COPPE UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

ESTUDO DA COMPLEXIDADE DE GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ): RECONHECIMENTO, PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE

Sancrey Rodrigues Alves

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Sulamita Klein
Luerbio Faria
Fernanda Vieira Dias Couto

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

ESTUDO DA COMPLEXIDADE DE GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ): RECONHECIMENTO, PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE

Sancrey Rodrigues Alves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

____
Profª. Sulamita Klein, D.Sc.

____
Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

____
Profª. Fernanda Vieira Dias Couto, D.Sc.

____
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

____
Profª. Raquel de Souza Francisco Bravo, D.Sc.

____
Prof. Rommel Melgaço Barbosa, D.Sc.

____
Prof. Uéverton dos Santos Souza, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2019

Alves, Sancrey Rodrigues

Estudo da Complexidade de Grafos Bem Cobertos-(r, ℓ): Reconhecimento, Problemas Sanduíche e Probe/Sancrey Rodrigues Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XI, 81 p.: il.; $29,7$cm.

Orientadores: Sulamita Klein
Luerbio Faria
Fernanda Vieira Dias Couto

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 79.

1. Teoria dos Grafos. 2. Partições em Grafos. 3. Grafos Bem Cobertos. 4. Problemas Sanduíche. 5. Problemas Probe. 6. Complexidade Parametrizada. I. Klein, Sulamita *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDO DA COMPLEXIDADE DE GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ): RECONHECIMENTO, PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE

Sancrey Rodrigues Alves

Dezembro/2019

Orientadores: Sulamita Klein
Luerbio Faria
Fernanda Vieira Dias Couto

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma *partição*-(r, ℓ) de um grafo G é uma partição do seu conjunto de vértices em r conjuntos independentes e ℓ cliques. Um grafo é chamado de *grafo*-(r, ℓ) se admite uma partição-(r, ℓ). Um grafo é *bem coberto* se todo conjunto independente maximal é máximo. Um grafo é um *grafo bem coberto*-(r, ℓ) se é, ao mesmo tempo, (r, ℓ) e bem coberto. Neste trabalho consideramos dois tipos de problemas de decisão distintos. No problema GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ) (abreviadamente GBC(r, ℓ)), o grafo G é dado, e quer-se decidir se o grafo G é um grafo-(r, ℓ) bem coberto. No problema GRAFOS-(r, ℓ) BEM COBERTOS (abreviadamente G(r, ℓ)BC) é dado um grafo-(r, ℓ) como entrada juntamente com uma partição de $V(G)$ em r conjuntos independentes e ℓ cliques, e a pergunta é se G é bem coberto.

No contexto dos PROBLEMAS SANDUÍCHE, consideramos a classe dos grafos bem cobertos-(r, ℓ) que são reconhecidos em tempo polinomial, a saber: $(0,1), (1,0), (0,2), (2,0), (1,1)$ e $(1,2)$. Resolvemos este problema para cinco das seis classes, e o problema permanece em aberto apenas quando $(r, \ell) = (2,0)$. Também apresentamos, neste trabalho, a solução do problema PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ) para todas as classes de grafos bem cobertos-(r, ℓ) que são reconhecíveis em tempo polinomial, com exceção das classes $(2,0)$ e $(1,2)$. Além disso, consideramos a complexidade parametrizada do problema GRAFO BEM COBERTO, com ênfase especial no caso em que o grafo dado é um grafo-(r, ℓ), para algumas escolhas de parâmetros, tais como o tamanho α de um conjunto independente maximal do grafo de entrada, diversidade de vizinhança, e o número ℓ de cliques em uma partição-(r, ℓ).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A COMPLEXITY APPROACH OF THE (r, ℓ)-WELL-COVERED GRAPHS: RECOGNITION, SANDWICH PROBLEMS AND PROBE

Sancrey Rodrigues Alves

December/2019

Advisors: Sulamita Klein
Luerbio Faria
Fernanda Vieira Dias Couto

Department: Systems Engineering and Computer Science

A (r, ℓ)-*partition* of a graph G is a partition of its vertex set into r independent sets and ℓ cliques. A graph is a (r, ℓ)-*graph* if it admits a (r, ℓ)-partition. A graph is a (r, ℓ)-*graph* if it admits a (r, ℓ)-partition. A graph is *well-covered* when each maximal independent set is maximum. A graph is a (r, ℓ)-*well-covered graph* if it is (r, ℓ) and well-covered, simultaneously. In this work we consider two different decision problems. In the (r, ℓ)-WELL-COVERED GRAPH problem (GBC(r, ℓ) for short), a graph G is provided as input, and the question is whether G is an (r, ℓ)-well-covered graph. In the WELL-COVERED (r, ℓ)-GRAPH problem (G(r, ℓ)BC for short), a (r, ℓ)-graph G together with an (r, ℓ)-partition of $V(G)$ into r independent sets and ℓ cliques are provided as input, and the question is whether G is well-covered.

In the context of SANDWICH PROBLEMS, we consider the classes (r, ℓ)-well-covered which are recognized in polynomial time, namely: $(0,1), (1,0), (0,2), (2,0), (1,1)$, and $(1,2)$. We solved this problem for five of those six classes, and the problem remains open only when $(r, \ell) = (2, 0)$. We also present, in this work, the solution of PARTITIONED PROBE FOR (r, ℓ)-WELL-COVERED GRAPHS problem for all graph classes well covered-(r, ℓ) which are recognizable in polynomial time, except for the classes $(2, 0)$ and $(1, 2)$. In addition, we consider the parameterized complexity of WELL-COVERED GRAPH problem with special emphasis on the case where the given graph is a (r, ℓ)-graph for several choices of parameters, such as the size α of a maximal independent set of the input graph, neighborhood diversity, and the number ℓ of cliques in an (r, ℓ)-partition.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Grafos são uma poderosa ferramenta de modelagem muito utilizada para traduzir diversas situações cotidianas para a linguagem matemática. Formalmente, um *grafo* $G = (V, E)$ consiste em um conjunto finito não vazio de *vértices* V e um conjunto de pares não ordenados de vértices, denominados *arestas* e denotado por E.

Dizemos que um grafo é *bem coberto* (*well-covered*, em inglês), também conhecidos na literatura como não-mistos (ou unmixed, em inglês), quando todo conjunto independente maximal é máximo. Tal classe de grafos foi introduzida em 1970 por Plummer [84]. Um dos aspectos da importância dos grafos bem cobertos deve-se ao fato de que para um grafo qualquer, obter a cardinalidade do conjunto independente máximo é um problema difícil [72]; já para grafos bem cobertos tal problema pode ser facilmente resolvido em tempo polinomial usando-se um algoritmo guloso bastante simples. De modo geral, o algoritmo seleciona um vértice v de G para um conjunto independente máximo S e remove $N[v]$ (a vizinhança fechada de v) de G até que todos os vértices do grafo tenham sido removidos. Dessa forma, um grafo é bem coberto se, e somente se, esse algoritmo sempre obtém um conjunto independente maximal de mesma cardinalidade.

O reconhecimento de grafos bem cobertos em geral é coNP-completo segundo Chvátal e Slater em [23], e Sankaranarayana e Stewart em [92]. Entretanto, o problema é polinomial para certas classes de grafos como, por exemplo, as classes dos grafos bipartidos [90], grafos planares [15], 3-conexos [15], com grau limitado [16], grafos simpliciais [86], cordais [86], arcos circulares [86], cografos [91], P_4-esparsos [91]. Em [92], foi provado que os problemas ciclo Hamiltoniano, número cromático, ciclo dominante, dentre outros, permanecem NP-completos para grafos bem cobertos. Em 1993, Plummer [85] produziu um importante resumo sobre todos os resultados envolvendo grafos bem cobertos publicados naquela época.

PROBLEMAS DE PARTIÇÃO são muito estudados no contexto dos problemas combinatórios. Em geral, nestes problemas, busca-se uma partição do conjunto de vértices do grafo em subconjuntos, $V_1, V_2, \ldots, V_k$, de modo que tal partição satisfaça algumas restrições. Tais restrições podem ser *internas* como, por exemplo, particionar o conjunto de vértices em cliques ou em conjuntos independentes, ou *externas*, como exigir que tais conjuntos sejam completamente adjacentes ou completamente não adjacentes entre si.

Em [13], Brandstadt, definiu grafos-(r, ℓ) como uma generalização dos grafos *split*, isto é, aqueles que podem ser particionados em um conjunto independente e uma clique. Um grafo é (r, ℓ) se pode ser particionado em r conjuntos independentes, $S^1, \ldots, S^r$, e ℓ cliques, $K^1, \ldots, K^\ell$. Dessa forma, grafos-$(2, 0)$ são a classe dos grafos bipartidos. Ainda segundo [13], o reconhecimento de um grafo (r, ℓ) é polinomial se $r, \ell \leq 2$, e NP-completo caso contrário. Sendo assim, torna-se interessante responder se tal afirmação permanece válida quando se adiciona a propriedade de ser bem coberto.

Um grafo é *bem coberto*-(r, ℓ) quando é, ao mesmo tempo, (r, ℓ) e bem coberto. É com esta classe que trabalharemos em três problemas: reconhecimento, sanduíche e probe.

O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para uma classe $\mathscr{C}$ de grafos tem como entrada um grafo G, e a questão é decidir se G pertence a $\mathscr{C}$. Introduzimos dois problemas de decisão associados ao PROBLEMA DE RECONHECIMENTO DE GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ), denominados GRAFOS BEM COBERTO-(r, ℓ) (ABREVIADAMENTE GBC(r, ℓ)) e GRAFO-(r, ℓ) BEM COBERTOS (abreviadamente G(r, ℓ)BC). No problema GBC(r, ℓ) é dado um grafo G, e a questão é decidir se existe um grafo bem coberto-(r, ℓ). No problema G(r, ℓ)BC é dado um grafo G e a partição (r, ℓ), e a questão é decidir se G é bem coberto-(r, ℓ). Classificamos a complexidade de reconhecimento de todos os problemas GBC(r, ℓ), e para os problemas G(r, ℓ)BC deixamos em aberto apenas os casos onde $r \geq 3$ e $\ell = 0$.

Em 1993, motivado por aplicações na biologia molecular, foi definido o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE INTERVALO [59], cujo objetivo era verificar se existe um grafo de intervalo $G = (V, E)$ entre outros dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$ dados como entrada, tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$. Dois anos mais tarde, Golumbic, Kaplan e Shamir [57] generalizaram tal conceito, definindo formalmente o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS COM A PROPRIEDADE Π da seguinte forma: dados dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, $E^1 \subseteq E^2$, existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ e que satisfaz a propriedade Π?

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE em grafos surgiram como uma generalização dos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO. O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para uma classe de grafos $\mathscr{C}$ é equivalente ao PROBLEMA SANDUÍCHE no qual $G^1 = G^2$ e a propriedade Π é "pertence à classe $\mathscr{C}$". Dessa forma, se já sabemos que a propriedade Π é de reconhecimento difícil, o problema sanduíche para propriedade Π também é difícil. Sendo assim, no problema sanduíche sempre queremos classes com reconhecimento em P.

Ressaltamos que não nos interessa considerar casos em que os grafos da entrada do problema, G^1 e G^2, pertencem à classe de grafos que satisfazem Π pois, neste caso, seria o bastante para resolver o problema tomar $G = G^1$ ou $G = G^2$. O problema também é trivial quando a propriedade Π é ancestral (isto é, todo supergrafo de G satisfaz Π), ou se Π é hereditária (isto é, todo subgrafo de G satisfaz Π) restando, nesses casos, verificar se G^2 e G^1, respectivamente, satisfazem a propriedade.

Na prática, são exemplos de aplicações para os PROBLEMAS SANDUÍCHE: *mapeamento físico do* DNA*, raciocínio temporal, sincronização de processos paralelos, árvores filogenéticas, resolução de sistemas de equações lineares esparsos,* dentre outros. Tais problemas estão descritos em [57].

Nesta tese estudamos o PROBLEMA SANDUÍCHE para todas as classes de grafos bem cobertos-(r,ℓ) com reconhecimento polinomial. Resolvemos o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ) quando $(r,\ell) = (0,1),(1,0),(0,2),(1,1)$, bem como apresentamos resultado de NP-completude para PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$. Apenas o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(2,0)$ permanece em aberto.

Em 1994, Zhang [104] introduziu grafos probes para aplicações em biologia e, posteriormente em [103] e [105], para modelar problemas de mapeamento físico do DNA. Dada uma classe $\mathscr{C}$ de grafos, um grafo $G = (V,E)$ é dito $\mathscr{C}$-PROBE se existe um conjunto independente de vértices $N \subseteq V(G)$ e um conjunto de pares de vértices $E' \subseteq N \times N$, tal que o grafo $H = (V, E \cup E')$ pertence à classe $\mathscr{C}$. Quando o conjunto N é fornecido como parte da entrada, o problema é dito *probe particionado*. Por sua vez, o problema é dito *probe não particionado* quando apenas o grafo G é fornecido como entrada, e devemos assim determinar se existe algum $N \subseteq V(G)$ tal que a adição de arestas com extremos em N produz um grafo pertencente à classe $\mathscr{C}$.

Neste trabalho, resolvemos O PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ) quando $(r,\ell) = (0,1),(1,0),(0,2),(1,1)$, restando em aberto apenas os casos onde $(r,\ell) = (2,0),(1,2)$.

Por fim, consideramos a complexidade parametrizada para GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ) considerando alguns parâmetros escolhidos, tais como o tamanho α do conjunto independente máximo do grafo de entrada, a diversidade de vizinhança, a largura em clique, e o número ℓ de cliques em uma partição-(r,ℓ).

1.1 Organização do texto

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

– No Capítulo 1, além da introdução apresentada, fornecemos as definições e notações básicas, bem como conceitos sobre a complexidade clássica. Descrevemos também alguns resultados sobre grafos bem cobertos e sobre grafos-(r, ℓ) encontrados na literatura.

- No Capítulo 2 estudamos a complexidade do reconhecimento da classe dos grafo bem cobertos-(r, ℓ).
- No Capítulo 3 apresentamos resultados para o Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-(r, ℓ).
- No Capítulo 4 nos dedicamos ao estudo do Problema Probe para grafos bem cobertos-(r, ℓ).
- No Capítulo 5 descrevemos alguns resultados usando o conceito da Complexidade Parametrizada para grafos bem cobertos-(r, ℓ).
- Por fim, apresentamos uma conclusão sobre os resultados contidos nesta Tese, bem como indicamos algumas sugestões possíveis para trabalhos futuros no Capítulo 6.

1.2 Definições e Notações Básicas

As definições e notações iniciais contidas nesta seção foram extraídas de [12] e [63].

Um grafo G consiste em um conjunto não vazio e finito V de *vértices* e um conjunto E de pares não ordenados e distintos de vértices chamadas *arestas*. Um grafo é representado simbolicamente por $G = (V, E)$ e denotamos os conjuntos de vértices e arestas de G por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. A *ordem* $n = |V|$ de um grafo é o seu número de vértices. Se u e v são dois vértices de um grafo, e se o par não ordenado $\{u, v\}$ é uma aresta e, escrevemos $e = uv$ e dizemos que os vértices u e v são *incidentes* a aresta e e vice-versa, e que e *une* os vértices u e v. Os vértices u e v são também chamados *extremos* da aresta e.

Um vértice u é dito ser *adjacente* a v se $uv \in E$. O conjunto dos vértices adjacentes ao vértice u em G é denotado por $N(u)$. Dessa forma, $N(u) = \{v : uv \in E\}$. Também chamamos $N(u)$ de *vizinhança aberta de* u e $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ é denominada *vizinhança fechada de* u. Dizemos que dois vértices u e v são *gêmeos falsos* se $N(u) = N(v)$ e $uv \notin E(G)$.

Um vértice v é dito *universal* se $N(v) = V(G) - v$. Um vértice v é dito *isolado* quando $N(v) = \varnothing$.

Já para um conjunto de vértices $S \subseteq V$, denotamos por $N(S)$ a *vizinhança aberta de* S e a definimos como $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N(v)) \setminus S$ e a *vizinhança fechada de* S por $N[S] = N(S) \cup S$.

Um grafo é um *grafo nulo* quando todos os seus vértices são isolados. Um grafo com um único vértice e sem arestas é denominado um *grafo trivial*.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Para um subconjunto não-vazio S de $V(G)$, o subgrafo $G[S]$ de G *induzido por* S tem o conjunto S como seu conjunto de vértices e dois vértices u e v são adjacentes em $G[S]$ se, e somente se, u e v são adjacentes em G. Um grafo H é um supergrafo de um grafo G se $V(G) \subseteq V(H)$ e $E(G) \subseteq E(H)$.

Um grafo G é um *grafo completo* se existe uma aresta entre cada par de seus vértices, isto é, todos os seus vértices são universais. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. Em um grafo, um conjunto de vértices K é uma *clique* se $G[K]$ é um grafo completo. Uma clique é dita *maximal* se ela não está contida em nenhuma outra clique do grafo.

O *complemento* $\overline{G}$ de um grafo G é um grafo com conjunto de vértices V tal que dois vértices em $\overline{G}$ são adjacentes se, e somente se, eles não são adjacentes em G.

Um subconjunto $S \subseteq V$ é um *conjunto independente* de G se, para todo par de vértices distintos u e v de S, temos que $uv \notin E$. Um *conjunto independente maximal de* G é um conjunto independente de G que não é subconjunto próprio de nenhum outro conjunto independente de G. Chamamos de *conjunto independente máximo de* G ao conjunto independente que possui a maior cardinalidade dentre todos os conjuntos independentes de G. Denominamos *número de independência* de G, e denotamos por $\alpha(G)$, ao tamanho de um conjunto independente máximo de G.

Um *grafo bipartido* G é um grafo cujo conjunto de vértices $V(G)$ admite uma partição em dois subconjuntos independentes V_1 e V_2, tal que toda aresta de G une um vértice em V_1 a outro vértice em V_2.

Um *caminho* em um grafo G é uma sequência $P = v_1v_2 \dots v_k$ em que os vértices v_i $(1 \leq i \leq k-1)$ são distintos dois a dois, e $v_iv_{i+1} \in E(G)$. Os vértices v_1 e v_k são denominados *extremos* do caminho P. Uma *corda* em P é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos em P. Um *caminho induzido* em um grafo é um caminho sem cordas. Denotamos por P_k um caminho induzido por k vértices.

Um grafo é *conexo* se todo par de vértices, estes são extremos de um caminho.

Um *ciclo* em um grafo é uma sequência $C = v_1v_2 \dots v_{k+1}$, onde $v_1v_2 \dots v_k$ é um caminho, $v_{k+1} = v_1$ e $k \geq 3$. O número k é dito *comprimento* do ciclo. Um grafo é denominado *acíclico* quando não possui ciclos.

Uma *árvore* T é um grafo acíclico e conexo.

Sejam $u, v \in V(G)$. A *distância entre dois vértices* u e v em G, denotada por $d(u,v)$, é o comprimento do menor caminho entre u e v em G. Se u e v não possui caminho que os una, dizemos que a distância entre u e v é infinita. O *diâmetro* de um grafo G é a distância máxima entre dois vértices de G. A *cintura* de G é o tamanho do menor ciclo em G; se G não possui ciclos dizemos que a cintura é infinita.

Um conjunto de arestas em um grafo G é *independente* se todo par de arestas pertencentes ao conjunto não compartilham vértices no grafo G. Nesse caso esse conjunto é dito um *emparelhamento* em G. Se M é um emparelhamento em um grafo G com a propriedade de que todo vértice de G é incidente em uma aresta de M, então M é um *emparelhamento perfeito* em G.

Sejam G_1 e G_2 dois grafos com conjuntos de vértices V_1 e V_2 disjuntos e conjunto de arestas E_1 e E_2, respectivamente. A *união* entre os grafos G_1 e G_2, denotado por $G = G_1 + G_2$, é o grafo que possui $V = V_1 \cup V_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. A *junção* entre dois grafos disjuntos (ou join) é denotada por $G_1 + G_2$, e consiste no grafo $G_1 + G_2$ unindo cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2.

1.2.1 A Complexidade Clássica

As definições apresentadas nessa Subseção foram extraídas de [54] e [94].

Um *problema computacional* Π é uma questão bem definida a ser resolvida que possui variáveis livres, cujos valores não estão especificados. Uma *instância* I_Π de um problema Π é obtida através da especificação de valores particulares para todas as suas variáveis.

Um *problema de decisão* é um problema composto por uma descrição geral de suas variáveis de entrada e que produz como saída apenas as respostas SIM ou NÃO. Considerando o problema de decisão Π com um conjunto de instâncias I_Π, observamos que existe uma partição de I_Π em dois subconjuntos S_Π e N_Π que são, respectivamente, os conjuntos de instâncias que produzem a resposta SIM e NÃO ao problema Π, ou seja, $S_\Pi = I_\Pi \backslash N_\Pi$.

Um *algoritmo* A é um procedimento "passo a passo" para resolver um dado problema. O passo de um algoritmo é a computação de uma instrução do programa que implementa o algoritmo. Um algoritmo *resolve* um problema Π quando aplicado a qualquer que seja a instância I_Π produz uma solução para este caso.

Um *algoritmo determinístico* é um algoritmo que dada uma certa entrada I_Π produzirá sempre a mesma saída com o mesmo número de passos. Caso contrário, um algoritmo é denominado *algoritmo probabilístico*.

Seja $I_\Pi(n)$ o conjunto de todas as instâncias de Π com tamanho n. Definimos a *complexidade de tempo de um algoritmo* como uma função que associa a maior quantidade de tempo para resolver uma instância com um tamanho determinado. Dizemos que uma função $f(n)$ *é da ordem de* $g(n)$, e escrevemos $f(n) = O(g(n))$, quando existem um número natural n_0 e uma constante $c > 0$ tais que $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$.

Um *algoritmo de tempo polinomial* é aquele cuja função complexidade de tempo é $O(p(n))$ para alguma função polinomial p e onde n denota o tamanho da entrada.

Um problema de decisão pertence à *classe* P se, e somente se, pode ser solucionado em tempo polinomial por um algoritmo determinístico.

Um problema de decisão pertence à *classe dos problemas* NP se existe um algoritmo determinístico de tempo polinomial que verifica a validade de um certificado polinomial para a resposta SIM. Por outro lado, a *classe dos problemas* coNP é o complemento da classe NP, isto é, existe um algoritmo determinístico de tempo polinomial que verifica a validade de um certificado polinomial para a resposta NÃO. Todo problema de decisão que pertence a P também pertence a NP.

Uma *redução polinomial* de um problema de decisão Π para um problema de decisão Π' é uma função $f : I_\Pi \to I_{\Pi'}$ que satisfaz as seguintes condições:

- existe um algoritmo determinístico polinomial A que computa f;
- $x \in S_\Pi$ se, e somente se, $f(x) \in S_{\Pi'}$.

Neste caso dizemos também que Π se *reduz polinomialmente a* Π', e denotamos essa relação por $\Pi \propto \Pi'$. Uma consequência imediata da existência de uma redução polinomial de Π para Π' é que se $\Pi' \in \mathsf{P}$, então $\Pi \in \mathsf{P}$.

Um problema Π é NP-dfícil (respectivamente, coNP-difícil) se existe um problema NP-completo Π' (respectivamente, coNP-completo) tal que $\Pi' \propto \Pi$ e não é sabido se $\Pi \in \mathsf{NP}$ (respectivamente, $\Pi \in \mathsf{coNP}$).

1.3 Grafos bem cobertos

Muitos problemas combinatórios envolvem a noção de independência entre um conjunto de vértices. Em 1970, Plummer [84] definiu o conceito de grafos bem cobertos motivado por problemas que envolviam obter um conjunto de vértices independentes de maior cardinalidade em um grafo.

Um grafo G é dito *bem coberto* quando todo conjunto independente maximal é máximo. Em outras palavras, um grafo é bem coberto se todos os seus conjuntos independentes maximais tem o mesmo número de vértices.

Uma *cobertura de vértices* $S \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$ satisfaz que, para todo $uv \in E$, ou $u \in S$, ou $v \in S$. Ao tamanho da menor cobertura de vértices denominamos *número de cobertura* de G, e denotamos por $\beta(G)$.

Inicialmente, o termo "bem coberto" foi proposto devido ao conceito da cobertura de vértices. Somente mais tarde, é que grafos bem cobertos ficaram mais conhecidos a partir do conceito de conjunto independente maximal. Quando abordados através da cobertura de vértices, grafos bem cobertos são também referenciados como *grafos unmixed* (*não mistos*). Dessa forma, podemos parafrasear a definição de grafos bem

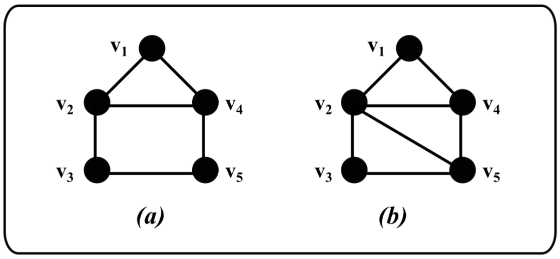

Figura 1.1: Em (a) um exemplo de grafo bem coberto, onde todo conjunto independente maximal possui cardinalidade igual a 2. Em (b) um exemplo de grafo que não é bem coberto. Um certificado para a resposta NÃO consiste em dois conjuntos independentes maximais $I_1 = \{v_2\}$ e $I_2 = \{v_1, v_3\}$ do grafo, tal que $|I_1| \neq |I_2|$.

cobertos do seguinte modo: um grafo é dito bem coberto quando toda cobertura de vértices minimal é mínima, ou quando toda cobertura de vértice minimal possui a mesma cardinalidade.

O problema do reconhecimento de grafos bem cobertos para grafos em geral foi provado ser coNP-completo nos trabalhos simultâneos de Chvátal e Slater em [23], e Sankaranarayana e Stewart em [92].

Segundo Caro, Sebő e Tarsi em [17], o problema de reconhecimento de grafos bem cobertos permanece coNP-completo quando o grafo é livre de $K_{1,4}$. Entretanto, na mesma época, Tankus e Tarsi [99] provaram que o problema de reconhecimento de grafos bem cobertos livres de garra é polinomial.

Além dos resultados citados, são polinomiais para grafos bem cobertos o reconhecimento das seguintes classes:

- grafos que não contém ciclos de tamanho 4 ou 5 [49],
- grafos que possuem cintura maior ou igual a 5 [48],
- grafos semi-perfeitos [102],
- grafos simpliciais, cordais e arco circulares [86],
- grafos livre de garra [99],
- grafos que não contém ciclos de tamanho 3, 5 ou 7 [89],
- grafos com componentes P_4 separáveis ou que contém alguns componentes P_4 [91].

Um ano após a caracterização proposta por Ravindra [90] sobre o reconhecimento polinomial de grafos bipartidos bem cobertos, Favaron [43] publicou uma caracterização para uma subclasse particular dos grafos bem cobertos, a dos grafos muito bem cobertos, onde todo conjunto independente maximal do grafo possui cardinalidade igual à metade da ordem do grafo. Tal caracterização utiliza uma propriedade para emparelhamentos denominada de *propriedade* (P).

