



ESTRUTURAS ESPECIAIS EM DIGRAFOS COM GRAU DE SAÍDA MÍNIMO  
PRESCRITO: FLORESTAS DE CICLOS E FEEDBACK ARC SETS

Rafael Almeida da Costa Schneider

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Fábio Happ Botler

Rio de Janeiro  
Junho de 2022

ESTRUTURAS ESPECIAIS EM DIGRAFOS COM GRAU DE SAÍDA MÍNIMO  
PRESCRITO: FLORESTAS DE CICLOS E FEEDBACK ARC SETS

Rafael Almeida da Costa Schneider

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientador: Fábio Happ Botler

Aprovada por: Prof. Fábio Happ Botler  
Prof. Daniel Ungaretti Borges  
Prof. Guilherme Oliveira Mota

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JUNHO DE 2022

Schneider, Rafael Almeida da Costa

Estruturas especiais em digrafos com grau de saída mínimo prescrito: Florestas de ciclos e Feedback arc sets/Rafael Almeida da Costa Schneider. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2022.

X, 68 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Fábio Happ Botler

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 59 – 63.

1. Feedback arc sets minimais. 2. Florestas de ciclos. 3. Digrafos. I. Botler, Fábio Happ. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico esta dissertação à minha  
querida família.*

# Agradecimentos

Agradeço a meus pais, minhas irmãs e todos meus familiares. Em especial a minha avó Marlene (*in memoriam*) que nos deixou durante minha trajetória no mestrado, mas sempre acreditou em meu sucesso.

Ao professor Fábio Botler, meu orientador, por aceitar conduzir este trabalho de pesquisa, sempre solícito e proativo. Obrigado por toda dedicação e por me manter motivado ao longo destes dois anos.

A minha namorada Mariana, que me acompanha desde o início de minha graduação em 2015 e esteve ao meu lado durante todo meu percurso acadêmico.

Aos Professores Daniel Ungaretti e Guilherme Mota, por aceitarem fazer parte desta banca, agregando grande valor a este trabalho com suas contribuições.

Aos colegas de mestrado do PESC, pela troca de ideias e cooperação mútua. Apesar da pandemia e do pouco contato que tivemos, conseguimos superar todos os obstáculos juntos.

Ao PESC e o seu corpo docente de excelência, que propiciou as melhores condições para uma boa pesquisa.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado, imprescindível para a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTRUTURAS ESPECIAIS EM DIGRAFOS COM GRAU DE SAÍDA MÍNIMO  
PRESCRITO: FLORESTAS DE CICLOS E FEEDBACK ARC SETS

Rafael Almeida da Costa Schneider

Junho/2022

Orientador: Fábio Happ Botler

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um *digrafo*  $D$  é um par  $D = (V, A)$  em que  $V$  é um conjunto finito de *vértices* e  $A \subseteq V \times V$  é um conjunto de *arcos*. Um digrafo  $D$  que não possui *arcos simétricos* (isto é,  $u, v \in V$  tais que  $(u, v), (v, u) \in A$ ) é também chamado de *orientação de grafo* e um *torneio* é uma orientação de um grafo completo.

O *grau de saída* de  $v \in V$ , denotado por  $d^+(v)$ , é o número de arcos saindo de  $v$ , e denotamos por  $\delta^+(D)$  o *grau de saída mínimo* de  $D$ , ou seja, o menor número de arcos saindo de um mesmo vértice.

Neste trabalho exploramos dois conceitos em digrafos: Florestas de ciclos e Feedback arc sets. Uma *k-floresta de ciclos* é uma coleção de  $k$  ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  tais que para cada  $i = 1, \dots, k$ , o ciclo  $C_i$  intercepta a união  $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$  em no máximo um vértice. A Conjectura de Hoàng–Reed afirma que todo digrafo  $D$  possui uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos. Neste trabalho, nós abordamos esse problema discutindo detalhadamente os artigos que verificam a conjectura para digrafos com grau de saída mínimo 2, 3 e torneios.

Um conjunto de arcos  $F \subseteq A(D)$  é um *feedback arc set* (FAS) se o digrafo obtido de  $D$  pela remoção dos arcos em  $F$  não contém ciclos. Além disso, um feedback arc set  $F$  é *minimal* se não houver um feedback arc set  $F'$  tal que  $F' \subsetneq F$ . Neste trabalho, exploramos uma conjectura atribuída a Lichiardopol, que diz que todo digrafo  $D$  tem um FAS minimal  $F$  para o qual o digrafo induzido por  $F$  contém um caminho com comprimento (número de arcos no caminho) de pelo menos  $\delta^+(D)$ . Nós apresentamos a prova para  $\delta^+(D) = 2$ , construímos uma família de contraexemplos para digrafos com  $\delta^+(D) \geq 3$  e realizamos testes computacionais para torneios com até dez vértices. Por fim, apresentamos uma demonstração alternativa para a relação de bijeção entre FAS minimais e caminhos hamiltonianos em torneios.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SPECIAL STRUCTURES IN DIGRAPHS WITH PRESCRIBED MINIMUM  
OUTDEGREE: CIRCUIT FORESTS AND FEEDBACK ARC SETS

Rafael Almeida da Costa Schneider

June/2022

Advisor: Fábio Happ Botler

Department: Systems Engineering and Computer Science

A *digraph*  $D$  is a pair  $D = (V, A)$  where  $V$  is a finite set of *vertices* and  $A \subseteq V \times V$  is a set of *arcs*. A digraph  $D$  that does not have symmetric arcs is also called an *orientation of a graph* and a *tournament* is an orientation of a complete graph.

The *outdegree* of  $v \in V$ , denoted by  $d^+(v)$ , is the number of arcs leaving  $v$ . We denote by  $\delta^+(D)$  the *minimum outdegree* of  $D$ , that is, the smallest number of arcs leaving the same vertex. In this dissertation we study two concepts in digraphs: *circuit forests* and *feedback arc sets*.

A *k-circuit forest* is a collection of  $k$  circuits  $C_1, C_2, \dots, C_k$  such that for each  $i = 1, \dots, k$ , the circuit  $C_i$  intercepts the union  $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$  in at most one vertex. The Hoàng–Reed Conjecture states that every digraph  $D$  has a  $\delta^+(D)$ -circuit forest. In this work, we study in details the articles that verify the conjecture for digraphs with minimum outdegree 2, 3 and tournaments.

A set of arcs  $F \subseteq A(D)$  is a *feedback arc set* (FAS) if the digraph obtained from  $D$  by removing the arcs in  $F$  contains no circuits. Also, a feedback arc set  $F$  is *minimal* if there is no feedback arc set  $F'$  such that  $F' \subsetneq F$ . In this work, we explore a conjecture attributed to Lichiardopol, which says that every digraph  $D$  has a minimal FAS containing a path with a length at least  $\delta^+(D)$ . We present the proof for  $\delta^+(D) = 2$ , construct a family of counterexamples for digraphs with  $\delta^+(D) \geq 3$  and checked it computationally for tournaments with at most ten vertices. Finally, we present an alternative proof for the surprising one to one correspondence between minimal FAS and hamiltonian paths in tournaments.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Notações e definições preliminares . . . . .	6
1.2 Digrafos Fortemente Conexos . . . . .	9
<b>2 Florestas de Ciclos</b>	<b>11</b>
2.1 A Conjectura de Hoàng–Reed para o caso $\delta^+(D) = 2$ . . . . .	12
2.2 A prova de Welhan para a Conjectura de Hoàng–Reed no caso $\delta^+(D) \leq 3$ . . . . .	16
2.2.1 A prova de Welhan para o caso $\delta^+(D) = 2$ . . . . .	18
2.2.2 A Conjectura de Hoàng–Reed para o caso $\delta^+(D) = 3$ . . . . .	25
2.3 A Conjectura de Hoàng–Reed para torneios . . . . .	34
2.3.1 Componentes conexas em grafos bipartidos . . . . .	34
2.3.2 Árvores de triângulos em torneios . . . . .	36
<b>3 Feedback Arc Sets Minimais</b>	<b>42</b>
3.1 A Conjectura de Lichiardopol . . . . .	43
3.1.1 Uma caracterização para FAS minimais . . . . .	44
3.1.2 Contraexemplos para a Conjectura de Lichiardopol . . . . .	48
3.2 Feedback arc sets minimais em Torneios. . . . .	49
3.2.1 FAS minimais e caminhos hamiltonianos . . . . .	52
3.2.2 Uma correspondência biunívoca entra FAS minimais e cami- nhos hamiltonianos. . . . .	53
3.3 Testes Computacionais . . . . .	56
3.3.1 Algoritmo de Backtracking . . . . .	56
<b>4 Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>58</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>
<b>A Apêndice</b>	<b>64</b>



# Lista de Figuras

1.1	A Conjectura de Caccetta–Häggkvist . . . . .	2
1.2	Uma arborescência de altura 2. . . . .	3
1.3	Uma 13-floresta de ciclos. . . . .	4
1.4	Um FAS minimal de 3 arcos. . . . .	5
1.5	Um exemplo de digrafo . . . . .	7
1.6	Uma orientação de um Grafo. . . . .	7
1.7	Digrafo fortemente conexo. . . . .	9
1.8	Uma ordenação acíclica das componentes conexas. . . . .	9
1.9	Um torneio de 7 vértices e um torneio 3-partido. . . . .	10
2.1	Uma árvore de ciclos. . . . .	12
2.2	Um cacto. . . . .	12
2.3	A expansão de um subdigrafo próprio fortemente conexo em $D^*$ . . . . .	13
2.4	Uma ilustração do caso base para o Teorema de Thomassen . . . . .	13
2.5	Um par de ciclos que se intercepta em um único vértice. . . . .	14
2.6	Os três ciclos obtidos em $D$ . . . . .	15
2.7	O par de ciclos desejado no Teorema de Thomassen . . . . .	15
2.8	O conjunto de vértices atingíveis. . . . .	17
2.9	O conjunto de vértices atingíveis. . . . .	18
2.10	$(S, T)$ -separadores e $(S, T)$ -separadores mais próximos. . . . .	18
2.11	Os caminhos e $(S, T)$ -separadores da Afirmação 11.1. . . . .	21
2.12	A 2-floresta de ciclos obtida na Proposição 15. . . . .	23
2.13	A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.1 . . . . .	30
2.14	A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.2. . . . .	31
2.15	Os caminhos e ciclo garantidos pela Afirmação 6.3. . . . .	32
2.16	A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.4. . . . .	33
2.17	Uma partição conforme o Teorema 24. . . . .	37
2.18	A construção do torneio multipartido do Teorema 26 . . . . .	38
2.19	Em azul, destacamos $T$ , a maior árvore de triângulos em $D$ . . . . .	38
2.20	Remoção de arcos com ambos extremos em $T$ . . . . .	38
2.21	$D^{MT}$ , o torneio multipartido obtido de $D$ . . . . .	38

3.1	Em azul, ilustramos um FAS minimal e um FAS mínimo. . . . .	42
3.2	Um FAS minimal sem caminhos de comprimento $\delta^+(D) = 2$ . . . . .	43
3.3	Um FAS minimal que possui um caminho de comprimento $\delta^+(D) = 2$ . . . . .	43
3.4	Um conjunto retornável. . . . .	44
3.5	Um conjunto não retornável. . . . .	44
3.6	Digrafos induzidos por FAS minimais são acíclicos. . . . .	45
3.7	Os caminhos de retorno dos arcos de $P$ . . . . .	46
3.8	Ciclo formado pelos caminhos de retorno. . . . .	46
3.9	FAS minimais e retornáveis maximais não são equivalentes . . . . .	46
3.10	A conjectura de Lichiardopol para $\delta^+(D) = 2$ . . . . .	48
3.11	A construção de um contraexemplo para a Conjectura de Lichiardopol . . . . .	49
3.12	Uma tentativa falha de obter um FAS bom a partir da ordenação. . . . .	51
3.13	Uma reordenação que possibilita encontrar um FAS bom. . . . .	51
3.14	Um ciclo triangulado. . . . .	52
3.15	FAS minimal induzido pelo ciclo hamiltoniano . . . . .	53

# Capítulo 1

## Introdução

Grafos são estruturas matemáticas convenientes para a representação de relações simétricas entre objetos. Os digrafos, que são os objetos centrais desta dissertação, são estruturas semelhantes a grafos, mas que nos permitem representar relações não necessariamente simétricas, como por exemplo a representação de fluxo de dados [25]. Outras aplicações científicas são voltadas para o ramo da Biologia. Por exemplo, as conexões sinápticas entre neurônios [28]. Além disso, é possível utilizar digrafos para representar relações de causa e efeito em cenários epidemiológicos: um estudo alemão descobriu que a mobilidade pública por motivos recreativos levou a um aumento de novos casos de COVID-19, além de sugerir que o vírus pode seguir um padrão sazonal com taxas de transmissão mais baixas durante períodos de temperaturas mais altas [39].

Formalmente, um *digrafo* ou *grafo direcionado*  $D$  é um par  $D = (V, A)$  no qual  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto finito de *vértices*, e  $A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$  é um conjunto de pares ordenados de vértices, chamados *arcos*.

No que segue, descrevemos os problemas que serão discutidos neste trabalho, considerando que o leitor tem familiaridade com alguns conceitos mais simples em grafos, como caminhos, ciclos e cintura. Os análogos desses conceitos para digrafos serão formalmente apresentados na Seção 1.1. O *grau de saída* de  $v \in V$ , denotado por  $d^+(v)$ , é o número de arcos saindo de  $v$  (veja a Seção 1.1 para uma definição mais formal). O *grau de saída mínimo* de um digrafo  $D$ , denotado por  $\delta^+(D)$ , é o menor valor do grau de saída de um vértice em  $D$ , isto é,  $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(u) : u \in V(D)\}$ . Nesta dissertação, estamos interessados em alguns problemas relacionados ao grau de saída mínimo de digrafos. De maneira geral, tais problemas associam o grau de saída mínimo a estruturas como caminhos e ciclos.

Diferentemente de grafos, alguns digrafos densos (que possuem muitos arcos) podem sequer ter ciclos, como é o caso de torneios transitivos, e o problema de determinar um limitante superior para a cintura de um digrafo, como veremos, tem atraído bastante interesse. Dentre os problemas que envolvem grau de saída mínimo,

um dos mais conhecidos é a seguinte conjectura, que foi elaborada por Caccetta e Häggkvist [6] em 1978.

**Conjectura 1** (Caccetta–Häggkvist [6]). *Todo digrafo  $D$  com  $n$  vértices tem um ciclo de comprimento no máximo  $\lceil \frac{n}{\delta^+(D)} \rceil$ .*

Também é bastante comum encontrar na literatura o seguinte enunciado equivalente da Conjectura 1, em que o conceito de cintura é explicitado.

**Conjectura 2.** *Todo digrafo  $D$  com  $n$  vértices e grau de saída mínimo  $\delta^+(D)$  e cintura  $g$  é tal que  $n \geq \delta^+(D)(g - 1) + 1$ .*

A Figura 1.1 mostra um digrafo no qual um ciclo evidenciando a Conjectura 1 está destacado.

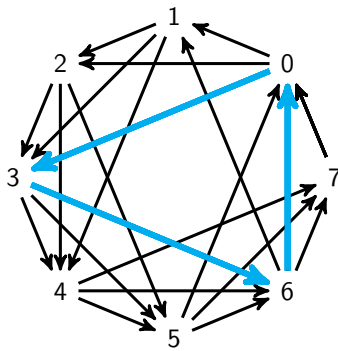


Figura 1.1: Um digrafo  $D$ , em que  $|V(D)| = 8$  e  $\delta^+(D) = 3$ . Um ciclo de comprimento 3 está destacado em azul.

A Conjectura 1 foi bastante estudada e foi verificada em diversos casos particulares. Blair Sullivan descreve uma coleção destes resultados [40]. Os próprios autores da Conjectura 1, Caccetta e Häggkvist [6], verificaram a Conjectura 1 para  $\delta^+(D) = 2$ . Em 1987, Hamidoune [17] resolveu o caso particular em que  $\delta^+(D) = 3$ . Em 1987, Hoàng e Reed [20] provaram para  $\delta^+(D) = 4$  e  $\delta^+(D) = 5$ . Em 2000, Shen [37] confirmou a conjectura para  $\delta^+(D) \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$  e em 1981, Hamidoune [16] apresentou uma prova para digrafos de Cayley.

Em outra direção, é possível provar que todo digrafo com  $n$  vértices e grau de saída mínimo pelo menos  $k$  tem um ciclo com comprimento no máximo  $\lceil n/k \rceil + c$  para alguma constante  $c$ . Chvátal e Szemerédi [9] mostraram que  $c \leq 2500$ . Posteriormente, o valor de constante foi refinado para  $c \leq 304$  por Nishimura [30], e finalmente para  $c \leq 73$  por Shen [38].

