J. K. The colour numbers of complete graphs. *Journal of the London Mathematical Society s1-42* (1967), 226–228.
- [5] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K., E WILSON, R. J. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, 1999.
- [6] BOJARSHINOV, V. A. Edge and total coloring of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics 114*, 1-3 (2001), 23–28.
- [7] CAMPOS, C. N. *O problema da coloração total em classes de grafos*. Tese de D.Sc., Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas, SP, Brasil, 2006.
- [8] CAMPOS, C. N., E DE MELLO, C. P. Coloração total do  $C_n^2$ . *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional 4* (2003), 177–186.
- [9] CAMPOS, C. N., E DE MELLO, C. P. A result on the total colouring of powers of cycles. *Discrete Applied Mathematics 155* (2007), 585–597.
- [10] CHARTRAND, G., E ZHANG, P. *Chromatic Graph Theory*, 1 ed. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [11] CHEN, B. L., DONG, L., LIU, Q. Z., E HUANG, K. C. Total colorings of equibipartite graphs. *Discrete Mathematics 194* (1999), 59–65.

- [12] CHEN, B. L., E FU, H. L. Total colorings of graphs of order  $2n$  having maximum degree  $2n-2$ . *Graphs and Combinatorics* 8, 2 (1992), 119–123.
- [13] CHEN, B. L., FU, H. L., E KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 17 (1995), 137–146.
- [14] CHETWYND, A. G., E HILTON, A. J. W. The chromatic index of graphs of even order with many edges. *J. Graph Theory* 8 (1984), 463–470.
- [15] CHETWYND, A. G., E HILTON, A. J. W. Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congressus Numerantium* 66 (1988), 195–216.
- [16] CHETWYND, A. G., HILTON, A. J. W., E CHENG, Z. The total chromatic number of graphs of high minimum degree. *Journal of the London Mathematical Society s2-44* (1991), 193–202.
- [17] CHEW, K. H., E YAP, H. P. Total chromatic number of complete  $r$ -partite graphs. *Journal of Graph Theory* 16 (1992), 629–634.
- [18] DA SILVA, A. G. *Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos*. Dissertação de M.Sc., Pontífca Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018.
- [19] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., MAZZUCCOLO, G., PREISSMANN, M., DOS SANTOS, V. F., E SASAKI, D. On the equitable total chromatic number of cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics* 209 (2016), 84 – 91.
- [20] DANTAS, S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., MAZZUCCOLO, G., PREISSMANN, M., DOS SANTOS, V. F., E SASAKI, D. On the total coloring of generalized Petersen graphs. *Discrete Mathematics* 339, 5 (2016), 1471–1475.
- [21] DE FIGUEIREDO, C. M. H., MEIDANIS, J., E DE MELLO, C. P. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information Processing Letters* 70 (1999), 147–152.
- [22] FILHO, H. B. M., DANTAS, S., MACHADO, R. C. S., E FIGUEIREDO, C. M. H. Biclique-colouring verification complexity and biclique-colouring power graphs. *Discrete Applied Mathematics* 192 (2015), 65 – 76.
- [23] GOLUBIC, M. C. Information processing letters. *Total coloring of rooted path graphs* 135 (2018), 73–76.

- [24] HILTON, A. J. W. Recent results on edge-colouring graphs, with applications to the total-chromatic number. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 3 (1988), 121–134.
- [25] HILTON, A. J. W., HOLROYD, F. C., E ZHAO, C. The overfull conjecture and the conformability conjecture. *Discrete Mathematics* 241, 1 (2001), 343 – 361.
- [26] HOLYER, I. The  $\mathcal{NP}$ -completeness of edge-colouring. *SIAM Journal on Computing* 10, 4 (1981), 718–720.
- [27] ISOBE, S., ZHOU, X., E NISHIZEKI, T. Total colorings of degenerate graphs. *Combinatorica* 27 (2007), 167–182.
- [28] KARP, R. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, R. Miller e J. Thatcher, Eds. Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
- [29] MACHADO, R. C. S., E DE FIGUEIREDO, C. M. H. Total chromatic number of {square, unichord}-free graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 36 (2010), 671–678.
- [30] MCDIARMID, C. J. H. The solution of a timetabling problem. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* 4 (1972), 23–24.
- [31] MCDIARMID, C. J. H., E SÁNCHEZ-ARROYO, A. Total colouring regular bipartite graphs is np-hard. *Discrete Mathematics* 3 (1993), 155–162.
- [32] MEIDANIS, J. Edge coloring of cycle power is easy. *Unpublished*  
 URL: <http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/research/edge/cpowers.ps>  
 (1998).
- [33] SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is np-hard. *Discrete Mathematics*. 36-1 (1989), 315–319.
- [34] SANDERS, D. P., E ZHAO, Y. On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven. *Journal of Graph Theory* 31, 1 (1999), 67–73.
- [35] TROTIGNON, N., E VUŠKOVIĆ, K. A structure theorem for graphs with no cycle with an unique chord and its consequences. *Journal of Graph Theory* 63 (1994), 31–67.
- [36] VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph (em russo). *Diskret. Analiz.* 3 (1964), 25–30.

- [37] VIZING, V. G. The chromatic class of a multigraph. (em russo). *Metody Diskret. Analiz.* 3 (1965), 25–30.
- [38] WANG, H., LIU, B., WANG, X., TONG, G., WU, W., E GAO, H. Total coloring of planar graphs without adjacent chordal 6-cycles. *Journal of Combinatorial Optimization* 34 (2016), 257–265.
- [39] WANG, H., WU, L., WU, W., PARDALOS, P. M., E WU, J. Minimum total coloring of planar graph. *Journal of Global Optimization* 60, 4 (2014), 777–791.
- [40] YAP, H. P. *Total Colourings of Graphs*, 1 ed. Springer; 1996 edition, 1996.
- [41] ZATESKO, L. M. *Novel procedures for graph edge-colouring*. Tese de D.Sc., Federal University of Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 2018.