> **Propriedade** (P)
> Seja G um grafo com emparelhamento M. Dizemos que M satisfaz a propriedade (P) se, para toda aresta xy em M, temos $N_G(x) \cap N(y) = \varnothing$ e todo vértice em $N(x) \backslash \{y\}$ é adjacente a todo vértice em $N(y) \backslash \{x\}$.

Definição 1.1. *[43] Seja G um grafo simples. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é muito bem coberto.

(ii) Existe um emparelhamento perfeito que satisfaz à propriedade (P).

(iii) Existe ao menos um emparelhamento perfeito em G, bem como todo emparelhamento perfeito de G satisfaz a propriedade (P).

Sakaranarayana e Stewart propuseram uma caracterização estrutural alternativa para grafos bem cobertos em termos da interação entre dois pares de conjuntos independentes maximais:

Teorema 1.2. *[93] Sejam I_1 e I_2 dois conjuntos independentes maximais de G, e sejam os conjuntos $R = I_1 \cap I_2$, $S = V - (I_1 \cup I_2)$, $I'_1 = I_1 - R$ e $I'_2 = I_2 - R$. Um grafo G é bem coberto se, e somente se, para todo par de conjuntos independentes maximais de G, $G[I'_1 \cup I'_2]$ possui um emparelhamento perfeito.*

A seguir citamos algumas variantes de grafos bem cobertos encontrados na literatura.

Um grafo bem coberto $G = (V, E)$ é 1-*bem coberto* se $G \backslash \{v\}$ é bem coberto, para todo vértice v. Na literatura encontramos caracterizações para grafos 1-bem cobertos sem C_4 [66], grafos planares 1-bem cobertos [82], grafos de linha 1-bem cobertos [37]. Mais tarde, em [81] foi definido um grafo como sendo *fortemente bem coberto* se ele for bem coberto e $G \backslash e$ também for bem coberto, para qualquer $e \in E(G)$.

Um grafo G é dito Z_m-*bem coberto* se todo conjunto independente maximal de G possui a mesma cardinalidade módulo m. Grafos Z_2-bem cobertos são definidos por [50] como *grafos de paridade*. Barbosa em [5] caracterizou em sua tese de doutorado os grafos Z_m-bem cobertos para grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares. Anos mais tarde, o mesmo autor juntamente com Ellingham em [4], motivados pela caracterização de grafos cúbicos bem cobertos publicada em [15], estendem o resultado para grafos cúbicos Z_m-bem cobertos.

Abaixo descrevemos uma tabela de complexidade contida em [93] para alguns problemas da teoria dos grafos quando combinados aos problemas grafo bem coberto e muito bem coberto.

Problema	grafos bem cobertos	grafos muito bem cobertos
Conjunto independente dominante	P	P
Conjunto independente	P	P
Cobertura de vértices	P	P
Ciclo dominante	NPc	NPc
Clique	NPc	NPc
Número cromático	NPc	NPc
Árvore de Steiner	NPc	NPc
Corte máximo	NPc	NPc
Ciclo hamiltoniano	NPc	NPc
Caminho hamiltoniano	NPc	P
Conjunto independente dominante	P	P
Partição em clique	NPc	P
Conjunto dominante	NPc	P

Tabela 1.1: Resultados de complexidade para grafos bem cobertos e grafos muito bem cobertos.

1.4 Grafos-(r, ℓ)

Brandstädt em [13] definiu grafos-(r, ℓ) como uma generalização dos grafos split, isto é, aqueles que podem ser particionados em um conjunto independente e uma clique. Um grafo é (r, ℓ) se pode ser particionado em r conjuntos independentes, $S^1, \ldots, S^r$, e ℓ cliques, $K^1, ..., K^\ell$. Do mesmo modo que grafos split são grafos-$(1, 1)$, grafos-$(2, 0)$ são a classe dos grafos, bipartidos. Ainda em [13] foi provado que, dado um grafo G, é NP-completo decidir se G é um grafo (r, ℓ), para $r \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ e polinomial, caso contrário. O reconhecimento de grafos-$(1, 2)$ e grafos-$(2, 1)$ é feito em tempo cúbico, enquanto que grafos-$(2, 2)$ são reconhecidos em tempo $O(n^4)$. Feder, Hell, Klein e Motwani também propuseram em [45] algoritmos polinomiais para essas classes, que surgiram como subproduto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos.

Observamos que o reconhecimento de grafos-$(k, 0)$ corresponde a reconhecer se um dado grafo é k-colorível, sendo NP-completo para $k \geq 3$, e polinomial para $k < 3$.

Hell, Klein, Nogueira e Protti provaram em [69] que o reconhecimento de grafos cordais-(r, ℓ) é feito em tempo $O(n(n+m))$. Para $k = 1$, o tempo de reconhecimento é melhorado para $O(n + m)$. No mesmo artigo foi apresentada uma caracterização para grafos cordais-(r, ℓ) por subgrafos proibidos.

Bravo, Klein, Nogueira e Protti [34], e Feder, Hell e Hochstattler [44] apresentaram caracterizações por subgrafos proibidos para os cografos-(r, ℓ).

Couto, Klein, Faria, Gravier e dos Santos em [29] propuseram uma caracterização estrutural para cografos-$(1, 2)$ e cografos-$(2, 1)$, bem como o reconhecimento dessas duas classes em tempo linear.

Em [87] foi considerado o problema da *deleção de vértices* onde, dado um grafo G e um inteiro k, devemos decidir se no máximo k vértices podem ser removidos de G a fim de obter um grafo-(r, ℓ). O problema é NP-difícil para $r + \ell \geq 1$. Em [6] é provado que o problema da deleção de vértices quando $(r, \ell) = (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ pertencem à classe dos problemas FPT.

Observamos que os grafos-(r, ℓ) são encontrados na literatura como grafos-(k, ℓ). No entanto, por conveniência, substituímos o k por r, uma vez que a letra k é usado frequentemente como um parâmetro na complexidade parametrizada.

Capítulo 2

Reconhecimento de grafos bem cobertos-(r, ℓ).

Neste capítulo apresentamos resultados sobre a complexidade do reconhecimento de grafos bem-cobertos-(r, ℓ). Na Seção 2.1 apresentamos caracterizações estruturais para grafos bem-cobertos-(r, ℓ). Nas demais seções deste capítulo nos dedicamos ao estudo da complexidade do reconhecimento dos grafos bem cobertos-(r, ℓ).

Todos os resultados descritos neste capítulo encontram-se publicados em [2] e [3], com exceção daqueles apresentados na Subseção 2.1.5 que foram obtidos com a colaboração do Professor Sylvain Gravier (Université Joseph Fourier, Grenoble, França), e apresentados no 11th INTERNATIONAL COLLOQUIM ON GRAPH THEORY AND COMBINATORICS, realizado em 2018 na cidade de Lyon, França.

O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO ASSOCIADO A UMA CLASSE $\mathscr{C}$ é definido da seguinte forma:

PROBLEMA DE RECONHECIMENTO ASSOCIADO A UMA CLASSE $\mathscr{C}$
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$.
PERGUNTA: G pertence à classe $\mathscr{C}$?

Abaixo descrevemos o problema de reconhecimento de grafos-(r, ℓ), que denominamos por GRAFO-(r, ℓ) (abreviadamente G(r, ℓ)), e o problema de reconhecimento de grafos bem cobertos, que denominamos por GRAFO BEM COBERTO (abreviadamente GBC).

GRAFO-(r, ℓ) (G(r, ℓ))
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$.
PERGUNTA: G é um grafo-(r, ℓ)?

GRAFO BEM COBERTO (GBC)
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$.
PERGUNTA: G é um grafo bem coberto?

Andreas Brandstädt [13] provou que GRAFO-(r, ℓ) é polinomial para $r, \ell \leq 2$, e NP-completo para os demais casos.

Observamos que o problema GRAFO-(r, ℓ) está em NP pois um certificado para a resposta SIM é uma partição $(S^1, S^2, S^3, \ldots, S^r, K^1, K^2, K^3, \ldots, K^\ell)$ de V em r conjuntos independentes $S^1, S^2, S^3, \ldots, S^r$, e ℓ cliques $K^1, K^2, K^3, \ldots, K^\ell$.

Por outro lado, GRAFO BEM COBERTO é um problema que está em coNP conforme demonstrado por Chvátal e Slater em [23], e por Sankaranarayana e Stewart em [92], pois um certificado para a resposta NÃO consiste em dois conjuntos independentes maximais, I_1 e I_2, tal que $|I_1| \neq |I_2|$.

Sejam $r, \ell \geq 0$ dois inteiros fixos. Um grafo é dito um *grafo bem coberto*-(r, ℓ) se é, simultaneamente, (r, ℓ) e bem coberto.

Até onde vai nosso conhecimento, é a primeira vez na literatura em que é feita a análise de um problema contendo duas propriedades: uma NP-completa e outra coNP-completa.

Para analisar essa conjunção de problemas, vamos nos concentrar em dois problemas de decisão:

GRAFO BEM COBERTO-(r, ℓ) (GBC(r, ℓ))
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$.
PERGUNTA: G é um grafo bem coberto-(r, ℓ)?

GRAFO-(r, ℓ) BEM COBERTO (G(r, ℓ)BC)
INSTÂNCIA: $G = (V, E)$ um grafo-(r, ℓ), com uma partição-(r, ℓ) de V.
PERGUNTA: G é um grafo bem coberto?

Neste capítulo, estabelecemos uma caracterização quase completa da complexidade dos problemas de decisão GBC(r, ℓ) e G(r, ℓ)BC. Nossos resultados são mostrados nas Tabelas 2.1 e 2.2, onde r (respectivamente ℓ) correspondem as linhas (respectivamente, colunas) das tabelas, e onde coNPc corresponde a um problema com complexidade coNP-completo, NPh corresponde a NP-difícil, NPc corresponde a NP-completo, (co)NPh corresponde a um problema que é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil. O símbolo '?' expressa que o problema ainda encontra-se em aberto.

r \ ℓ	0	1	2	3	$\cdots$
0	–	P	P	NPc	...
1	P	P	P	NPc	...
2	P	coNPc	coNPc	(co)NPh	...
3	NPh	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 2.1: Complexidade do problema de decisão GBC(r, ℓ).

r \ ℓ	0	1	2	3	$\cdots$
0	–	P	P	P	...
1	P	P	P	P	...
2	P	coNPc	coNPc	coNPc	...
3	?	coNPc	coNPc	coNPc	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 2.2: Complexidade do problema de decisão G(r, ℓ)BC.

Fornecemos nas Tabelas 2.3 e 2.4 uma referência sobre os resultados descritos nas Tabelas 2.1 e 2.2.

r \ ℓ	0	1	2	3	$\cdots$
0	–	Teorema 2.16	Corolário 2.18	Teorema 2.31	Teorema 2.35
1	Teorema 2.16	Corolário 2.21	Teorema 2.24	Teorema 2.34	Teorema 2.35
2	Teorema 2.22	Corolário 2.27	Corolário 2.30	Corolários 2.30 e 2.35	Corolários 2.18 e 2.35
3	Teorema 2.33	Corolário 2.38	Corolário 2.38	Corolário 2.38	Corolário 2.38
$\vdots$	Corolário 2.35	Corolário 2.38	Corolário 2.38	Corolário 2.38	Corolário 2.38

Tabela 2.3: Referência aos resultados descritos na Tabela 2.1 sobre a complexidade do problema de decisão GBC(r, ℓ).

$r \backslash \ell$	0	1	2	3	$\cdots$
0	–	Corolário 2.17	Corolário 2.19	Teorema 2.20	Teorema 2.20
1	Corolário 2.17	Teorema 2.20	Teorema 2.20	Teorema 2.20	Teorema 2.20
2	Fato 2.12 e Teorema 2.22	Corolário 2.27	Corolário 2.28	Corolário 2.28	Corolário 2.28
3	?	Corolário 2.29	Corolário 2.29	Corolário 2.29	Corolário 2.29
$\vdots$	$\vdots$	Corolário 2.29	Corolário 2.29	Corolário 2.29	Corolário 2.29

Tabela 2.4: Referência aos resultados descritos na Tabela 2.2 sobre a complexidade do problema de decisão $\text{G}(r,\ell)\text{BC}$.

Na próxima seção apresentamos caracterizações estruturais para grafos bem cobertos-(r,ℓ), quando $(r,\ell) = (0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),(1,2)$.

2.1 Caracterizações estruturais

2.1.1 Grafos bem cobertos-$(0,1)$ e grafos bem cobertos-$(1,0)$

O Fato 2.1 é necessário para o enunciado do Teorema 2.2.

Fato 2.1. *O grafo induzido por uma clique ou por um conjunto independente é um grafo bem coberto.*

Teorema 2.2. *G é um grafo bem coberto-$(0,1)$ se, e somente se, G é um grafo-$(0,1)$. Da mesma forma, G é um grafo bem coberto-$(1,0)$ se, e somente se, G é um grafo-$(1,0)$.*

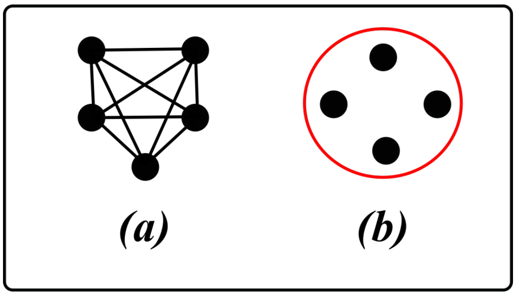

Figura 2.1: Em (a) um exemplo de grafo bem coberto-$(0,1)$ e em (b) um exemplo de grafo bem coberto-$(1,0)$.

2.1.2 Grafos bem cobertos-$(0,2)$

O Teorema 2.3 estabelece uma caracterização estrutural para grafos bem cobertos-$(0,2)$. Denominamos um *grafo-*$(0,2)$ *estrito* a um grafo-$(0,2)$ não completo.

Teorema 2.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo-$(0, 2)$. G é um grafo bem coberto-$(0, 2)$ se, e somente se, ou G é um grafo completo, ou G é um grafo-$(0, 2)$ sem vértices universais.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo-$(0, 2)$.

Suponha que G é um grafo bem coberto-$(0, 2)$. Dessa forma, ou todo conjunto independente maximal I de G possui cardinalidade 1, ou todo conjunto independente maximal I de G possui cardinalidade igual a 2.

No caso em que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade 1, então G é um grafo completo. No caso em que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade 2, então G é um grafo-$(0, 2)$ estrito sem vértices universais.

Por outro lado, suponha que, ou G é um grafo completo, ou G é um grafo-$(0, 2)$ estrito sem vértices universais. Assim, um conjunto independente maximal de G possui tamanho 1 ou 2.

Se G é um grafo completo, verificamos que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade 1.

Se G é um grafo-$(0, 2)$ estrito sem vértices universais, observamos que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade 2, pois se um conjunto independente S tem um vértice v, como v não é universal, existe um vértice u que não é adjacente que será adicionado a S, a fim de que S seja um conjunto independente maximal de G. □

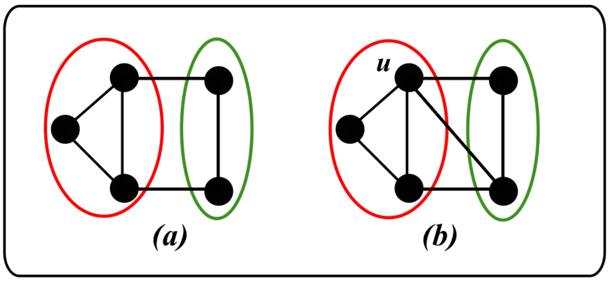

Figura 2.2: Aplicação do Corolário 2.18 em dois grafos-$(0, 2)$. Em (a), como G é um grafo-$(0, 2)$ estrito que não possui vértices universais concluímos que G é um grafo bem coberto-$(0, 2)$. Em (b), devido à existência do vértice universal $u \in V(G)$ afirmamos que o grafo-$(0, 2)$ estrito G não é um grafo bem coberto-$(0, 2)$.

2.1.3 Grafos bem cobertos-$(1, 1)$

Nesta subseção fornecemos uma caracterização de grafos bem cobertos-$(1, 1)$ em termos de sua sequência de graus. Observamos que grafos-$(1, 1)$ são conhecidos na literatura como *grafos split*.

O próximo Lema estabelece uma condição necessária para que um grafo-$(1, 1)$ seja um grafo bem coberto-$(1, 1)$.

Lema 2.4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo bem coberto-$(1, 1)$ que admite uma partição $V = (S, K)$, onde S é um conjunto independente e K é uma clique. Se $x \in K$, então $|N_S(x)| \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que G é um grafo bem coberto-$(1,1)$ que admite uma partição $V = (S, K)$, onde S é um conjunto independente e K é uma clique.

Seja I um conjunto independente maximal de G que contenha um vértice $x \in K \cap I$ e que existam dois vértices $y, z \in N_S(x)$. Como $y, z \in S$, $N_G(y), N_G(z) \subseteq K$.

Então observamos que $N_G(y) \cap (I \backslash \{x\}) = N_G(z) \cap (I \backslash \{x\}) = \varnothing$. Logo, podemos considerar o conjunto independente $I' = (I \backslash \{x\}) \cup \{y, z\}$ de G, com cardinalidade $|I'| = |I| + 1$. Ou seja, I é um conjunto independente maximal que não é máximo, donde concluímos que G não é bem coberto. Segue então que $|N_S(x)| \leq 1$. □

O Teorema 2.5 fornece uma caracterização estrutural para grafos bem cobertos-$(1,1)$.

Teorema 2.5. *Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo bem coberto-$(1,1)$ se, e somente se, admite uma partição-$(1,1)$ $V = (S, K)$ tal que, ou para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 0$, ou para todo $x \in K$, verificamos que $|N_S(x)| = 1$.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo bem coberto-$(1,1)$. Pelo Lema 2.4 temos que, dado um vértice $x \in K$, ou $|N_S(x)| = 0$, ou $|N_S(x)| = 1$.

Por contradição, suponha que existam dois vértices $x, y \in K$ tal que $|N_S(x)| = 0$ e $|N_S(y)| = 1$. Seja z o vértice pertencente a S e adjacente a y. Seja I o conjunto independente maximal de G que contenha o vértice y. Observamos que x é não adjacente a todo vértice pertencente a $I \backslash \{y\}$, uma vez que existe no máximo um vértice em I pertencente a K. O mesmo raciocínio se aplica a z. Com isso, um conjunto independente maximal I' de G pode ser obtido a partir de I substituindo-se o vértice y pelos vértices x e z, de tal forma que $|I'| = |I| + 1$. Isso nos leva a concluir que I é um conjunto maximal de G que não é máximo, uma contradição.

Desse modo, ou para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 0$, ou para todo $x \in K$, verifica-se que $|N_S(x)| = 1$.

Reciprocamente, suponha que exista uma partição-$(1,1)$ $V = (S, K)$ de G tal que, ou para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 0$, ou para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 1$.

Se $K = \varnothing$, então G é um grafo-$(0,1)$, e G é grafo bem coberto.

Desse modo, assumimos $K \neq \varnothing$. Se, para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 0$, então todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade igual a 1. Se, para todo $x \in K$ verifica-se que $|N_S(x)| = 1$, então, ou $I = S$, ou $I = \{x\} \cup (S \backslash N_S(x))$ para algum $x \in K$ são possíveis conjuntos independentes maximais de G, donde concluímos que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade igual a $|S|$, e que G é um grafo bem coberto. Isso completa a prova. □

Hammer e Simeone realizaram um estudo sobre a sequência de graus para grafos-$(1,1)$.

Teorema 2.6. *[62] Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado com sequência de graus $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ e seja $m = max\{i : d_i \geq i - 1\}$. Então G é um grafo-$(1,1)$ se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i \tag{2.1}$$

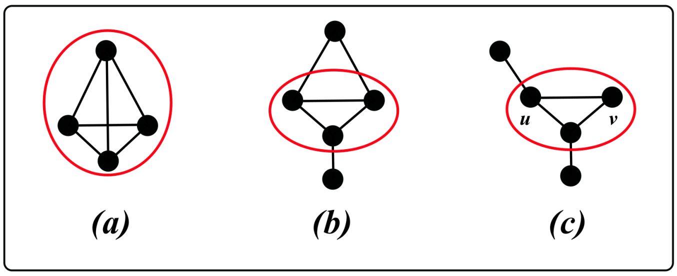

Figura 2.3: Exemplos de grafos $G = (V, E)$ que admitem uma partição $V = (S, K)$, onde S é um conjunto independente e K é uma clique, destacada pela linha em vermelho. Em (a) e (b), afirmamos que o grafo G é um grafo bem coberto-$(1,1)$ uma vez que, em (a) $\forall v \in K$ verifica-se que $|N_S(v)| = 0$, e em (b) $\forall v \in K$ verifica-se que $|N_S(v)| = 1$. Em (c) G não é um grafo bem coberto-$(1,1)$, uma vez que existem dois vértices $u, v \in K$ tal que $|N_S(u)| \neq |N_S(v)|$.

Corolário 2.7. *[62] Se G é um grafo-$(1,1)$, então todo grafo com a mesma sequência de graus que G também é um grafo-$(1,1)$.*

A partir dos resultados descritos no Teorema 2.6 e no Corolário 2.7, descrevemos um resultado que fornece uma caracterização dos grafos bem cobertos-$(1,1)$.

Teorema 2.8. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. G é um grafo bem coberto-$(1,1)$ se, e somente se, existe um inteiro positivo k tal que G é um grafo com partição $V = (S, K)$, $|K| = k$, com sequência de graus tal que, ou $(\overbrace{k-1, k-1, k-1, ..., k-1}^{k \text{ vezes}},\ 0,0,0,...,0)$, ou $(\overbrace{k,k,k,...,k}^{k \text{ vezes}}, i_1, i_2, ..., i_s, 0,0,0,...,0)$ com $\sum_{j=1}^{s}(i_j) = k$.*

Demonstração. Seja G um grafo bem coberto-$(1,1)$. Então G admite uma partição $V = (S, K)$, com $k = |K|$, $k \geq 0$. Se $k = 0$, então a sequência de graus é $(0,0,0,...,0)$. Se $k \geq 1$. Pelo Teorema 2.5 observamos que: ou para todo $x \in K$, $|N_S(x)| = 0$, ou para todo $x \in K$, $|N_S(x)| = 1$. Se para todo $x \in K$, $|N_S(x)| = 0$, então a sequência de graus de G é $(\overbrace{k-1, k-1, k-1, ..., k-1}^{k \text{ vezes}}, 0,0,0,...,0)$. Se para todo $x \in K$, $|N_S(x)| = 1$, então a sequência de graus de G é $(\overbrace{k,k,k,...,k}^{k \text{ vezes}}, i_1, i_2, ..., i_s,\ 0,0,0,...,0)$ com $\sum_{j=1}^{s}(i_j) = k$.

Suponha que exista um inteiro positivo k tal que G é um grafo-$(1,1)$ com partição $V = (S, K)$, $|K| = k$, com sequência de graus tal que, ou $(\overbrace{k-1, k-1, k-1, ..., k-1}^{k \text{ vezes}},\ 0,0,0,...,0)$, ou $(\overbrace{k,k,k,...,k}^{k \text{ vezes}}, i_1, i_2, ..., i_s, 0,0,0,...,0)$ com $\sum_{j=1}^{s}(i_j) = k$. Se a sequência de graus de G é $(\overbrace{k,k,k,...,k}^{k \text{ vezes}},\ i_1, i_2, ..., i_s,\ 0,0,0,...,0)$ com $\sum_{j=1}^{s}(i_j) = k$, então os vértices de K são adjacentes a $k-1$ vértices de K e exatamente a um de S, uma vez que os vértices com grau $i_1, i_2, ..., i_s$, tem grau no máximo k, e vértices com grau 0 são isolados. Se a sequência de graus de G é $(\overbrace{k-1, k-1, k-1, ..., k-1}^{k \text{ vezes}}, 0,0,0,...,0)$, então os vértices de K são adjacentes a $k-1$ vértices de K e a nenhum de S; os demais vértices são isolados com grau 0. Usando o Teorema 2.5 afirmamos que G é um grafo bem coberto. □

2.1.4 Grafos bem cobertos-$(2,0)$

Há mais de quarenta anos, grafos bem cobertos-$(2,0)$ são estudados na literatura. O Teorema 2.9 é uma caracterização estrutural proposta por Ravindra em [90] para grafos bem cobertos-$(2,0)$. Grafos-$(2,0)$ são conhecidos na literatura como *grafos bipartidos*.

Teorema 2.9. *[90] Seja G um grafo sem vértices isolados. G é um grafo bem coberto-$(2,0)$ se, e somente se, G contém um emparelhamento perfeito M tal que, para toda aresta, $e = uv$ em M, $G[N(u) \cup N(v)]$ é um grafo bipartido completo.*

2.1.5 Grafos bem cobertos-$(1,2)$

No Teorema 2.10 fornecemos uma caracterização estrutural para grafos bem cobertos-$(1,2)$.

Teorema 2.10. *Seja $G = (V,E)$ um grafo-$(1,2)$ que admite uma partição $V = (S, K^1, K^2)$, onde S é um conjunto independente maximal, e K^1, K^2 são cliques. G é um grafo bem coberto se, e somente se, satisfaz as três condições listadas a seguir:*

(i) Se $v \in K^1 \cup K^2$, então $1 \leq |N_S(v)| \leq 2$, e

(ii) Dado $v \in K^i$ com $|N_S(v)| = 1$. Se $u \in K^j$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, tal que $uv \notin E$ então $|N_S(u) \cup N_S(v)| = 2$, e

(iii) Se $\exists v \in K^i$ tal que $|N_S(v)| = 2$, então $\exists u \in K^j$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, tal que $uv \notin E$ e $N_S(u) \subseteq N_S(v)$.

Demonstração. Seja $G = (V,E)$ um grafo-$(1,2)$ que admite uma partição $V = (S, K^1, K^2)$, onde S é um conjunto independente maximal, e K^1, K^2 são cliques.

Suponha G bem coberto. Provaremos a necessidade das condições (i), (ii) e (iii).

(i) Seja $v \in K^1 \cup K^2$ um vértice qualquer. Suponha que $|N_S(v)| = 0$. Com isso, afirmamos que $S \cup \{v\}$ é um conjunto independente maximal de G. Isto é uma contradição, uma vez que assumimos S como um conjunto independente maximal de G.

Em seguida, suponha que $|N_S(v)| > 2$. Considere um conjunto independente maximal I de G que contenha v. Como G é bem coberto por hipótese, e S é um conjunto independente maximal de G, o conjunto I contém, no máximo, um vértice pertencente a K^1 e outro vértice pertencente a K^2 e, com isso, $|I| \leq |S| - 1$. Dessa forma, afirmamos que I e S são conjuntos independentes maximais de G com cardinalidades distintas, o que podemos concluímos que G não é bem coberto. Isto é uma contradição, uma vez que G é bem coberto por hipótese.