Com objetivo de resolver a Conjectura 1, Thomassé propôs a seguinte conjectura.

**Conjectura 3** (Thomassé [40]). *Todo digrafo  $D$  com grau de saída mínimo  $k$  e cintura  $g$  possui um caminho de comprimento  $k(g - 1) + 1$ .*

Note que a Conjectura 3 é trivialmente satisfeita para a classe de torneios, uma vez que todo torneio possui um caminho hamiltoniano (veja Teorema 35). O caso especial da Conjectura 3, em que  $g = 3$  foi estudado por Joe DeLong [11], que contribuiu estabelecendo reduções e limitantes para conectividade e para o número de vértices em um contraexemplo mínimo. Bill Jackson [21] provou que todo torneio bipartido desconexo contém um ciclo de comprimento pelo menos  $2(\delta^-(D) + \delta^+(D))$ .

Mais recentemente, em 2018, uma família de contraexemplos pra Conjectura 3 foi encontrada pra digrafos com cinturas pares e maiores que 4 [2].

Um digrafo  $T$  é um *arborescência* se  $T$  é a orientação de uma árvore com exatamente um vértice  $r$  com grau de entrada 0 e nenhum vértice com grau de entrada maior que 1. O vértice  $r$  é chamado de *raiz* de  $T$  e os vértices de  $T$  de grau de saída 0 são chamados de *folhas* (veja a Figura 1.2). Uma arborescência  $T$  é chamada de *k-arborescência* se todo vértice de  $T$  que não é folha tem grau de saída precisamente  $k$ . Em uma arborescência  $T$ , a *altura* de um vértice  $v$  é o comprimento do maior caminho de  $v$  até uma folha  $T$ . A *altura* de  $T$  é a altura de  $r$ . A *profundidade* de um vértice  $v$  é a distância de  $v$  até a raiz. Um *nível* da arborescência é o conjunto de vértices com a mesma profundidade.

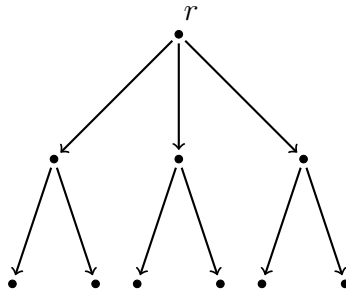


Figura 1.2: Uma arborescência de altura 2.

A seguinte proposição verifica a Conjectura 3 para os casos em que o digrafo possui um número de vértices suficientemente grande e é fortemente conexo, isto é, existe um caminho entre cada par de vértices do digrafo.

**Proposição 1.** *Dado  $k, g \in \mathbb{N}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $D$  é um digrafo fortemente conexo com cintura  $g$  e tal que  $\delta^+(D) = k$  e  $|V(D)| \geq n_0$ , então  $D$  possui um caminho de comprimento  $(g - 1)k + 1$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, afirmamos que toda  $k$ -arborescência  $T$  com altura no máximo  $h$  possui no máximo  $n_h = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$  vértices. De fato, os números de vértices de  $T$  em cada nível formam uma progressão geométrica de razão  $k$ , assim o total de vértices é dado por  $1 + k + k^2 + \dots + k^{h-1} + k^h = \sum_{i=0}^h k^i = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$ .

Tome  $h = (g - 1)k$  e  $n_0 = n_h + 1$ , em que  $n_h = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$ . Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo com cintura  $g$  e tal que  $\delta^+(D) = k$  e  $|V(D)| \geq n_0$ . Seja  $u \in V(D)$ . Considere uma arborescência  $T_u$  enraizada em  $u$  com o maior número de vértices, (ignorando alguns arcos de  $D$  se necessário). Como  $D$  é fortemente conexo, pela maximalidade de  $T_u$ , todo vértice de  $D$  pertence a  $T_u$ . Logo,  $|V(T_u)| = |V(D)| \geq n_0 > n_h$  e, portanto,  $T_u$  tem altura maior que  $h$ . Logo, existe pelo menos um caminho em  $T_u$  (e portanto, em  $D$ ) de comprimento pelo menos  $h + 1 = (g - 1)k + 1$ .  $\square$

Também com o intuito de provar a Conjectura 1, a Conjectura de Hoàng–Reed [20] e a Conjectura de Lichiardopol (veja [3, 40]) foram propostas. Estes dois problemas, brevemente apresentados a seguir, serão mais profundamente estudados nos Capítulos 2 e 3 respectivamente.

Uma  $k$ -floresta de ciclos é a coleção de  $k$  ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  tais que para cada  $i = 1, \dots, k$ , o ciclo  $C_i$  intercepta a união  $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$  em no máximo um vértice (veja a Figura 1.3).

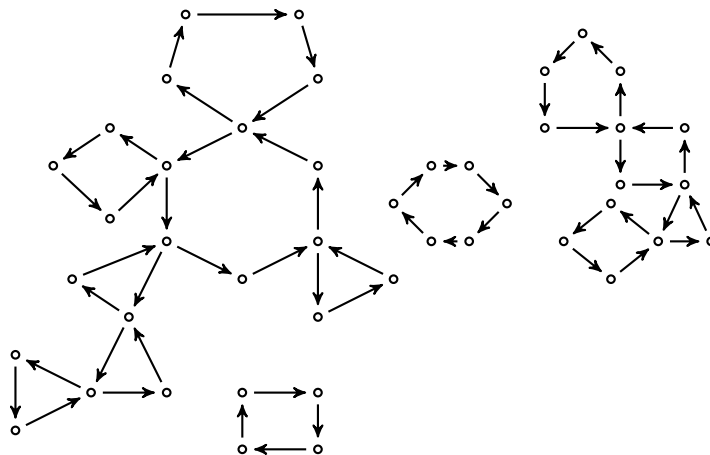


Figura 1.3: Uma 13-floresta de ciclos.

**Conjectura 4.** (Hoàng–Reed [20]) *Todo digrafo  $D$  contém uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos.*

Em 1985, Carsten Thomassen [43] verificou a conjectura para digrafos com  $\delta^+(D) = 2$  e em 2010, Manuel Welhan [46] verificou a Conjectura de Hoàng–Reed para o caso  $\delta^+(D) = 3$ , utilizando uma ferramenta chamada *separadores mais próximos*. Em 2008, Havet, Thomassé e Yeo [19] verificaram a Conjectura 4 para a classe de torneios. Nós apresentamos as provas desses resultados no Capítulo 2. Em particular, introduzimos uma notação mais amigável para os conceitos introduzidos

por Manuel Welhan e reorganizamos suas provas, com o objetivo de facilitar a compreensão destes resultados e futuramente obter uma extensão da prova para o caso em que  $\delta^+(D) = 4$ .

Dado um digrafo  $D$ , dizemos que  $F \subseteq A(D)$  é um *feedback arc set (FAS)* de  $D$  se  $D - F$  não contém ciclos. Além disso, dizemos que um FAS  $F$  é *minimal* se não existe nenhum outro FAS  $F'$  em  $D$  tal que  $F' \subsetneq F$  (veja a Figura 1.4).

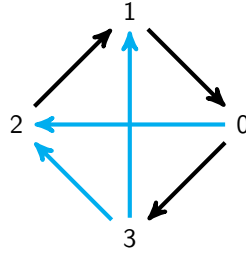


Figura 1.4: Um FAS minimal de 3 arcos, ilustrados em azul.

**Conjectura 5.** (Lichiardopol [3, 40]) *Todo digrafo  $D$  possui um feedback arc set minimal cujo digrafo induzido contém um caminho de comprimento  $\delta^+(D)$ .*

Esta Conjectura foi citada por Blair D. Sullivan em um manuscrito sobre problemas relacionados à Conjectura de Caccetta–Häggkvist [40] e pouco se sabe sobre este problema. Aparentemente, uma família de contraexemplos foi encontrada por Mader em 2006 (veja a Seção 3.1.2). No Capítulo 3 nós estudamos este problema, onde apresentamos a prova para  $\delta^+(D) = 2$ , uma família de contraexemplos com  $\delta^+(D) \geq 3$  e apresentamos um algoritmo utilizado para checá-la para torneios com até dez vértices.

Outro problema bastante importante é a seguinte conjectura, reconhecido na literatura como *Seymour’s Second Neighborhood Conjecture*. Para cada vértice  $v$  de um digrafo  $D$ , a *segunda vizinhança* de  $v$ , denotada por  $N^{++}(v)$ , é o conjunto formado pelos vizinhos de saída de vértices em  $N^+(v)$  que não pertencem a  $N^+(v)$ .

**Conjectura 6** (Seymour). *Para todo digrafo  $D$  possui um vértice  $v$  tal que  $|N^{++}(v)| \geq |N^+(v)|$ .*

A Conjectura 6 implica no caso particular da Conjectura 1, em que tanto o grau de saída mínimo, quanto o grau de entrada mínimo são pelo menos  $n/3$ .

Quando  $D$  é um torneio, a Conjectura 6 é conhecida como a *Conjectura de Dean*, e foi provada por Fisher [14] usando o Lema de Farkas, de Programação Linear. Em 2000, Havet e Thomassé obtiveram uma prova combinatória para este resultado [18]. A Conjectura 6 também foi verificada para digrafos com grau de saída mínimo no

máximo 6 por Kaneko e Locke [23], e Godbole, Cole e Wright a verificaram para algumas outras classes de digrafos [10].

O objetivo central desta dissertação é estudar as Conjecturas 4 e 5, explorando as estruturas ricas relacionadas a cada problema de forma a estender futuramente os resultados.

Outro problema importante relacionado à Conjectura de Hoàng–Reed é a Conjectura de Bermond–Thomassen [5, 42], que será apresentado e discutido no Capítulo 2, destinado exclusivamente à Conjectura de Hoàng–Reed. Nós apresentamos formalmente a definição de floresta de ciclos e estudamos profundamente os três artigos da literatura que verificam a conjectura para digrafos com grau de saída mínimo 2, 3 e para torneios, com o objetivo de adquirir ferramentas para generalizar as provas. Em particular, apresentamos detalhadamente a teoria de corte e conexidade apresentada por Manuel Welhan em 2010 [46].

No Capítulo 3, abordamos a Conjectura de Lichiardopol (veja Conjectura 5). Estudamos este problema com o objetivo de verificá-lo para alguma classe de digrafos. Durante a pesquisa, encontramos uma família de contraexemplos para a Conjectura 5, que aparentemente já havia sido encontrada (Seção 3.1.2). Tal contraexemplo é bastante artificial e, portanto, não descarta a possibilidade da conjectura de Lichiardopol ser válida em alguma classe especial de digrafos, como por exemplo torneios. No Capítulo 3, fornecemos caracterizações para feedback arc sets minimais, o que nos permitiu criar um algoritmo de Backtracking para testar a Conjectura 5 para torneios com até 10 vértices. Além disso, desenvolvemos uma técnica para tratar esses conjuntos de arcos em torneios que possuem ciclos hamiltonianos com uma propriedade especial. Apresentamos uma prova alternativa para a correspondência biunívoca entre FAS minimais e caminhos hamiltonianos em torneios.

Por fim, no Capítulo 4 discutimos as contribuições deste trabalho, as considerações finais e diretrizes futuras para a pesquisa.

## 1.1 Notações e definições preliminares

Nesta seção, apresentamos as definições mais gerais de digrafos que serão utilizadas neste texto. Para facilitar a notação, dado um par  $v, w \in V(D)$ , denotamos por  $vw$  o arco de  $v$  até  $w$ . Reservamos a notação  $(v, w)$  para representar pares de vértices que não necessariamente são arcos. Se um digrafo  $D$  possui dois de vértices  $u$  e  $v$  para o quais  $uv \in A(D)$  e  $vu \in A(D)$ , então dizemos que  $uv$  e  $vu$  formam um par de *arcos simétricos*. Um digrafo  $D$  que não possui arcos simétricos também é chamado de *orientação de grafo* (veja a Figura 1.6). É conveniente representar um digrafo por um diagrama no qual os vértices são representados por pontos e cada arco  $v_i v_j$  é representado por uma seta partindo de  $v_i$  apontando para  $v_j$  (veja a Figura 1.5).



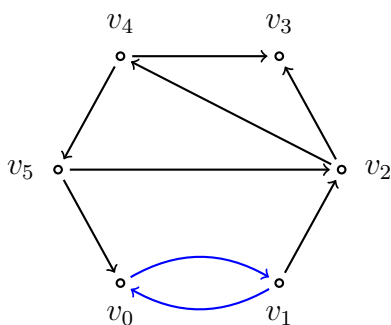


Figura 1.5: Um digrafo com 6 vértices. Note que  $v_0v_1$  e  $v_1v_0$  formam um par de arcos simétricos.

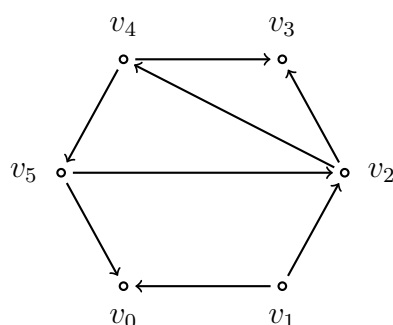


Figura 1.6: Uma orientação de um grafo. Para cada par de vértices há no máximo um arco entre eles.

Dizemos que o arco  $e = v_iv_j$  *diverge* de  $v_i$  e *converge* para  $v_j$ . Neste caso, também dizemos que  $v_i$  é a *cauda* e  $v_j$  a *cabeça* do arco  $e$ . Dizemos ainda que  $v_i$  *domina*  $v_j$  e que  $v_j$  é *dominado* por  $v_i$ .

Dado um digrafo  $D$ , o *grafo subjacente* de  $D$  é o grafo (não direcionado) com o mesmo conjunto de vértices e mesmo conjunto de pares de vértices, porém estes passam a ser não ordenados (e são chamados de arestas).

Um digrafo é dito *trivial* quando possui apenas um vértice e nenhum arco. Dado um digrafo  $D$ , um *subdigrafo*  $S$  de  $D$  é um digrafo para o qual  $V(S) \subseteq V(D)$  e  $A(S) \subseteq A(D)$ . Se  $B \subset V(D)$ , denotamos por  $A_D^+(B)$  o *conjunto de arcos de saída* de  $B$ , isto é, os arcos que divergem de vértices em  $B$  e convergem aos vértices em  $V(D) \setminus B$ , isto é,  $A_D^+(B) = \{uv \in A(D) : u \in B, v \in V(D) \setminus B\}$ . Analogamente, denotamos por  $A_D^-(B)$  o *conjunto de arcos de entrada* de  $B$ , isto é,  $A_D^-(B) = \{uv \in A(D) : u \in V(D) \setminus B, v \in B\}$ . Se  $B = \{u\}$ , então escrevemos  $A_D^+(u)$  e  $A_D^-(u)$ .

Se  $u \in V(D)$ , denotamos a *vizinhança de saída* de  $u$  por  $N_D^+(u)$ , que é o conjunto formado pelas cabeças dos arcos em  $A_D^+(u)$ . O *grau de saída* de  $u$ , denotado por  $d_D^+(u)$ , é a cardinalidade de  $N_D^+(u)$ , isto é,  $d_D^+(u) = |N_D^+(u)|$ . De maneira equivalente, a *vizinhança de entrada* de  $u$ , denotada por  $N_D^-(u)$ , é o conjunto formado pelas caudas dos arcos em  $A_D^-(u)$ . O *grau de entrada* de  $u$ , denotado por  $d_D^-(u)$ , é a cardinalidade de  $N_D^-(u)$ , isto é,  $d_D^-(u) = |N_D^-(u)|$ . O *grau de saída mínimo* de um digrafo  $D$  é definido por  $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(u) : u \in V(D)\}$  e o *grau de saída máximo* é  $\Delta^+(D) = \max\{d_D^+(u) : u \in V(D)\}$ . Analogamente, o *grau de entrada mínimo* é definido por  $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(u) : u \in V(D)\}$  e o *grau de entrada máximo* é  $\Delta^-(D) = \max\{d_D^-(u) : u \in V(D)\}$ .

Um subdigrafo  $H$  de  $D$  é *induzido por um conjunto de vértices*  $X \subseteq V(D)$  se  $V(H) = X$  e vale a seguinte propriedade:  $xy \in A(D)$  e  $x, y \in X$  se e somente se  $xy \in A(H)$ . Neste caso, denotamos  $H$  por  $D[X]$ . Um subdi-

grafo  $H$  de  $D$  é induzido por um conjunto de arcos  $A' \subseteq A(D)$  se  $A(H) = A'$  e  $V(H) = \{x : x \text{ é cauda ou cabeça de algum arco em } A'\}$ . Neste caso, denotamos  $H$  por  $D[A']$ .