(ii) Seja $v \in K^i$ com $|N_S(v)| = 1$. Suponha que exista $u \in K^j$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, tal que $uv \notin E$. Consideramos um conjunto independente maximal I de G que contenha u e v.

Dessa forma, podemos escrever $I = \{u, v\} \cup (S \backslash (N_S(u) \cup N_S(v)))$. Uma vez que G é bem coberto por hipótese, escrevemos $|I| = 2 + |S| - |N_S(u) \cup N_S(v)| = |S|$ e, dessa forma, obtemos $|N_S(u) \cup N_S(v)| = 2$.

(iii) Suponha que exista $v \in K^i$, $i \in \{1, 2\}$, tal que $|N_S(v)| = 2$. Como G é bem coberto por hipótese e S é um conjunto independente maximal de G, afirmamos que todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade igual a $|S|$. Consideramos um conjunto independente maximal I de G que contenha v. Como $|I| = |S|$, $|N_S(v)| = 2$ e G é bem coberto por hipótese afirmamos que I possui, obrigatoriamente, um vértice u pertencente a uma clique distinta da qual v pertença tal que $uv \notin E$. Como $|N_S(u) \cup N_S(v)| = 2$ por (ii), afirmamos que $N(u) \subseteq N(v)$.

Por outro lado, suponha G um grafo-$(1, 2)$ que satisfaça as condições (i), (ii) and (iii) listadas acima no Teorema 2.10.

Observamos que um conjunto independente maximal I de G pode possuir três configurações mutualmente excludentes, a saber:

(a) ou I não contém vértices pertencentes a $K^1 \cup K^2$,

(b) ou I contém um vértice v pertencente a K^1 e outro vértice u pertencente a K^2,

(c) ou I contém apenas um vértice v pertencente a $K^1 \cup K^2$.

No caso (a), como S é um conjunto independente maximal de G afirmamos que $I = S$ e, dessa forma, $|I| = |S|$.

No caso (b), podemos escrever $I = \{u, v\} \cup (S \backslash N_S(u)) \cup (S \backslash N_S(v))$. Usando a condição (i) existem três casos a serem analisados para a cardinalidade dos suconjuntos $N_S(u)$ e $N_S(v)$:

- $|N_S(u)| = 1$ e $|N_S(v)| = 1$. Por (ii) verificamos que $|N_S(u) \cup N_S(v)| = 2$, e com isso, escrevemos $|I| = 2 + |S| - 2 = |S|$,
- Sem perda de generalidade, consideramos $|N(v)| = 2$ e $|N(u)| = 1$. Como u e v pertencem ao conjunto independente S, afirmamos que $uv \notin E$. Por (iii) verificamos que $N_S(u) \subseteq N_S(v)$ e, com isso, escrevemos $|I| = 2 + |S| - 2 = |S|$, e
- $|N(u)| = 2$ e $|N(v)| = 2$. Mais uma vez, como u e v pertencem ao conjunto independente S afirmamos que $uv \notin E$. Por (i) e por (iii) verificamos que $N_S(u) = N_S(v)$ e, com isso, escrevemos $|I| = 2 + |S| - 2 = |S|$.

No caso (c) I contém apenas um vértice v pertencente a $K^1 \cup K^2$. Dessa forma, há duas condições a serem analisadas pela condição (i) do Teorema 2.10: ou $|N_S(v)| = 1$, ou $|N_S(v)| = 2$.

No caso em que $|N_S(v)| = 1$, escrevemos $|I| = 1 + |S| - 1 = |S|$.

Já no caso em que $|N_S(v)| = 2$, por (iii) afirmamos que existe outro vértice u que pertence a uma clique distinta da qual v pertença tal que $uv \notin E$ e $N(u) \subseteq N(v)$. Dessa forma, $I' = I \cup \{u\}$ é um conjunto independente maximal de G. Isso viola a maximalidade de I. Sendo assim, afirmamos que tal caso não existe.

Uma vez que todo conjunto independente maximal I de G possui cardinalidade igual a $|S|$, concluímos que G é um grafo bem coberto. $\square$

Corolário 2.11. *Seja $G = (V, E)$ um grafo bem coberto-$(1,2)$ que admite uma partição $V = (S, K^1, K^2)$, onde S é um conjunto independente maximal de G e $u, v \in K^1 \cup K^2$ dois vértices tal que $uv \notin E$. Se $|N_S(v)| = 2$, então $N(u) \subseteq N(v)$.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo bem coberto-$(1,2)$ que admite uma partição $V = (S, K^1, K^2)$, onde S é um conjunto independente maximal de G e $u, v \in K^1 \cup K^2$ dois vértices tal que $uv \notin E$. Suponha que $|N_S(v)| = 2$ e que $N(u) \notin N(v)$. Com isso, afirmamos que $|N_S(\{u, v\})| > 2$.

Como $u, v \notin E(G)$, construímos um conjunto independente maximal I de G que contenha os vértices u e v a partir do conjunto S ou, de outra forma, $I = \{u, v\} \cup (S \cap \overline{N_S(\{u, v\})})$. Do fato que $|I| = 2 + |S| - |N_S(\{u, v\})| < |S|$ afirmamos que G não é bem coberto, uma contradição. $\square$

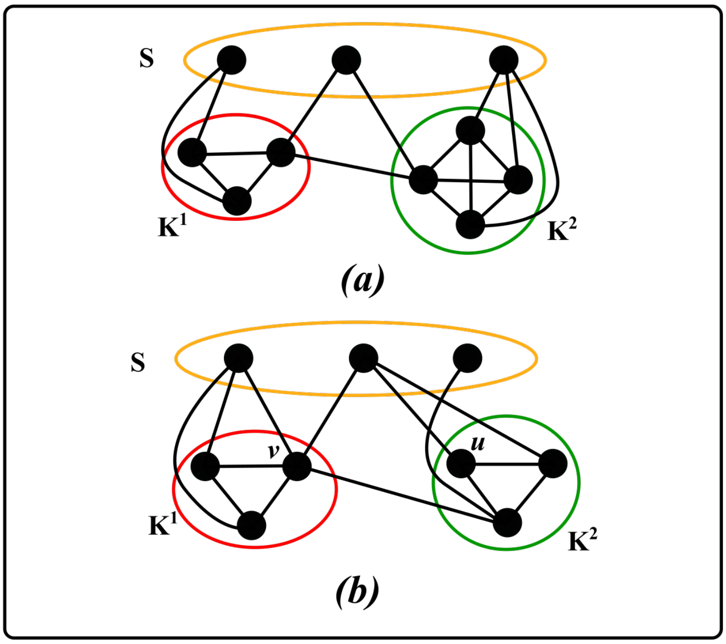

Figura 2.4: Exemplos de grafos bem cobertos-$(1,2)$. Em (b) observamos que $|N_S(v)| = 2$ e, em conformidade com o item (iii) do Teorema 2.10, existe um vértice u pertencente à clique distinta da qual v pertence tal que $N_S(u) \subseteq N(v)$.

2.2 Complexidade do reconhecimento de grafos bem cobertos-(r, ℓ)

Os Fatos 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15 são usados para completar as Tabelas 2.1 e 2.2 descritas no início deste capítulo.

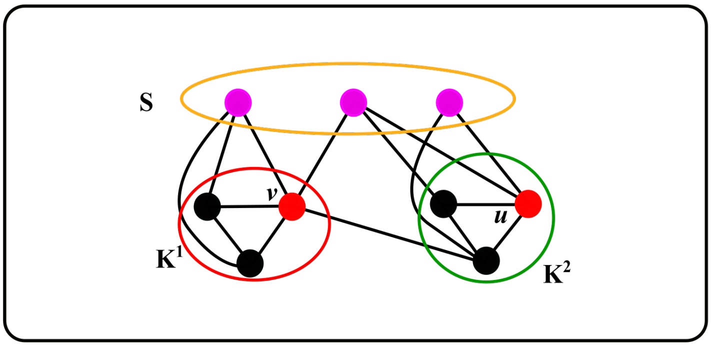

Figura 2.5: Exemplo de um grafo que não é um grafo bem coberto-$(1,2)$. Observamos que a condição (i) do Teorema 2.10 é violada, uma vez que $|N_S(u) \cup N_S(v)| \neq 2$. Destacamos dois conjuntos independentes com cardinalidades distintas nas cores vermelho e rosa.

Fato 2.12. *Se* GBC(r,ℓ) *está em* P, *então* G(r,ℓ)BC *também pertence à classe* P.

Demonstração. Suponha que GBC(r,ℓ) esteja em P. Como o problema G(r,ℓ)BC tem o mesmo objetivo do problema GBC(r,ℓ) e tem em sua entrada além do grafo $G=(V,E)$ a partição adicional $(S^1,S^2,S^3,\ldots,S^r,K^1,K^2,K^3,\ldots,K^\ell)$, o problema G$(r,\ell)$BC também está em P. □

Fato 2.13. *Se* G(r,ℓ)BC *é* coNPh, *então* GBC(r,ℓ) *pertence à classe* coNPh.

Demonstração. Suponha que G(r,ℓ)BC esteja em coNPh. Vamos provar que GBC(r,ℓ) é coNP-difícil. Seja $(G=(V,E),(S^1,S^2,S^3,\ldots,S^r,K^1,K^2,K^3,\ldots,K^\ell))$ uma entrada de G(r,ℓ)BC. Produzimos uma instância $H=G$ para GBC(r,ℓ) em tempo polinomial de $(G=(V,E),(S^1,S^2,S^3,\ldots,S^r,K^1,K^2,K^3,\ldots,K^\ell))$ tal que G é um grafo bem coberto se, e somente se, H é bem coberto. Assim temos que GBC(r,ℓ) é coNP-difícil. □

Fato 2.14. *Para quaisquer pares de inteiros r e ℓ tal que o* PROBLEMA DE RECONHECIMENTO DE UM GRAFO-(r,ℓ) *é polinomial, o problema* GBC(r,ℓ) *é* coNP.

Demonstração. Suponha que o reconhecimento de um grafo-(r,ℓ) seja polinomial. Então um certificado para a resposta NÃO de ambos os problemas é, ou a resposta do algoritmo polinomial que o grafo de entrada não é (r,ℓ), ou dois conjuntos independentes maximais com cardinalidades distintas. Assim, ambos os problemas GBC(r,ℓ) e G(r,ℓ)BC estão em coNP. □

Fato 2.15. *Para quaisquer pares de inteiros r e ℓ tal que o problema* G(r,ℓ)BC *está em* P, *o problema* GBC(r,ℓ) *está em* NP.

Demonstração. Suponha que G(r,ℓ)BC esteja em P. Então, um certificado para a resposta SIM de tamanho polinomial da instância $G=(V,E)$ de GBC(r,ℓ) é a solução do algoritmo polinomial com resposta SIM para GBC(r,ℓ) que diz que G é bem coberto, mais a partição-(r,ℓ) $(G=(V,E),(S^1,S^2,S^3,\ldots,S^r,K^1,K^2,K^3,\ldots,K^\ell))$ de V fornecida na entrada de G(r,ℓ)BC. Assim, GBC(r,ℓ) está em NP. □

Sendo assim, no restante deste capítulo descrevemos detalhadamente os resultados contidos nas Tabelas 2.1 e 2.2.

Na Subseção 2.2.1 provamos que $\textsc{g}(0,\ell)\textsc{bc}$ e $\textsc{g}(1,\ell)\textsc{bc}$ são polinomiais, bem como que os casos $\textsc{gbc}(0,1)$, $\textsc{gbc}(1,0)$, $\textsc{gbc}(0,2)$, $\textsc{gbc}(1,1)$, $\textsc{gbc}(2,0)$, e $\textsc{gbc}(1,2)$ também podem ser resolvidos em tempo polinomial, e que utilizando o Fato 2.12 podemos concluir que $\textsc{g}(0,1)\textsc{bc}$, $\textsc{g}(1,0)\textsc{bc}$, $\textsc{g}(0,2)\textsc{bc}$, $\textsc{g}(1,1)\textsc{bc}$, $\textsc{g}(2,0)\textsc{bc}$, e $\textsc{g}(1,2)\textsc{bc}$, respectivamente, podem ser resolvidos em tempo polinomial. Todos esses resultados em conjunto nos auxiliam a descrever os casos tratáveis descritos nas Tabelas 2.1 e 2.2.

Na Seção 2.2.2, o Teorema da Monotonicidade garante que podemos estender a NP-dificuldade ou a coNP-dificuldade dos problemas de decisão $\textsc{g}(r,\ell)\textsc{bc}$ (respectivamente $\textsc{gbc}(r,\ell)$) para $\textsc{g}(r+1,\ell)\textsc{bc}$ (respectivamente $\textsc{gbc}(r+1,\ell)$), e $\textsc{g}(r,\ell+1)\textsc{bc}$ (respectivamente $\textsc{gbc}(r,\ell+1)$), e que $\textsc{gbc}(0,3)$, $\textsc{gbc}(3,0)$ e $\textsc{gbc}(1,3)$ pertencem à classe dos problemas NP-difíceis. Além disso, a partir de um resultado obtido por Chvátal e Slater [23], e através dos Fatos 2.13 e 2.14, podemos concluir que $\textsc{g}(2,1)\textsc{bc}$ é um problema coNP-completo.

Observamos ainda que o problema $\textsc{g}(r,0)\textsc{bc}$ encontra-se em aberto para $r \geq 3$.

2.2.1 Casos polinomiais para $\textsc{gbc}(r,\ell)$ e $\textsc{g}(r,\ell)\textsc{bc}$

Nesta parte deste trabalho, estudamos os seis casos de reconhecimento polinomial para grafos bem cobertos-(r,ℓ) descritos na Tabela 2.1, bem como os casos polinomiais $\textsc{g}(0,\ell)\textsc{bc}$ e $\textsc{g}(1,\ell)\textsc{bc}$ descritos na Tabela 2.2.

O Teorema 2.16 e os Corolários 2.17, 2.18 e 2.19 resolvem os problemas $\textsc{gbc}(0,1)$, $\textsc{gbc}(1,0)$, $\textsc{g}(0,1)\textsc{bc}$ e $\textsc{g}(1,0)\textsc{bc}$.

Teorema 2.16. $\textsc{gbc}(0,1)$ *e* $\textsc{gbc}(1,0)$ *pertencem à* P.

Demonstração. A prova é obtida diretamente do Fato 2.1 e do Teorema 2.2, e que podemos checar em tempo polinomial se para um grafo $G=(V,E)$, $G[V]$ é uma clique ou um conjunto independente. □

Corolário 2.17. $\textsc{g}(0,1)\textsc{bc}$ *e* $\textsc{g}(1,0)\textsc{bc}$ *pertencem à* P.

Demonstração. Pelo Corolário 2.17, $\textsc{gbc}(0,1)$ e $\textsc{gbc}(1,0)$ pertencem à P. Utilizando o Fato 2.12, $\textsc{g}(0,1)\textsc{bc}$ e $\textsc{g}(1,0)\textsc{bc}$ também pertencem à P. □

Corolário 2.18. $\textsc{gbc}(0,2)$ *pertence à* P.

Demonstração. Como o reconhecimento de grafos-$(0,2)$ pertence à P [13], podemos produzir a entrada $V=(K^1,K^2)$ de $\textsc{g}(0,2)\textsc{bc}$ e usar o algoritmo descrito no Teorema 2.3. □

Corolário 2.19. $\textsc{g}(0,2)\textsc{bc}$ *pertence à* P.

Demonstração. Segue do Fato 2.12 e do Corolário 2.18. □

O teorema a seguir apresenta resultados para os problemas $\textsc{g}(0,\ell)\textsc{bc}$ e $\textsc{g}(1,\ell)\textsc{bc}$.

Teorema 2.20. *Os problemas* $\mathrm{G}(0,\ell)\mathrm{BC}$ *e* $\mathrm{G}(1,\ell)\mathrm{BC}$ *pertencem à classe* P *para todo inteiro* $\ell \geq 0$.

Demonstração. Para provar ambos os problemas é suficiente provar que $\mathrm{G}(1,\ell)\mathrm{BC}$ é polinomial. Sejam $G = (V,E)$ um grafo-$(1,\ell)$ e $V = (S, K^1, K^2, \ldots, K^\ell)$ uma partição para G.

Considerando I_K um conjunto independente maximal de $K^1 \cup K^2 \cup K^3 \cup \ldots \cup K^\ell$. Então cada conjunto independente maximal I de G admite uma partição $I = (I_K, S \backslash N_S(I_K))$.

Observamos que há, no máximo, $\mathrm{O}(n^\ell)$ escolhas para o conjunto independente I_K de $K^1 \cup K^2 \cup K^3 \cup \ldots \cup K^\ell$, que pode ser listado em tempo $\mathrm{O}(n^\ell)$, uma vez que ℓ é constante e a partição $(K^1, K^2, K^3, \ldots, K^\ell)$ é dada.

Para cada escolha, consideramos o conjunto independente $I = I_K \cup (S \backslash N_S(I_K))$. Se I não é maximal (podemos testar tal fato verificando se há algum vértice pertencente a $K^1 \cup K^2 \cup K^3 \cup \ldots \cup K^\ell$ que não é adjacente a nenhum vértice pertencente ao conjunto I), descartamos essa escolha de I_K.

Dessa forma, temos um número polinomial $\mathrm{O}(n^\ell)$ de conjuntos independentes maximais para serem testados a fim de decidir se G é um grafo bem coberto. □

Os Teoremas 2.21 e 2.22 resolvem os problemas $\mathrm{GBC}(1,1)$ e $\mathrm{GBC}(2,0)$.

Teorema 2.21. $\mathrm{GBC}(1,1)$ *pertence à* P.

Demonstração. $\mathrm{G}(1,1)\mathrm{BC}$ está em P pois, dado um grafo $G = (V,E)$ podemos, através do algoritmo de [13], encontrar uma partição-$(1,1)$ (S,K) para V, e testar se cada vértice pertencente a K não possui vizinhos em S, ou testar se cada vértice pertencente a K é adjacente a exatamente um vértice pertencente a S, conforme caracterização descrita no Teorema 2.5. □

Teorema 2.22. $\mathrm{GBC}(2,0)$ *pertence à* P.

Demonstração. Considere o grafo com pesos (G,ω) com $\omega : E(G) \to \{0,1\}$ satisfazendo $\omega(uv) = 1$ se $G[N(u) \cup N(v)]$ é um grafo bipartido completo e 0, caso contrário.

Pelo Teorema 2.9, G é bem coberto se, e somente se, (G,ω) possui um emparelhamento perfeito com pesos de tamanho mínimo $\frac{n}{2}$, e isso pode ser decidido em tempo polinomial conforme em [42]. □

Um conjunto D de vértices de G é um *conjunto vértice dominante* se todo vértice de G é adjacente ao menos a um vértice pertencente a D.

O Teorema 2.23 será útil na prova do Teorema 2.24.

Teorema 2.23. *[7] Um conjunto independente de G é um conjunto vértice dominante se, e somente se, é um conjunto independente maximal.*

Um algoritmo para verificar em tempo polinomial se um grafo-$(1,2)$ é um grafo bem coberto-$(1,2)$ está descrito no Teorema 2.24.

Teorema 2.24. $\textsc{gbc}(1,2)$ *pertence à* P.

Demonstração. Inicialmente, a fim de resolver o problema $\textsc{gbc}(1,2)$ devemos verificar se o grafo $G = (V, E)$ fornecido como instância do problema admite uma partição $(1,2)$ $V = (S, K^1, K^2)$. Para isso, basta usar o algoritmo polinomial proposto em [13].

Em caso afirmativo, a fim de verificar se o conjunto S é um conjunto independente maximal de G, testamos se S é um conjunto independente e vértice dominante em relação às partes K^1 e K^2 obtidas, conforme Teorema 2.23.

Em caso negativo, adicionamos no máximo um vértice pertencente a K^1 e um vértice pertencente a K^2 não adjacente a S, e obtemos um conjunto independente maximal $S_{\max}$ de G.

Por fim, testamos se as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.10 são satisfeitas em tempo polinomial. □

No restante deste capítulo nos dedicamos aos casos difíceis para grafos bem cobertos-(r, ℓ).

2.2.2 Casos difíceis para grafos bem cobertos-(r, ℓ)

A seguir enunciamos um Teorema de Monotonicidade para os dois Problemas de Decisão $\textsc{g}(r,\ell)\textsc{bc}$ e $\textsc{gbc}(r,\ell)$ definidos anteriormente neste capítulo. Este nos auxiliará a preencher as Tabelas 2.1 e 2.2. Em seguida, mostramos alguns casos difíceis para grafos bem cobertos-(r, ℓ).

Teorema da Monotonicidade

Teorema 2.25. (Teorema da Monotonicidade) *Sejam $r, \ell \geq 0$ dois números inteiros fixos.*

1. *Se* $\textsc{g}(r,\ell)\textsc{bc}$ *é* coNP*-completo então* $\textsc{g}(r+1,\ell)\textsc{bc}$ *e* $\textsc{g}(r,\ell+1)\textsc{bc}$ *são* coNP*-completos.*

2. *Se* $\textsc{gbc}(r,\ell)$ *é* NP*-difícil (respectivamente,* coNP*-difícl) então* $\textsc{gbc}(r,\ell+1)$ *é* NP*-difícil (respectivamente,* coNP*-difícil).*

3. *Suponha que $r \geq 1$. Se* $\textsc{gbc}(r,\ell)$ *é* NP*-difícil (respectivamente,* coNP*-difícil) então* $\textsc{gbc}(r+1,\ell)$ *é* NP*-difícil (respectivamente,* coNP*-difícil).*

Demonstração. (1) Segue imediatamente do fato que $\textsc{g}(r,\ell)\textsc{bc}$ está em coNP e de que todo grafo-(r, ℓ) é também um grafo-$(r+1, \ell)$ e um grafo-$(r, \ell+1)$.

(2) Seja G uma instância do problema $\textsc{gbc}(r,\ell)$.

Seja H a união disjunta de G e da clique Z com $V(Z) = \{z_1, \ldots, z_{r+1}\}$. Supondo G um grafo bem coberto onde todo conjunto independente maximal de G possui cardinalidade $|I|$. Dessa forma, como H é obtido a partir de G através da inclusão de uma clique disjunta, podemos afirmar que todo conjunto independente maximal do grafo H possui cardinalidade $|I| + 1$, donde concluímos que H também é bem coberto.

Por outro lado, suponha H um grafo bem coberto. Ao removermos a clique disjunta do grafo G podemos afirmar que G é bem coberto, uma vez que a clique disjunta contribui com apenas um vértice para o conjunto independente maximal de H. Dessa forma, G é bem coberto se, e somente se, H é bem coberto.

Da mesma forma, se G é um grafo-(r, ℓ) então H é um grafo-$(r, \ell+1)$, uma vez que H possui ℓ cliques de G mais a clique Z.

Suponha que H é um grafo-$(r, \ell+1)$ com uma partição em r conjuntos independentes $S^1, \ldots, S^r$ e $\ell+1$ cliques $K^1, \ldots, K^{\ell+1}$. Cada conjunto independente S^i pode conter, no máximo, um vértice da clique Z. Dessa forma, como existem r conjuntos independentes e $r+1$ vértices em Z, tem que existir um vértice z_i em alguma clique K^j. Assumimos, sem perda de generalidade que exista um vértice de Z em $K^{\ell+1}$. Então $K^{\ell+1}$ não pode conter qualquer vértice além dos vértices pertencentes ao conjunto $V(Z)$ e, com isso, podemos concluir que $K^{\ell+1}$ contém todos os vértices na clique Z, e logo G é um grafo-(r, ℓ).

Com isso, H é uma instância SIM de GBC$(r, \ell+1)$ se, e somente se, G é uma instância-SIM para o problema GBC(r, ℓ).

(3) Seja G uma instância para o problema GBC(r, ℓ). Seja H o um grafo obtido pela junção de $\ell+1$ vértices isolados do conjunto $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{\ell+1}\}$ ao grafo $G = (V, E)$. Observe que G é bem coberto se, e somente se, H é bem coberto. Se G é (r, ℓ), então H é (r, ℓ).

Suponha, por outro lado, que H é $(r+1, \ell)$. Cada clique K^i contém no máximo um vértice de Z. Dessa forma, tem que existir um vértice z de Z que pertença a algum conjunto independente da partição, digamos que ao conjunto S^{r+1}. Como z é universal a todos os vértices de $V \backslash Z$ temos que nenhum vértice de $V \backslash Z$ pertence a S^{r+1}. Podemos então assumir que $S^{r+1} \subset Z$. Logo G é um grafo-(r, ℓ).

Com isso, H é uma instância SIM de GBC$(r+1, \ell)$ se, e somente se, G é uma instância SIM de GBC(r, ℓ). □

Casos coNP-completos para G(r, ℓ)BC

Chvátal e Slater [23] provaram que o PROBLEMA GRAFO BEM COBERTO é coNP-completo. Para isso eles consideram uma instância $I = (U, C)$ de 3-SAT e constroem um grafo $G = (V, E)$ tal que I é satisfatível se, e somente se, G é bem coberto.

Observamos que a instância GRAFO BEM COBERTO G construída durante a redução é um grafo-$(2,1)$, o que implica que G$(2,1)$BC é coNP-completo.

De fato, eles tomam como entrada uma instância $I = (U, C)$ de 3-SAT onde $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}, \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m\})$, e constroem uma instância GRAFO BEM COBERTO $G = (V, E) = (\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \ldots, \overline{u_n}, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m\}, \{xc_j : x \text{ ocorre em } c_j\} \cup \{u_i\overline{u}_i : 1 \le i \le n\} \cup \{c_ic_j : 1 \le i < j \le m\})$. Observamos que $\{c_ic_j : 1 \le i < j \le m\}$ é uma clique, e que $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ e $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots, \overline{u}_n\}$ são conjuntos independentes. Com isso, G é um grafo-$(2,1)$. Uma ilustração desta construção encontra-se descrita na Figura 2.6.

Podemos sintetizar o resultado da forma a seguir.

Teorema 2.26. *[23]* G$(2,1)$BC *é* coNP-*completo.*

Corolário 2.27. $\text{GBC}(2,1)$ *é* coNP-*completo.*

Demonstração. Decorre do fato que grafos-$(2,1)$ podem ser reconhecidos em tempo polinomial conforme [13], e usando o Teorema 2.26 e os Fatos 2.13 e 2.14. □

Corolário 2.28. $\text{G}(2,\ell)\text{BC}$, $\ell \geq 2$, *é* coNP-*completo.*

Demonstração. Decorre do Corolário 2.27 e do item (1) Teorema 2.25. □

Corolário 2.29. $\text{G}(r,\ell)\text{BC}$, $r \geq 3$, $\ell \geq 1$, *é* coNP-*completo.*

Demonstração. Decorre do Corolário 2.28 e do item (1) Teorema 2.25. □

Corolário 2.30. $\text{GBC}(2,2)$ *é* coNP-*completo e* $\text{GBC}(2,\ell)$, $\ell \geq 3$, *é* coNP-*difícil.*

Demonstração. Decorre do fato que grafos-$(2,2)$ podem ser reconhecidos em tempo polinomial conforme [13], e usando os Fatos 2.13 e 2.14 e o item (2) do Teorema 2.25.