A seguinte notação será bastante útil. Se  $X$  é um subconjunto de vértices, então  $D - X = D[V(D) \setminus X]$ . Se  $v$  é um vértice de  $D$ , então  $D - v = D - \{v\}$ . Se  $A'$  é um subconjunto de arcos de  $D$ , então o digrafo  $D - A'$  é definido da seguinte forma:  $V(D - A') = V(D)$  e  $A(D - A') = A(D) \setminus A'$ . Se  $e$  é um arco de  $D$  então  $D - e = D - \{e\}$ .

Um *caminho* é um digrafo  $P$  que admite uma ordenação  $v_0, \dots, v_\ell$  de seus vértices, para a qual  $A(P) = \{v_i v_{i+1} : i = 0, \dots, \ell - 1\}$ . O vértice  $v_0$  é chamado de *vértice inicial* de  $P$ ,  $v_\ell$  é o *vértice final* de  $P$ , e os demais vértices são *vértices internos* de  $P$ . Escrevemos  $P = v_0 \dots v_\ell$  para explicitar tal ordenação. Seja  $D$  um digrafo. Um caminho  $P$  é chamado *caminho hamiltoniano* de  $D$  se  $P$  é subdigrafo de  $D$  e  $V(P) = V(D)$ .

Dados  $u, v \in V(D)$ , um  $uv$ -caminho é um caminho com vértice inicial  $u$  e vértice final  $v$ . Dizemos que um par de caminhos  $P_1$  e  $P_2$  são *vértice-disjuntos* ou simplesmente *disjuntos* se  $V(P_1) \cap V(P_2) = \emptyset$ . Os caminhos  $P_1$  e  $P_2$  são *internamente disjuntos* se não possuem vértices internos em comum.

Similarmente, uma *trilha* é um digrafo  $P$  para o qual existe uma sequência  $v_0, \dots, v_\ell$  de seus vértices (possivelmente com repetição), para a qual  $A(P) = \{v_i v_{i+1} : i = 0, \dots, \ell - 1\}$  e  $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$  se  $i \neq j$ .

Um subconjunto  $C \subseteq V(D)$  é dito um  $uv$ -*corte de vértices* ou simplesmente  $uv$ -*corte* se todo  $uv$ -caminho contém pelo menos um vértice em  $C$ . Em outras palavras, um  $uv$ -corte de vértices é um conjunto  $C$  para o qual  $D - C$  não contém  $uv$ -caminhos. Manuel Welhan desenvolve uma teoria sobre conexidade e cortes, que será explicada mais profundamente no Capítulo 2, com definições semelhantes a essas, porém ligeiramente mais avançadas.

Um *ciclo* é um digrafo  $C \subseteq D$  obtido de um  $v_0 v_\ell$ -caminho pela adição do arco  $v_\ell v_0 \in A(D)$ . O *comprimento* de um caminho ou um ciclo é seu número de arcos. Em particular, todo vértice é um caminho de comprimento 0. A *cintura* de um digrafo  $D$ , denotada por  $g(D)$  é o comprimento do menor ciclo de  $D$ . Um digrafo que não contém nenhum ciclo é chamado de *acíclico*. Um digrafo é *transitivo* se, para todo par de arcos  $(xy, yz) \in A(D) \times A(D)$  tais que  $x \neq z$ , temos  $xz \in A(D)$ . Consequentemente, se  $D$  é um digrafo transitivo e existe um  $uv$ -caminho em  $D$ , então  $uw \in A(D)$ .

Uma diferença importante entre ciclos (em grafos simples) e ciclos em digrafos é que um ciclo em um grafo simples possui ao menos três vértices distintos, enquanto um ciclo direcionado pode possuir apenas dois vértices distintos (basta que o digrafo possua arcos simétricos). Caminhos e ciclos não permitem auto interseção.

## 1.2 Digrafos Fortemente Conexos

Dado um digrafo  $D$ , dizemos que dois vértices  $v$  e  $w$  são *fortemente conexos* se  $D$  contém um  $vw$ -caminho e um  $wv$ -caminho. Um digrafo  $D$  é dito *fortemente conexo*, se todo par de vértices  $u, v \in V(D)$  é fortemente conexo (veja a Figura 1.7). Um digrafo  $D$  é  *$k$ -fortemente conexo* se o digrafo obtido de  $D$  pela remoção de quaisquer  $k - 1$  vértices for fortemente conexo.

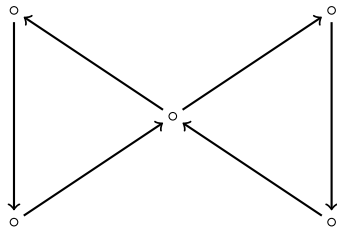


Figura 1.7: Digrafo fortemente conexo.

Uma *componente fortemente conexa* ou *componente forte* de um digrafo  $D$  é um subdigrafo fortemente conexo maximal de  $D$ . Note que a definição de vértices fortemente conexos induz uma relação de equivalência. Então, a partição em classes de equivalência é uma partição  $D_1, \dots, D_t$  tal que  $D[D_i]$  é fortemente conexo para todo  $i$ .

Sejam  $D$  um digrafo e  $D_1, \dots, D_t$  como acima. Dizemos  $D_1, \dots, D_t$  é uma *ordenação acíclica* das componentes fortes de  $D$  quando para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ , se  $j > i$  então não existe um arco com cauda em  $D_j$  e cabeça em  $D_i$  (veja a Figura 1.2).

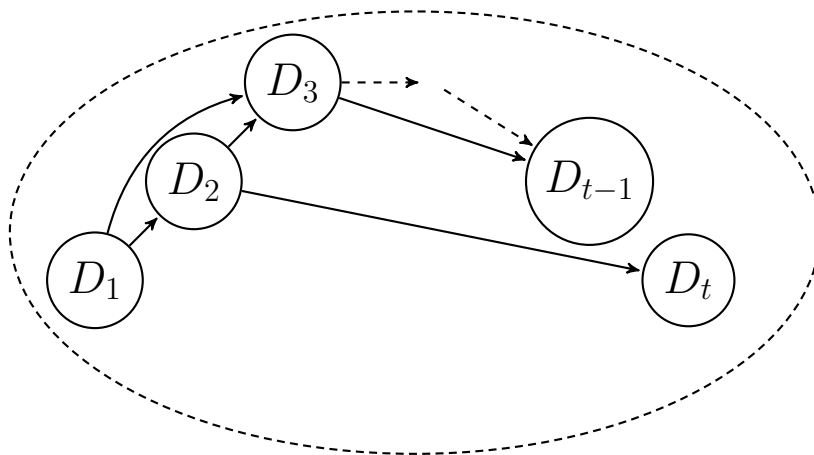


Figura 1.8: Uma ordenação acíclica das componentes conexas.

Uma componente fortemente conexa  $H$  de  $D$  é *terminal* se  $A_D^+(V(H)) = \emptyset$ . Equivalentemente, uma componente fortemente conexa terminal é a última componente de alguma ordenação acíclica das componentes fortes de  $D$ . Similarmente,  $H$  é uma *componente fortemente conexa inicial* se  $A_D^-(V(H)) = \emptyset$ .

Note que não há ciclos entre componentes fortemente conexas, caso contrário todas as componentes do ciclo formariam uma componente só. Assim, as componentes conexas de um digrafo podem ser ordenadas (mesmo que parcialmente) e sempre há pelo menos uma componente inicial e uma componente terminal. Seja um digrafo  $D$ . Se  $D_i$  e  $D_t$  são respectivamente componentes fortemente conexas inicial e terminal de  $D$ , então  $\delta^+(D_t) \geq \delta^+(D)$ , pois  $A^+(D_t) = \emptyset$  e  $\delta^-(D_i) \geq \delta^-(D)$ , pois  $A^-(D_t) = \emptyset$ . Finalmente, um *torneio*  $T$  é uma orientação de um grafo completo (veja a Figura 1.9).

Em teoria dos grafos, um *grafo  $p$ -partido* é um grafo (não direcionado) cujos vértices podem ser particionados em  $p$  diferentes conjuntos independentes. Um *grafo  $p$ -partido completo* é um grafo  $p$ -partido no qual há uma aresta entre cada par de vértices de conjuntos independentes distintos. Um *grafo multipartido completo* é um grafo que é completo e é  $p$ -partido para algum  $p$ .

Dizemos que um digrafo é  *$p$ -partido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $p$  subconjuntos (chamado de *partes*) nos quais os vértices são dois a dois não-vizinhos. Quando  $p = 2$ , estes são os digrafos são chamados de bipartidos.

Um *torneio multipartido*  $T$  é uma orientação de um grafo multipartido completo (veja a Figura 1.9).

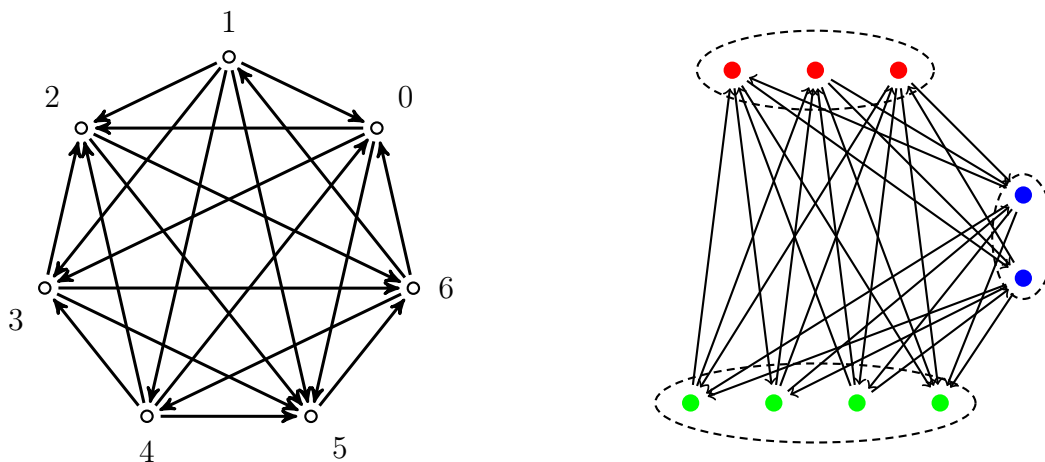


Figura 1.9: Um torneio de 7 vértices e um torneio 3-partido.

Ao longo do texto, quando o digrafo  $D$  estiver subentendido pelo contexto, omitimos o subíndice  $D$  das notações. Por exemplo, o grau de saída de um vértice  $v \in V(D)$  será denotado simplesmente por  $d^+(v)$ .

# Capítulo 2

## Florestas de Ciclos

Como visto no Capítulo 1, em 1987, Hoàng e Reed publicaram um artigo com a prova da Conjectura 1 para digrafos com grau de saída mínimo no máximo 5, provando separadamente os casos  $\delta^+(D) = 4$  e  $\delta^+(D) = 5$ . Eles ainda mencionam que a técnica utilizada para essas provas são inapropriadas para valores de  $k$  suficientemente grandes e portanto sugerem uma nova abordagem para estudar o problema, baseada na forma em que os ciclos se conectam, e propõem a Conjectura 4 [20]. Antes de enunciarmos tal conjectura precisamos de algumas definições.

Uma *árvore de ciclos* consiste em um único vértice ou em um conjunto de  $l$  ciclos,  $C_1, \dots, C_l$ , tal que  $|V(C_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{i-1} V(C_j))| = |V(C_i) \cap (V(C_1) \cup \dots \cup V(C_{i-1}))| = 1$ , para todo  $i \in \{2, \dots, l\}$ , em que  $V(C_j)$  é o conjunto de vértices de  $C_j$ . Isso é, uma árvore de ciclos é um digrafo obtido em um vértice ou de outra árvore de ciclos  $T$  pela adição de um novo ciclo que intercepta  $T$  em exatamente um vértice. Equivalentemente, uma árvore de ciclos é um digrafo  $D$  para o qual existe um único caminho entre cada par de vértices distintos.

Uma *floresta de ciclos* é uma união de árvores de ciclos vértice-disjuntas. Em particular, quando todos os ciclos têm comprimento 3, a chamamos de *árvore de triângulos* (ou *floresta de triângulos*). Uma floresta de ciclos composta por  $k$  ciclos é uma  $k$ -*floresta de ciclos* (veja a Figura 1.3).

Uma floresta de ciclos pode ser associada a uma estrutura estudada em grafos não direcionados: os *cactos*. Um cacto é um grafo conexo no qual cada bloco (subgrafo conexo maximal sem vértices de corte) é uma aresta ou um ciclo [47]. Equivalentemente, um cacto é um grafo no qual toda aresta pertence a no máximo um ciclo, isto é, um grafo conexo no qual todo par de ciclos possui no máximo um vértice em comum (veja as Figuras 2.1 e 2.2).

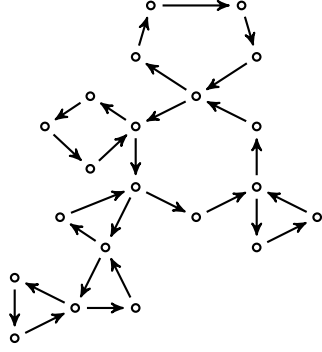


Figura 2.1: Uma árvore de ciclos.

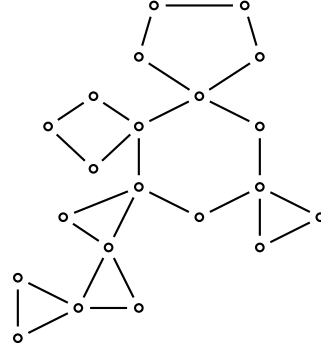


Figura 2.2: Um cacto.

Assim, podemos finalmente enunciar a conjectura de Hoàng–Reed.

**Conjectura 4.** (Hoàng–Reed [20]) *Todo digrafo  $D$  contém uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos.*

Uma das principais motivações para o estudo da Conjectura de Hoàng–Reed se deve à sua relação direta com a Conjectura de Caccetta–Häggkvist. A proposição a seguir mostra que a Conjectura 4 implica na Conjectura 1.

**Proposição 2.** *Seja  $D$  um digrafo com  $n$  vértices e  $\delta^+(D) = k$ . Se  $D$  contém uma  $k$ -floresta de ciclos, então  $g(D) \leq \lceil n/k \rceil$ .*

*Demonstração.* Existe uma coleção de ciclos  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{\delta^+}\}$ , tal que  $|V(C_i) \cap (V(C_1) \cup \dots \cup V(C_{i-1}))| \leq 1$ , para todo  $i \in \{2, \dots, \delta^+\}$ . Nesse caso, temos  $|\bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}} V(C_i)| \leq n$ , uma vez que os ciclos de  $\mathcal{C}$  formam um subdigrafo de  $D$ . Seja  $C_{min}$  um ciclo de menor comprimento em  $\mathcal{C}$ . Como cada ciclo  $C_i$  possui no máximo um vértice de  $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ , então,  $|\bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}} V(C_i)| \geq k(|C_{min}| - 1) + 1$ . Logo,  $k(|C_{min}| - 1) < n$  e, portanto,  $|C_{min}| \leq \lceil n/k \rceil$ .  $\square$

## 2.1 A Conjectura de Hoàng–Reed para o caso $\delta^+(D) = 2$ .

O primeiro caso particular da Conjectura 4 foi obtido antes mesmo de sua formulação. Em 1985, Carsten Thomassen [43] mostrou que todo digrafo com grau de saída mínimo pelo menos 2 possui um par de ciclos que se interceptam em um vértice (ou seja, contém uma árvore de dois ciclos).

A seguinte notação será útil. Sejam  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos disjuntos de  $V(D)$ . Se existe pelo menos um arco  $xy \in A(D)$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ , então escrevemos  $X \rightarrow Y$ , caso contrário, escrevemos  $X \not\rightarrow Y$ . Nos casos especiais em que  $X = \{x\}$  ou  $Y = \{y\}$ , escrevemos simplesmente  $x \rightarrow Y$ ,  $x \not\rightarrow Y$ ,  $X \rightarrow y$  e  $X \not\rightarrow y$ .