A prova de que $\text{GBC}(2,\ell)$, $\ell \geq 3$ é coNP-difícil decorre do Fato 2.13, do Corolário 2.28 e do item (2) do Teorema 2.25. □

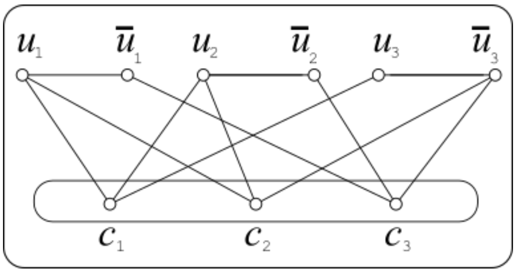

Figura 2.6: Exemplo de Instância GRAFO BEM COBERTO $G = (V,E)$ proposta por Chvátal e Slater em [23] obtida a partir de uma instância 3-SAT $I = (U,C) = (\{u_1,u_2,u_3\},\{(u_1,u_2,u_3),(u_1,u_2,\overline{u}_3),(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3)\})$, onde $C = \{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_m\}$ é uma clique de G. Observamos que Chvátal e Slater [23] provaram que I é satisfatível se, e somente se, G não é bem coberto, uma vez que há um conjunto independente maximal de tamanho $n+1$ (por exemplo $\{c_1,\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$) e há um conjunto independente maximal de tamanho n (por exemplo, $\{u_1,u_2,\overline{u}_3\}$). É importante também observar que G é um grafo-$(2,1)$ com uma partição $V = (\{u_1,u_2,u_3\},\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\},\{c_1,c_2,c_3\})$.

Casos NP-difíceis para $\text{GBC}(r,\ell)$

Vamos agora provar que $\text{GBC}(0,3)$ é NP-completo. Para isso, realizamos uma pequena modificação na prova de NP-completude de 3-coloração proposta por Larry Stockmeyer [98] em 1973.

A prova de Stockmeyer [98] utiliza uma instância 3-SAT para provar que o problema da 3-coloração em grafos planares é NP-completo. A partir da instância $I = (U,C) = (\ \{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\},\ \{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_m\}\ )$, construímos uma instância G de 3-COLORAÇÃO onde $G = (V,E) = (\ \{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3,\ldots,\overline{u}_n\} \cup \{v_1[j],v_2[j],\ v_3[j],v_4[j],\ v_5[j],v_6[j]\ :\ j \in \{1,2,3,\ldots,m\}\} \cup \{t_1,t_2\},\ \{u_i\overline{u}_i\ :\ i \in \{1,2,3,\ldots,n\}\} \cup \{v_1[j]v_2[j],$

$v_2[j]v_4[j], v_4[j]v_1[j],\ v_4[j]v_5[j], v_5[j]v_6[j],\ v_6[j]v_3[j],\ v_3[j]v_5[j] : j \in \{1,2,3,\ldots,m\}\} \cup \{v_1[j]x, v_2[j]y, v_3[j]z : c_j = (x,y,z)\} \cup \{t_1u_i, t_1\bar{u}_i : i \in \{1,2,3,\ldots,n\}\} \cup \{t_2v_6[j] : j \in \{1,2,3,\ldots,m\}\}$). Para conveniência do leitor mostramos um exemplo de construção na Figura 2.7 (a).

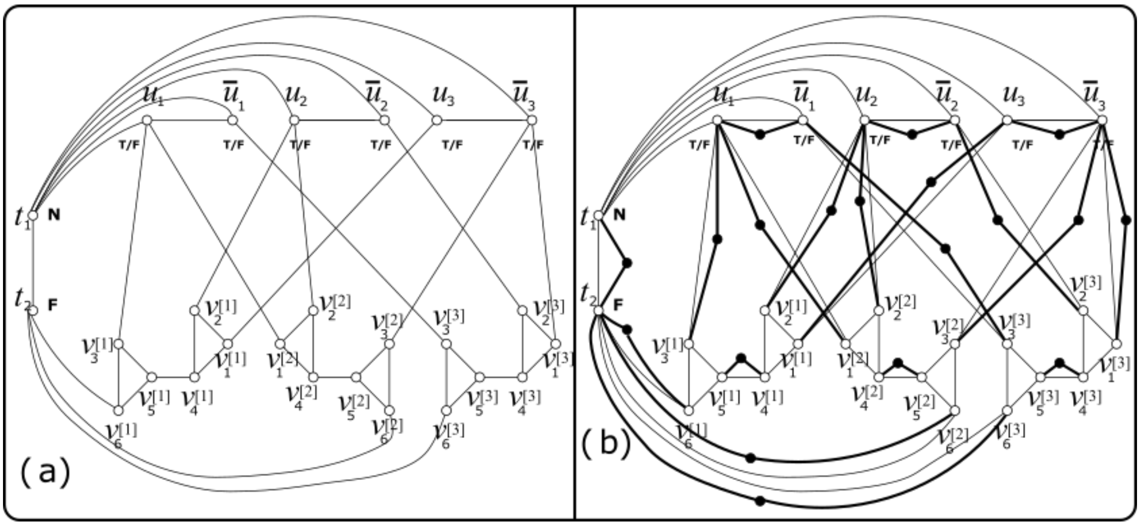

Figura 2.7: Instância $G = (V,E)$ de 3-COLORAÇÃO de [98] em (a) obtida da da instância $I = (U,C) = (\{u_1,u_2,u_3\}, \{(u_1,u_2,u_3),(u_1,u_2,\overline{u}_3),(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3)\})$ de 3-SAT.
(b) O grafo G' obtido de G através da adição de um vértice x_{uv} com $N_{G'}(x_{uv}) = \{u,v\}$ para toda aresta uv of G não pertencente ao triângulo.

Teorema 2.31. GBC$(0,3)$ *é* NP-*completo.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.20, o problema G$(0,3)$BC pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos-$(0,3)$. Pelo Fato 2.15, afirmamos que GBC$(0,3)$ está em NP, onde um certificado é uma partição de V em 3 cliques.

Seja $I = (U,C)$ uma instância 3-SAT. Produzimos, em tempo polinomial no tamanho de I uma instância H de GBC$(0,3)$ tal que I é satisfatível se, e somente se, H é um grafo bem coberto-$(0,3)$. Seja $G = (V,E)$ o grafo descrito em [98] (Figura 2.7 (a)) obtido da instância I, e seja G' o grafo obtido de G pela adição de um vértice x_{uv} ao conjunto V para toda aresta uv de G que não pertença a um triângulo, e pela adição das arestas ux_{uv} e vx_{uv}, tal como a Figura 2.7 (b). Finalmente, definimos $H = \overline{G'}$ como o grafo complemento do grafo G'. Observamos que, por [98], I é satisfatível se, e somente se, G é 3-colorível. Como x_{uv} é adjacente a somente dois vértices de cores distintas de G, claramente G é 3-colorível se, e somente se, G' é 3-colorível. Com isso, I é satisfatível se, e somente se, H é um grafo-$(0,3)$.

Vamos agora provar que I é satisfatível se, e somente se, H é um grafo bem coberto-$(0,3)$.

Suponha I satisfatível. Então, como H é um grafo-$(0,3)$ todo conjunto independente maximal tem cardinalidade 3, 2 ou 1. Se há um conjunto independente maximal I em H com cardinalidade 1 ou 2, então G' possui cliques maximais de tamanho 1 ou 2. Isto contradiz a construção de G', uma vez que toda clique maximal de G' são triângulos. Dessa forma, H é um grafo-$(0,3)$ onde todo conjunto independente maximal possui cardinalidade 3. Isto nos leva a concluir que H é bem coberto.

Por outro lado, suponha que H seja um grafo bem coberto-$(0,3)$. Com isso, G' é 3-colorível, logo G também é 3-colorível. Então, por [98], I é satisfatível. □

O seguinte Teorema de Topp e Volkmann [100] nos auxiliará na demonstração do Teorema 2.33.

Teorema 2.32. *[100] Seja* $G = (V,E)$ *um grafo de ordem* n, $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, *e seja* H *obtido de* G *tal que* $V(H) = V \cup \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ *e* $E(H) = E \cup \{v_i u_i : i \in \{1,2,3,\ldots,n\}\}$. *Então* H *é um grafo bem coberto onde todo conjunto independente maximal tem tamanho* n.

Demonstração. Notamos que todo conjunto independente maximal I de H tem um subconjunto $I_G = I \cap V$. Seja $\mathcal{U} \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}$ o conjunto de índices i tal que $v_i \in I$. Como I é maximal, o conjunto $\{u_i : i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \backslash \mathcal{U}\}$ tem que estar contido em I, logo $|I| = n$. □

Teorema 2.33. GBC$(3,0)$ *é* NP-*difícil.*

Demonstração. Notamos que existe um certificado de tempo polinomial para G possuir uma resposta SIM de $(3,0)$ mas não conhecemos um certificado de tempo polinomial para a resposta SIM de G ser bem coberto.

Por outro lado, existe um certificado de tempo polinomial para a resposta NÃO de G ser bem coberto, mas não conhecemos um certificado de tempo polinomial para a resposta NÃO de G ser $(3,0)$. Daí a classificação da dificuldade de GBC$(3,0)$.

Sejam $I = (U,C)$ uma instância 3-SAT, $G = (V,E)$ um grafo obtido da instância I encontrada em Stockmeyer [98] para provar que 3-COLORAÇÃO é NP-completo, e H o grafo obtido de G pela transformação descrita no Teorema 2.32. Provamos que I é satisfatível se, e somente se, H é um grafo bem coberto-$(3,0)$.

Suponha I satisfatível. Então, por Stockmeyer [98], temos que G é 3-COLORÍVEL. Como um vértice $v \in V(H) \backslash V(G)$ tem apenas um vizinho, há ainda 2 cores disponíveis para v a fim de estender a 3-COLORAÇÃO de G, e com isso H é um grafo-$(3,0)$. Com isso, pelo Teorema 2.32 H é um grafo bem coberto-$(3,0)$.

Suponha que H é um grafo bem coberto-$(3,0)$. Então temos que G é um grafo-$(3,0)$. Pelo resultado de Stockmeyer [98] concluímos que I é satisfatível. □

Teorema 2.34. GBC$(1,3)$ *é* NP-*completo.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.20 o problema G$(1,3)$BC pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos-$(1,3)$. Pelo Fato 2.15, GBC$(1,3)$ está em NP.

Seja $I = (U,C)$ uma instância 3-SAT. Sem perda de generalidade, I tem mais do que duas cláusulas. Produzimos uma instância H de GBC$(1,3)$ em tempo polinomal no tamanho de I, tal que I é satisfatível se, e somente se, H é um grafo bem coberto-$(1,3)$.

Seja $G = (V, E)$ o grafo de Stockmeyer [98] obtido de I (conforme Figura 2.7(a)), e seja H o grafo obtido de $\overline{G}$ (o complemento do grafo G) pela adição de um vértice pendente p_v para cada vértice v de $\overline{G}$. Observe que $V(H) = V(G) \cup \{p_v : v \in V(G)\}$, $E(H) = E(\overline{G}) \cup \{p_v : v \in V(G)\}$, e $N_H(p_v) = \{v\}$.

Suponha I satisfatível. Então, pelo resultado de Stockmeyer [98], G é um grafo-$(3,0)$, e $\overline{G}$ é um grafo-$(0,3)$ com partição em cliques $V(\overline{G}) = (K^1_{\overline{G}}, K^2_{\overline{G}}, K^3_{\overline{G}})$. Com isso, segue que $(S = \{p_v : v \in V(G)\}, K^1_{\overline{G}}, K^2_{\overline{G}}, K^3_{\overline{G}})$ é uma $(1,3)$-partição de $V(H)$. Além disso, do Teorema 2.32 e pela construção de H, H é um grafo bem coberto. Dessa forma, H é um grafo bem coberto-$(1,3)$.

Por outro lado, suponha que H é um grafo bem coberto-$(1,3)$, e seja $V(H) = (S, K^1, K^2, K^3)$ uma partição-$(1,3)$ para H. Então podemos afirmar que nenhum vértice $p_v \in V(H) \backslash V(G)$ pertence a K^i, $i \in \{1,2,3\}$. De fato, suponha por contradição que $p_v \in K^i$ para algum $i \in \{1,2,3\}$. Então, $K^i \subseteq \{p_v, v\}$. Com isso, $H \backslash K^i$ é um grafo-$(1,2)$ e $G \backslash \{v\}$ é um subgrafo induzido de um grafo-$(2,1)$. Mas, por construção de G, $G \backslash \{v\}$ (para qualquer $v \in V(G)$) contém ao menos um $2K_3$ (isto é, duas cópias disjuntas de um K_3) como um subgrafo induzido, que é uma contradição dado que $2K_3$ é claramente um subgrafo proibido de um grafo-$(2,1)$. Dessa forma, $\{p_v : v \in V(G)\} \subseteq S$, e como $\{p_v : v \in V(G)\}$ é um conjunto dominante de H, $S = \{p_v : v \in V(G)\}$. Dessa forma, $\overline{G}$ é um grafo-$(3,0)$ com partição $V(\overline{G}) = (K^1, K^2, K^3)$, e dessa forma G é um grafo-$(3,0)$, isto é, um grafo 3-colorível. Usando Stockmeyer [98], podemos concluir que I é satisfatível. □

Corolário 2.35. *Se $r \geq 3$ e $\ell = 0$, então* GBC(r,ℓ) *é* NP-*difícil. Se $r \in \{0,1\}$ e $\ell \geq 3$, então* GBC(r,ℓ) *é* NP-*completo.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.33 sabemos que o caso GBC$(3,0)$ é um problema NP-díficil. Para provar que GBC$(r,0)$, $r \geq 3$, é NP-difícil basta utilizar o item (3) do Teorema 2.25 e o Teorema 2.33. Para $r \in \{0,1\}$ e $\ell \geq 3$, o problema G(r,ℓ)BC pode ser resolvido em tempo polinomial pelo Teorema 2.20, logo pelo Fato 2.15 GBC(r,ℓ) está em NP. □

Corolário 2.36. GBC$(0,\ell)$ *e* GBC$(1,\ell)$*, $\ell \geq 3$, são* NP-*completos.*

Demonstração. Como pelos Teorema 2.31 e 2.34 sabemos, respectivamente, que GBC$(0,3)$ e GBC$(1,3)$ são NP-completos, podemos usar o item (2) do Teorema 2.25 para obter que GBC$(0,\ell)$ e GBC$(1,\ell)$, para $\ell \geq 3$, são NP-completos. □

Corolário 2.37. GBC$(2,\ell)$*, $\ell \geq 3$, é* (co)NP-*difícil.*

Demonstração. Para provar que GBC$(2,\ell)$, com $\ell \geq 1$, é NP-difícil (veja Tabelas 2.1 e 2.3). Decorre do Teorema 2.34 e do Corolário 2.35 que dizem que GBC$(1,\ell)$, $\ell \geq 3$, é NP-completo. Assim, pelo Teorema 2.34, Corolário 2.35 e pelo item (2) do Teorema 2.25 temos que GBC$(2,\ell)$, para $\ell \geq 3$, é NP-difícil. □

Corolário 2.38. GBC(r,ℓ)*, $r \geq 3$, $\ell \geq 1$, é* (co)NP-*difícil.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que GBC(r,ℓ), com $r \geq 3$ e $\ell \geq 1$, é NP-difícil (veja Tabelas 2.1 e 2.3). Esta primeira parte decorre do Corolário 2.35 e do Teorema (2) do

Teorema 2.25. Agora vamos provar que GBC(r, ℓ), com $r \geq 3$ e $\ell \geq 1$, é coNP-difícil (veja Tabelas 2.1 e 2.3). Essa segunda parte decorre dos Corolários 2.27, 2.30 e 2.37, e pelo item (3) do Teorema 2.25. $\square$

Capítulo 3

Problemas Sanduíche para grafos bem cobertos-(r, ℓ).

Neste capítulo, faremos uma introdução aos PROBLEMAS SANDUÍCHE EM GRAFOS. Em seguida, apresentaremos resultados que obtivemos para O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ). Tais resultados foram obtidos com a colaboração do Professor Uéverton dos Santos Souza (Universidade Federal Fluminense – UFF).

3.1 Introdução ao Problema Sanduíche em Grafos

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE surgiram como uma generalização natural dos problemas de reconhecimento em grafos. Nos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO desejamos saber se um dado grafo satisfaz uma propriedade desejada.

O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE INTERVALO foi proposto em [59] por Golumbic e Shamir para resolver problemas em raciocínio espacial-temporal, e foi demonstrado ser NP-completo. Posteriormente, em [57], Kaplan se une aos dois pesquisadores e, juntos, apresentam trabalhos para O PROBLEMAS SANDUÍCHE em várias classes de grafos, tais como: split, threshold, cografos, grafos eulerianos, comparabilidade, dentre outros.

O problema foi também estudado para propriedades relacionadas à partição de grafos, tais como:

- *conjunto homogêneo* [18], onde um *conjunto homogêneo* H em $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices não-unitário e não propriamente contido em V tal que cada vértice pertencente a $V \backslash H$ é adjacente a todos os vértices de H ou a nenhum vértice de H, onde $|H| \geq 2$ e $|V \backslash H| \geq 1$, e

- *partição* 1*-join* [33], onde o conjunto de vértices do grafo é particionado em quatro subconjuntos não-vazios, A_L, A_R, S_L e S_R, e onde são impostas as seguinte restrições: todo vértice de A_L é completamente adjacente a todo vértice de A_R, nenhum vértice de S_L é adjacente a um vértice de $A_R \cup S_R$, e nenhum vértice de S_R é adjacente a um vértice de $A_L \cup S_L$.

Ressaltamos que, em relação aos os problemas de partição citados, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA CONJUNTO HOMOGÊNEO é polinomial, enquanto o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA PARTIÇÃO 1-JOIN é NP-completo. Por fim, em [32] foi provado que o PROBLEMA SANDUÍCHE é NP-completo para grafos-(r,ℓ) em geral, onde $r+\ell>2$, e polinomial, caso contrário.

Em [57], o PROBLEMA SANDUÍCHE está definido como segue:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA UMA PROPRIEDADE Π (PS-Π)
INSTÂNCIA: Dois grafos, $G^1=(V,E^1)$ e $G^2=(V,E^2)$, tal que $E^1\subseteq E^2$.
PERGUNTA: Existe um grafo sanduíche $G=(V,E)$, tal que $E^1\subseteq E\subseteq E^2$, que satisfaça a propriedade Π?

Dessa forma, no PROBLEMA SANDUÍCHE PARA UMA PROPRIEDADE Π desejamos saber a existência ou não de um grafo $G=(V,E)$ "ensaduichado" entre dois grafos G^1 e G^2, onde G^2 é *supergrafo* de G^1, isto é, $E^1\subseteq E^2$, satisfazendo uma determinada propriedade Π. É importante observar que o problema torna-se trivial quando G^1 ou G^2 possuem a propriedade Π e também que, quando $E^1=E^2$, o PROBLEMA SANDUÍCHE se resume a um PROBLEMA DE RECONHECIMENTO. Note que, se o grafo sanduíche G existir, então todas as arestas de G^1 pertencem a G, sendo denominadas *arestas obrigatórias* (denotadas por E^1). Além disso, arestas que estão no complemento de G^2 não pertencem ao grafo G e são chamadas de *arestas proibidas* (denotadas por E^3). Arestas que não são nem obrigatórias e nem proibidas podem ser usadas, caso necessário, na solução do problema e são chamadas de *arestas opcionais* (denotadas por E^0 ou, de outro modo, $E^0=E^2\backslash E^1$).

Segundo [32] os Fatos 3.1, 3.2 e 3.3 estão diretamente relacionados com a complexidade do PROBLEMA SANDUÍCHE.

Fato 3.1. *Se o* PROBLEMA DE RECONHECIMENTO *para uma propriedade* Π *é* NP*-completo, então o* PROBLEMA SANDUÍCHE *correspondente também é* NP*-completo.*

Fato 3.2. *Se a propriedade* Π *é* hereditária *então existe um grafo sanduíche para* (V,E^1,E^2) *com a propriedade* Π *se, e somente se,* $G^1=(V,E^1)$ *satisfaz a propriedade* Π.

Fato 3.3. *Se a propriedade* Π *é* ancestral *então existe um grafo sanduíche para* (V,E^1,E^2) *com a propriedade* Π *se, e somente se,* $G^2=(V,E^2)$ *satisfaz a propriedade* Π.

3.2 Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-(r,ℓ)

Nesta seção apresentamos resultados para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ).

Descrevemos o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ) (PS-GBC(r,ℓ)) formalmente abaixo:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ) (PS-GBC(r,ℓ))
INSTÂNCIA: Grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$, tal que $E^1 \subseteq E^2$.
PERGUNTA: Existe um grafo $G = (V, E)$ bem coberto-(r,ℓ) tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$?

Nas Subseções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3, mostramos que os problemas PS-GBC$(1,0)$, PS-GBC$(0,1)$, PS-GBC$(0,2)$ e PS-GBC$(1,1)$ são polinomiais. Na Seção 3.2.4 descrevemos um resultado de NP-completude para PS-GBC$(1,2)$. O problema PS-GBC$(2,0)$ permanece em aberto, conforme descrito na tabela a seguir.

r \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	NPc
1	P	P	NPc	NPc
2	?	coNPc	coNPc	(co)NPh
≥ 3	NPh	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh

Tabela 3.1: Complexidade do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r,ℓ). P corresponde a um problema com complexidade polinomial, coNPc corresponde a um problema com complexidade coNP-completo, NPh corresponde a NP-hard, NPc corresponde a NP-completo, e (co)NPh corresponde a um problema que é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil.

3.2.1 Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-$(1,0)$ e para grafos bem cobertos-$(0,1)$

Como ser um grafo GBC$(1,0)$ ou GBC$(0,1)$ são propriedades hereditária e ancestral, respectivamente, temos que os Fatos 3.4 e 3.5 descritos a seguir resolvem os casos PS-GBC$(1,0)$ e PS-GBC$(0,1)$.

Fato 3.4. *Existe grafo sanduíche* GBC$(1,0)$ *para uma instância* (G^1, G^2) *se, e somente se,* G^1 *é um grafo nulo.*

Fato 3.5. *Existe grafo sanduíche* GBC$(0,1)$ *para uma instância* (G^1, G^2) *se, e somente se,* G^2 *é um grafo completo.*

3.2.2 Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-$(0,2)$

De acordo com o Teorema 2.3, um grafo $G = (V, E)$ é um grafo bem coberto-$(0,2)$ se, e somente se, ou G é um grafo-$(1,0)$, ou G é um grafo-$(0,2)$ sem vértices universais. Nessa subseção apresentamos o Algoritmo 1 que resolve o caso PS-GBC$(0,2)$ em tempo linear.

Teorema 3.6. *O Algoritmo 1 resolve o problema* PS-GBC$(0,2)$ *em tempo linear.*

Algoritmo 1: PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(0,2)$.

Entrada: Grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$ tal que $E^1 \subseteq E^2$.
Saída: Resposta SIM com um grafo bem coberto-$(0,2)$ $G = (V, E)$, tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$, ou resposta NÃO caso tal grafo G não exista.

1 **início**
2   **se** ($G^2 = (V, E^2)$ *não é um grafo*-$(0,2)$) **então**
3   **retorna** NÃO
4   **else**
5   **se** ($G^2 = (V, E^2)$ *é um grafo completo*) **então**
6   **retorna** (SIM, G)
7   **else**
8   **se** (G^1 *possui um vértice universal*) **então**
9   **retorna** NÃO
10   **else**
11   **retorna** (SIM, G)
12 **fim.**

Demonstração. Inicialmente, observamos que a propriedade "ser um grafo ser co-bipartido" é ancestral. Sendo assim, para que exista um grafo sanduíche GBC$(0,2)$, G^2 deve ser co-bipartido. (linhas 2–3).

Como todo grafo-$(0,1)$ (grafo completo) é bem coberto, a resposta do problema é positiva (linhas 5–6).

Se G^2 é um $(0,2)$ mas não é um $(0,1)$, ou seja, se G^2 é um grafo-$(0,2)$ e G^1 possui um vértice universal, então a resposta é negativa (linhas 8–9) conforme descrito no Teorema 2.18.

Finalmente, consideramos que G^2 é $(0,2)$ e G^1 não possui vértice universal. Tome uma partição $(0,2)$, (K^1, K^2) de G^2. Observe que toda aresta de E^3 possui um extremo em K^1 e outro extremo em K^2. Se $v \in K^i$ domina todos os vértices de K^j, $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, em G^1 então há um vértice $w \in K^i$ tal que $vw \in E^2$, ou, de outra forma v é um vértice universal em G^1. Dessa forma, podemos atualizar a partição $(0,2)$ para $(K^1 \backslash \{v\}, K^2 \cup \{v\})$. Tal procedimento pode ser aplicado sucessivamente até obter uma partição $(0,2)$ em que para todo vértice $v \in K^i$ existe ao menos um vértice $w \in K^j$ $(i \neq j)$ tal que $vw \in E^0 \cup E^3$, o que certifica que existe um grafo co-bipartido $G = (V, E)$ com $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ que não possui vértice universal. Dessa forma, a resposta é positiva (linhas 10–11). □

3.2.3 Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-$(1,1)$

Nesta subseção provamos que PS-GBC$(1,1)$ é polinomial.

O Lema 3.7 realiza uma alteração no método utilizado por Golumbic, Kaplan e Shamir em [57] para solucionar o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS SPLIT.

Em termos gerais, este lema ou resolve o PS-GBC$(1,1)$, ou produz uma partição conveniente do conjunto de vértices do grafo sanduíche $G = (V, E)$.

Lema 3.7. *Há um algoritmo de tempo linear que corretamente, ou resolve o problema* PS-GBC$(1,1)$, *ou exibe como saída uma partição* $(S', K' \cup T')$ *de* V *tal que:*

1. S' *é um conjunto independente;*
2. $K' \cup T'$ *induz uma clique de* G^2*;*
3. $K', T' \neq \varnothing$*;*
4. *não existem arestas de* G^2 *entre vértices de* T' *e de* S'*;*
5. *cada vértice* $v \in K'$ *é incidente a, no máximo, uma aresta* $vu \in E^1$ *tal que* $u \in S'$*, ou ao menos uma aresta* $vw \in E^2$ *tal que* $w \in S'$*.*

Demonstração. Em [57] foi apresentada uma solução para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS SPLIT. Tal algoritmo baseia-se na redução do problema a uma instância $I = (U, C)$ de 2-SAT. A construção proposta consiste em criar um conjunto de variáveis $U = \{v_K, v_S : v \in V\}$, bem como um conjunto de cláusulas $C = \{(v_K \vee v_S), (\overline{v_K} \vee \overline{v_S}) : v \in V\} \cup \{(u_K \vee v_K) : uv \in E^1\} \cup \{(u_S \vee v_S) : uv \in E^3\}$.