**Lema 3.** Se  $D$  é um digrafo fortemente conexo com  $\delta^+(D) \geq 2$ , então existe  $x \in V(D)$  tal que  $D - x$  é fortemente conexo.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{S} = \{D' \subseteq D : |D'| < |D| \text{ e } D' \text{ é fortemente conexo}\}$ , e seja  $D^* \in \mathcal{S}$  tal que  $|V(D^*)| = \max_{D_i \in \mathcal{S}} \{|V(D_i)|\}$ . Afirmamos que  $|D^*| = |D| - 1$ . De fato, suponha que  $|D^*| \leq |D| - 2$ . Como  $D$  é fortemente conexo, existe um vértice  $u \in V(D) \setminus V(D^*)$  tal que  $V(D^*) \rightarrow u$ , isto é, existe um arco  $vu$ , em que  $v \in V(D^*)$ . Por outro lado, pela maximalidade de  $D^*$ ,  $u \not\rightarrow V(D^*)$ . Além disso, como  $D$  é fortemente conexo, existe pelo menos um  $(u, V(D^*))$ -caminho, seja  $P$  o menor  $(u, V(D^*))$ -caminho. Pela minimalidade de  $P$ , apenas um vizinho de saída de  $u$  pertence a  $P$  e como  $\delta^+(D) \geq 2$ , há um outro vizinho de saída de  $u$  em  $D \setminus (D^* \cup P)$ . Mas  $D^* \cup u \cup P$  é fortemente conexo, uma contradição à maximalidade de  $D^*$  (veja a Figura 2.3).  $\square$

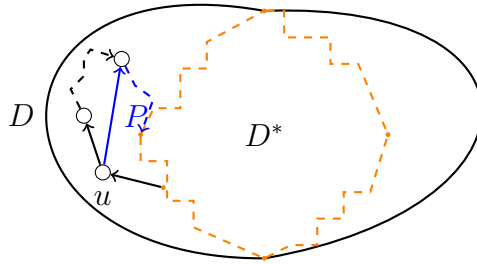


Figura 2.3: A expansão de um subdigrafo próprio fortemente conexo em  $D^*$ .

A seguinte notação será útil. Seja  $C$  um ciclo e sejam  $x, y \in V(C)$ . Se existe um  $xy$ -caminho em  $C$ , então denotamos este caminho por  $C[x, y]$ .

**Teorema 4.** (Thomassen [43]) *Todo digrafo  $D$  tal que  $\delta^+(D) = 2$  contém um par de ciclos que se intercepta em exatamente um vértice.*

*Demonstração.* A demonstração segue por indução em  $|V(D)| = n$ . Primeiramente, note que para  $n = 3$ , a afirmação é claramente satisfeita, pois  $D$  é um digrafo completo (veja a Figura 2.4) e os ciclos  $v_1v_2v_1$  e  $v_1v_3v_1$  satisfazem o enunciado.

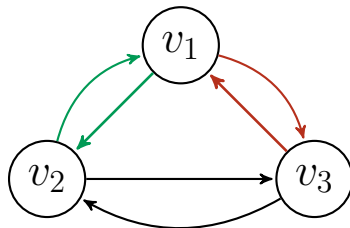


Figura 2.4: Digrafo com  $n = 3$  e grau de saída mínimo 2. Três ciclos estão destacados em verde, vermelho, e preto. Quaisquer dois deles formam uma 2-floresta de ciclos.

Então podemos supor que  $n \geq 4$ . Podemos assumir que  $D$  é fortemente conexo, caso contrário tomamos uma componente fortemente conexa terminal de  $D$ . Pelo Lema 3, existe  $x \in V(D)$  tal que  $D - x$  é fortemente conexo.

Se  $D[N^-(x)]$  contém um ciclo  $C$ , então seja  $P$  um caminho mais curto de  $x$  até  $C$  e seja  $v$  o vértice final de  $P$  os ciclos  $C' = P \cup \{vx\}$  e  $C$  formam o par de ciclos desejado (veja a Figura 2.5).

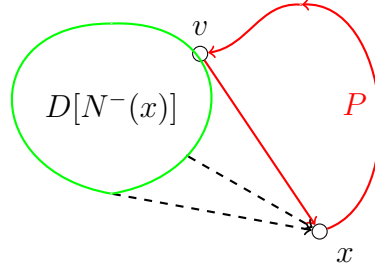


Figura 2.5: Em verde, o ciclo formado pelos vizinhos de entrada de  $x$ . Em vermelho, o ciclo  $C' = P \cup \{vx\}$ . Esse par de ciclos se intercepta unicamente em  $v$ .

Assim, podemos assumir que  $D[N^-(x)]$  é acíclico e, portanto, possui um vértice  $y$  para o qual  $d^-(y) = 0$ . Seja  $D'$  o digrafo obtido de  $D$  pela remoção de todos os arcos de saída de  $y$  e pela identificação de  $x$  e  $y$ . Note que  $|V(D')| = n - 1$  e  $\delta^+(D') \geq 2$ . Pela hipótese de indução,  $D'$  possui um par de ciclos com precisamente um vértice em comum. Diremos que tais ciclos em  $D'$  correspondem aos ciclos  $C_1$  e  $C_2$  em  $D$ . Podemos assumir que  $C_1$  e  $C_2$  possuem o arco  $yx$  em comum, caso contrário  $C_1$  e  $C_2$  são os ciclos desejados. Como  $D - x$  é fortemente conexo, há um ciclo  $C_3 \subseteq D - x$  que contém  $y$  (veja a Figura 2.6). Afirmamos que  $C_1 \cup C_2 \cup C_3$  contém um par de ciclos que se intersectam precisamente em  $y$ . Note que se  $C_3 \cap C_1 = \{y\}$ , ou  $C_3 \cap C_2 = \{y\}$  não há nada para provar. Seja  $z \in V(C_1) \cup V(C_2)$  um vértice distinto de  $y$  tal que  $C_3[y, z]$  é o mais curto possível, então  $C_3[y, z]$  tem apenas  $y$  e  $z$  em comum com  $V(C_1) \cup V(C_2)$ . Seja  $i$  tal que  $z$  pertence a  $C_i$ , em que  $i = 1$  ou  $2$ . Assim,  $C_{3-i}$  e  $C' = C_i[z, y] \cup C_3[y, z]$  formam o par de ciclos desejados (veja a Figura 2.7).  $\square$



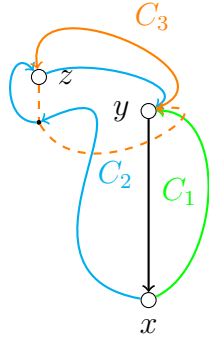


Figura 2.6:  $C_1, C_2$  e  $C_3$  em  $D$ . Ilustramos o caso em que  $yx \in C_1 \cap C_2$ . A ilustração corresponde ao caso em que  $i = 2$ .

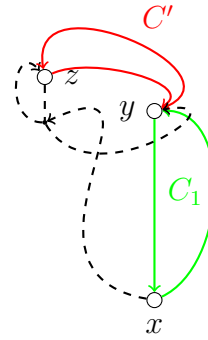


Figura 2.7:  $C'$ , em vermelho, e  $C_i$ , em verde, são o par de ciclos desejado. Note que  $V(C') \cap V(C_1) = \{y\}$ .

Seja  $D$  um digrafo e  $v$  um vértice para o qual existem  $\delta^+(D)$  caminhos disjuntos de  $N^+(v)$  a  $N^-(v)$ , então  $D$  contém uma coleção de  $\delta^+(D)$  ciclos na qual todo par de ciclos se intercepta unicamente em  $v$ . Tal floresta de ciclos seria um certificado para a Conjectura de Hoàng–Reed, mas Thomassen também provou o seguinte teorema, que existem digrafos que não possuem este tipo de florestas de ciclos como subdigrafo.

**Teorema 5** (Thomassen [44]). *Para todo inteiro  $i \geq 3$ , existe um digrafo  $D$  com  $\min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} \geq i$  tal que o número máximo de caminhos disjuntos que saem de  $N^+(u)$  e chegam a  $N^-(u)$  é menor ou igual a 2 para todo vértice  $u \in V(D)$ .*

Ademais, o Teorema 5 afirma que, em certos casos, o grafo de interseção dos ciclos de uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos em  $D$  pode não ser completo ou nem mesmo conter triângulos.

Brevemente, dada uma família  $\mathcal{F} = C_1, C_2, \dots, C_k$  de ciclos de um digrafo  $D$  o grafo de interseção de  $\mathcal{F}$  é um grafo cujo os vértices são os ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , em que dois ciclos são adjacentes se possuem um vértice em comum. Por exemplo, se  $\mathcal{F}$  é uma família composta por três ciclos se interceptam em um único vértice, então o grafo de interseção de  $\mathcal{F}$  é um triângulo. A conjectura a seguir é uma versão mais forte da Conjectura de Hoàng–Reed, que pede que o grafo de interseção da floresta de ciclos seja uma floresta.

**Conjectura 7** ([46]). *Todo digrafo  $D$  com  $\delta^+(D) = k$  contém uma  $k$ -floresta de ciclos cujo grafo de interseção de  $\{V(C_i)\}_{i=1}^k$  é uma floresta.*

A Conjectura 7 implica na seguinte conjectura:

**Conjectura 8** (Bermond–Thomassen [5]). *Para cada inteiro positivo  $l$ , todo digrafo  $D$  com  $\delta^+(D) \geq 2l + 1$  contém  $l$  ciclos disjuntos.*

De fato, se o grafo de interseção de uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos de um digrafo  $D$  é uma floresta, então é também um grafo bipartido. Logo, uma de suas partes possui tamanho pelo menos  $\lceil \frac{\delta^+(D)}{2} \rceil \geq \lceil \frac{2l+1}{2} \rceil \geq l$ .

A Conjectura 8 foi verificada para  $k \leq 3$  e recentemente foi generalizada para uma nova abordagem, a partir das sequências de graus de saída que forçam a existência de  $k$  ciclos vértices disjuntos [27].

## 2.2 A prova de Welhan para a Conjectura de Hoàng–Reed no caso $\delta^+(D) \leq 3$

Em 2010, Manuel Welhan [46] verificou a Conjectura de Hoàng–Reed para o caso  $\delta^+(D) = 3$ .

**Teorema 6.** [Welhan [46]] *Todo digrafo  $D$  tal que  $\delta^+(D) = 3$  contém uma 3-floresta de ciclos.*

A prova é fundamentada em uma estrutura muito interessante, chamada de separadores mais próximos. Assim como Thomassen, Welhan também demonstrou que todo digrafo com grau de saída mínimo pelo menos 2 possui um par de ciclos que se interceptam em um único vértice, um resultado um pouco mais forte do que a Conjectura de Hoàng–Reed para  $\delta^+(D) = 2$  (veja a Proposição 15).

No que segue, introduzimos uma série de conceitos e notações que visam facilitar a compreensão do texto. Sejam  $P = p_1p_2 \cdots p_l$  e  $Q = q_1q_2 \cdots q_r$  dois caminhos vértice-disjuntos em um digrafo  $D$ . Denotamos o caminho  $p_i p_{i+1} \cdots p_l$  por  $p_i|P$ , e o caminho  $p_1 p_2 \cdots p_i$  por  $P|p_i$ . Se  $p_l q_1 \in A(D)$  então denotamos a trilha  $p_1 p_2 \cdots p_l q_1 q_2 \cdots q_r$  por  $PQ$ .

Sejam  $S, T \subset V(D)$ . Um  $(S, T)$ -caminho é um caminho cujo vértice inicial pertence a  $S$ , e cujo vértice final pertence a  $T$ . Um subconjunto  $C \subseteq V(D)$  é dito ser um  $(S, T)$ -corte de  $D$  se cada  $(S, T)$ -caminho contém pelo menos um vértice de  $C$ . Em outras palavras, um  $(S, T)$ -corte é um conjunto  $C$  para o qual  $D - C$  não contém  $(S, T)$ -caminhos. Em particular,  $S$  e  $T$  são  $(S, T)$ -cortes. Denotamos por  $\lambda_D(S, T)$  a ordem do menor  $(S, T)$ -corte em  $D$ , isto é  $\lambda_D(S, T) = \min\{|Y| : Y \text{ é um } (S, T)\text{-corte}\}$ , e denotamos por  $\kappa_D(S, T)$  o número máximo de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos nos vértices em  $D$ . Utilizaremos as notações simplificadas  $\lambda(S, T)$  e  $\kappa(S, T)$  quando o digrafo  $D$  estiver subentendido pelo contexto. Finalmente, dizemos que  $S$  é  $l$ -conexo a  $T$  se  $\kappa(S, T) \geq l$ . Não é difícil ver que  $\kappa_D(S, T) \leq \lambda_D(S, T)$ , uma vez que o  $(S, T)$ -corte mínimo tem que ter pelo menos um vértice de cada  $(S, T)$ -caminho em qualquer conjunto de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos. Vale destacar que  $S$  e  $T$  não precisam ser necessariamente disjuntos. Em

particular, se  $S$  e  $T$  se intersectam então há pelo menos um  $(S, T)$ -caminho, basta considerar cada vértice de interseção como um caminho de comprimento 0.

Em 1927, Karl Menger [29] obteve o seguinte resultado, bastante conhecido em Teoria dos Grafos. O Teorema de Menger possui algumas variações. Aqui apresentamos a versão para caminhos disjuntos nos vértices em digrafos, que diz que o número máximo de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos em um digrafo  $D$  é igual a ordem mínima de um  $(S, T)$ -corte em  $D$ . O resultado de Menger é um clássico teorema do tipo Min-Max, garantindo tal igualdade.

**Teorema 7** (Menger [29]). *Seja  $D$  um digrafo e  $S, T \subset V(D)$ , então  $\kappa_D(S, T) = \lambda_D(S, T)$ .*

O conjunto de vértices atingíveis<sup>1</sup> a partir de  $S$  em  $D$ , denotado por  $N_D^*(S)$ , é o conjunto de vértices  $u$  para os quais existe ao menos um  $(S, u)$ -caminho em  $D$  (veja a Figura 2.8), i.e,

$$N_D^*(S) = \{u \in V(D) : \exists p_1 \cdots p_a u \subset D, p_1 \in S\}.$$

Note que todo vértice de  $S$  em  $D$  pertence a  $N_D^*(S)$ , pois cada vértice constitui um caminho de comprimento 0. Além disso, se  $D$  é fortemente conexo, então  $V(D) \subseteq N_D^*(S)$ .

Pelo Teorema 7, podemos escrever o número máximo de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos com a notação de conjuntos de vértices atingíveis (veja a Figura 2.9), da seguinte forma:

$$\kappa(S, T) = \min\{|X| : X \subset V(D), T \cap (N_{D-X}^*(S)) = \emptyset\}.$$

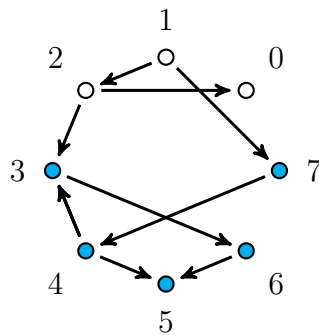


Figura 2.8: Nesta ilustração consideramos o conjunto  $S = \{3, 7\}$  e colorimos de azul todos os vértices que podem ser alcançados por 3 ou por 7 a partir de caminhos, de onde concluímos que  $N^*(S) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

<sup>1</sup>O conceito de vértices atingíveis por um conjunto  $S$  em um digrafo  $D$  foi introduzido por Manuel Welhan [46] com a denominação de “ $D$  below  $S$ ” e era denotada por  $D \downarrow S$ . Modificamos para  $N_D^*(S)$  por uma questão de estilo.

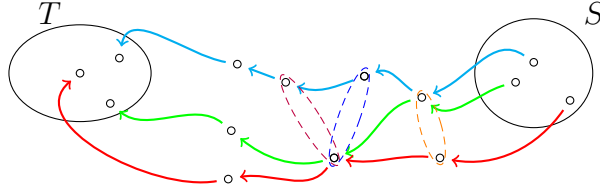


Figura 2.9: Nesta ilustração, destacamos em tracejado os conjuntos de vértices  $X$  tais que  $|X|$  é mínimo e  $T \cap (N_{D-X}^*(S)) = \emptyset$ . Note que estes conjuntos são os  $(S, T)$ -cortes com cardinalidade mínima e possuem dois vértices. Logo, pelo Teorema de Menger, temos  $\kappa(S, T) = 2$ .

### 2.2.1 A prova de Welhan para o caso $\delta^+(D) = 2$ .

Introduzimos agora a definição de *separadores mais próximos* e suas propriedades, que formam o ferramental fundamental para a demonstração do Teorema 6.

**Definição 1.** *Sejam  $S$  e  $T$  dois conjuntos não vazios de vértices em um digrafo  $D$ . Um  $(S, T)$ -corte  $X$  é chamado de  $(S, T)$ -separador se  $|X| = \kappa(S, T)$ ; e denotamos por  $\mathcal{W}(S, T)$  a coleção de todos os  $(S, T)$ -separadores em  $D$ . Um  $(S, T)$ -separador  $X$  é dito mais próximo<sup>2</sup> se para todo  $(S, T)$ -separador  $Y$ , temos  $N_{D-X}^*(S) \subseteq N_{D-Y}^*(S)$ .*

Na Figura 2.10 ilustramos as definições apresentadas acima. Estas podem ser vistas como um enriquecimento do conceito de  $(S, T)$ -corte: os  $(S, T)$ -separadores são cortes especiais, pois possuem ordem mínima dentre os  $(S, T)$ -cortes; e os separadores mais próximos são separadores que ao serem removidos do digrafo, o conjunto de vértices atingíveis por  $S$  pertencem ao conjunto de vértices atingíveis por  $S$  após a remoção de qualquer outro  $(S, T)$ -separador. Note que a priori não há necessariamente um  $(S, T)$ -separador mais próximo, mas se há  $(S, T)$ -separador mais próximo, então ele é único.

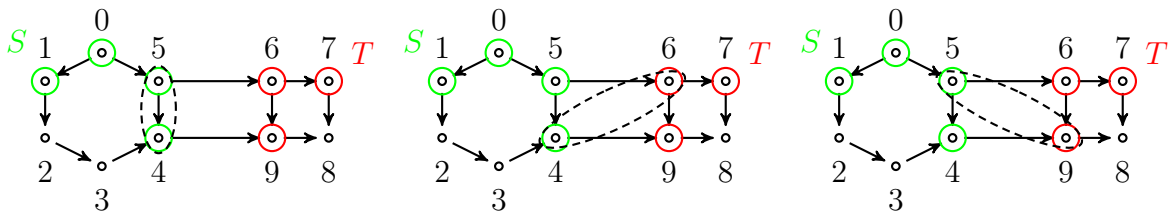


Figura 2.10:  $S = \{0, 1, 4, 5\}$  e  $T = \{6, 7, 9\}$ . Note que  $\kappa(S, T) = 2$ . Os conjuntos  $\{4, 5\}$ ,  $\{4, 6\}$ , e  $\{5, 9\}$  são os  $(S, T)$ -separadores, pois a remoção desses conjuntos deixa o digrafo sem  $(S, T)$ -caminhos. O conjunto  $\{4, 5\}$  é um  $(S, T)$ -separador mais próximo, pois  $N_{D-\{4,5\}}^*(S) = \{0, 1, 2, 3\}$  é minimal em relação a  $N_{D-\{4,6\}}^*(S)$  e  $N_{D-\{5,9\}}^*(S)$ .

<sup>2</sup>Ressaltamos que a definição de  $(S, T)$ -separador exibida neste texto é ligeiramente diferente da apresentada por Bang-Jensen e Gutin [3], que chamam  $(S, T)$ -cortes de  $(S, T)$ -separadores.

Em particular, quando  $\kappa_D(S, T) = |S|$ , então  $S$  é o único  $(S, T)$ -separador mais próximo, já que  $N_{D-S}^*(S) = \emptyset$ . Um fato surpreendente que veremos adiante é que os  $(S, T)$ -separadores mais próximos sempre existem.

Denote por  $\mathcal{C}(S, T)$  o conjunto de todos os  $(S, T)$ -cortes em um digrafo  $D$ . Note que  $\mathcal{W}(S, T) \subseteq \mathcal{C}(S, T)$ . Os lemas a seguir apresentam uma propriedade importante sobre cortes e separadores que serão utilizadas nas demonstrações desta seção.

**Lema 8.** *Sejam  $S, T \subset V(D)$ . Se  $Y$  é um  $(S, T)$ -corte, então  $\mathcal{C}(S, Y) \subseteq \mathcal{C}(S, T)$ .*

*Demonstração.* Seja  $X$  um  $(S, Y)$ -corte e suponha que  $X$  não é um  $(S, T)$ -corte, então existe um  $(S, T)$ -caminho  $Q$  em  $D - X$ . Como  $Y$  é um  $(S, T)$ -corte, então  $V(Q) \cap Y \neq \emptyset$ . Seja  $y$  o primeiro vértice de  $Q$  que intercepta  $Y$ , então o caminho  $Q|y$  é um  $(S, Y)$ -caminho em  $D - X$ , uma contradição, pois  $X$  é um  $(S, Y)$ -corte.  $\square$

O próximo resultado é análogo ao Lema 8 para separadores.

**Lema 9.** *Sejam  $S, T \subset V(D)$ . Se  $Y$  é  $(S, T)$ -separador, então  $\mathcal{W}(S, Y) \subseteq \mathcal{W}(S, T)$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 8, basta mostrar que um  $(S, Y)$ -separador tem cardinalidade igual a  $|Y|$ . Se  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador, então temos  $|X| \leq |Y|$ . Logo,

$$|Y| \geq |X| = \min\{|X'|, X' \in \mathcal{C}(S, Y)\} \geq \min\{|Y'|, Y' \in \mathcal{C}(S, T)\} = |Y|,$$

como desejado.  $\square$

Os  $(S, T)$ -separadores se mostram artifícios interessantes para obter ciclos pelo seguinte motivo <sup>3</sup>. Se  $X$  é um  $(S, T)$ -separador para o qual  $|X| < \delta^+(D) = k$ , então existe um ciclo em  $D' = D[N_{D-X}^*(S)]$ , uma vez que  $\delta^+(D') \geq k - |X| \geq 1$ .

No que segue, dado um caminho  $P = p_1 p_2 \cdots p_l$  e  $p_i, p_j \in V(P)$ , dizemos que  $p_j$  é precedido por  $p_i$  (ou que  $p_i$  precede  $p_j$ ) em  $P$  se  $i \leq j$ .

**Lema 10.** *Seja  $D$  um digrafo e  $S, T \subset V(D)$  e  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$  uma coleção de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos em que  $\kappa = \kappa_D(S, T)$ . Para cada  $Y \in \mathcal{W}(S, T)$ , há exatamente um único vértice de  $Y$  em  $P_i$ , isto é,  $|Y \cap V(P_i)| = 1$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ .*

*Demonstração.* Pela definição de separador, temos  $|Y \cap V(P_i)| \geq 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Se existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $|Y \cap V(P_i)| \geq 2$ , então  $\kappa = |Y| \geq \sum_{i=1}^k |Y \cap V(P_i)| \geq \kappa + 1$ , uma contradição.  $\square$

O seguinte resultado nos fornece um método para encontrar separadores mais próximos. No que segue, denotamos por  $W(S, T)$  o conjunto de todos os vértices de  $D$  que pertencem a um  $(S, T)$ -separador, ou seja,

<sup>3</sup>A observação é usada por Manuel Welhan, às vezes de maneira implícita.

$$W(S, T) = \bigcup_{X \in \mathcal{W}(S, T)} X.$$

**Lema 11.** *Seja  $D$  um digrafo e sejam  $S, T \subset V(D)$  e  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_\kappa\}$  uma coleção de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos em que  $\kappa = \kappa_D(S, T)$ . Se  $X = \{x_1, \dots, x_\kappa\}$  é tal que cada  $x_i$  é o primeiro vértice de  $P_i$  contido em  $W(S, T)$ , então, as seguintes afirmações valem:*

- (a)  $X \in \mathcal{W}(S, Y)$  para todo  $Y \in \mathcal{W}(S, T)$ ;
- (b)  $X$  é um  $(S, T)$ -separador mais próximo.

*Demonstração.* Se  $|S| = \kappa$ , então  $X = S$  e  $N_{D-X}^*(S) = \emptyset$  e o resultado segue. Então podemos assumir que  $|S| > \kappa \geq 1$ . A seguir provamos algumas afirmações a respeito de  $X$ .

**Afirmção 11.1.**  *$X$  é um  $(S, T)$ -separador.*

*Demonstração.* Por construção, temos  $|X| = \kappa$ . Afirmamos que  $X$  é um  $(S, T)$ -corte. Com efeito, suponha por contradição que existe um  $(S, T)$ -caminho em  $D - X$  e seja  $Q = sv_1v_2 \cdots v_jt$  um tal caminho mais curto. Pela minimalidade de  $Q$ , temos que  $s \in S$ ,  $t \in T$  e  $v_1 \dots v_j \in V(D) \setminus (S \cup T)$ . Considere  $y$  o primeiro vértice de  $Q$  que pertence a  $W(S, T)$ . Digamos  $y \in Y \in \mathcal{W}(S, T)$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $y \in P_1$ . Pelo Lema 10,  $y$  é o único vértice de  $Y$  em  $P_1$ . Pela definição de  $x_1$ ,  $x_1$  precede  $y$  em  $P_1$ , e como  $x_1 \neq y$ , temos  $x_1 \notin y|P_1$ . Seja  $v$  o primeiro vértice de  $Q$  a interceptar  $y|P_1$ , e note que  $v$  precede  $y$  (possivelmente  $v = y$ ) em  $Q$ . Então,  $Q' = Q|vv|P_1$  é um  $(S, T)$ -caminho em  $D - X$ , uma vez que, pelo Lema 10,  $x_1$  é o único vértice de  $P_1$  em  $X$  e  $Q$  não possui nenhum vértice em  $X$ .

Pela definição de  $X$ ,  $x_1$  é um vértice de algum  $(S, T)$ -separador. Digamos  $x_1 \in X_1 \in \mathcal{W}(S, T)$ . Em particular, pelo Lema 10,  $x_1$  é o único vértice de  $X_1$  em  $P_1$ . Como  $X_1$  é um  $(S, T)$ -separador, existe um vértice  $z \in X_1$  que pertence a  $Q'$ , pois,  $Q'$  é um  $(S, T)$ -caminho. Como  $Q'$  é um caminho em  $D - X$  e o vértice  $z$  não está em  $P_1$ , então  $z \neq x_1$ . Pela construção de  $Q'$ ,  $z$  precede  $v$  em  $Q'$ , e  $z \in Q|v-v \subsetneq Q|y$ . Isso contradiz a escolha de  $y$  como o primeiro vértice de  $W(S, T)$  a interceptar  $Q$  (veja a Figura 2.11).  $\square$

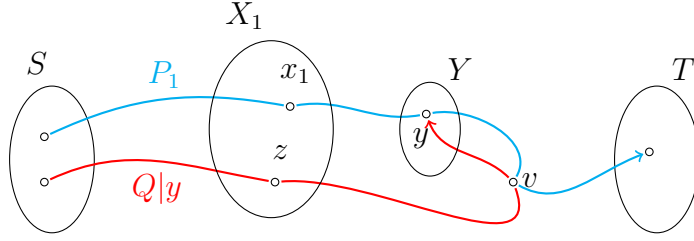


Figura 2.11: Os caminhos e  $(S, T)$ -separadores da Afirmação 11.1.

No que segue, provamos que  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador para todo  $Y \in \mathcal{W}(S, T)$ . Suponha, por contradição, que existe um  $(S, Y)$ -caminho  $Q$  em  $D - X$ , e seja  $y \in Y$  o vértice final de  $Q$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $y \in V(P_1)$ . Seja  $v$  o primeiro vértice de  $Q$  que intercepta  $y|P_1$ . Pela definição de  $X$ , o vértice  $x_1 \in X$  precede  $y$  em  $P_1$ . Portanto,  $Q|vv|P_1$  é um  $(S, T)$ -caminho em  $D - X$ , uma contradição à Afirmação 11.1.

Como  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador, não há vértice de  $Y$  em  $N_{D-X}^*(S)$ . Assim, vemos que  $N_{D-X}^*(S) \subseteq N_{D-Y}^*(S)$  e portanto,  $X$  é o  $(S, T)$ -separador mais próximo.  $\square$

Os dois lemas a seguir serão utilizados para a demonstração do resultado principal desta seção. O Lema 12 apresenta uma caracterização de separadores mais próximos.

**Lema 12.** *Seja  $Y$  um  $(S, T)$ -separador. Então,  $X$  é o  $(S, T)$ -separador mais próximo se e somente se  $X$  é o  $(S, Y)$ -separador mais próximo.*

*Demonstração.* Seja  $\kappa = \kappa_D(S, T)$  e  $P_1, \dots, P_\kappa$  um conjunto de  $(S, T)$ -caminhos disjuntos e suponha que  $|S| > \kappa \geq 1$ . Seja  $X$  o  $(S, T)$ -separador mais próximo. Vamos mostrar que  $X$  é o  $(S, Y)$ -separador mais próximo. Pelo Lema 11,  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador. Logo,  $X \subseteq \mathcal{W}(S, T)$ .

Para verificar que  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador mais próximo, para cada  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ , seja  $y_i$  o vértice em  $Y \cap V(P_i)$ . Como  $P_j|y_j$  é um caminho, todo vértice  $y$  em um  $(S, Y)$ -separador pertence a  $P_j$  para algum  $j$ . Além disso, como todo  $(S, Y)$ -separador é um  $(S, T)$ -separador,  $y$  é precedido por um vértice de  $X$  em  $P_j$ . Como  $Y$  é um  $(S, T)$ -separador, pelo Lema 10, qualquer  $(S, T)$ -caminho contém um vértice de  $Y$ . Tome  $Y'$  como  $(S, Y)$ -separador mais próximo, então não existe um  $(S, Y)$ -caminho (e conseqüentemente nenhum  $(S, T)$ -caminho) em  $D - Y'$ , portanto  $Y'$  também é um  $(S, T)$ -separador. Dessa forma, pelo Lema 11, o vértice  $x_i$  de  $X \cap V(P_i)$  precede o vértice  $y'_i$  de  $Y' \cap V(P_i)$  em  $P_i$ , para todo  $i = 1, \dots, \kappa$ . Conseqüentemente,  $x_i$  também precede  $y'_i$  em  $P_i|y_i$ .

Reciprocamente, considere  $X$  o  $(S, Y)$ -separador mais próximo. Em particular,  $X$  é um  $(S, Y)$ -separador. Suponha que o  $(S, T)$ -separador mais próximo é  $X' \neq X$ . Pela demonstração acima,  $X'$  é um  $(S, Y)$ -separador mais próximo, e portanto,  $N_{D-X'}^*(S) \subsetneq N_{D-X}^*(S)$ , uma contradição com a definição de  $X$  como separador mais próximo. Portanto,  $X = X'$ .  $\square$

**Lema 13.** *Seja  $D$  um digrafo e seja  $X$  o  $(S, T)$ -separador mais próximo em  $D$ . Se  $u \in N_{D-X}^*(S)$ , então  $\kappa_D(S, X \cup \{u\}) = |X| + 1$ .*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $\kappa(S, X \cup \{u\}) \leq |X|$ . Neste caso devemos ter  $\kappa(S, X \cup \{u\}) = |X|$ , já que o Teorema 7 garante que o número de  $(S, X)$ -caminhos vértices disjuntos é pelo menos  $|X|$ .

Seja  $Y$  um  $(S, X \cup \{u\})$ -separador e considere um vértice  $v \in N_{D-Y}^*(S)$ . Como  $Y$  é um  $(S, X \cup \{u\})$ -separador, temos  $v \in N_{D-X}^*(S)$ . Logo,  $N_{D-X}^*(S) \subsetneq N_{D-Y}^*(S)$ , pois  $u \in N_{D-X}^*(S) \setminus N_{D-Y}^*(S)$ , uma contradição à minimalidade de  $N_{D-X}^*(S)$ .  $\square$

Seja  $\mathcal{A} = \{N_{D-\{v\}}^*(u) : (u, v) \in V(D) \times V(D), u \neq v\}$ . Um par  $(x, y) \in V(D) \times V(D)$  é dito *minimal* se  $N_{D-x}^*(y)$  é um conjunto minimal de  $\mathcal{A}$ , i.e., se para todo par  $(x', y') \in V(D) \times V(D)$  com  $x' \neq y'$  temos  $N_{D-x'}^*(y') \subseteq N_{D-x}^*(y)$ .

**Lema 14.** *Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo tal que  $\delta^+(D) = 2$ . Se  $(x, y) \in V(D) \times V(D)$  é minimal, então  $D[N_{D-x}^*(y)]$  é fortemente conexo.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $D[N_{D-x}^*(y)]$  não é fortemente conexo em  $D - x$ . Neste caso, existe uma componente fortemente conexa terminal  $H'$  de  $D[N_{D-x}^*(y)]$ . Seja  $w \in V(H')$ . Note que  $A_H^+(V(H')) = \emptyset$  implica que  $N_{D-x}^*(w) = V(H')$  é um subconjunto próprio de  $N_{D-x}^*(y)$ , uma contradição com a minimalidade de  $N_{D-x}^*(y)$ .  $\square$

A seguinte proposição verifica a Conjectura de Hoàng–Reed para  $\delta^+(D) = 2$ .