É fácil verificar que $I = (U, C)$ é satisfatível se, e somente se, V pode ser particionado em (S, K) tal que S induz um conjunto independente de G^1 e K induz uma clique de G^2, onde v_K representa o vértice v que deve ser colocado em K, bem como v_S representa o vértice v que deve ser colocado em S na solução.

Considerando o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$, observamos que toda instância SIM deste problema é também uma instância SIM para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS SPLIT. Entretanto, a instância produzida pelo PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS SPLIT deve satisfazer a caracterização estrutural descrita no Teorema 2.5. Desse modo, a fim de contemplar tal restrição adicionamos a seguinte cláusula adicional a $I = (U, C)$:

$\{(\overline{v_S}, \overline{w_S}) : u, v, w \in V$ e $uv, uw \in E^1\}$

Notamos que se $I = (U, C)$ não é satisfatível, então (G^1, G^2) é uma instância NÃO para o problema SANDUÍCHE PARA GRAFO BEM COBERTO-$(1,1)$. Entretanto, se $I = (U, C)$ é satisfatível, então (G^1, G^2) pode ser particionado em (S, K), onde S induz um conjunto independente de G^1 e K induz uma clique de G^2, e todo vértice $v \in K$ tem no máximo um vizinho em S no grafo G^1. Dessa forma, bastar realizar as seguintes atribuições:

– $S' \leftarrow S$,

– $T' \leftarrow \{v : v \in K$ e não possui vizinho em S no grafo $G^2\}$, e

– $K' \leftarrow K \backslash T'$.

De acordo com o Teorema 2.5, o problema PS-GBC$(1,1)$ é resolvido quando ou $T' = \varnothing$, ou $K' = \varnothing$.

Se $T' = \varnothing$ então (G^1, G^2) é uma instância SIM, uma vez que podemos usar arestas opcionais de maneira conveniente para satisfazer a condição que todos os vértices possuem exatamente um vizinho em S.

Se $K' = \varnothing$ então (G^1, G^2) é também uma instância SIM, uma vez que nenhum vértice em K será adjacente a um vértice em S.

Com isso, ou resolvemos PS-GBC$(1,1)$, ou produzimos como saída uma partição $(S', K' \cup T')$. □

O Lema 3.8 propõe um procedimento que verifica se existe uma solução para PS-GBC$(1,1)$ conforme o Teorema 2.5.

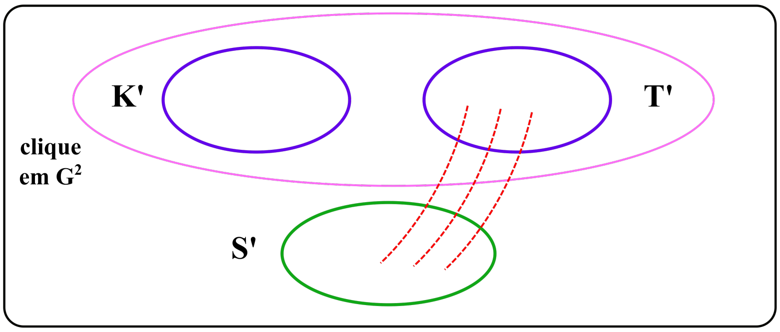

Figura 3.1: Partição $(S', K' \cup T')$ do conjunto V.

Lema 3.8. *Seja (G^1, G^2) uma instância para o* PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$*, e $V = (S', K' \cup T')$ uma partição de V conforme descrita no Lema 3.7. É possível verificar em tempo polinomial se há um grafo $G = (V, E)$ com $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$, tal que o conjunto de vértices pode ser particionado em (S, K) com $S' \subseteq S$, onde K é uma clique, S é um conjunto independente e, ou $\forall v \in K$ verifica-se que $d_S(v) = 1$, ou $\forall v \in K$ verifica-se que $d_S(v) = 0$.*

Demonstração. Inicialmente, rotule cada vértice $v \in K' \cup T'$ com $label(v) = 0$. Em seguida, rotule cada vértice $v \in K'$ possuindo uma aresta forçada para S' com rótulo igual a um ($label(v) = 1$). Em seguida, para cada vértice $v \in K' \cup T'$ com $label(v) = 0$, tal que $\exists u \in N(v)$ com $uv \in E^1$ e $label(u) = 1$, rotule-o como $label(v) = 2$.

Como $S' \subseteq S$, nenhum vértice v com $label(v) = 1$ pode estar em S ou, de outro modo S não é um conjunto independente. Consequentemente, nenhum vértice v com $label(v) = 2$ pode estar em S, pois, de outra forma, alguns vértices v com $label(v) = 1$ possuem dois vértices em S. Dessa forma, se todo vértice $v \in K' \cup T'$ possui $label(v) \neq 0$, então, podemos com segurança retornar NÃO.

Do mesmo modo, se existe um vértice $v \in K' \cup T'$ tal que $label(v) = 0$, produzimos SIM como saída, uma vez que $(S, K) = (S' \cup \{v\}, K' \cup T' \backslash \{v\})$, e $G = (V, E)$ com $E = E^1 \cup \{uw : u, w \in K' \cup T' \backslash \{v\}\} \cup \{vu : u \in K' \cup T', \text{ e } label(u) \neq 1\}$ é uma solução. $\square$

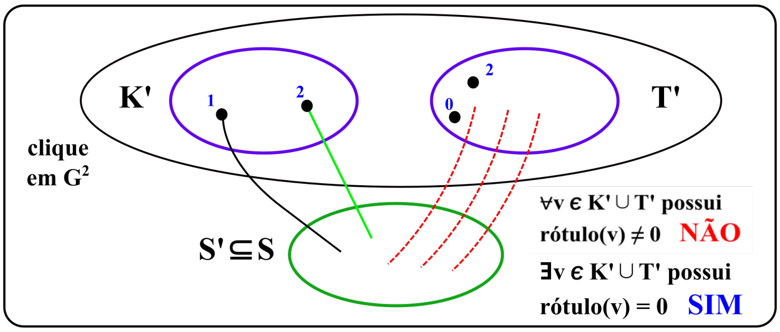

Figura 3.2: Algoritmo de rotulação dos vértices conforme Lema 3.8.

O próximo lema é obtido a partir do Lema 3.8.

Lema 3.9. *Seja* (G^1, G^2) *uma instância para* PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$, *e seja* $(S', K' \cup T')$ *uma partição de* V *conforme descrita no Lema 3.7. Se existem três vértices* a, b, c *tal que* $ab, bc \in E^1$, $b \in K'$, *e* $a, c \in T'$, *então podemos resolver* (G^1, G^2) *em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja (S, K) uma partição conforme a descrita no Teorema 2.5. Se a e c estão ambos em S, então b possui dois vizinhos em S, uma contradição. Se, ou a ou c está em K, então $S' \subseteq S$. Dessa forma, através do Lema 3.8 concluímos que podemos resolver a instância (G^1, G^2) em tempo polinomial. $\square$

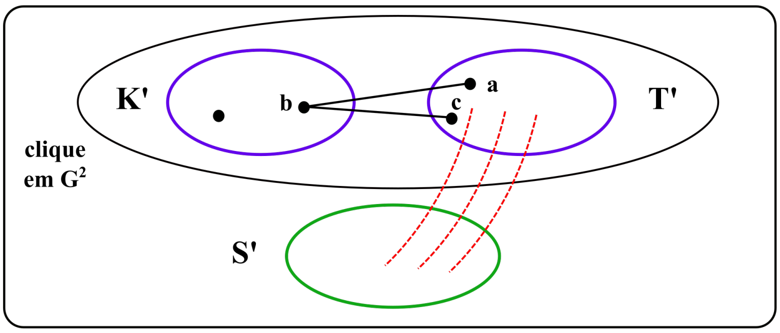

Figura 3.3: Esquema descrito conforme Lema 3.9.

Utilizando os Lemas 3.7, 3.8 e 3.9 podemos enunciar o Teorema 3.10.

Teorema 3.10. PS-GBC$(1,1)$ *pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja (G^1, G^2) uma instância para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$. Sem perda de generalidade, assumimos que o Algoritmo apresentado no Lema 3.7 produz como saída uma partição $(S', K' \cup T')$ de $V(G)$. Pelo Lema 3.8, podemos também considerar que não existe grafo sanduíche $G = (V, E)$ tal que $V(G)$ admite uma partição em (S, K) de acordo como o Teorema 2.5, com $S' \subseteq S$. Com isso, pelo Lema 3.9, não há vértice $b \in K'$ que possua dois vizinhos a e c em G^1 tal que $a, c \in T'$.

Suponha que (G^1, G^2) produza um grafo sanduíche $G = (V, E)$. Seja (S, K) uma partição de $V(G)$ de acordo com o Teorema 2.5. Observe que, se $T' \cap K \neq \varnothing$, então concluímos que $S' \subseteq S$, o que é uma contradição. Dessa forma, $T' \subseteq S$.

Além disso, considerando o grafo G^1, para todo vértice v a uma distância no máximo dois de algum vértice que pertence a S, afirmamos que v deve estar contido em K, ou de outro modo, ou S não é um conjunto independente, ou algum vértice de K terá dois vizinhos em S. Analogamente, se um vértice v tem uma aresta proibida para um vértice que deve estar em K, então v deve estar em S.

Seja A o conjunto dos vértices de S' que devem estar em K, e seja B o conjunto dos vértices de $K' \cup T'$ que devem estar em S através de sucessivas aplicações das regras descritas acima. Observamos que $T' \subseteq B$, e tais conjuntos A e B podem ser facilmente encontrados em tempo polinomial usando algoritmos de busca.

Se $A \cap B \neq \varnothing$ então (G^1, G^2) é uma instância NÃO. Caso contrário, podemos obter a seguinte partição de $V(G)$:

- $S'' \leftarrow \{B \cup S' \setminus A\}$,
- $T'' \leftarrow \{v : v \in A$ e não possui vizinho em S'' no grafo $G^2\}$, e
- $K'' \leftarrow (K' \setminus B) \cup (A \setminus T'')$.

Se (G^1, G^2) é uma instância SIM, então nenhum vértice $v \in K''$ possui dois vizinhos em S'' no grafo G^1 ou, de outro modo, temos uma contradição.

Se $T'' = \varnothing$, então todo vértice em K'' possui ao menos uma aresta de G^2 para algum vértice em S''. Dessa maneira, quando $T'' = \varnothing$ podemos facilmente construir o grafo solução G para (G^1, G^2) em tempo polinomial. Agora, suponha que $T'' \neq \varnothing$. Como $T'' \subseteq A$ segue que S'' deve estar em S para uma partição (S, K) de $V(G)$ de acordo com o Teorema 2.5, se existir. Desta forma, pelo Lema 3.8 vale que (G^1, G^2) pode ser resolvido em tempo polinomial. □

3.2.4 Problema Sanduíche para grafos bem cobertos-$(1,2)$

Embora o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para grafos bem cobertos-$(1,2)$ seja polinomial, provaremos nessa subseção que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA

GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$ é NP-completo. Para isso, apresentaremos uma redução a partir do problema 1-EM-3SAT POSITIVO, que é um problema NP-completo [54].

1-EM-3SAT POSITIVO
INSTÂNCIA: Conjunto de literais positivos U, uma coleção C de cláusulas sobre U de tal forma que cada cláusula $c \in C$ tenha $\lvert c \rvert = 3$.
PERGUNTA: Há uma atribuição para U tal que cada cláusula possua somente um literal VERDADEIRO?

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e $R, T \subseteq V$. Dizemos que T 2-domina R se cada vértice pertencente a R tem ao menos 2 vizinhos em T. Seja $I = (U, C)$ uma instância de 1-EM-3SAT POSITIVO onde U é o conjunto de variáveis e C é o conjunto de cláusulas. Seja $T \subseteq U$, dizemos que T 2-domina C se cada cláusula de C tem ao menos dois literais em T. Nesse caso, T é denominado um conjunto 2-dominante de variáveis com tamanho limitado.

O seguinte Lema é útil para a prova do Teorema 3.12.

Lema 3.11. *Seja $I = (U, C)$ uma instância de* 1-EM-3SAT POSITIVO*, onde $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m\}$, e seja $T \subseteq U$. Então I pode ser resolvido em tempo $O(2^{|T|} \cdot m \cdot n)$.*

Demonstração. Podemos verificar cada uma das $2^{|T|}$ atribuições verdadeiras de T. Para uma dada atribuição de T, cada cláusula contém no máximo uma variável como um valor indefinido. Dessa forma, é fácil verificar em tempo linear se uma dada atribuição pode ser transformada em uma atribuição satisfatível para I. □

Usando o resultado do Lema 3.11, afirmamos que instâncias difíceis de 1-EM-3SAT POSITIVO não possuem conjunto 2−dominante de variáveis.

Teorema 3.12. *O* PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$ *é* NP*-completo.*

Demonstração. O problema SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$ está em NP, pois dado um grafo G e uma partição $V = (S, K^1, K^2)$ podemos, em tempo polinomial, verificar se as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.10 são satisfeitas.

Seja $I = (U, C)$ uma instância do problema 1-EM-3SAT POSITIVO. Sem perda de generalidade, vamos assumir que I não possui conjunto 2−dominante de variáveis de tamanho menor do que 8, e que toda atribuição verdadeira de I, se existir alguma, requer ao menos dois literais como verdadeiros. Além disso, vamos considerar que cada variável ocorre no máximo em uma cláusula.

Construímos uma instância (G^1, G^2) do problema SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$, tal que I é satisfatível se, e somente se, existe um grafo sanduíche G para $G^1 = (V, E^1)$, $G^2 = (V, E^2)$ da seguinte forma:

1. Inicialmente, faça $V = \{a, b, c\}$, e $E^1, E^2, E^3 \leftarrow \emptyset$,
2. Para cada $u_i \in U$ adicione u_i a V,
3. Para cada $c_i \in C$ adicione c_i a V,
4. Para cada $c_j = (u_x \vee u_y \vee u_z) \in C$, adicione $u_i c_j, \forall i \in \{x, y, z\}$, a E^1,
5. Para cada par $c_j, c_\ell \in C$, $j \neq \ell$, adicione $c_j c_\ell$ a E^1,
6. Para cada $c_j \in C$, adicione $c_j a, c_j b, c_j c$ a E^1,
7. Para cada $u_i \in U$, adicione $u_i a$, $u_i b$, $u_i c$ a E^0 (observe que $E^0 = E^2 \backslash E^1$),
8. Faça $E^3 = (\{uv : u \neq v \text{ e } u, v \in V\} \backslash E^2)$.

Isto constrói a instância $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$ para o problema PS-GBC$(1,2)$. Para conveniência do leitor, apresentamos na Figura 3.4 um modelo de construção.

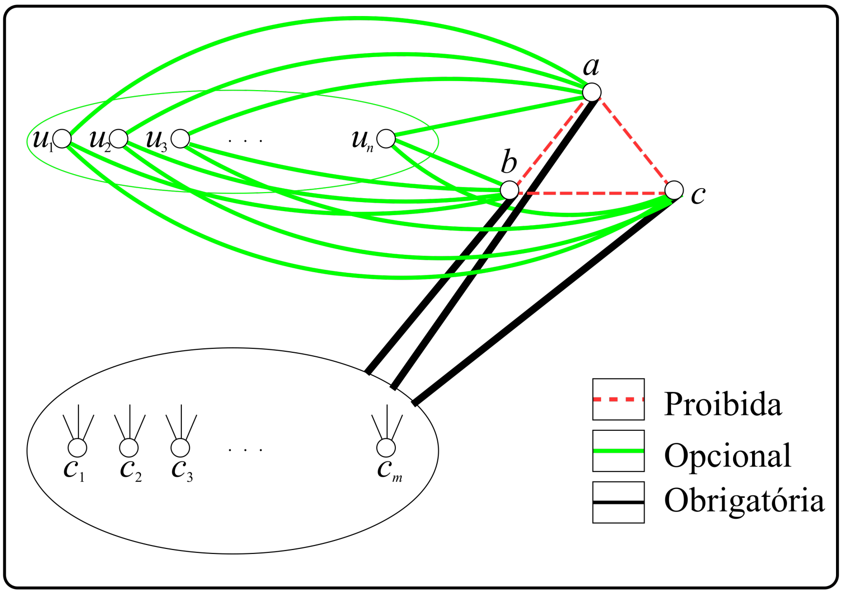

Figura 3.4: Instância para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,2)$ $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$ obtida a partir de uma instância $I = (U, C)$ de 1-EM-3SAT POSITIVO. As arestas opcionais estão destacadas em verde. Na cor preta destacamos as arestas obrigatórias. Destacamos em vermelho descontínuo apenas as arestas proibidas ab, ac e bc, omitindo as arestas proibidas entre uma variável literal u_i e uma variável cláusula c_j, tal que u_i não ocorra em c_j.

Agora, suponha que $I = (U, C)$ seja satisfatível. Seja $\eta : U \to \{T, F\}$ uma atribuição satisfatível para I. Construímos um grafo sanduíche bem coberto-$(1,2)$ G para $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$ a partir de η da seguinte forma:

- inicialmente, faça $E = E^1$;
- faça $u \in S$ se, e somente se, $\eta(u) = T$;
- faça $u \in K^2$ se, e somente se, $\eta(u) = F$;
- faça os vértices $c_j \in K^1\ \forall c_j$;
- adicione os vértices a em S, b em K^1, e $c \in K^2$;
- se $\eta(u_i) = F$ então adicionamos a E as arestas $u_i a$, $u_i b$, $u_i c$;
- adicione a E duas arestas, $u_i b$, $u_j c$, onde $u_i \neq u_j$ e $\eta(u_i) = \eta(u_j) = T$;
- finalmente, adicione a E as arestas $u_i u_j$ se $\eta(u_i) = \eta(u_j) = F$.

Tal construção está descrita na Figura 3.5. A fim de provar que G é um grafo bem coberto-$(1,2)$, consideramos a caracterização fornecida pelo Teorema 2.10.

Observamos, inicialmente, que S é um conjunto independente maximal de G e que K^1 e K^2 são cliques. Também notamos que, como η é uma atribuição satisfatível para 1-EM-3SAT POSITIVO, vale que todo vértice pertencente a $K^1 \cup K^2$ possui 1 ou 2 vizinhos em S. Como em cada vértice cláusula c_j verificamos que $N_S(c_j) = \{u_i, a\}$ onde u_i é o único literal VERDADEIRO de c_j em η, cada vértice literal falso u_i satisfaz $N_S(u_i) = \{a\}$ e, por construção, os vértices b e c possuem exatamente um vizinho em S. Com isso, a condição (i) do Teorema 2.10 é satisfeita.

Em seguida, observamos que as arestas de E^3 entre as cliques K^1 e K^2 são: as arestas bc, e as arestas entre c_j e u_ℓ, onde $\eta(u_\ell) = F$ e não ocorrem em c_j. Se $\eta(u_\ell) = F$ e u_ℓ não ocorre em c_j, então $|N_S(c_j) \cup N_S(u_\ell)| = |\{a, u_i\} \cup \{a\}| = 2$. Como, por construção, b e c não possuem vizinhos em comum, então $|N_S(b) \cup N_S(c)| = |\{u_i\} \cup \{u_j\}| = 2$. Desse modo, as condições (ii) e (iii) do Teorema 2.10 são satisfeitas, e G é um grafo bem coberto-$(1,2)$.

Por outro lado, suponha que exista um grafo sanduíche bem coberto-$(1,2)$ $G = (V, E)$ para (G^1, G^2). Como $G = (V, E)$ é um grafo bem coberto-$(1,2)$, há uma partição de $V(G)$ em um conjunto independente maximal S de G, e cliques K^1, K^2 conforme descrito no Teorema 2.10. Em seguida, definimos uma atribuição satisfatível 1-EM-3SAT POSITIVO $\eta : U \to \{T, F\}$ para $I = (U, C)$, onde a variável booleana $u_i = T$ se, e somente se, o vértice $u_i \in S$.

Devemos mostrar que η é uma atribuição 1-EM-3SAT POSITIVO satisfatível.

Afirmação 3.13. *Todo vértice cláusula $c_j \in K^1 \cup K^2$.*

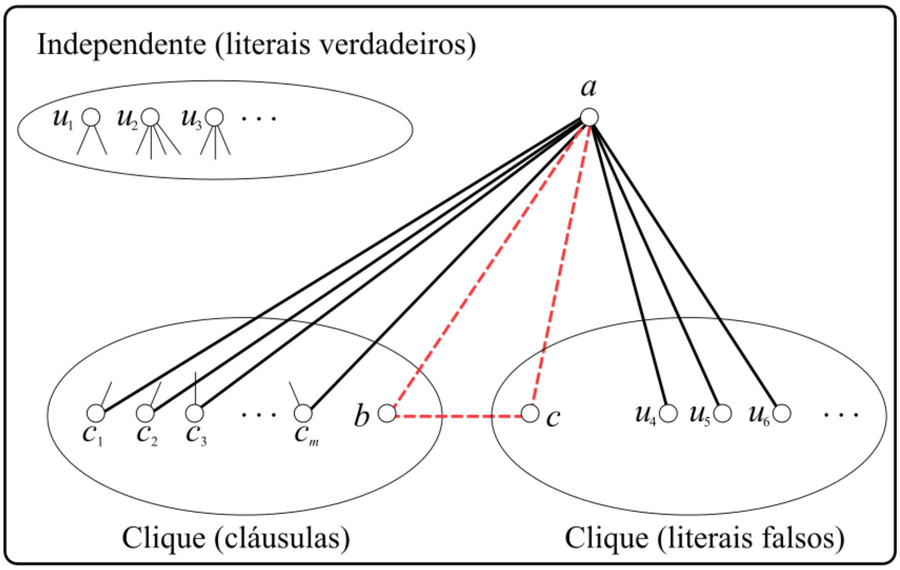

Figura 3.5: Diagrama que exibe uma partição bem coberta-$(1,2)$ (S, K^1, K^2) de um grafo sanduíche G obtido a partir de uma atribuição satisfativel $\eta : U \to \{T, F\}$ para uma instância de 1-EM-3SAT POSITIVO.

Demonstração. Como para todo vértice cláusula c_j verifica-se que $ac_j, bc_j, cc_j \in E^1$, se $c_j \in S$, então os vértices a, b, c pertencem a $K^1 \cup K^2$, o que é uma contradição, uma vez que $ab, ac, bc \in E^3$. Com isso, $c_j \in K^1 \cup K^2$. □

Afirmação 3.14. *Existe somente um vértice $x \in \{a, b, c\}$, tal que $x \in S$.*

Demonstração. Inicialmente, uma vez que a, b e c são gêmeos falsos, sem perda de generalidade, suponha $x = a$. Como $ab, ac, bc \in E^3$, então a, b, c não podem estar juntos em $K^1 \cup K^2$. Da mesma forma, a, b, c não podem estar juntos em S ou, de outra forma, $|N_S(c_j)| \geq 3$, o que contraria o item (i) do Teorema 2.10.

Suponha que existam exatamente dois vértices de a, b, c em S. Isso implica que todos os literais pertencem a $K^1 \cup K^2$ pois, de outro modo, $N_S(c_j) \geq 3$ para algum vértice c_j uma vez que, usando a Afirmação 3.13 todo vértice cláusula pertence a $K^1 \cup K^2$, e c_j é adjacente a a e b. Com isso, $S = \{a, b\}$, contradiz a maximalidade de S. Dessa forma, $|S \cap \{a, b, c\}| = 1$. □

Usando as Afirmações 3.13 e 3.14, assumimos que $a \in S$, $c_j \in K^1 \cup K^2 (\forall c_j)$ e $b \in K^1$ e $c \in K^2$.

Afirmação 3.15. *Todo vértice cláusula c_j pertence a mesma clique K^1.*

Demonstração. Suponha que existam dois vértices cláusulas pertencentes a cliques distintas. Sem perda de generalidade, suponha que $c_j \in K^1$ e $c_\ell \in K^2$.

Como $a \in S$, cada vértice cláusula pertence a $K^1 \cup K^2$, cada vértice cláusula c_j é adjacente a a, então, pelo Teorema 2.10 segue que cada vértice cláusula c_j é adjacente a no máximo uma variável vértice em S, e as outras duas variáveis vizinhas pertencem a $K^1 \cup K^2$.

Observamos que o conjunto de vértices literais em $K^1 \cup K^2$ formam um conjunto de variáveis 2-dominante para I. Como cada vértice cláusula possui arestas proibidas para todas as variáveis com exceção de três, temos no máximo três vértices variáveis em cada clique, o que implica que $I = (U, C)$ possui um conjunto 2-dominante de variáveis de tamanho no máximo seis, uma contradição. Dessa forma, todo vértice cláusula pertence a exatamente uma única clique, que assumimos ser K^1. □

Afirmação 3.16. *Seja um vértice literal tal que $u_i \in K^1 \cup K^2$, então $u_i \in K^2$.*

Demonstração. Como todo vértice cláusula pertence a K^1, se $u_i \in K^1$ então todo vértice cláusula tem um vértice u_i como literal. Dessa forma, fazendo u_i como verdadeiro e os outros literais como falsos, obtemos uma atribuição satisfatível para $I = (U, C)$, uma contradição. □

Afirmação 3.17. *Se $c_j = (u_1, u_2, u_3)$ é uma cláusula de C, então existe exatamente uma variável vértice $u_i \in \{1, 2, 3\}$ pertencente a S.*

Demonstração. Como cada vértice cláusula é adjacente a a, pelo item (i) to Teorema 2.10 há, no máximo, mais um vizinho de c_j em S. Dessa forma, a fim de provar a afirmação é necessário provar que cada vértice cláusula c_j possui exatamente um vértice adicional em S. Usando as Afirmações anteriores, sabemos que $b \in K^1$, e que $c \in K^2$. Pelo Teorema 2.10 segue que $|N_S(b) \cup N_S(c)| = 2$.

Com isso, há dois vértices variáveis u_1 e u_2 em S tal que em G, vale que $\{u_1, u_2\} = (N_S(b) \cup N_S(c))$. Como há vértices cláusulas c_i e c_j contendo, respectivamente, as variáveis u_1 e u_2, vértices cláusulas c_i e c_j possuem dois vizinhos em S, satifazendo que $N_S(c_i) = \{a, u_1\}$ e $N_S(c_j) = \{a, u_2\}$.

Suponha que exista um vértice cláusula c_ℓ com $N_S(c_\ell) = \{a\}$. Lembramos que $K^2 \cap U$ é um conjunto 2-dominante de variáveis. Dessa forma, assumimos, $|K^2 \cap U| \geq 8$. Dessa forma, há uma variável $u \in K^2 \cap U$ que não ocorre nas cláusulas c_i, c_j e c_ℓ. Dessa forma, $c_i u$, $c_j u$, $c_\ell u \in E^3$. Veja Figura 3.6 para mais detalhes.

Como $N_S(c_i) = \{u_1, a\}$, pela condição (iii) do Teorema 2.10 $N_S(u) \subseteq \{u_1, a\}$. Além disso, como $N_S(c_j) = \{u_2, a\}$, então, pela condição (ii) do Teorema 2.10, $N_S(u) \subseteq \{u_2, a\}$. Com isso, $N_S(u) = \{a\}$. Mas, como $N_S(c_\ell) = \{a\}$ e $c_\ell u \in E^3$, pela condição (ii) do Teorema 2.10, $|N_S(c_\ell) \cup N_S(u)|$ deve ser igual a dois, uma contradição. Desse modo, todo vértice cláusula tem um vizinho variável em S, e a afirmação é válida. □

Com isso, a atribuição η definida é satisfatível para 1-EM-3SAT POSITIVO, e isto conclui a prova do Teorema 3.12.

□

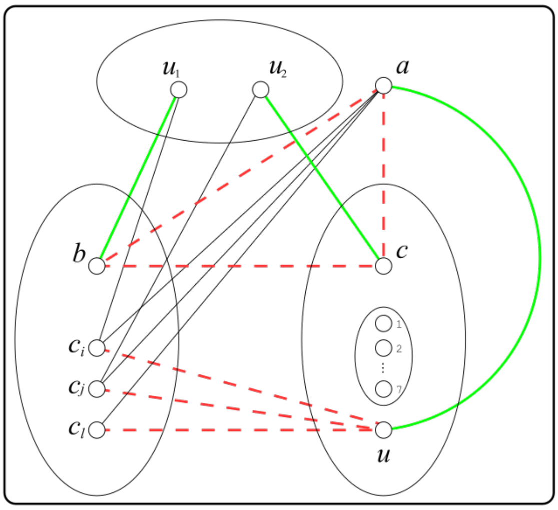

Figura 3.6: Um grafo sanduíche G com uma partição bem coberta-$(1, 2)$ (S, K^1, K^2).

Capítulo 4

O Problema Probe para grafos bem cobertos-(r, ℓ).

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados para o PROBLEMA PROBE PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ). Tais resultados foram obtidos com a colaboração do Professor Uéverton dos Santos Souza (Universidade Federal Fluminense – UFF). O conteúdo da Seção 4.4 encontra-se publicado em [1].

4.1 Introdução ao Problema Probe em grafos

Grafos probe de intervalo foram introduzidos por Zhang em [103]. Segundo o mesmo, tal classe de grafos surgia como uma alternativa mais poderosa e flexível no contexto do mapeamento físico do DNA. Um grafo é um grafo probe de intervalo se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos: probes P e não probes N, onde N é um conjunto independente, e arestas com extremos em N podem ser inseridas de tal modo que o grafo resultante seja um grafo de intervalo.

Posteriormente, tal definição foi generalizada para uma classe $\mathscr{C}$ qualquer.

Definição 4.1. *[19] Seja $\mathscr{C}$ uma classe de grafos. Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo* $\mathscr{C}$-probe *se seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto de probes P e um conjunto independente de não probes N, tal que G pode ser transformado em um grafo que pertence à classe $\mathscr{C}$ pela adição de arestas entre certos vértices não probes. Neste caso, dizemos que G pode ser imerso em um grafo de $\mathscr{C}$.*

Os problemas probe para grafos cordais encontram-se resolvidos em [10, 58]. Além desses resultados, vários outras classes importantes foram estudadas, tais como grafos autocomplementares (tal classe compreende os grafos split) [21], e cografos-$(2, 1)$ [30].

Se a partição do conjunto de vértices em probes e não probes é fornecida como parte da entrada, e se G pode ser imerso em um grafo de $\mathscr{C}$, então G é dito *grafo* *probe particionado* de $\mathscr{C}$. O grafo H pertencente à classe $\mathscr{C}$ é chamado *imersão* de G. Denotamos um grafo probe particionado como $G = (P + N, E)$, e adotaremos PP-$\mathscr{C}$ como notação para a versão particionada do problema.

Segundo [9] o problema PP-$\mathscr{C}$ é um caso particular do PROBLEMA SANDUÍCHE. Em uma analogia entre o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO e o PROBLEMA SANDUÍCHE, arestas pertencentes ao grafo probe G são as arestas obrigatórias, arestas que não são obrigatórias e possuem um extremo em um vértice probe são arestas proibidas, e arestas que não são nem obrigatórias, nem proibidas são arestas opcionais para o problema e podem, portanto, serem usadas a fim de obter o grafo pertencente à classe $\mathscr{C}$.

Os Fatos 4.2 e 4.3 relacionam o PROBLEMA SANDUÍCHE com o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO.

Fato 4.2. *Se o* PROBLEMA SANDUÍCHE *para a propriedade* Π *é polinomial, então o* PROBLEMA PROBE PARTICIONADO *para* Π *também é polinomial.*

Fato 4.3. *Se o* PROBLEMA PROBE PARTICIONADO *para a propriedade* Π *é* NP-*completo, então o* PROBLEMA SANDUÍCHE *para* Π *também é* NP-*completo.*

A seguir, definimos formalmente o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ).

PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ) (PP-GBC(r, ℓ))
INSTÂNCIA: Grafo $G = (V, E)$ e uma partição probe $V = (N, P)$, onde N é um conjunto independente de G.
PERGUNTA: Existe um conjunto $E' \subseteq N \times N$ tal que $H = (V, E \cup E')$ é um grafo bem coberto-(r, ℓ)?

A tabela a seguir descreve a complexidade do problema PP-GBC(r, ℓ).

r \ ℓ	0	1	2	≥ 3
0	-	P	P	NPc
1	P	P	?	NPc
2	?	coNPc	coNPc	(co)NPh
≥ 3	NPh	(co)NPh	(co)NPh	(co)NPh

Tabela 4.1: Complexidade do PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ). P corresponde a um problema com complexidade polinomial, coNPc corresponde a um problema com complexidade coNP-completo, NPh corresponde a NP-hard, NPc corresponde a NP-completo, e (co)NPh corresponde a um problema que é, ao mesmo tempo, NP-difícil e coNP-difícil.

A seguinte afirmação é obtida através do Fato 4.2 e dos resultados contidos nas Subseções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3.

Afirmação 4.4. *Os problemas* PP-$(1,0)$GBC*,* PP-$(0,1)$GBC*,* PP-$(0,2)$GBC *e* PP-$(1,1)$GBC *são polinomiais.*

Contudo, apresentamos nos Fatos 4.5, 4.6 e nos Algoritmos 2 e 3, condições que nos conduzem a resolução dos problemas PP-GBC$(1,0)$, PP-GBC$(0,1)$, PP-GBC$(0,2)$ e PP-GBC$(1,1)$, respectivamente, sem haver necessidade de recorrer a uma redução polinomial ao PROBLEMA SANDUÍCHE correspondente.

4.2 Problema probe particionado para grafos bem cobertos-$(1,0)$ e para grafos bem cobertos-$(0,1)$

Fato 4.5. PP-GBC$(1,0)$ *produz a resposta* SIM *se, e somente se, $G=(V,E)$ é um grafo nulo.*

Fato 4.6. PP-GBC$(0,1)$ *produz a resposta* SIM *se, e somente se, $G[P]$ é uma clique e todo vértice não probe é universal a $G[P]$.*

Na próxima seção, apresentamos um Algoritmo que resolve PP-GBC$(0,2)$.

4.3 Problema probe particionado para grafos bem cobertos-$(0,2)$

Sejam $n_1 \in N_1$ um vértice não probe universal a $G[P]$, e $K[S]$ o subgrafo induzido completo dos vértices pertencentes a $S \subseteq V$.

Teorema 4.7. *O Algoritmo 2 resolve* PP-GBC$(0,2)$ *em tempo linear.*

Demonstração. Inicialmente, o Algoritmo 2 verifica se $G[P]$ é um grafo-$(0,2)$ (linhas $2-3$). Em caso negativo, pela definição do PROBLEMA PROBE não é possível inserir arestas entre vértices probe a fim de tornar $G[P]$ em um grafo-$(0,2)$ e, desse modo, retorna NÃO.

Em seguida, o Algoritmo particiona o conjunto de vértices não probes em dois subconjuntos (linhas $4-5$):

- N_1, constituído pelos vértices não probes que são universais a $G[P]$, e
- $N_2 \leftarrow N \backslash N_1$.

Algoritmo 2: PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(0,2)$.

Entrada: Grafos $G = (V, E)$, tal que $V = P \cup N$ onde N é um conjunto independente.
Saída: Resposta SIM com um grafo bem coberto-$(0,2)$ $H = (V, E \cup E')$, tal que $E' \subseteq N \times N$ juntamente com a partição bem coberta-$(0,2)$, ou resposta NÃO caso tal grafo H não exista.

1 **início**
2   **se** ($G[P]$ *não é um grafo*-$(0,2)$) **então**
3   **retorna** NÃO
4   $N_1 \leftarrow \{x \in N :$ x é universal a $G[P]\}$
5   $N_2 \leftarrow N \backslash N_1$
6   **se** ($N_2 = \varnothing$) **então**
7   **se** ($G[P]$ *é um grafo*-$(0,1)$) **então**
8   **retorna** (SIM, $G[P] \cup K[N_1]$)
9   **senão**
10   **se** ($N_1 = \varnothing$) **então**
11   **se** (G *é um grafo bem coberto*-$(0,2)$) **então**
12   **retorna** (SIM, G)
13   **senão**
14   **se** ($G[P] \cup K[N_1 \backslash \{n_1\}] \cup \{n_1\}$) *é um grafo bem coberto*-$(0,2)$) **então**
15   **retorna** (SIM, $G[P] \cup K[N_1 \backslash \{n_1\}] \cup \{n_1\}$)
16   **senão**
17   **se** ($N_1 = \varnothing$) **então**
18   **se** ($G[P] \cup K[N_2]$) *é um grafo bem coberto*-$(0,2)$ **então**
19   **retorna** (SIM, ($G[P] \cup K[N_2]$))
20   **senão**
21   **se** ($G[P] \cup K[(N_1 \backslash \{n_1\}) \cup N_2] \cup K[N_2]$ *é um grafo bem coberto*-$(0,2)$) **então**
22   **retorna** (SIM, ($G[P] \cup K[(N_1 \backslash \{n_1\}) \cup N_2] \cup K[N_2]$)
23   **retorna** NÃO
24   **fim.**

Agora, resta-nos analisar os quatro casos possíveis para o par $(N_1, N_2) : (N_1 = \varnothing, N_2 = \varnothing)$, $(N_1 = \varnothing, N_2 \neq \varnothing)$, $(N_1 \neq \varnothing, N_2 = \varnothing)$, e $(N_1 \neq \varnothing, N_2 \neq \varnothing)$.

- Quando $N_2 = \varnothing$ e $N_1 = \varnothing$, basta testar se G é um grafo bem coberto-$(0,2)$ (linhas $11 - 12$).

- Quando $N_2 = \varnothing$ e $N_1 \neq \varnothing$, de acordo com o Teorema 2.3, observamos que o grafo H produzido como saída juntamente com a resposta SIM pode ser ou um grafo-$(0,1)$, ou um grafo-$(0,2)$ estrito sem vértices universais.

  Com isso, devemos testar se $G[P]$ é um grafo-$(0,1)$. Em caso positivo, retornamos SIM e $G[P] \cup K[N_1]$ (linhas $7 - 8$).

  No caso em que $G[P]$ não é um grafo-$(0,1)$, a fim de evitar vértices não probes universais escolhemos um vértice $n_1 \in N_1$ e testamos se $(G[P] \cup K[N_1 \backslash \{n_1\}] \cup \{n_1\})$ é um grafo bem coberto-$(0,2)$.

- Quando $N_2 \neq \varnothing$ e $N_1 = \varnothing$, basta testar se $G[P] \cup K[N_2]$ é um grafo bem coberto-$(0,2)$ (linhas $18-19$).

- Quando $N_2 \neq \varnothing$ e $N_1 \neq \varnothing$, a fim de evitar vértices não probes universais escolhemos um vértice $n_1 \in N_1$ e testamos se $(G[P] \cup K[(N_1 \backslash \{n_1\}) \cup N_2] \cup K[N_2]$ é um grafo bem coberto-$(0,2)$.

Isto completa a prova. □

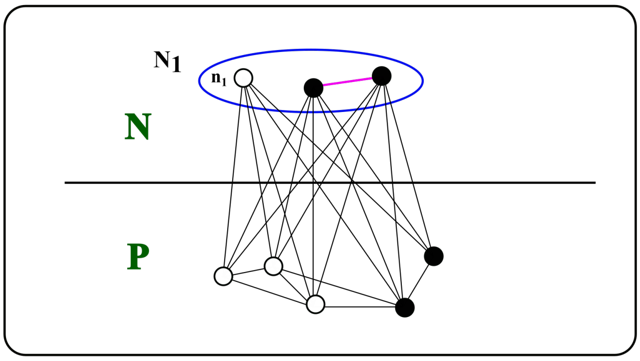

Figura 4.1: Exemplo de grafo $H = (V, E)$ bem coberto-$(0,2)$ produzido pelo Algoritmo 2 quando $G[P]$ é um grafo-$(0,2)$, $N_1 \neq \varnothing$ e $N_2 = \varnothing$.

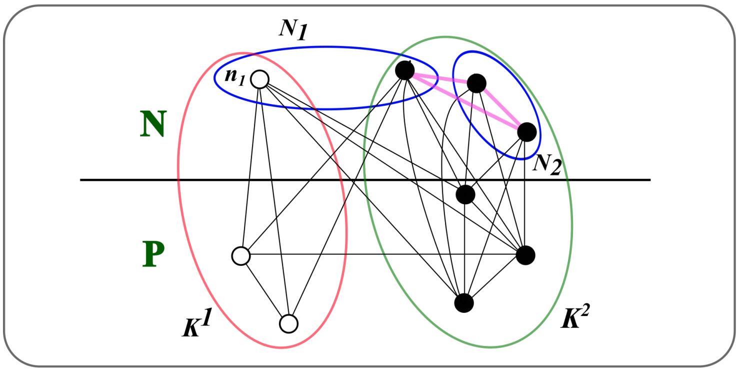

Figura 4.2: Exemplo de grafo $H = (V, E)$ bem coberto-$(0,2)$ produzido pelo Algoritmo 2 quando $G[P]$ é um grafo-$(0,2)$, $N_1 \neq \varnothing$ e $N_2 \neq \varnothing$.

4.4 Problema probe particionado para grafos bem cobertos-$(1,1)$

Nesta Seção, apresentamos um Algoritmo que resolve PP-GBC$(1,1)$ utilizando o conceito de partições esparso-denso proposta por Feder, Hell, Klein e Motwani em [45]. Informalmente, um grafo com relativamente poucas arestas pode ser classificado como *esparso*, enquanto um grafo com muitas arestas pode ser classificado como *denso*.

Uma vez que grafos-$(1,1)$ podem ser reconhecidos em tempo polinomial usando o resultado de [56], o Teorema 4.8 enuncia que todas as partições esparso-denso possíveis em um grafo-$(1,1)$ podem ser encontradas em tempo polinomial.

Teorema 4.8. *[45] Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$, classes de grafos esparsos e densos, respectivamente. Um grafo com n vértices possui no máximo n^{2c} diferentes partições esparso-denso. Dessa forma, todas essas partições podem ser encontradas em tempo polinomial a $n^{2c+2} \cdot T(n)$, onde $T(n)$ é o tempo de reconhecimento de grafos esparso e denso, e c é o número máximo de vértices comuns entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$.*

O Lema 4.9 descrito a seguir relaciona o conceito de partição esparso-denso com o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$.

Lema 4.9. *Se a instância $G = (P + N, E)$ é* SIM *para* PP-GBC$(1,1)$*, então $G[P]$ é um grafo-$(1,1)$ e uma solução com o grafo-$(1,1)$ bem coberto H com uma partição $V = (S, K)$ é tal que a partição-$(1,1)$ $P = (P_S, P_K) = (P \cap S, P \cap K)$ é uma das $O(n^2)$ partições esparso-denso possíveis de P do grafo H.*

Como citado anteriormente, o Algoritmo 3 proposto utiliza o conceito de partição esparso-denso, precisamente no fato de que existe um número polinomial, $O(n^2)$, de partições esparso-densas (S, K) de um grafo-$(1,1)$. Mais ainda, uma vez conhecendo-se uma, as demais partições podem ser encontradas em tempo polinomial. Nosso algoritmo verifica cada uma dessas partições uma única vez. Assim, dada uma partição-$(1,1)$ para $G[P]$ bem como, para cada partição esparso-denso de $G[P]$, vamos particionar $V(G)$ em quatro subconjuntos distintos, a saber:

- P_S, composta pela parte esparsa considerada de $G[P]$, e
- P_K, composta pela parte densa considerada de $G[P]$, e
- $N_K \leftarrow \{u \in N : u \text{ é completamente adjacente à parte } P_K\}$, e
- $N_S \leftarrow N \backslash N_K$.

Consideramos cada um dos quatro possíveis casos: $(N_S, N_K) = (\varnothing, \varnothing)$, $(N_S, N_K) = (\varnothing, \neq \varnothing)$, $(N_S, N_K) = (\neq \varnothing, \varnothing)$, e $(N_S, N_K) = (\neq \varnothing, \neq \varnothing)$. A seguir, para a corretude do Algoritmo 3 analisamos cada um desses casos, detalhando minuciosamente as respectivas tomadas de decisão.

Em nossa notação $K(S)$ para $S \subseteq V$, significa o grafo obtido de $G[S]$ pela adição de todas as arestas entre os vértices de $N \cap S$. Dado um vértice $v \in K$, denominamos de *testemunha do vértice v em G* a todo vértice z tal que $z \in N_S(v)$.

1. G é um grafo bem coberto-$(1,1)$. Caso trivial que contempla os casos $(N_S, N_K) = (\varnothing, \varnothing)$, e $(N_S, N_K) = (\neq \varnothing, \varnothing)$ descritos acima. Com partição bem coberta-$(1,1)$ $(N_S \cup P_S, N_K \cup P_K)$.

2. $N_S = \varnothing$, $N_K \neq \varnothing$ e $P_S = \varnothing$. Observamos que, basta adicionar todas as arestas possíveis entre os vértices de N_K a fim de obter um grafo bem coberto-$(1,1)$ com uma partição bem coberta-$(1,1)$ $(S,K) = (\varnothing, K)$ onde cada vértice de K não possui vizinhos em S.

3. $N_S = \varnothing$, $N_K \neq \varnothing$, e $(N(P_S) \cap P_K) \neq \varnothing$. Uma vez que existe pelo menos um vértice em P_S com adjacência em P_K, pelo Teorema 2.5, é necessário que cada um dos vértices de P_K tenha exatamente um vizinho em P_S. Primeiramente, note que as testemunhas dos vértices de P_K devem pertencer a P_S, caso contrário, pela definição de N_S, um vértice em P_K teria mais de uma testemunha. Assim, após tornarmos N_K uma clique, basta verificar se o grafo resultante satisfaz tal condição necessária. Se o grafo resultante não satisfizer a condição necessária descrita pelo Teorema 2.5, uma nova partição deve ser considerada.

4. $N_S = \varnothing$, $N_K \neq \varnothing$ e $(N(P_S) \cap P_K) = \varnothing$. Como P_S não tem vizinhança em P_K e G não é um grafo bem coberto-$(1,1)$, P_S tem vizinhança em N_K. Neste caso, todos os vértices de K tem que possuir testemunha e, como os vértices de P_K não tem vizinhos em P_S e $N_S = \varnothing$, é necessário (e suficiente) que exista um vértice u em N_K que servirá como testemunha para os vértices de P_K. Note que u é adjacente a todos os vértices de P_K. Além disso, se, eventualmente, existem outros vértices em N_K que não estão na vizinhança de P_S, u também servirá como testemunha para eles. Portanto, se a existência do vértice u em N_K for confirmada e adicionarmos arestas entre cada par de vértices de $N_K \backslash \{u\}$, basta verificarmos se o grafo resultante é um grafo bem coberto-$(1,1)$. Em caso negativo, existe um vértice em K com mais de uma testemunha (não é possível ter vértice em K sem testemunha, por construção). Observe que tais testemunhas estão em P_S, sendo inerentes, portanto, à partição considerada. Logo, neste caso, uma nova partição deve ser considerada.

5. $N_S \neq \varnothing$, $N_K \neq \varnothing$. Observe que, como G não é um grafo bem coberto-$(1,1)$, em $N_S \cup P_S$ deve existir pelo menos uma testemunha para $N_K \cup P_K$ e, neste caso, todas as testemunhas pertencem a $N_S \cup P_S$. Sendo assim, após fazermos $G[P_K \cup N_K]$ ser uma clique, resta-nos verificar se o grafo resultante é um grafo bem coberto-$(1,1)$. Em caso negativo, como, por construção, o grafo é um grafo-$(1,1)$, existem vértices em K sem testemunhas ou com mais de uma testemunha. Como as arestas adicionadas não acrescentam testemunhas, o problema de ter mais de uma testemunha está na partição considerada. Se, eventualmente, um

vértice de N_K ficou sem testemunha, este problema também se deve a partição, uma vez que todas as testemunhas estão restritas ao conjunto $N_S \cup P_S$. Logo, em ambos os casos, uma nova partição deve ser analisada.

De forma que todos os casos possíveis foram analisados, concluímos que o Algoritmo 3 resolve o problema PP-GBC$(1,1)$.

Algoritmo 3: PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-$(1,1)$.

Entrada: Grafos $G = (V, E)$, tal que $V = P \cup N$ onde N é um conjunto independente.
Saída: Resposta SIM com um grafo bem coberto-$(1,1)$ $H = (V, E \cup E')$, tal que $E' \subseteq N \times N$ juntamente com a partição bem coberta-$(1,1)$, ou resposta NÃO caso tal grafo H não exista.

1 **início**
2   **se** ($G = (V, E)$ *é um grafo bem coberto*-$(1,1)$) **então**
3   **retorna** SIM – $(N_S \cup P_S, N_K \cup P_K)$
4   **para** (*cada partição esparso-denso de* $G[P]$) **faça**
5   **se** *(*$N_S = \varnothing$ *e* $N_K = \varnothing$*)* **então**
6   **se** *(*$G[P]$ *é um grafo split bem coberto)* **então**
7   **retorna** SIM – $(P_S, P_K) = (S, K)$
8   **se** $N_S = \varnothing$ *e* $N_K \neq \varnothing$ **então**
9   **se** $P_S = \varnothing$ **então**
10   **retorna** SIM–$(\varnothing, N_K \cup P_K) = (S, K)$
11   **se** $P_S \neq \varnothing$ **então**
12   **se** $N(P_S) \cap P_K \neq \varnothing$ **então**
13   **se** $(P_S, K(N_K \cup P_K))$ *é um grafo bem coberto*-$(1,1)$ **então**
14   **retorna** SIM–$(P_S, N_K \cup P_K)$
15   **senão**
16   **se** $\exists u \in (N_K \backslash N(P_S))$ *tal que o grafo* $H = (V, E \cup E'), E' = \{uv : v \in ((N_K \backslash N(P_S)) \cup P_K)\} \cup \{xy : x, y \in N_K \backslash \{v\}, x \neq y\}$ *é um grafo bem coberto*-$(1,1)$ **então**
17   **retorna** SIM – onde $H = (V, E \cup E'), E' = \{uv : v \in ((N_K \backslash N(P_S)) \cup P_K)\} \cup \{xy : x, y \in N_K \backslash \{u\}, x \neq y\}, (S, K) = (P_S \cup \{u\}, P_K \cup (N_K \backslash \{u\}))$
18   **se** $N_S \neq \varnothing$ *e* $N_K = \varnothing$ **então**
19   **se** $(P_S \cup N_S, P_K)$ *é um partição bem coberta*-$(1,1)$ **então**
20   **retorna** SIM – $(P_S \cup N_S, P_K)$
21   **se** $N_S \neq \varnothing$ *e* $N_K \neq \varnothing$ **então**
22   **se** *(*$P_S \cup N_S, K(N_K \cup P_K))$ *é uma partição bem coberta*-$(1,1)$ **então**
23   **retorna** SIM – $(N_S \cup P_S, K(N_K \cup P_K))$
24   **retorna** NÃO
25 **fim.**

Teorema 4.10. PP-GBC$(1,1)$ *é resolvido em tempo* $O(n^3 \cdot m)$.

Demonstração. Checar se um grafo é um grafo bem coberto-$(1,1)$, toma $O(m)$ passos. O passo 8 é o mais custoso e toma $O(nm)$ e, através do Teorema 4.8

o número de partições esparso-densas é $O(n^2)$, o que totaliza a complexidade de tempo $O(n^3 \cdot m)$. $\square$

Capítulo 5

Complexidade Parametrizada de grafos bem cobertos

Neste capítulo, consideramos a complexidade parametrizada do problema GRAFO BEM COBERTO, com ênfase especial no caso em que o grafo de entrada é um grafo-(r, ℓ).

Tais resultados foram obtidos em colaboração com os professores Konrad Kazimierz Dabrowski (Duhram University, Inglaterra), Ignasi Sau (Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, França) e Uéverton dos Santos Souza (Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil), e encontram-se publicados em [2] e [3].

5.1 A complexidade parametrizada

Os textos [38–40], [51] e [94] serviram como referência para o conteúdo dessa Seção.

No início da década de 1990, Fellows e Downey propuseram uma nova direção na Teoria da Complexidade ao observar mais cuidadosamente os problemas COBERTURA DE VÉRTICES, CONJUNTO DOMINANTE e CONJUNTO INDEPENDENTE. A ideia consistia em considerar aspectos computacionais práticos desses problemas que não eram considerados pela complexidade tradicional, uma vez que a mesma classifica tais problemas como difíceis focando apenas no tamanho da entrada e no pior tempo de execução que um algoritmo utiliza para resolvê-los.

Sendo assim, a complexidade parametrizada tenta explorar a estrutura da instância fornecida pelo problema a fim de obter alguma tratabilidade para o problema. Em outras palavras, uma vez que sempre conhecemos alguns aspectos da entrada fornecida para o problema, tentamos entender quais aspectos do problema são responsáveis pela explosão combinatória e, se tais parâmetros puderem ser controlados, então obtemos uma tratabilidade prática.

Tal como na complexidade clássica onde um problema de decisão é especificado pela entrada do problema e por uma pergunta a ser respondida, na complexidade parametrizada a especificação de um *problema parametrizado* consiste na descrição de três partes:

(1) uma instância para o problema,

(2) os aspectos da entrada que constituem os parâmetros,

(3) uma pergunta a ser respondida em termos da instância genérica.

Com isso, seja Π um problema difícil e seja $S = \{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ um subconjunto de aspectos de Π. Denotamos por $\Pi(a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ ou $\Pi(S)$ a versão parametrizada de Π, onde os aspectos em S são parâmetros fixados que devem agregar informação ao problema parametrizado.

Abaixo definimos a classe dos problemas FPT.