**Proposição 15.** *Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo tal que  $\delta^+(D) = 2$ . Seja  $(x, y) \in V(D) \times V(D)$  minimal. Se  $N_D^-(y) \setminus N_{D-x}^*(y) \neq \emptyset$ , então existem dois ciclos  $C_1$  e  $C_2$  tais que  $V(C_1) \cap V(C_2) = \{y\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $H = D[N_{D-x}^*(y)]$ . Temos  $H \neq \emptyset$ . Note que  $\{x\}$  é o  $(N^+(y), x)$ -separador mais próximo em  $D$ , caso contrário, pelo Lema 11 (a) existiria um  $(N^+(y), x)$ -separador, digamos  $x' \neq x$ , tal que  $N_{D-x'}^*(y) \subsetneq V(H)$ .

Pelo Lema 14, como  $H$  é fortemente conexo, existe um vértice  $u \in N_H^-(y)$ . Pelo Lema 13, existem dois  $(N_{D-x}^*(y), \{u, x\})$ -caminhos disjuntos  $P_1$  e  $Q$  em  $D$ . Sem perda de generalidade, seja  $x$  o vértice final de  $P_1$ . Afirmamos que  $V(P_1) \subseteq N_{D-x}^*(y) \cup \{x\}$  e  $V(Q) \subseteq N_{D-x}^*(y) \cup \{u\}$ . De fato, se  $z \in V(P_1) \setminus \{x\}$  (respectivamente  $z \in V(Q) \setminus \{u\}$ ), então  $P_1|z$  (respectivamente  $Q|z$ ) é um  $yz$ -caminho em  $D - x$ . Logo,  $z \in N_{D-x}^*(y)$ .



Por hipótese, existe um vértice  $v \in N^-(y) \setminus V(H)$ . Seja  $P_2$  um  $(x, v)$ -caminho em  $D$ . Note ainda que  $P_2 \subseteq D \setminus N_{D-x}^*(y)$ . De fato, suponha que existe um vértice  $z \in V(P_1) \cap N_{D-x}^*(y)$ , então  $z \neq x$  e, portanto,  $z|P_2 \subseteq D - x$ . Como  $z \in N_{D-x}^*(y)$ , existe um  $yz$ -caminho  $P' \subseteq D - x$ , mas então  $P'z|P_2$  é um  $yv$ -caminho, o que implica que  $v \in N_{D-x}^*(y)$ , uma contradição. Então,  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$  e, portanto,  $C_1 = yP_1 \cup P_2y$  e  $C_2 = yQy$  formam a 2-floresta de ciclos desejada (veja a Figura 2.12).  $\square$

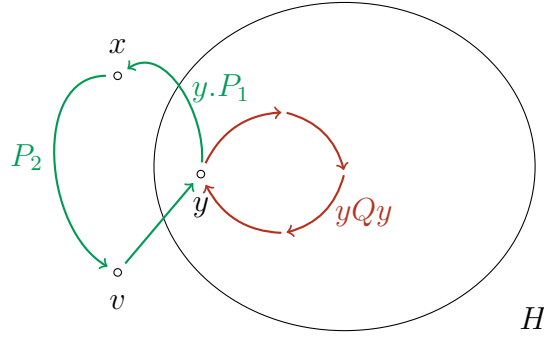


Figura 2.12: A 2-floresta de ciclos obtida na Proposição 15.

A Proposição 15 é o resultado obtido por Welhan que prova o caso  $\delta^+(D) = 2$  da Conjectura de Hoàng–Reed. Cabe ressaltar que assim como em vários problemas estudados nesta dissertação, se  $D$  não for fortemente conexo, então basta restringir a análise a uma componente fortemente conexa terminal  $D'$  de  $D$ , que também satisfaz a condição de grau de saída mínimo, uma vez que  $A_H^+(V(D')) = \emptyset$ .

**Teorema 4.** (Thomassen [43]) *Todo digrafo  $D$  tal que  $\delta^+(D) = 2$  contém um par de ciclos que se intercepta em exatamente um vértice.*

*Demonstração.* Para verificar a prova de Thomassen, suponha que  $D$  é 2-fortemente conexo, então há dois  $(N^+(y), N^-(y))$ -caminhos para qualquer  $y \in V(D)$ , e portanto obtemos facilmente um par de ciclos desejado.

Se  $D$  é fortemente conexo e tome um par de vértices  $(y', x) \subseteq V \times V$  minimal. Pelo Lema 14,  $D[N_{D-x}^*(y')]$  é fortemente conexo, e portanto,  $N_{D-x}^*(y) = N_{D-x}^*(y')$ , para todo  $y \in N_{D-x}^*(y')$ . Como  $D$  é fortemente conexo, existe algum vértice  $y \in N_{D-x}^*(y')$  com  $N_D^-(y) \setminus N_{D-x}^*(y) \neq \emptyset$ . A Proposição 15 agora se aplica ao par  $(y, x)$ , e portanto, garantimos a existência de dois ciclos em  $D$  que se cruzam precisamente em  $y$ .  $\square$

A seguinte definição será utilizada no lema a seguir. Seja  $D$  um digrafo e  $t \in V(D)$ . Dizemos que  $D$  é  $t$ -convergente se para todo  $v \in V(D) \setminus \{t\}$  vale  $d^+(v) \geq 2$  e existe pelo menos um  $vt$ -caminho em  $D$ .

**Lema 16.** *Se  $D$  é  $t$ -convergente, então para todo  $s \in V(D) \setminus \{t\}$ ,  $D$  contém um  $(s, t)$ -caminho  $P$  e um ciclo  $C$  tais que  $|V(P) \cap V(C)| = 1$  e  $t \notin V(C)$ .*

*Demonstração.* Seja  $D$  um contraexemplo para o enunciado com o menor número de vértices, e seja  $s \in V(D) \setminus \{t\}$ .

**Afirmção 16.1.** *Não existe tripla  $D', Q, R$  tal que (i)  $D'$  é um subdigrafo  $t'$ -convergente próprio de  $D$ ; (ii)  $Q$  e  $R$  são, respectivamente, um  $(s, V(D'))$ -caminho e um  $(t', t)$ -caminho com  $1 \in \{|V(Q)|, |V(R)|\}$ ; (iii)  $Q$  e  $R$  possuem no máximo um vértice em comum com  $D'$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $s'$  o vértice final de  $Q$  (possivelmente  $s' = s$ ). Pela minimalidade de  $D$ ,  $D'$  possui um  $(s', t')$ -caminho  $P'$  e um ciclo  $C'$  tais que  $|V(P') \cap V(C')| = 1$  e  $t' \notin V(C')$ , mas então como  $Q = \emptyset$  ou  $R = \emptyset$ ,  $P = QP'R$  é um  $(s, t)$ -caminho em  $D$ , e  $C'$  é um ciclo como desejado.  $\square$

Agora suponha que  $D - t$  não é fortemente conexo. Seja  $H$  uma componente fortemente conexa terminal de  $D - t$ , e seja  $D' = D[V(H) \cup \{t\}]$ . Não é difícil checar que  $D'$  é  $t$ -convergente. Seja  $Q$  um  $(s, V(D'))$ -caminho mais curto e seja  $s'$  o vértice final de  $Q$ . Pela minimalidade de  $Q$ ,  $s'$  é o único vértice de  $D'$  em  $Q$ , mas então  $D', Q$ , e  $\{t\}$  é uma tripla como na Afirmção 16.1, uma contradição.

Então podemos supor que  $D - t$  é fortemente conexo. Seja  $t'$  o  $(N^+(s), t)$ -separador mais próximo. Suponha que  $t' \neq t$ , tome  $H = N_{D-t'}^*(s)$ , e seja  $D' = D[V(H) \cup \{t'\}]$ . Não é difícil checar que  $D'$  é  $t'$ -convergente. Seja  $R$  um  $(t', t)$ -caminho mais curto. Pela minimalidade de  $R$ ,  $t'$  é o único vértice de  $D'$  em  $R$ , mas então  $D', \{s\}$ , e  $R$  é uma tripla como na Afirmção 16.1, uma contradição.

Então podemos supor que  $t$  é o  $(N^+(s), t)$ -separador mais próximo. Pelo Lema 13, se  $u \in N_{D-t}^-(s)$ , então existem  $(N^+(s), \{t, u\})$ -caminhos disjuntos  $Q_1$  e  $Q_2$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $t$  é o vértice final de  $Q_1$  e tome  $P = vQ_1$  e  $C = vQ_2v$  para obter o caminho e ciclo desejados.  $\square$

Uma aplicação do Lema 16 é mostrar que sob as hipóteses da Conjectura de Hoàng–Reed para o caso  $\delta^+(D) = 2$ , é possível obter uma 2-floresta de ciclos com mais especificações, como na seguinte proposição.

**Proposição 17.** *Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo com  $\delta^+(D) \geq 2$ . Para todo arco  $ts \in A(D)$ , existem ciclos  $C$  e  $C'$  tais que  $ts \in A(C')$ ,  $t \notin V(C)$  e  $|V(C) \cap V(C')| = 1$ .*

*Demonstração.* O Lema 16 fornece um  $st$ -caminho  $P$  e um ciclo  $C$ , tais que  $|V(P) \cap V(C)| = 1$  e  $t \notin V(C)$ . Considere  $C' = Ps$  para obter a 2-floresta de ciclos  $C \cup C'$ .  $\square$

### 2.2.2 A Conjectura de Hoàng–Reed para o caso $\delta^+(D) = 3$ .

Para digrafos que não são  $\delta^+(D)$ -fortemente conexos, os separadores mais próximos fornecem uma maneira útil de organizar sua estrutura em termos de conectividade. A estratégia utilizada por Welhan para demonstrar o caso  $\delta^+(D) = 3$  da Conjectura de Hoàng–Reed explora os digrafos garantidos pelo Teorema 5, ou seja, digrafos com grau de saída pelo menos 3 que não contêm um vértice  $x$  e três ciclos que se interceptam precisamente em  $x$ .

Nesta seção, denotamos por  $\mathcal{C}$  o conjunto dos digrafos  $D$  com  $\delta^+(D) \geq 3$  e tais que  $D$  não contém uma 3-floresta de ciclos. Isto é,  $\mathcal{C}$  é o conjunto de contraexemplos para a Conjectura 4 (que afirma que todo digrafo  $D$  possui uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos) no caso  $\delta^+(D) = 3$ .

Começamos com o seguinte lema que apresenta algumas propriedades de um contraexemplo mínimo.

**Lema 18.** *Seja  $D$  um digrafo em  $\mathcal{C}$  que minimiza o valor de  $|V(D)| + |A(D)|$ . As seguintes afirmações valem:*

- (a)  $\Delta^+(D) = 3$ ;
- (b)  $\delta^-(D) \geq 2$ ;
- (c)  $D$  é 2-fortemente conexo.

*Demonstração.* Se  $\Delta^+(D) \geq 4$ , então consideramos um digrafo  $D'$  obtido após a remoção de arcos de saída de cada vértice de  $D$ , de forma que  $\Delta^+(D') = \delta^+(D') = 3$ . Assim, temos  $D' \subsetneq D$ , e portanto  $D'$  contém uma 3-floresta de ciclos. Logo,  $D$  contém uma 3-floresta de ciclos. Isso prova o item (a). Além disso, podemos ver que  $D$  é fortemente conexo, caso contrário,  $D$  teria uma componente fortemente conexa terminal  $H$ , que seria um subdigrafo próprio com  $\delta^+(H) \geq 3$ , e que, pela minimalidade de  $D$ , contém uma 3-floresta de ciclos.

A conexidade garante que  $\delta^-(D) \geq 1$ . Suponha, por contradição, que  $v$  é um vértice com  $d^-(v) = 1$  e digamos que o arco que aponta para  $v$  é  $uv \in A(D)$ . Suponha que existe um vértice  $w \in N^+(v)$  tal que  $w \notin N^+(u) \cup \{u\}$ . Considere  $D'$  o digrafo formado pelos vértices  $V(D) \setminus \{v\}$  e pelos arcos de  $A(D - v) \cup \{uw\}$ . Como  $\delta^+(D') \geq 3$  e  $D'$  possui menos vértices que  $D$ , então existe uma 3-floresta de ciclos  $F'$  em  $D'$ . Podemos assumir que  $uw \in A(F')$ , caso contrário  $F' \subset D$ . Seja  $F$  o digrafo com vértices  $V(F') \cup \{v\}$  e arcos  $A(F - uw) \cup \{uv, vw\}$ . Então,  $F$  é uma 3-floresta de ciclos contida em  $D$ .

Então podemos supor que todo  $w \in N^+(v)$  é tal que  $w \in N^+(u) \cup \{u\}$ , ou seja,  $N^+(v) \subset N^+(u) \cup \{u\}$ . Como  $N^+(u) \cup \{u\}$  possui quatro vértices e  $v \in N^+(u)$ , então  $v$  aponta para os outros três vértices de  $N^+(u) \cup \{u\}$ . Em particular,  $uvu$  é

um ciclo de  $D$ . Como  $\delta^+(D - v) \geq 2$ , pela Proposição 17,  $D - v$  contém uma 2-floresta de ciclos  $F$ . Portanto,  $F \cup uvu$  é uma 3-floresta de ciclos em  $D$ . Isso prova o item (b).

Para verificar que  $D$  é 2-fortemente conexo, suponha, por contradição, que existe algum  $x \in V(D)$  tal que  $D - x$  não é fortemente conexo. Então, há duas componentes fortes distintas  $G_0$  e  $G_1$  de  $D - x$ , tais que  $G_0$  é uma componente fortemente conexa terminal e  $G_1$  é uma componente fortemente conexa inicial. Como  $\delta^+(D) \geq 3$  temos  $\min\{d_{D-x}^+(v) : v \in V(G_0)\} \geq 2$ , e como  $\delta^-(D) \geq 2$ , então  $\min\{d_{D-x}^-(v) : v \in V(G_1)\} \geq 1$ . Em  $G - x$ , nenhum arco sai de  $G_0$ , pois  $G_0$  é uma componente fortemente conexa terminal, então  $\delta^+(G_0) \geq 2$ . Pela Proposição 17,  $G_0$  contém uma 2-floresta de ciclos  $F$ . De maneira análoga, como  $\delta^-(G_1) \geq 1$ ,  $G_1$  contém um ciclo  $C$ . A 3-floresta de ciclos  $C \cup F$  está contida em  $D$ , uma contradição. Assim,  $D - x$  deve ser fortemente conexo para todo  $x \in V(D)$ , e portanto  $D$  é 2-fortemente conexo.  $\square$

Com o objetivo de estender futuramente o resultado de Welhan para  $k \geq 4$ , suponha que a Conjectura 4 vale para  $k - 1$ , e defina analogamente o conjunto  $\mathcal{C}_k$  como o conjunto dos digrafos  $D$  com  $\delta^+(D) \geq k$  e que não contêm uma  $k$ -floresta de ciclos. Obtemos então o seguinte resultado, cuja prova é análoga à prova do Lema 18.

**Lema 19.** *Seja  $D$  um digrafo em  $\mathcal{C}_k$  que minimiza o valor de  $|V(D)| + |A(D)|$ , então as seguintes afirmações valem:*

- (a)  $\Delta^+(D) = k$ ;
- (b)  $\delta^-(D) \geq 2$ ;
- (c)  $D$  é 2-fortemente conexo.

A estratégia utilizada para provar o Teorema 6 é a seguinte: começamos com um digrafo  $D \in \mathcal{C}$  e observamos que  $D$  é 2-fortemente conexo, mas não 3-fortemente conexo. Em particular, para qualquer vértice  $v$  temos que  $N^+(v)$  não é 3-conexo a  $N^-(v)$ , caso contrário, existem três  $(N^+(v), N^-(v))$ -caminhos disjuntos em  $D$ , assim concluímos que  $D$  contém uma coleção de três ciclos que se interceptam exatamente em  $v$ , ou seja, uma 3-árvore de ciclos.

Por ser um contraexemplo,  $D$  deve evitar qualquer 3-floresta de ciclos, e usando separadores mais próximos (que possuem dois vértices) para desconectar as vizinhanças de entrada das vizinhanças de saída, particionamos  $D$  em uma coleção de subdigrafos acíclicos. O Lema 21 afirma que  $D$  não pode conter tal partição, o que nos levará a uma contradição. Para isso, precisamos do seguinte lema.

**Lema 20.** *Seja  $D$  um digrafo com  $\delta^+(D) \geq k$  e seja  $B \subseteq V(D)$  um subdigrafo acíclico. Tome  $j = \min\{k - 1, |V(B)|\}$ . Então, temos  $|A_D^+(B)| \geq \frac{(2k-j)(j+1)}{2}$ . Em*

particular,  $|A_D^+(B)| = \frac{(2k-j)(j+1)}{2}$  se e somente se  $D[\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}]$  for um torneio transitivo.