Definição 5.1. *[94] Um problema parametrizado* $\Pi(S)$ *pertence à classe* FPT*, ou é* tratável por parâmetro fixo*, se existe um algoritmo para solucionar* $\Pi(S)$ *em tempo* $f(S) \cdot n^c$*, onde* n *denota o tamanho da entrada,* c *é uma constante arbitrária e* f *uma função qualquer.*

Dessa forma, um problema parametrizado Π com parâmetro k é tratável a parâmetro fixo se existe um algoritmo FPT com respeito a k que resolve Π. Com isso, o uso do parâmetro para um problema computacional consiste em localizar quais aspectos da instância do problema computacional causam dificuldade para resolver tal problema na prática.

Definição 5.2. *[94] Sejam* $\Pi(k)$ *e* $\Pi'(k')$ *dois problemas parametrizados, onde* $k' \leq g(k)$ *para alguma função computável* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. Uma* FPT-redução (*ou* transformação paramétrica) *de* $\Pi(k)$ *para* $\Pi'(k')$ *é uma transformação* R *tal que:*

(i) Para todo x*, temos que* $x \in \Pi(k)$ *se, e somente se,* $R(x) \in \Pi'(k')$*;*

(ii) R *é computável por um* FPT*-algoritmo (com relação a* k*).*

O Teorema 5.3 descreve que a classe dos problemas FPT é fechada sob FPT-reduções .

Teorema 5.3. *[51] Se o problema parametrizado* Π *é redutível ao problema parametrizado* $\Pi' \in$ FPT *por uma redução parametrizada então* $\Pi \in$ FPT*, ou seja, se* $\Pi \leq_{fpt} \Pi'$ *e* $\Pi' \in$ FPT*, então* $\Pi \in$ FPT.

Outra técnica bastante conhecida para demonstrar que um problema parametrizado é FPT é conhecido como *kernelização* ou *redução a um núcleo.*

Definição 5.4. *[40] Seja $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ uma linguagem parametrizada. Uma* redução a um núcleo *ou* kernelização *consiste em substituir uma instância (I, k) por uma instância reduzida (I', k') chamada kernel do problema tal que*

(i) $k' \leq k$,

(ii) $|I'| \leq g(k)$, *para alguma função g dependente somente de k, e*

(iii) $(I, k) \in L$ *se, e somente se,* $(I', k') \in L$.

A redução de (I, k) para (I', k') deve ser computável polinomialmente em tempo $|I| + |k|$.

Chamamos *núcleo polinomial* um núcleo cujo tamanho é polinomial em relação ao parâmetro original.

Seja C um *circuito booleano de decisão* com variáveis de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uma porta lógica de C é dita *larga* se o seu número de entradas excede algum limite constante, usualmente 2. O *entrelaçamento* de C é o número máximo de portas lógicas largas em qualquer caminho a partir das variáveis de entrada até a linha de saída de C. A *profundidade* de C é o comprimento do maior caminho de uma variável de entrada até uma linha de saída em C. O *peso* de uma atribuição de valores-verdade para as variáveis de C é o número de variáveis definido com valor VERDADEIRO nessa atribuição.

A fim de definir a classe W necessitamos formular uma restrição para o problema SATISFABILIDADE DE CIRCUITOS para circuitos com entrelaçamento t e profundidade h.

SATISFATIBILIDADE PONDERADA EM CIRCUITOS (WCS[t,h])
INSTÂNCIA: Um circuito de decisão C com entrelaçamento t e profundidade h e um inteiro não negativo p.
PARÂMETRO: O inteiro p.
PERGUNTA: Existe uma atribuição de valores-verdade para as variáveis de C que satisfaça o circuito C e tenha peso p?

Informalmente, o problema WCS[t,h] consiste em, dado um circuito booleano e um inteiro p, decidir se podemos atribuir o valor VERDADEIRO a p nós de entrada tal que o circuito seja satisfeito.

Seja um natural $t \geq 1$, a classe W[t] consiste em todos os problemas parametrizados Π que possuem redução FPT para WCS[h,t] para alguma constante $h \geq 1$. A classe $\mathsf{W[P]}$ é a classe onde não há limite na profundidade e no entrelaçamento dos circuitos.

Dessa forma, verificamos que $\mathsf{FPT} \subseteq \mathsf{W[1]} \subseteq \mathsf{W[2]} \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{W[P]}$. Segundo [51] é conjecturado que tais inclusões não são próprias e que $\mathsf{FPT} \neq \mathsf{W[1]}$.

Um problema parametrizado Π é $\mathsf{W[t]}$-difícil se todo problema parametrizado de $\mathsf{W[t]}$ é redutível a Π via redução parametrizada. Da mesma forma, um problema parametrizado Π é $\mathsf{W[t]}$-completo se, e somente se, Π está na classe $\mathsf{W[t]}$ e se todo problema parametrizado pertencente a $\mathsf{W[t]}$ é redutível a Π.

Em seguida, a Definição 5.5 apresenta a classe XP.

Definição 5.5. *[94] Um problema parametrizado $\Pi(S)$ pertence à classe XP se existe um algoritmo para solucionar $\Pi(S)$ em tempo $f(S) \cdot n^{g(S)}$, onde n é usado para denotar o tamanho da entrada, e f e g são funções arbitrárias.*

Lema 5.6. *[94] Dado um problema NP-difícil Π e um subconjunto S de seus aspectos, se Π permanece NP-difícil mesmo quando os aspectos em S são delimitados por constantes então um problema parametrizado $\Pi(S)$ não está em XP, a menos que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.*

Tal como a classe FPT na complexidade parametrizada pode ser vista como análoga a classe dos problemas P na complexidade tradicional, a classe para-NP (respectivamente, para-coNP) na complexidade parametrizada desempenha papel semelhante ao papel desempenhado pela classe NP (respectivamente, coNP) na complexidade clássica. Dessa forma, as classes para-NP e para-coNP são obtidas da definição da classe FPT contida na Definição 5.1 substituindo-se o termo "algoritmo" por "algoritmo não determinístico".

Sendo assim, se um problema de decisão $\Pi \in \mathsf{NP}$ (respectivamente, $\Pi \in \mathsf{coNP}$) então $(\Pi, k) \in$ para-NP (respectivamente, $\Pi \in$ para-coNP). Diante do exposto, estamos prontos para enunciar as Proposições 5.7 e 5.8.

Proposição 5.7. *[51] FPT = para-NP se, e somente se, $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.*

Proposição 5.8. *[51] $\mathsf{FPT} \subseteq \mathsf{W[P]} \subseteq \mathsf{XP} \cap$ para-NP.*

5.2 Complexidade parametrizada dos problemas GBC(r, ℓ) e GB(r, ℓ)C

Usando o referencial téorico contido na Seção 5.1 vamos estudar a complexidade parametrizada do problema GRAFO BEM COBERTO, com ênfase especial no caso em que o grafo entrada é um grafo-(r, ℓ). Para isso, parâmetros adicionais devem ser considerados na análise do problema.

De agora em diante, denotamos por α o *tamanho do conjunto independente máximo no grafo de entrada* G para o problema considerado. Sendo assim, G é bem coberto se, e somente se, todo conjunto independente maximal de G tem cardinalidade α. Expressamos por ω o *tamanho da clique máxima no grafo de entrada* G.

Observamos que G(r, ℓ)BC quando parametrizados por r, ℓ e ω generaliza o caso G$(r, 0)$BC, cuja complexidade está em aberto conforme descrito na Tabela 2.2. Sendo assim, nosso foco está na complexidade do problema G(r, ℓ)BC quando parametrizados pelos três parâmetros r, ℓ e α, bem como na complexidade de uma versão parametrizada natural para o problema de decisão k-GRAFO BEM COBERTO descrita abaixo.

k-GRAFO BEM COBERTO (k-GBC)
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$.
PARÂMETRO: Um inteiro positivo k.
PERGUNTA: Todo conjunto independente maximal de G possui tamanho k?

O Lema 5.9 nos fornece uma motivação para o estudo do problema G$(0, \ell)$BC, uma vez que demonstra que k-GRAFO BEM COBERTO pode ser reduzido ao problema G$(0, \ell)$BC quando parametrizado por ℓ.

Lema 5.9. *O problema* k-GRAFO BEM COBERTO *possui uma* FPT*-redução para* G$(0, \ell)$BC *quando parametrizado por* ℓ.

Demonstração. Consideramos um grafo G com vértices $u_1, \ldots, u_n$ fornecido como entrada para o problema k-GRAFO BEM COBERTO.

Inicialmente, encontramos um conjunto independente maximal I em G. Sem perda de generalidade assumimos que $|I| = k$ e $I = \{u_1, \ldots, u_k\}$. Seja $\ell = k + 1$.

Construímos um grafo-$(0, \ell)$ G' com um conjunto de vértices $\{v_{i,j} : i \in \{1, \ldots, \ell\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ da seguinte forma:

- Para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ adicionamos arestas a fim de obter uma clique $V_i := \{v_{i,j} : j \in \{1, \ldots, n\}\}$.
- Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ adicionamos arestas a fim de obter uma clique $W_j := \{v_{i,j} : i \in \{1, \ldots, \ell\}\}$.
- Para todos os pares de vértices adjacentes u_a, u_b em G, adicione arestas entre $v_{i,a}$ e $v_{j,b}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ (desse modo, V_a completa V_b).

Para conveniência do leitor, fornecemos na Figura 5.1 um exemplo onde $G = (V, E)$ é o grafo P_3 e G' é obtido a partir de G.

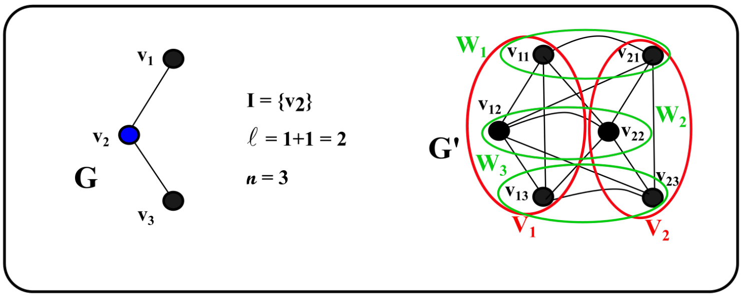

Figura 5.1: Exemplo de uma construção do grafo G' a partir do conjunto independente maximal $I = \{v_2\}$ de um P_3.

Notamos que os conjuntos V_i's particionam G' em ℓ cliques, logo G' é de fato um grafo-$(0, \ell)$, onde $\ell = k + 1$.

O grafo G' tem um conjunto independente maximal de tamanho k como, por exemplo, $\{v_{1,1}, \ldots, v_{k,k}\}$. Como isso, G' é bem coberto se, e somente se, todo conjunto independente maximal em G' tem tamanho exatamente igual a k. Observamos também que todo conjunto independente maximal de G' possui, no máximo, um vértice no conjunto V_i e, no máximo, um vértice no conjunto W_j, pois V_i e W_j são cliques. Como há $\ell = k + 1$ conjuntos V_i, segue que todo conjunto independente em G' contém no máximo $k + 1$ vértices.

Se G' contém um conjunto independente $\{v_{i_1,j_1}, \ldots, v_{i_x,j_x}\}$ para algum x, então $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_x}\}$ é um conjunto independente em G. Se G contém um conjunto independente $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_x}\}$ para algum x, então $\{v_{1,j_1}, \ldots, v_{min(x,k+1),j_{min(x,k+1)}}\}$ é um conjunto independente em G'.

Dessa forma, G contém um conjunto independente maximal menor que k se, e somente se, G' contém um conjunto independente de tamanho menor do que k, e G contém um conjunto independente (não necessariamente maximal) de tamanho ao menos $k + 1$ se, e somente se, G' contém um conjunto independente maximal de tamanho exatamente igual a $k + 1$. Sendo assim, segue que G' é bem coberto se, e somente se, G é bem coberto. Como $\ell = k + 1$, isto completa a prova. □

Sabemos que o problema GRAFO BEM COBERTO é coNP-completo [23, 92]. A Definição 5.10 apresenta a classe coW[i], $i \geq 1$:

Definição 5.10. *A classe* coW[i], $i \geq 1$, *é a classe de todos os problemas parametrizados cujo complemento está em* W[i].

Abaixo, descrevemos o problema CONJUNTO DOMINANTE VERMELHO-AZUL pertencente à classe W[2]-completo [39].

CONJUNTO DOMINANTE VERMELHO–AZUL (CDVA)
INSTÂNCIA: Um grafo bipartido $G = (R \cup B, E)$.
PARÂMETRO: Inteiros positivos $|D|$ e k.
PERGUNTA: Existe um conjunto $D \subseteq R$ de tamanho $|D| \leq k$ tal que cada vértice de B possui ao menos um vizinho em D?

Nosso próximo resultado está descrito no Teorema 5.11.

Teorema 5.11. *O problema k-GRAFO BEM COBERTO é* coW[2]*-difícil.*

Demonstração. A fim de mostrar a coW[2]-dificuldade de k-GRAFO BEM COBERTO, apresentamos uma FPT-redução de CDVA ao problema de determinar se um dado grafo não é bem coberto, onde k é o tamanho do conjunto dominante D e $\ell = k + 1$.

A partir de uma instância (G, k) de CDVA construímos um grafo G' como segue. Substitua o conjunto $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ por k cópias: $R_1 = \{r_1^1, r_2^1, \ldots, r_m^1\}$, $R_2 = \{r_1^2, r_2^2, \ldots, r_m^2\}$, ..., $R_k = \{r_1^k, r_2^k, \ldots, r_m^k\}$, onde cada novo vértice tem a mesma vizinhança que o vértice correspondente possui em G. Adicione arestas para fazer que B e cada R_i, $1 \leq i \leq k$, induza uma clique.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, crie um vértice s_i e adicione todas as possíveis arestas entre s_i e os vértices em R_i. Seja G' o grafo resultante. Observe que cada conjunto de vértices de G' pode ser particionado em $\ell = k + 1$ cliques: $B, R_1 \cup \{s_1\}, R_2 \cup \{s_2\}, \ldots, R_k \cup \{s_k\}$.

Claramente, para todo $b \in B$, o conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \cup \{b\}$ é um conjunto independente de G' de tamanho $k + 1$. Observamos que tal conjunto independente é máximo, uma vez que este contém um vértice de cada uma das $k + 1$ cliques que particiona $V(G')$. Além disso, qualquer conjunto independente maximal de G' tem tamanho ao menos k, pois todo conjunto independente maximal contém, ou s_i, ou um vértice de R_i. Neste ponto, afirmamos que G tem um conjunto $D \subseteq R$ de tamanho k que domina B se, e somente se, G' tem um conjunto independente maximal de tamanho k (isto é, G' não é bem coberto).

Se $D = \{r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}\}$ é um subconjunto de R de tamanho k que domina B em G, então $D' = \{r_{i_1}^1, r_{i_2}^2, \ldots, r_{i_k}^k\}$ é um conjunto independente maximal de G', o que implica que G' não é bem coberto.

Reciprocamente, se G' é um grafo que não é bem coberto então existe em G' um conjunto independente maximal D' de tamanho k. Observamos que $D' \cap B = \varnothing$ e que cada vértice em B tem ao menos um vizinho em D', ou, de outra forma D' não seria um conjunto independente maximal de tamanho k. Dessa forma, fazendo D o conjunto de vértices em R que possui cópias em $D' \cap \{R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k\}$, encontramos que D é um subconjunto de R de tamanho no máximo k que domina B em G. $\square$

Dos teoremas anteriores obtemos os seguintes corolários.

Corolário 5.12. *O problema* G$(0,\ell)$BC *quando parametrizado por* ℓ *é* coW[2]*-difícil.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 5.9 e do Teorema 5.11. □

Corolário 5.13. *A menos que* FPT = coW[2]*, o problema* G(r,ℓ)BC *não pode ser resolvido em tempo* $f(\alpha+\ell)\cdot n^{g(r)}$ *para alguma função computável* f*, onde* $g(r)$ *é uma função que só depende de* r*.*

Demonstração. Segue do fato que um algortimo que executa em tempo $f(\alpha+\ell)n^{g(r)}$ seria um algoritmo FPT para G$(0,\ell)$BC parametrizado por ℓ, e da coW[2]-dificuldade do problema conforme demonstrado no Teorema 5.11. □

O Lema 5.14 demonstra que o problema G(r,ℓ)BC pode ser resolvido em tempo $2^{r\cdot\alpha}\cdot n^{O(\ell)}$.

Lema 5.14. *O problema* GRAFO-(r,ℓ) BEM COBERTO (G(r,ℓ)BC) *pode ser resolvido em tempo* $2^{r\alpha}\cdot n^{O(\ell)}$*. Em particular, é* FPT *quando* ℓ *é fixado e* r*,* α *são parâmetros.*

Demonstração. Dado $(G=(V,E),S^1,S^2,\ldots,S^r,K^1,K^2,\ldots,K^\ell)$ uma instância de G(r,ℓ)BC. Observamos que cada um dos r conjuntos independentes, $S^1,\ldots,S^r$, deve possuir tamanho no máximo α. Por outro lado, qualquer conjunto independente maximal de G contém no máximo um vértice de cada uma das ℓ cliques.

O Algoritmo exaustivamente constrói todos os conjuntos independentes maximais de G da seguinte forma: escolhemos um subconjunto qualquer $\bigcup_{i=1}^{r} S^i$, o que tem cardinalidade no máximo $2^{r\alpha}$, e então escolhemos no máximo um vértice de cada uma das cliques, o que dá no máximo n^ℓ. Para cada uma das $2^{r\alpha}n^\ell$ escolhas, apenas necessitamos verificar se o conjunto assim construído é um conjunto independente maximal, bem como verificar se todos os conjuntos independentes maximais possuem o mesmo tamanho, o que pode ser feito em tempo $2^{r\alpha}\cdot n^{O(1)}$, porque ℓ é constante.

Outra alternativa seria substituir o valor do parâmetro α pelo valor $\max_{1\le i\le r}|S^i|$, o que é um resultado mais forte. □

Lema 5.15. *O problema* GRAFO-$(1,\ell)$ BEM COBERTO (G$(1,\ell)$BC) *pode ser resolvido em tempo* $n^{O(\ell)}$*. Em outras palavras, é um problema pertencente à classe* XP *quando parametrizado por* ℓ*.*

Demonstração. Seja $(G=(V,E),S,K^1,K^2,K^3,\ldots,K^\ell)$ uma instância de G$(1,\ell)$BC. Propomos um algoritmo que escolhe no máximo um vértice de cada uma das ℓ cliques, e o adiciona a um conjunto independente potencial $I_K\subseteq\cup(S\backslash N_S(I_K))$. Isto claramente define um conjunto independente de G que pode ser maximal. Observamos que qualquer conjunto independente maximal de G pode ser construído dessa forma e descartamos todos os conjuntos independentes que não são maximais. O número de conjuntos considerados por este procedimento é $n^{O(\ell)}$.

Durante a execução, verificamos se todos os conjuntos independentes maximais possuem a mesma cardinalidade. $\square$

A Tabela 5.1 sintetiza os resultados apresentados até o momento.

parâmetro \ classe	$(0,\ell)$	$(1,\ell)$	(r,ℓ)
r	–	–	para-coNPh
ℓ	coW[2]h XP	coW[2]h XP	para-coNPh
r,ℓ	coW[2]h XP	coW[2]h XP	para-coNPh
r,ℓ,ω	FPT Trivial	FPT Trivial	Em aberto (generaliza G(3,0)BC)
r,ℓ,α	coW[2]h XP	coW[2]h XP	coW[2]h, sem algoritmo $f(\alpha+\ell)n^{g(r)}$ a menos que FPT=coW[2], Algoritmo em tempo $2^{r\alpha}n^{O(\ell)}$
ω,α	FPT Teorema de Ramsey	FPT Teorema de Ramsey	FPT Teorema de Ramsey

Tabela 5.1: Complexidade Parametrizada do problema G(r,ℓ)BC.

5.3 Considerando a diversidade de vizinhança como parâmetro

A diversidade de vizinhança é um parâmetro estrutural baseado em uma maneira específica de particionar um grafo em conjuntos independentes e cliques. Dessa forma, nos parece um parâmetro natural a ser considerado no nosso problema, uma vez que uma partição (r,ℓ) de um grafo G é também uma partição do seu conjunto de vértices em cliques e conjuntos independentes. Este parâmetro é definido a seguir:

Definição 5.16. *[75] A* diversidade de vizinhança *de um grafo $G=(V,E)$, denotada por $dv(G)$, é o valor mínimo t tal que V pode ser particionado em t conjuntos $V_1,\ldots,V_t$ onde para todo $v\in V(G)$ e todo $i\in\{1,\ldots,t\}$, ou v é adjacente a todo vértice em V_i, ou não é adjacente a nenhum deles. Observe que cada parte V_i de G é uma clique ou um conjunto independente.*

Na Figura 5.2 fornecemos um exemplo de um grafo $G = (V, E)$ tal que $dv(G) = 5$.

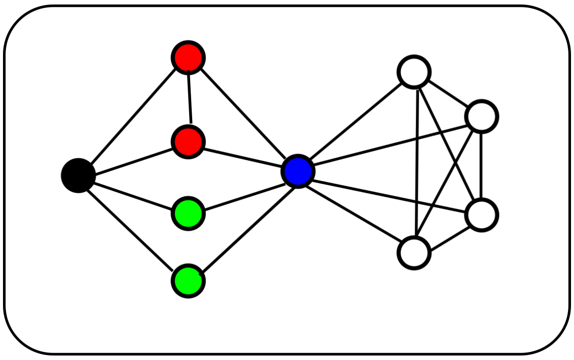

Figura 5.2: Grafo G tal que $dv(G) = 5$.

É conhecido que a decomposição da diversidade de vizinhança mínima de um grafo G pode ser obtida em tempo polinomial $O(n^3)$ segundo [75].

Lema 5.17. *O problema* GRAFO BEM COBERTO *é* FPT *quando parametrizado pela diversidade de vizinhança.*

Demonstração. Dado um grafo G, primeiramente obtemos uma partição de vizinhança de G com tamanho mínimo usando o algoritmo em tempo polinomial. Seja $t := dv(G)$ e seja $V_1, \ldots, V_t$ a partição mínima de diversidade de vizinhança para V obtida pelo Algoritmo de Lampis [75]. Como podemos observar, para quaisquer pares de vértices não adjacentes u, v pertencentes a mesma partição V_i, se u pertence a um conjunto independente maximal $\mathcal{S}$ então v também pertence a $\mathcal{S}$ ou, de outra forma, $\mathcal{S}$ não poderia ser máximo.

Por outro lado, se $N[u] = N[v]$, então para qualquer conjunto independente maximal $\mathcal{S}_u$ tal que $u \in \mathcal{S}_u$ existe outro conjunto independente maximal tal que $\mathcal{S}_v = \mathcal{S}_u \backslash \{u\} \cup \{v\}$. Dessa forma, podemos contrair cada partição V_i que é um conjunto independente em um único vértice v_i com peso $\tau(v_i) = |S_i|$, e contrair cada partição V_i que é uma clique em um único vértice v_i com peso $\tau(v_i) = 1$, a fim de obter um grafo G_t com $|V(G_t)| = t$, onde o peso de um vértice v_i de G_t significa que qualquer conjunto independente maximal de G possui nenhum ou exatamente $\tau(v)$ vértices de V_i. Neste ponto, precisamos apenas analisar se todos os conjuntos independentes maximais de G_t possuem o mesmo peso (soma dos pesos de seus vértices), que pode ser feito em tempo 2^t para analisar todos os subconjuntos de vértices de G_t, e n^2 para verificar se cada um deles é independente maximal. $\square$

Corolário 5.18. *[75] Se G possui corbertura de vértices k, então a diversidade de vizinhança de G satisfaz $dv(G) \leq 2^k + k$.*

Teorema 5.19. *O problema* GRAFO BEM COBERTO *é* FPT *quando parametrizado pelo número cobertura de vértice $n - \alpha$.*

5.4 Considerando a largura em clique como parâmetro

A noção de largura em clique foi introduzida por Courcelle, Engelfriest e Rozenberg em [26] e tem atraído bastante interesse desde então.

A *largura em clique* de um grafo G, expresso por $lc(G)$, é definindo como o número mínimo de rótulos necessários para construir G, usando as seguintes quatro operações:

1. criar um único vértice v com um rótulo inteiro ℓ (expresso por $\ell(v)$);
2. tomar a união disjunta entre dois vértices (isto é, co-join) entre dois grafos (expresso por $\oplus$);
3. join entre todos os vértices com o rótulo i e todos os vértices com o rótulo j para $i \neq j$ (expresso por $\eta_{i,j}$),
4. rerrotulação de todos os vértices com rótulo i pelo rótulo j (expresso por $\rho_{i,j}$).

Um termo algébrico que representa tal construção de G e usa no máximo k rótulos é denominado uma *k-expressão* de G (isto é, a largura em clique de G é o valor mínimo de k tal que G tenha uma k-expressão). Para conveniência do leitor, fornecemos na Figura 5.3 uma 3-expressão para um grafo G.

Um exemplo de aplicação de largura em clique, consiste nos problemas de decisão que podem ser expressos em *lógica monádica de segunda ordem*, em inglês *monadic-second order logic* (MSOL_1), uma extensão da lógica de segunda ordem que permite apenas quantificações sobre conjuntos; tais problemas são resolvidos em tempo linear em grafos cuja largura em clique é uma constante.

Por sua vez, LinEMSOL é uma extensão do MSOL nos qual alguns problemas NP-difíceis podem ser expressos. Courcelle, Makowsky e Rotics [27] mostraram que todo problema em grafos que pode ser definido em uma expressão LinEMSOL é resolvido em tempo linear em grafos com largura em clique no máximo k (ou seja, é FPT quando parametrizado pela largura em clique). Usando um resultado de [80], o mesmo resultado é válido mesmo quando nenhuma k-expressão é dada.

Teorema 5.20. *[27] Seja $\mathscr{C}$ uma classe de grafos com largura em clique no máximo k tal que exista um algoritmo $O(f(|E|,|V|))$ que constrói uma k-expressão definindo o grafo G em $\mathscr{C}$. Então, para todo problema $\text{LinEMSOL}(\tau_{1,L})$ em $\mathscr{C}$, existe um algoritmo que resolve este problema em tempo $O(f(|E|,|V|))$.*

Uma *decomposição em árvore* de um grafo $G = (V,E)$ é um par $(T,\mathcal{X})$, onde $T = (I,F)$ é uma árvore, e $\mathcal{X} = \{B_i\}$, $i \in I$ é uma família de subconjuntos de $V(G)$, chamados *sacolas* e indexados pelos vértices de T, tal que

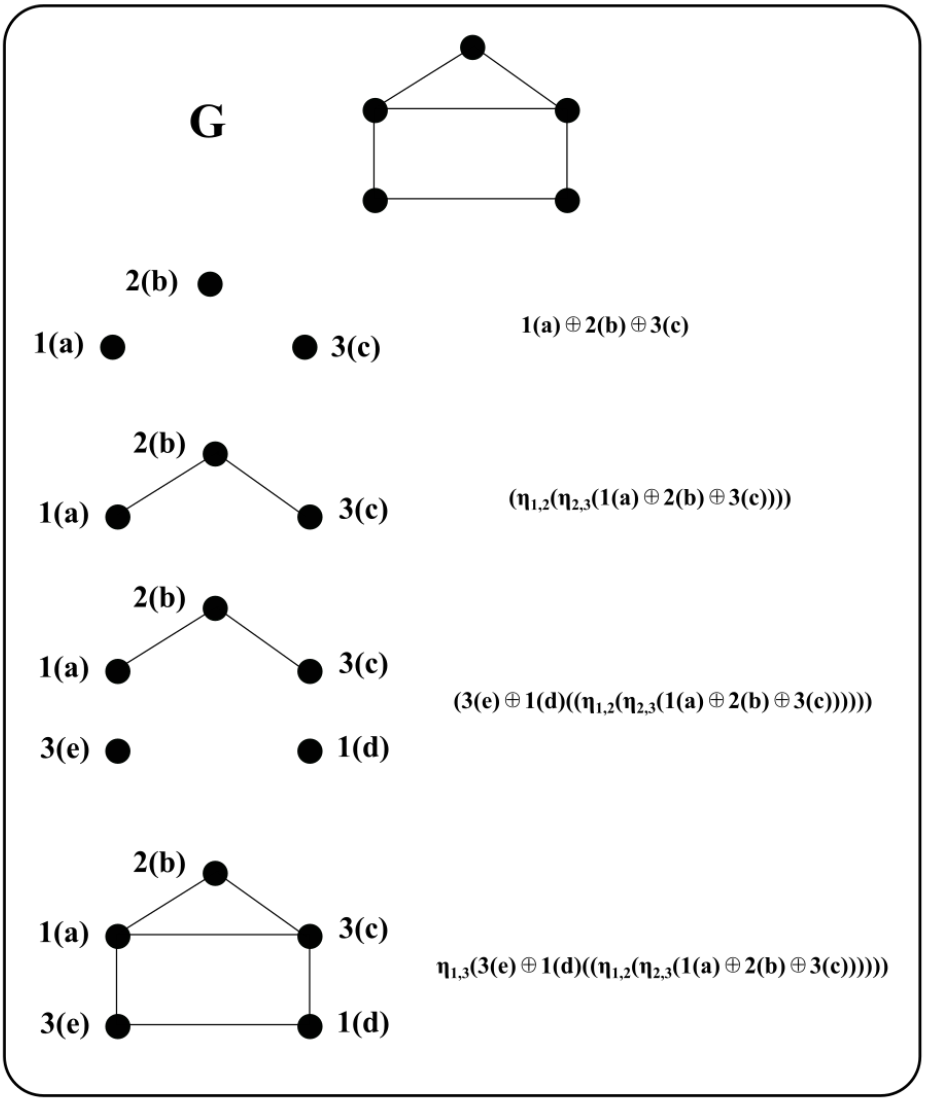

Figura 5.3: Exemplo de uma 3-expressão para o grafo G.

1. cada vértice $v \in V$ aparece em ao menos uma sacola, isto é, $\bigcup_{i \in I} B_i = V$,
2. para cada aresta $e = \{x, y\} \in E$, existe um $i \in I$ tal que $x, y \in B_i$, e
3. para cada $v \in V$ o conjunto de vértices indexados por $\{i : i \in I,\ v \in B_i\}$ forma uma subárvore de T.

O *comprimento* de uma decomposição em árvore é definido como $\max_{i \in I}\{|B_i| - 1\}$. A *largura em árvore* de G, expresso por $la(G)$, é o comprimento mínimo de uma decomposição em árvore de G.

Da definição segue que toda árvore tem largura em árvore igual a 1. Uma clique K_n tem $la(G)$ igual a $n - 1$, uma vez que para qualquer decomposição em árvore (T, X) de K_n, algum conjunto X_v deve conter todos os vértices.

O Teorema 5.21 descreve que, se um problema é parametrizado pela largura em clique é FPT, então o mesmo problema parametrizado pela largura em árvore também é FPT.

Teorema 5.21. *[28] Para todo grafo G vale a desigualdade* $lc(G) \leq 3 \cdot 2^{la(G)} - 1$.

O Teorema 5.22 e os Corolários 5.23 e 5.24 exibem resultados considerando a largura em clique e a largura em árvore como parâmetros.

Teorema 5.22. *O problema* GRAFO BEM COBERTO *é* FPT *quando parametrizado pela largura em clique.*

Demonstração. Dado $S \subseteq V(G)$, inicialmente observamos que a propriedade "S é um conjunto independente maximal" é expressiva em MSOL_1. De fato, construímos uma fórmula $\varphi(G,S)$ tal que "S é um conjunto independente maximal" se e somente se $\varphi(G,S)$ como segue:

$[\nexists\, u,v \in S : edge(u,v)] \wedge [\nexists\, S' : (S \subsetneq S') \wedge (\nexists\, x,y \in S' : edge(x,y))]$

Como $\varphi(G,S)$ é uma expressão MSOL_1, o problema de encontrar S máximo e S mínimo em $\varphi(G,S)$ está definido em LinEMSOL. Dessa forma, podemos obter S máximo e S mínimo satisfazendo $\varphi(G,S)$ em tempo $f(lc(G)) \cdot n^{O(1)}$. Finalmente, G é bem coberto se, e somente se, $|max(S)| = |min(S)|$. ☐

Corolário 5.23. *O problema* GRAFO BEM COBERTO *é* FPT *quando parametrizado pela largura em árvore.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 5.21 e 5.22, e do fato que grafos com largura em árvore limitados por k possuem uma largura em clique limitado por uma função de k [28]. ☐

Corolário 5.24. *Para r e ℓ fixos, o problema* GRAFO BEM COBERTO-(r,ℓ) *é* FPT *quando parametrizado pela largura em clique.*

Demonstração. Como r e ℓ são constantes, decorre do Corolário 5.23. ☐

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho consideramos a classe de grafos bem cobertos-(r, ℓ), que é a junção de duas classes de grafos bem estudadas: os grafos bem cobertos e os grafos-(r, ℓ). Os grafos bem cobertos são os grafos em que todos conjunto maximal é máximo, e os grafos-(r, ℓ) são aqueles em que seu conjunto de vértices pode ser particionado em r conjuntos independentes e ℓ cliques.

Para tal classe de grafos, estudamos três problemas: PROBLEMA DE RECONHECIMENTO, PROBLEMA SANDUÍCHE e o PROBLEMA PROBE.

No estudo do reconhecimento, consideramos dois problemas de decisão diferentes. No primeiro, denominado PROBLEMA GRAFO BEM COBERTO-(r, ℓ) (GBC(r, ℓ)), é dado um grafo G, e a questão é decidir se existe um grafo bem coberto-(r, ℓ). No segundo, denominado PROBLEMA GRAFO-(r, ℓ) BEM COBERTO (G(r, ℓ)BC), é dado um grafo G juntamente com uma partição (r, ℓ) do seu conjunto de vértices, e a questão consiste em decidir se G é bem coberto. Isso gera duas famílias infinitas de problemas, para quaisquer inteiros não negativos r e ℓ, que classificamos como sendo P, coNP-completo, NP-completo, NP-difícil e coNP-difícil. Apenas os casos G$(r, 0)$BC para $r >= 3$ permanecem em aberto.

Além disso consideramos a complexidade parametrizada desses problemas para diferentes escolhas de parâmetros, tais como o tamanho α do conjunto independente maximal do grafo de entrada, a diversidade de vizinhança, a largura em clique, e o número ℓ de cliques em uma partição-(r, ℓ). Em particular mostramos que o problema parametrizado de determinar se todo conjunto independente maximal de um grafo de entrada G com cardinalidade igual a k pode ser reduzido ao problema G$(0, \ell)$BC quando parametrizado por ℓ. Adicionalmente, provamos que ambos os problemas são coW[2]-difícil embora possa ser resolvido em tempo XP. Esses resultados estão publicados em [2] e [3].

Fornecemos uma caracterização estrutural para as classes de grafos bem cobertos-(r, ℓ), onde $(r, \ell) = (1, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)$, com exceção dos grafos bem cobertos-$(2, 0)$, cujos resultados pertencem a Ravindra [90] e Favaron [43].

No estudo do problema sanduíche para grafos bem cobertos-(r, ℓ) (PS-GBC(r, l)) são dados dois grafos G^1 e G^2, tal que $E^1 \subseteq E^2$, e a questão é se existe um grafo G bem coberto-(r, ℓ), tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$. Mostramos que os problemas PS-GBC$(1,0)$, PS-GBC$(0,1)$, PS-GBC$(0,2)$ e PS-GBC$(1,1)$ são polinomiais, e o problema PS-GBC$(1,2)$ é NP-completo. O problema PS-GBC$(2,0)$ permanece em aberto. Tais resultados foram submetidos ao XIV Latin American Theoretical Informatics Symposium, e posteriormente serão submetidos a um periódico internacional.

No estudo do Problema Probe, dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é $\mathscr{C}$-PROBE, se existe um conjunto independente de vértice $N \subseteq V(G)$, bem como um conjunto de pares de vértices $E' \subseteq S$ tal que o grafo $H = (V, E \cup E')$ pertence a uma classe $\mathscr{C}$. Os problemas PP-GBC$(1,0)$, PP-GBC$(0,1)$, PP-GBC$(0,2)$ e PP-GBC$(1,1)$ foram resolvidos, restando em aberto os problemas PP-GBC$(2,0)$ e PP-GBC$(1,2)$. A solução do problema PP-GBC$(1,1)$ encontra-se publicado em [1].

Como trabalhos futuros pretendemos estudar os problemas que permaneceram em aberto tais como:

1. Resolver o problema G$(r,0)$BC para $r \geq 3$, bem como

2. resolver o problema PS-GBC$(2,0)$.

Além disso, motivados pela dificuldade que estamos encontrando para resolver o problema PS-GBC$(2,0)$ utilizando a caracterização estrutural proposta por [90] e [43], achamos que talvez uma caracterização estrutural para grafos bem cobertos-$(2,0)$ que não utilize o conceito de emparelhamentos, poderia nos ajudar a resolver o problema.

Sendo assim, propomos também como possíveis trabalhos futuros:

3. Obter uma caracterização estrutural alternativa para os grafos bem cobertos-$(2,0)$, e

4. estudar os problemas ainda em aberto PP-GBC$(2,0)$ e PS-GBC$(2,0)$.

Outro problema que pretendemos resolver como continuação desta tese consiste no problema probe não particionado, definido formalmente a seguir:

> PROBLEMA PROBE NÃO PARTICIONADO PARA GRAFOS BEM COBERTOS-(r, ℓ) (NP-GBC(r, ℓ))
>
> INSTÂNCIA: Grafo $G = (V, E)$.
>
> PERGUNTA: Existe uma partição $V = (N, P)$ e conjunto $E' \subseteq N \times N$ tal que $H = (V, E \cup E')$ é um grafo bem coberto-(r, ℓ)?

Desse modo, propomos também como trabalho futuro:

5. Estudar os problemas NP-GBC$(1,0)$, NP-GBC$(0,1)$, NP-GBC$(0,2)$, NP-GBC$(1,1)$, NP-GBC$(1,2)$ e NP-GBC$(2,0)$.

6. Determinar a classificação de GBC(r,ℓ) na Hierarquia Polinomial (Δ_2^p, ou algum subconjunto próprio de Δ_2^p?).

Referências Bibliográficas

[1] Alves, S. R., Couto, F., Faria, L., Klein, S., and dos S. Souza, U. O problema probe particionado split bem coberto é polinomial. In *Anais do III Encontro de Teoria da Computação* (Porto Alegre, RS, Brasil, 2018), SBC.

[2] Alves, S. R., Dabrowski, K. K., Faria, L., Klein, S., Sau, I., and dos Santos Souza, U. On the (parameterized) complexity of recognizing well-covered (r, ℓ)-graphs. In *Combinatorial Optimization and Applications - 10th International Conference, COCOA 2016, Proceedings* (2016), pp. 423–437.

[3] Alves, S. R., Dabrowski, K. K., Faria, L., Klein, S., Sau, I., and dos Santos Souza, U. On the (parameterized) complexity of recognizing well-covered (r, ℓ)-graph. *Theoretical Computer Science 746* (2018), 36–48.

[4] Barbosa, R., and Ellingham, M. A characterisation of cubic parity graphs. *Australiasian Journal of Combinatorics Volume 28* (01 2003), 273–293.

[5] Barbosa, R. M. *Sobre conjuntos independentes maximais de um grafo*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.

[6] Baste, J., Faria, L., Klein, S., and Sau, I. Parameterized complexity dichotomy for (r, ℓ)-vertex deletion. *Theory of Computing Systems* (04 2015).

[7] Berge, C. *The Theory of Graphs and Its Applications.* Methuen, 1962.

[8] Berge, C. Some common properties for regularizable graphs, edge-critical graphs and b-graphs. In *Graph Theory and Algorithms*, N. Saito and T. Nishizeki, Eds. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1981, pp. 108–123.

[9] Berry, A., Cohen, E., Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., Pinet, N., Sigayret, A., and Stern, M. Recognizing chordal-bipartite probe graphs.

[10] Berry, A., Golumbic, M. C., and Lipshteyn, M. Two tricks to triangulate chordal probe graphs in polynomial time. vol. 15, pp. 962–969.

[11] Bodlaender, H. L., Downey, R. G., Fellows, M. R., and Hermelin, D. On problems without polynomial kernels. *Journal of Computer and System Sciences 75*, 8 (2009), 423 – 434.

[12] Bondy, J. A., and Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. Elsevier, New York, 1976.

[13] Brandstädt, A. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics 152* (1996), 47 – 54.

[14] Bravo, R. S., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F. Characterization and recognition of P_4-sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. *Discrete Applied Mathematics 159*, 4 (2011), 165 – 173.

[15] Campbell, S. R., Ellingham, M. N., and Royle, G. F. A characterisation of well-covered cubic graphs. *Congressus Numerantium 13* (1993), 193 – 212.

[16] Caro, Y., Ellingham, M., and Ramey, J. E. Local structure when all maximal independent sets have equal weight. *SIAM Journal Discrete Mathematics 11* (1998), 644–654.

[17] Caro, Y., Sebő, A., and Tarsi, M. Recognizing greedy structures. *Journal of Algorithms 20*, 1 (1996), 137–156.

[18] Cerioli, M. R., Everett, H., de Figueiredo, C. M. H., and Klein, S. The homogeneous set sandwich problem. *Information Processing Letters 67*, 1 (1998), 31–35.

[19] Chandler, D. B., Chang, M.-S., Kloks, T., Liu, J., and Peng, S.-L. Probe graph classes. *Online Manuscript* (2012).

[20] Chang, G. J., Kloks, T., Liu, J., and Peng, S.-L. The pigs full monty - a floor show of minimal separators. In *STACS* (2005).

[21] Chang, M.-S., Kloks, T., Kratsch, D., Liu, J., and Peng, S.-L. On the recognition of probe graphs of some self-complementary classes of perfect graphs. vol. 3595, pp. 808–817.

[22] Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P. *Graphs & Digraphs, Fifth Edition*, 5th ed. Chapman & Hall/CRC, 2010.

[23] Chvátal, V., and Slater, P. J. A note on well-covered graphs. In *Quo Vadis, Graph Theory? A Source Book for Challenges and Directions*, vol. 55 of *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier, 1993, pp. 179 – 181.

[24] Cobham, A. The intrinsic computational difficulty of functions. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1964 International Congress (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. North-Holland Publishing, 1965, pp. 24–30.

[25] Cook, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1971), STOC '71, ACM, pp. 151–158.

[26] Courcelle, B., Engelfriet, J., and Rozenberg, G. Handle-rewriting hypergraph grammars. *Journal of Computer and System Sciences 46*, 2 (1993), 218 – 270.

[27] Courcelle, B., Makowsky, J. A., and Rotics, U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique width. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (1998), Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–16.

[28] Courcelle, B., and Olariu, S. Upper bounds to the clique width of graphs. *Discrete Applied Mathematics 101*, 1 (2000), 77 – 114.

[29] Couto, F., Faria, L., Gravier, S., Klein, S., and dos Santos, V. Structural characterization and decomposition for cographs-(2, 1) and (1, 2): a natural generalization of threshold graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics 50* (2015), 133 – 138. LAGOS'15 ? VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.

[30] Couto, F., Faria, L., Gravier, S., Klein, S., and Santos, V. F. On the complexity of probe and sandwich problems for generalized threshold graphs. In *Revised Papers of the 41st International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - Volume 9224* (2016), WG 2015, Springer-Verlag, pp. 312–324.

[31] Couto, F. V. D. *Complexidade dos problemas sanduíche e probe para subclasses de grafos-*(k, ℓ). PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2016.

[32] Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., and Faria, L. On decision and optimization (k, ℓ)-graph sandwich problems. *Discrete Applied Mathematics 143*, 1–3 (2004), 155–165.

[33] de Figueiredo, C. M. H., Klein, S., and Vuskovic, K. The graph sandwich problem for 1-join composition is NP-complete. *Discrete Applied Mathematics 121* (2002), 73–82.

[34] de Souza Francisco, R., Klein, S., and Nogueira, L. T. Characterizing (k,ℓ)-partitionable cographs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics 22* (2005), 277 – 280. 7th International Colloquium on Graph Theory.

[35] Dean, N., and Zito, J. Well-covered graphs and extendability. *Discrete Mathematics 126*, 1 (1994), 67–80.

[36] Dell, H. A simple proof that and-compression of NP-complete problems is hard. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC) 21* (2014), 75.

[37] Deniz, Z., and Ekim, T. Stable equimatchable graphs. *Discrete Applied Mathematics* (2016).

[38] Downey, R. A parameterized complexity tutorial. In *Language and Automata Theory and Applications* (2012), Springer Berlin Heidelberg, pp. 38–56.

[39] Downey, R. G., and Fellows, M. R. *Fundamentals of Parameterized Complexity.* Springer Publishing Company, Incorporated, 2013.

[40] Downey, R. R. G., and Fellows, M. R. *Parameterized Complexity.* Monographs in Computer Science. Springer Verlag, 1999.

[41] Drucker, A. New limits to classical and quantum instance compression. *SIAM Journal on Computing 44*, 5 (2015), 1443–1479.

[42] Edmonds, J. Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Mathematics 17* (1965), 449–467.

[43] Favaron, O. Very well covered graphs. *Discrete Mathematics 42*, 2 (1982), 177–187.

[44] Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W. *Generalized Colourings (Matrix Partitions) of Cographs.* 12 2006, pp. 149–167.

[45] Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R. Complexity of graph partition problems. In *Proceedings of the Thirty-first Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1999), STOC '99, ACM, pp. 464–472.

[46] Fellows, M., Rosamond, F., Rotics, U., and Szeider, S. Clique-width is NP-complete. *SIAM Journal Discrete Mathematics 23* (2009), 909–939.

[47] Ferber, A., and Jain, V. 1-factorizations of pseudorandom graphs, 2018.

[48] Finbow, A., Hartnell, B., and Nowakowski, R. A characterization of well covered graphs of girth 5 or greater. *Journal of Combinatorial Theory, Series B 57*, 1 (1993), 44–68.

[49] Finbow, A., Hartnell, B., and Nowakowski, R. A characterization of well-covered graphs that contain neither 4- nor 5-cycles. *Journal of Graph Theory 18* (1994), 713–721.

[50] Finbow, A. S., and Hartnell, B. A characterization of parity graphs containing no cycle of order five or less. *Ars Comb. 40* (1995).

[51] Flum, J., and Grohe, M. *Parameterized Complexity Theory (Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series).* Springer-Verlag, 2006.

[52] Fraigniaud, P., and Nisse, N. Connected treewidth and connected graph searching. In *Proceedings of the 7th Latin American Conference on Theoretical Informatics* (2006), LATIN'06, Springer-Verlag, pp. 479–490.

[53] Gallai, T. Über extreme punkt-und kantenmengen. *Eötvös Sect. Math. 2* (1959), 133–138.

[54] Garey, M. R., and Johnson, D. S. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman & Co., 1990.

[55] Goel, G., and Tripathi, P. Matching with our eyes closed. In *2012 IEEE 53rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (2012), pp. 718–727.

[56] Golumbic, M. C. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press. Elsevier Science, 1980.

[57] Golumbic, M. C., Kaplan, H., and Shamir, R. Graph sandwich problems. *Journal of Algorithms 19*, 3 (1995), 449–473.

[58] Golumbic, M. C., and Lipshteyn, M. Chordal probe graphs. *Discrete Applied Mathematics 143*, 1 (2004), 221–237.

[59] Golumbic, M. C., and Shamir, R. Complexity and algorithms for reasoning about time: A graph-theoretic approach. *Journal ACM 40* (1993), 1108–1133.

[60] Haghighi, H. A generalization of villareal's result for unmixed tripartite graphs. *Bull. Iranian Math. 40* (2014), 1505–1514.

[61] Hall, P. On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society s1-10*, 1 (1935), 26–30.

[62] Hammer, P. L., and Simeone, B. The splittance of a graph. *Combinatorica 1*, 3 (1981), 275–284.

[63] Harary, F. *Graph theory.* Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Pub. Co., 1969.

[64] Harary, F. *Graph theory.* Addison-Wesley, 1991.

[65] Hartmanis, J., and Stearns, R. E. On the computational complexity of algorithms. *Journal of Symbolic Logic 32*, 1 (1967), 120–121.

[66] Hartnell, B. *A Characterization of the 1-well-covered Graphs with no 4-cycles.* 12 2006, pp. 219–224.

[67] Hartnell, B. L. *A Characterization of the 1-well-covered Graphs with no 4-cycles.* Springer, 2007, pp. 219–224.

[68] Haynes, T. W., and Slater, P. J. Paired-domination in graphs. *Networks 32*, 3 (1998), 199–206.

[69] Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics 141* (2004), 185–194. Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics.

[70] Jafarpour-Golzari, R., and Zaare-Nahandi, R. Unmixed r-partite graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol. 43* (07 2017), 781–787.

[71] Johnson, J., and Spinrad, J. A polynomial time recognition algorithm for probe interval graphs. pp. 477–486.

[72] Karp, R. M. *Reducibility among Combinatorial Problems.* Springer US, 1972, pp. 85–103.

[73] König, D. Graphen und matrizen. *Mat. Fiz. Lapok 38* (10 1931), 116–119.

[74] Kolay, S., Panolan, F., Raman, V., and Saurabh, S. Parameterized algorithms on perfect graphs for deletion to (r, ℓ)-graphs. *CoRR* (2015).

[75] Lampis, M. Algorithmic meta-theorems for restrictions of treewidth. *Algorithmica 64*, 1 (2012), 19–37.

[76] Lesk, M., Plummer, M. D., and Pulleyblank, W. R. Equi-matchable graphs. *Graph Theory and Combinatorics. Academic Press* (1984), 239–254.

[77] Levit, V., and Mandrescu, E. Well-covered and koenig-egervary graphs. *Congressus Numerantium 130* (1998), 209–218.

[78] Levit, V. E., and Tankus, D. On relating edges in graphs without cycles of length 4. *Journal of Discrete Algorithms 26* (2014), 28–33.

[79] McConnell, R. M., and Spinrad, J. P. Construction of probe interval models. In *Proceedings of the Thirteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Philadelphia, PA, USA, 2002), SODA '02, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 866–875.

[80] Oum, S. Approximating rank-width and clique-width quickly. *ACM Transactions on Algorithms 5* (01 2008).

[81] Pinter, M. *W_2 graphs and strongly well-covered graphs: two well-covered graph subclasses.* PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville,TN, 1991.

[82] Pinter, M. R. Planar regular one-well-covered graphs. *Congressus Numerantium 91* (1992), 159–187.

[83] Pinter, M. R. Strongly well-covered graphs. *Discrete Mathematics 132*, 1 (1994), 231 – 246.

[84] Plummer, M. D. Some covering concepts in graphs. *Journal of Combinatorial Theory 8* (1970), 91–98.

[85] Plummer, M. D. Well-covered graphs: a survey. *Quaestiones Mathematicae 16* (1993), 253–287.

[86] Prisner, E., Topp, J., and Vestergaard, P. D. Well covered simplicial, chordal, and circular arc graphs. *Journal of Graph Theory 21*, 2 (1996), 113–119.

[87] Ramaswamy, K., and Narayanaswamy, N. Parameterized algorithms for (r,l)-partization. *Journal of Graph Algorithms and Applications [electronic only] 17* (01 2013).

[88] Ramsey, F. P. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society Second Series 30* (1930).

[89] Randerath, B., and Vestergaard, P. D. On well-covered graphs of odd girth 7 or greater. *Discussiones Mathematicae Graph Theory 22* (2002), 159–172.

[90] Ravindra, G. Well-covered graphs. *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences 2* (1977), 20–21.

[91] S. Klein, S., de Mello, C. P., and Morgana, A. Recognizing well covered graphs of families with special P_4-components. *Graphs and Combinatorics 29*, 3 (2013), 553–567.

[92] Sankaranarayana, R. S., and Stewart, L. Complexity results for well-covered graphs. *Networks 22* (1992), 247–262.

[93] Sankaranarayana, R. S., and Stewart, L. K. Recursively decomposable well-covered graphs. *Discrete Mathematics 161* (1996), 243–263.

[94] Santos, V. F., and Souza, U. S. *XXXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. (Org.). Anais da 34º Jornada de Atualização em Informática. 1ed.* (2005), 232–273.

[95] Schaefer, T. J. The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (New York, NY, USA, 1978), STOC '78, ACM, pp. 216–226.

[96] Seese, D. The structure of the models of decidable monadic theories of graphs. *Annals of Pure and Applied Logic 53* (1991), 169–195.

[97] Staples, J. A. W. *On some subclasses of well-covered graphs.* PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, 1975.

[98] Stockmeyer, L. Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News 5* (1973), 19–25.

[99] Tankus, D., and Tarsi, M. Well-covered claw-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B 66*, 2 (1996), 293–302.

[100] Topp, J., and Volkmann, L. Well covered and well dominated block graphs and unicyclic graphs. *Mathematica Pannonica 1* (1990), 55–66.

[101] Yamashita, M., and Kameda, T. Modeling k-coteries by well-covered graphs. *Networks 34* (1999), 221–228.

[102] Zaare-Nahandi, R. Pure simplicial complexes and well-covered graphs. *Rocky Mountain Journal of Mathematics 45* (2011).

[103] Zhang, P. Probe interval graph and its applications to physical mapping of dna. *Online Manuscript* (1994).

[104] Zhang, P., Schon, E., Fischer, S. G., Cayanis, E., Weiss, J., Kistler, S., and Zhuang, P. An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of dna. *Computer applications in the biosciences : CABIOS 10* (1994), 309–317.

[105] Zhang, P., Ye, X., Liao, L., Russo, J. J., and Fischer, S. G. Integrated mapping package – a physical mapping software tool kit. *Genomics 55*, 1 (1999), 78–87.

Índice Remissivo