*Demonstração.* Seja  $v_0$  um vértice terminal de  $B$ , i.e,  $\{v_0\}$  é uma componente fortemente conexa terminal trivial em  $D[B]$ , então, como  $D[B]$  é acíclico,  $d_{D[B]}^+(v_0) = 0$ . Como há pelo menos uma componente fortemente conexa terminal em  $D$ , então  $\delta^+(D) = k$  implica que  $|A_D^+(B)| \geq k$ . Se  $|V(B)| \geq 2$ , então um vértice terminal  $v_1$  de  $D[B] - v_0$  é tal que  $d_{D[B]}^+(v_1) \geq 1$ , e portanto,  $|A_D^+(B)| \geq k + k - 1 = 2k - 1$ .

De maneira indutiva, se  $|V(B)| = n_b < k$ , então  $j = n_b$  e um vértice terminal  $v_{n_b}$  do digrafo induzido  $D[B] - v_0 - v_1 - \dots - v_{n_b-1}$  é tal que  $d_{D[B]}^+(v_{n_b}) \leq n_b - 1$ , e assim,

$$|A_D^+(B)| \geq \sum_{i=0}^j k - i = k(j + 1) + \left( \frac{-j(j + 1)}{2} \right) = \frac{(2k - j)(j + 1)}{2}.$$

Se  $B$  possui pelo menos  $k$  vértices, então um vértice terminal  $v_k$  de  $D[B] - v_0 - v_1 - \dots - v_{k-1}$  é tal que  $d_{D[B]}^+(v_k) \leq k - 1$ , e assim

$$|A_D^+(B)| \geq \sum_{i=0}^{k-1} k - i = k + (k - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{k(k + 1)}{2}. \quad \square$$

Primeiro, vamos fixar as seguintes definições: dado  $B \subset V(D)$ , a *vizinhaça de entrada* de  $B$  é o conjunto  $N^-(B) = \bigcup_{u \in B} N^-(u) \setminus B$ . Dizemos que  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  é uma *partição* de  $V(D)$  se cada vértice de  $V(D)$  está contido em precisamente um  $B_i$ .

Dizemos que uma partição  $\mathcal{B}$  de  $V(D)$  é uma *partição acíclica* de  $D$  se  $D[B]$  é acíclico para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

**Lema 21.** *Seja  $D$  um digrafo com  $\delta^+(D) = \Delta^+(D) = 3$ . Então  $D$  não admite uma partição acíclica  $\mathcal{B}$  de  $V(D)$  tal que  $|N^-(B)| = 2$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ .*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existe uma tal partição  $\mathcal{B}$ . Para cada  $y \in V(D)$ , chamamos  $B_y$  o elemento de  $\mathcal{B}$  que possui  $y$ . No que segue, mostramos algumas afirmações sobre  $B$ :

**Afirmção 21.1.**  $|A_D^-(B_y)| \leq \min\{2|B_y|, 6\}$ .

*Demonstração.* Como  $|N^-(B_y)| = 2$ , então  $|A_D^-(B_y)| \leq 2|B_y|$ ; e como  $\Delta^+(D) = 3$ , e  $A_D^-(B_y) \subset A_D^+(N^-(B_y))$ , temos  $|A_D^-(B_y)| \leq \Delta^+(D)|N^-(B_y)| = 3 \cdot 2 = 6$ , como desejado.  $\square$

**Afirmação 21.2.** *Seja  $k = \min\{3, |V(B_y)|\}$ . Então,  $|A_D^+(B_y)| \geq \sum_{i=0}^{k-1} 3 - i$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 20,  $|A_D^+(B_y)| \geq 6$  e a igualdade é satisfeita apenas se  $D[\{v_0, v_1, v_2\}]$  for um torneio transitivo e  $A_D^+(\{v_0, v_1, v_2\}) = A_D^+(B_y)$ .  $\square$

**Afirmação 21.3.**  *$|B_y| \geq 3$  e  $|A_D^+(B_y)| = |A_D^-(B_y)| = 6$  para todo  $y \in V(D)$ .*

*Demonstração.* Para  $i \in \{1, 2\}$ , seja  $\mathcal{B}_i$  a coleção dos  $B_y$  com  $|B_y| = i$  e  $\mathcal{B}_3$  a coleção de  $B_y$  com  $|B_y| \geq 3$ . Como essas coleções são disjuntas, temos  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}$ , e portanto

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^+(B)| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^-(B)|. \quad (2.1)$$

Pela Afirmação 21.2, temos

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^+(B)| &= \sum_{B \in \mathcal{B}_1} |A_D^+(B)| + \sum_{B \in \mathcal{B}_2} |A_D^+(B)| + \sum_{B \in \mathcal{B}_3} |A_D^+(B)| \\ &\geq 3|\mathcal{B}_1| + 5|\mathcal{B}_2| + 6|\mathcal{B}_3|; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Similarmente, pela Afirmação 21.1,

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^-(B)| \leq 2|\mathcal{B}_1| + 4|\mathcal{B}_2| + 6|\mathcal{B}_3| \quad (2.3)$$

Pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3), temos:

$$3|\mathcal{B}_1| + 5|\mathcal{B}_2| + 6|\mathcal{B}_3| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^+(B)| \leq 2|\mathcal{B}_1| + 4|\mathcal{B}_2| + 6|\mathcal{B}_3|,$$

e portanto  $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| \leq 0$ , ou seja,  $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = 0$ , o que implica que  $|B_y| \geq 3$  para todo  $y$ . Assim,  $6|B| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^+(B)| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^-(B)| \leq 6|B|$ .

Logo,  $\sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^-(B)| \leq 6|\mathcal{B}| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} |A_D^+(B)|$  e a igualdade é satisfeita se e somente se  $|A_D^+(B)| = |A_D^-(B)| = 6$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ , como desejado.  $\square$

Para cada  $B \in \mathcal{B}$ , considere  $T_B$  o conjunto de vértices formado pelas caudas dos arcos que pertencem a  $A_D^+(B)$ . Como vimos acima,  $|A_D^+(B)| = 6$  se e somente se  $T_B$  é um torneio transitivo de três vértices. Seja  $u_B$  o vértice de  $D[T_B]$  com grau de entrada zero. Como  $u_B$  domina exatamente dois vértices de  $T_B$ , então existe um único vértice  $v$  em  $N^+(u) \setminus B$ . Portanto,  $B_v \neq B$  e  $u_B v$  é um arco de  $A_D^+(B)$ , de onde podemos concluir que  $u \in N^-(B_v)$  e  $u$  contribui com exatamente um arco para o conjunto  $A_D^-(B)$ . Além disso, como  $N^-(B_v)$  contém exatamente dois vértices. Logo, há um outro vértice  $w$ , que, como  $\Delta^+(D) = 3$ , contribui com no máximo três arcos

para  $A_D^-(B_v)$ , então existem no máximo quatro arcos em  $A_D^-(B_v)$ . O que é uma contradição com  $A_D^-(B) = 6$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ .  $\square$

Agora podemos verificar a Conjectura 4 para  $\delta^+(D) \geq 3$ . Recordamos que  $\mathcal{C}$  é o conjunto dos digrafos  $D$  com  $\delta^+(D) \geq 3$  e tais que  $D$  não contém uma 3-floresta de ciclos.

**Teorema 6.** [Welhan [46]] *Todo digrafo  $D$  tal que  $\delta^+(D) = 3$  contém uma 3-floresta de ciclos.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que o enunciado não vale. Logo,  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Seja  $D$  um digrafo em  $\mathcal{C}$  que minimiza o valor de  $|V(D)| + |A(D)|$ . Pelo Lema 18, temos que  $\Delta^+(D) = 3$ ,  $\delta^-(D) \geq 2$  e que  $D$  é 2-fortemente conexo. Se  $D$  é também 3-fortemente conexo, então para qualquer vértice  $u \in V(D)$ ,  $N^+(u)$  é 3-conexo à  $N^-(u)$ . Portanto, pelo Teorema 7 existem três  $(N^+(u), N^-(u))$ -caminhos disjuntos,  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , e os ciclos  $uP_1u, uP_2u, uP_3u$  formam uma 3-floresta de ciclos, uma contradição.

Então, como  $D$  é 2-fortemente conexo, para todo vértice  $y \in V(D)$ , existe um  $(N^+(y), N^-(y))$ -separador  $X$  com  $|X| = 2$ . No que segue, tome  $y$  como um vértice arbitrário de  $D$ . Seja  $X_y = \{x_y^1, x_y^2\}$  como o  $(N^+(y), N^-(y))$ -separador mais próximo. Note que  $\delta^+(D - X_y) \geq 3 - 2 = 1$ . Além disso, como o grau de saída de cada vértice é 3, toda componente fortemente conexa terminal de  $D - X_y$  é não trivial, isto é, tem pelo menos dois vértices. Seja  $H_y$  o conjunto de vértices de uma componente fortemente conexa terminal de  $D - X_y$  e seja  $B_y = V(D - X_y) \setminus H_y$ . Note que apesar de  $X_y$  ser único pelo Lema 11,  $H_y$  e  $B_y$  não são necessariamente únicos. A Afirmação 6.1 estabelece a unicidade de  $H_y$ .

As Afirmações 6.2, 6.3 e 6.4 estabelecem algumas propriedades locais de  $X_y, H_y$  e  $B_y$ . Finalmente, a Afirmação 6.5 se refere a todos os conjuntos  $\{B_y : y \in V(D)\}$  e estabelece como eles se relacionam globalmente.

**Afirmação 6.1.**  $D[H_y]$  é a única componente forte terminal de  $D - X_y$ .

*Demonstração.* Sejam  $G_0, \dots, G_m$  as componentes fortes terminais de  $D - X_y$ . Suponha que existe pelo menos uma componente fortemente conexa terminal além de  $D[H_y]$ , isto é,  $m > 0$ . Seja  $P_0$  um  $(y, X_y)$ -caminho em  $D$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $P_0$  passa pela componente  $G_0$  e por nenhuma outra. Tome  $s$  como o primeiro vértice de  $P_0$  em  $G_0$ , e considere  $G'_0$  o digrafo obtido de  $G_0$  pela adição de um vértice  $t$  com a propriedade de que todo arco que originalmente sai de  $G_0$  e chega a  $X_y$  é copiado, mas substituído por um arco apontando para  $t$ . Formalmente,  $G'_0$  é tal que,  $V(G'_0) = V(G_0) \cup \{t\}$  e  $A(G'_0) = A(G_0) \cup \{gt : gx \in A(D), g \in V(G_0), x \in X_y\}$ . Não é difícil ver que para todo  $v \in V(G'_0) \setminus \{t\}$ , temos  $d_{G'_0}(v) \geq 2$  e existe um  $(v, t)$ -caminho em  $G'_0$  ou

seja,  $G'_0$  é  $t$ -convergente. Então, pelo Lema 16 aplicado a  $G'_0$ , concluímos que existe um  $st$ -caminho  $P \subset G'_0$  e um ciclo  $C \subset G'_0 - \{t\}$  tal que  $|V(P) \cap V(C)| = 1$ . Seja  $P_1$  o caminho  $P - t$ . Sem perda de generalidade, o vértice final de  $P_1$  domina  $x_y^1 \in X_y$ . Seja  $Q$  um  $x_y^1 y$ -caminho em  $D - x_y^2$ . Então, a união dos ciclos  $P_0|s \cup P_1 Q$  e  $C$  forma uma 2-floresta de ciclos  $F$ . Adicionando um ciclo  $C'$  de  $G_1$ , obtemos uma 3-floresta de ciclos  $C' \cup F$  (veja a Figura 2.13).  $\square$

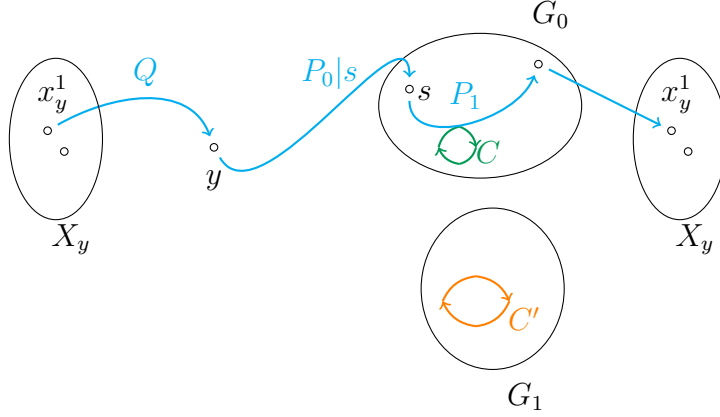


Figura 2.13: A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.1. O  $(N^+(y), X_u)$ -separador  $X_y$  é ilustrado duas vezes, com a finalidade de evitar um conflito de informações visuais no desenho ao representarmos o ciclo  $P_0|s \cup P_1 Q$  destacando o caminho que chega e o caminho que sai de  $x_y^1$ .

Note que como  $H_y$  é unicamente definido,  $B_y$  também é. A próxima afirmação é semelhante à hipótese da Proposição 15. No que segue, considere a coleção

$$\mathcal{N} = \{N_{D-X'}^*(v') : |X'| = 2 \text{ e } v' \in V(D) \setminus X'\}.$$

**Afirmação 6.2.**  $H_y$  é minimal em  $\mathcal{N}$ .

*Demonstração.* Note que  $H_y \in \mathcal{N}$ , uma vez que  $H_y = \{N_{D-X_y}^*(v') : v' \in H_y\}$ . Suponha, por contradição, que  $N \in \mathcal{N}$  é um subconjunto próprio de  $H_y$  e sejam  $v'$  e  $X'$  com  $|X'| = 2$  e  $v' \in V(D) \setminus \{X'\}$  tais que  $N = N_{D-X'}^*(v')$ . Podemos supor que  $N$  é minimal, isto é,  $N' \not\subseteq N$  para todo  $N' \in \mathcal{N}$ . Note que isto implica que  $D[N]$  é fortemente conexo, caso contrário  $N$  admitiria uma componente terminal  $D_N$ , tal que para todo vértice  $v' \in V(D_N)$ ,  $N_{D-X'}^*(v') \subseteq V(D_N)$  e portanto,  $N_{D-X'}^*(v') = V(D_N)$ . Como  $N$  é fortemente conexo, existe um vértice  $x' \in X' \setminus X_y$ , caso contrário  $X' = X_y$  e  $N = H_y$ , uma contradição, pois  $N \subsetneq H_y$ .

Podemos aplicar o Lema 13 com  $u = x'$  e concluir que existem três  $(N^+(y), X_y \cup \{x'\})$ -caminhos disjuntos,  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Sem perda de generalidade, assumamos que  $x_y^i$  é o vértice final de  $P_i$  para  $i = 1, 2$  e  $x'$  é o vértice final



de  $P_3$ . Como  $D$  é 2-fortemente conexo, então existem dois  $(X_y, N^-(y))$ -caminhos disjuntos,  $Q_1$  e  $Q_2$ , com vértice inicial  $x_y^1$  e  $x_y^2$ , respectivamente. O caminho  $Q_i$  intersecta  $P_j$  apenas nos vértices de  $X_y$  para  $i, j \in \{1, 2\}$ , pois, caso contrário, se intersectariam em um vértice  $v \notin X_y$ , e então  $P_j|v \cup v|Q_i$  seria um passeio de  $N^+(y)$  até  $N^-(y)$  que não intersecta  $X_y$ , uma contradição. Se  $P_1 \cap N = P_2 \cap N = \emptyset$ , então os ciclos  $yP_1 \cup Q_1y$  e  $yP_2 \cup Q_2y$  formam uma 2-floresta de ciclos e juntamente com um ciclo de  $D[N]$ , obtemos uma 3-floresta de ciclos. Note que, como  $|X'| = 2$ , então há no máximo dois  $(N, X_y)$ -caminhos disjuntos e portanto,  $N$  não é 3-conexo a  $X_y$ . Logo, podemos assumir que  $P_2 \cap N \neq \emptyset$ . Como  $P_3$  contém  $x'$ ,  $P_2$  deve conter o único vértice, digamos  $x''$  em  $X' \setminus \{x\}$ , e portanto,  $P_1$  é disjunto de  $N$ . Note que  $P_1$  e  $x''|P_2$  são caminhos disjuntos que terminam em  $X_y$ . Seja  $s$  o primeiro vértice de  $P_2$  em  $N$ . Note que  $X'$  deve ser o  $(N^+(s), X_y)$ -separador mais próximo, caso contrário, existiria um  $(N^+(s), X_y)$ -separador  $Y \neq X'$  tal que  $N_{D-Y}^*(S)$  é um subconjunto próprio de  $N$ , o que contradiz a minimalidade de  $N$ . Pelo Lema 13 com  $u \in N^-(s) \cap N$  ( $u$  existe uma vez que  $D[N]$  é fortemente conexo), existem três  $(N^+(s), X' \cup \{u\})$ -caminhos disjuntos  $R_1, R_2, R_3$ . Podemos assumir que  $R_1$  termina em  $u$  e  $R_2$  termina em  $x''$ . Logo, os ciclos  $yP_1 \cup Q_1y$  e  $yP_2|sR_2 \cup x''|P_2 \cup Q_2y$  formam a 2-floresta de ciclos  $F$ . O ciclo  $C = sR_1s$  intersecta  $F$  precisamente em  $s$ , assim  $C \cup F$  é uma 3-floresta de ciclos (veja a Figura 2.14).  $\square$

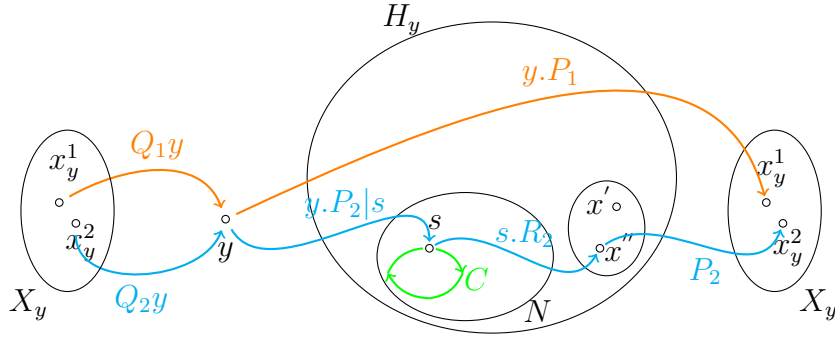


Figura 2.14: A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.2.

Agora usamos a Afirmação 6.2 para mostrar que podemos encontrar caminhos e ciclos em  $D[H_y]$  de forma semelhante aos encontrados na Proposição 15.

**Afirmação 6.3.** *Para todo  $w \in H_y$ , há dois  $(w, X_y)$ -caminhos  $Q_1, Q_2 \subset G[H_y \cup X_y]$  e um ciclo  $C \subset G[H_y]$  que se intersectam exatamente em  $w$ .*

*Demonstração.* Pela Afirmação 6.2,  $X_y$  é o  $(N^+(w), X_y)$ -separador mais próximo, caso contrário, existiria um  $(N^+(w), X_y)$ -separador  $X' \neq X$ , tal

que  $N_{D-X'}^*(w) \subsetneq H_y$ . Como  $D[H_y]$  é fortemente conexo, podemos tomar  $u \in N^-(w) \cap H_y$  e, pelo Lema 13, existem três  $(N^+(w), X_y \cup \{u\})$ -caminhos disjuntos  $P_1, P_2, P_3$ . Podemos assumir que o vértice final de  $P_3$  é  $u$ . Então, definimos os caminhos  $Q_1 = wP_1$ ,  $Q_2 = wP_2$  e o ciclo  $C = wP_3w$  são como descrevemos (veja a Figura 2.15).  $\square$

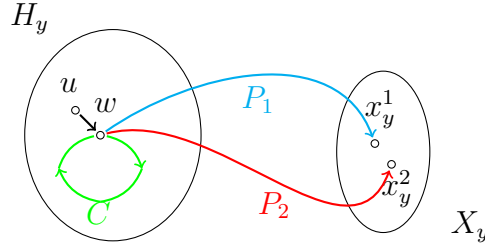


Figura 2.15: Os caminhos e ciclo garantidos pela Afirmação 6.3.

A Afirmação 6.3 mostra que o digrafo induzido  $D[H_y]$  contém muitos elementos úteis para formar a estrutura de uma 3-floresta de ciclos. A Afirmação 6.4 mostra que o restante do digrafo deve ser acíclico.

**Afirmação 6.4.**  $D[B_y \cup X_y]$  é acíclico.

*Demonstração.* Note que  $D[B_y \cup X_y] = D \setminus D[H_y]$ . Suponha, por contradição, que  $D \setminus D[H_y]$  contém uma componente fortemente conexa não trivial  $D_y$ . Afirmando que cada  $(X_y, H_y)$ -caminho em  $D$  deve passar por  $D_y$ . De fato, seja  $P_1$  um  $(X_y, H_y)$ -caminho que evita  $D_y$ , isto é, que não tem nenhum vértice em  $D_y$ . Seja  $w$  o vértice final de  $P_1$  (o único vértice de  $P_1$  em  $H_y$ ). Pela Afirmação 6.3, podemos obter um par de caminhos  $Q_1, Q_2$  e um ciclo  $C'$ . Podemos assumir que o vértice final de  $Q_1$  é o vértice inicial de  $P_1$ . Então, os ciclos  $P_1 \cup Q_1$  e  $C'$  formam uma 2-floresta de ciclos  $F$ , então, ao adicionarmos um ciclo  $C$  de  $D_y$ , obtemos uma 3-floresta de ciclos  $C \cup F$ , uma contradição.

Logo, podemos assumir que todo  $(X_y, H_y)$ -caminho em  $D$  passa por  $D_y$ . Seja  $t$  um novo vértice e considere  $D'_y$  o digrafo com  $V(D'_y) = N_{D-A_D^+(V(D_y))}^*(X_y) \cup \{t\}$  e  $A(D'_y) = A(D[V(D'_y)]) \cup \{gt : gv \in A(D), g \in V(D_y), v \notin V(D_y)\}$ . Observe que  $d_{D'_y}^+(u) \geq 2$  para todo  $u \in V(D'_y) \setminus \{t\}$ . Aplicando o Lema 16 a  $D'_y$  com  $s = x_y^1$ , concluímos que existe um  $(x_y^1, t)$ -caminho  $P \subset D'_y$  e um ciclo  $C \subset D'_y - t$  tal que  $|V(C) \cap V(P)| = 1$ . Seja  $P_1$  o caminho  $P - t$ . Seja  $v \notin V(D_y)$  um vértice dominado pelo vértice final de  $P_1$  e seja  $P_2$  um  $(v, H_y)$ -caminho. Seja  $w$  o vértice final de  $P_2$ .

Pela Afirmação 6.3, obtemos caminhos  $Q_1, Q_2$  e o ciclo  $C'$  tais que  $Q_1, Q_2$  e  $C'$  se intersectam exatamente em  $w$ . Podemos assumir que o vértice final de  $Q_1$  é  $x_y^1$ . Então, os ciclos  $C, C'$  e  $P_1P_2 \cup Q_1$  formam uma 3-floresta de ciclos em  $D$ , uma contradição (veja a Figura 2.16).  $\square$

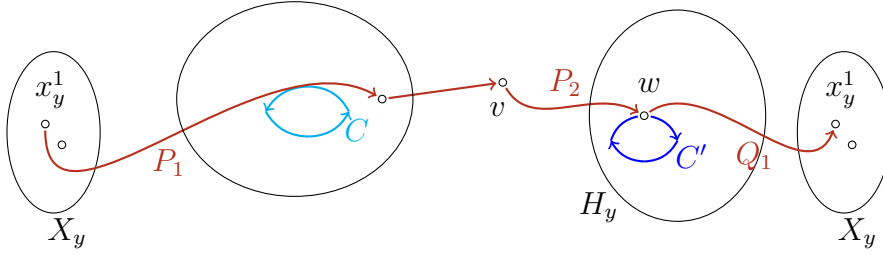


Figura 2.16: A 3-floresta de ciclos obtida na Afirmação 6.4.

Como  $y$  foi tomado de maneira arbitrária, a Afirmação 6.4 diz que  $D[B_y]$  é acíclico para todo  $y \in V(D)$ . Agora vamos analisar como os conjuntos  $B_y$ , com  $y \in V(D)$ , se relacionam entre si. Note que, para dois vértices distintos  $u \neq v$ , é possível que os conjuntos  $B_u$  e  $B_v$  sejam o mesmo. A próxima afirmação mostra que só há duas possibilidades: ou  $B_u = B_v$ , ou  $B_u \cap B_v = \emptyset$ .

**Afirmação 6.5.** *A coleção  $\mathcal{B} = \{B_y : y \in V(D)\}$  é uma partição acíclica de  $V(D)$ .*

*Demonstração.* Como  $D[H_y]$  é fortemente conexo e  $y$  não pertence a nenhum ciclo de  $D - X_y$ , então  $y \in B_y$  para todo  $y \in V(D)$ . Logo,  $\mathcal{B}$  cobre  $V(D)$ . Agora vamos mostrar que os conjuntos da coleção são disjuntos, isto é, se  $y \in B_u$  para algum vértice  $u \in V(D)$ , então  $B_y = B_u$ . Pela afirmação 6.4,  $D[B_u \cup X_u]$  é acíclico, portanto, não existem  $(N^+(y), N^-(y))$ -caminhos em  $D - X_u$ , pois todo ciclo de  $D$  deve passar por  $H_u$ . Assim, todo ciclo que passa por  $y \in B_u$  seria formado por  $(N^+(y), N^-(y))$ -caminhos em  $D - H_u$ . Entretanto, como  $y \in B_u$  e os arcos que saem de  $H_u$  apontam para  $X_u$ , todo ciclo que contém  $y$  e contém vértices de  $H_u$  necessariamente tem também vértices de  $X_u$ . Portanto,  $X_u$  é um  $(N^+(y), N^-(y))$ -separador. Por definição,  $X_y$  é o  $(N^+(y), N^-(y))$ -separador mais próximo. Pelo Lema 12, temos que  $X_y$  também é  $(N^+(y), X_u)$ -separador mais próximo.

Afirmamos que existem três  $(N^+(y), H_u \cup X_u)$ -caminhos disjuntos em  $D$ . Suponha por contradição que há no máximo dois tais caminhos. Então, há um  $(N^+(y), H_u \cup X_u)$ -separador  $X'$  com  $|X'| = 2$ . Em particular, pela definição de  $X_y$ , temos  $X' = X_y$ . Isso implica que  $H_y \subset D \setminus \{H_u \cup X_u\} = B_u$ . Então sejam  $P_1, P_2, P_3$  três  $(N^+(y), H_u \cup X_u)$ -caminhos disjuntos em  $D$ . Como  $X_y$  possui

dois vértices, pelo menos um desses caminhos não intercepta  $X_y$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $P_1 \cap X_y = \emptyset$ , isto é,  $P_1$  é um caminho em  $D - X_y$  e não pode terminar em  $X_u$ , pois  $X_y$  é um  $(N^+(y), X_u)$ -separador. Assim,  $P_1$  é um  $(N^+(y), H_u)$ -caminho e seja  $w$  o vértice final de  $P_1$ . Pela Afirmação 6.2,  $H_u$  é minimal, isso nos garante duas possibilidades: ou  $N_{D-X_y}^*(w)$  contém vértices de  $D \setminus H_u$ , e nesse caso, obrigatoriamente contém um vértice de  $X_u$ ; ou  $w$  alcança apenas vértices de  $H_u$ , e nesse caso, pela minimalidade de  $H_u$ ,  $N_{D-X_y}^*(w) = N_{D-X_u}^*(w)$ . No primeiro caso, se  $Q$  é um  $(w, X_u)$ -caminho em  $D - X_y$ , então  $P \cup Q$  é um  $(N^+(y), X_u)$ -caminho em  $D - X_y$ , o que violaria a definição de separador. No segundo caso, temos  $X_y = X_u$ , caso contrário, algum vértice de  $X_u$  poderia ser alcançado por  $w$ . Logo, pela Afirmação 6.1 temos  $H_y = H_u$  e também  $B_y = B_u$ .  $\square$

Dessa forma,  $\mathcal{B}$  é uma partição acíclica de  $V(D)$ . No entanto, para aplicar o Lema 21, precisamos mostrar que  $|N^-(B)| = 2$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ . De fato, como  $D[H_y]$  é uma componente fortemente conexa terminal de  $D - X_y$ , a cabeça de cada arco de  $A_D^+(H_y)$  está em  $X_y$ . Assim, como os conjuntos  $B_y$  e  $H_y$  particionam  $V(D - X_y)$ , então  $A_D^-(B_y) \subset A_D^+(X_y)$ . Além disso, como  $X_y$  é 2-conexo a  $B_y$ , ambos os vértices de  $X_y$  possuem caudas em  $A_D^-(B_y)$ . Portanto,  $N_D^-(B_y) = X_y$  e, em particular, possui precisamente dois vértices. Pelo Lema 21, não existe tal partição, uma contradição.  $\square$

## 2.3 A Conjectura de Hoàng–Reed para torneios

Em 2008, Havet, Thomassé e Yeo [19] verificaram a Conjectura 4 para a classe de torneios, provando um resultado ligeiramente mais forte, que garante a existência de uma  $\delta^+(D)$ -árvore de ciclos composta unicamente por triângulos, que chamamos de  $\delta^+(D)$ -árvore de triângulos. Os autores observaram que as técnicas desenvolvidas no artigo fornecem mais informações sobre torneios do que propriamente sobre ciclos em digrafos. Assim, os resultados desenvolvidos nesta seção não são considerados cruciais para a compreensão da Conjectura de Hoàng–Reed para digrafos gerais, mas podem ser úteis para lidar com outros problemas no caso especial de torneios, como, por exemplo, a Conjectura 5. Esta seção está subdividida em duas partes. Na subseção 2.3.1, nós discutimos um limitante inferior para o número máximo de componentes conexas de um grafo bipartido, e apresentamos um lema que será utilizado para a prova principal desta seção, que é apresentada na subseção 2.3.2

### 2.3.1 Componentes conexas em grafos bipartidos

Nesta subseção, apresentamos alguns resultados que serão utilizados como ferramental para a prova da Conjectura 4 para torneios. O lema a seguir, cujo a prova

será apresentada no Apêndice, e seu corolário fornecem um limitante inferior para a maior componente conexa de um grafo bipartido  $G$  em termos do número de arestas de  $G$ . Estes resultados serão aplicados ao grafo subjacente dos digrafos estudados.

**Lema 22.** *Seja  $k \geq 1$  e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e  $b_1, b_2, \dots, b_k$  duas seqüências de reais positivos e seja  $A = \sum_{i=1}^k a_i$  e  $B = \sum_{j=1}^k b_j$ . Seja  $q \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^k a_i b_i = \frac{AB}{2} + q$ . Então existe um  $i$  tal que  $a_i + b_i \geq \frac{A+B}{2} + \sqrt{2q}$ .*

**Corolário 1.** *Seja  $G = (V(G), E(G))$  um grafo bipartido com bipartição  $(A, B)$ . Se  $|E(G)| = \frac{|A||B|}{2} + q$ , em que  $q \geq 0$ , então existe uma componente em  $G$  de ordem pelo menos  $\frac{|E(G)|}{2} + \sqrt{2q}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  as componentes de  $G$ . Considere  $a_i = |A \cap Q_i|$  e  $b_i = |B \cap Q_i|$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Note que

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i \geq |E(G)| = \frac{|A||B|}{2} + q.$$

Pelo Lema 22, temos  $a_i + b_i \geq \frac{A+B}{2} + \sqrt{2q}$  para algum  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .  $\square$

A seguinte definição será utilizada no Lema 23, que será utilizado algumas vezes para provar o Teorema 26. Seja  $T$  uma árvore de triângulos, dizemos que um triângulo  $C$  é um *triângulo folha* se o digrafo obtido de  $T - A(C)$  pela remoção dos vértices isolados é também uma árvore de triângulos. Em outras palavras, um triângulo folha é um triângulo que possui apenas um vértice  $u$   $d^+(u) > 1$ .

**Lema 23.** *Sejam  $D$  um digrafo e  $T$  uma árvore de triângulos em  $D$ , e considere  $X, Y \subseteq V(T)$  tais que  $|X| + |Y| \geq |V(T)| + 2$ . Então, existe um triângulo  $C$  em  $T$  tal que as três árvores de triângulos disjuntas em  $T - A(C)$  podem ser definidas como  $T_1, T_2, T_3$  de forma que  $Y$  intercepte  $T_1$  e  $T_2$ , e  $X$  intercepte  $T_2$  e  $T_3$ .*

*Demonstração.* Dado um triângulo folha  $C$ , denotamos por  $T_C$  a árvore de triângulos tal que  $T = T_C \cup C$ . A demonstração segue por indução no número de triângulos de  $T$ . Como  $|X| + |Y| \geq |V(T)| + 2$ , então  $T$  não pode ser um único vértice, e portanto, contém pelo menos um triângulo. Suponha que  $T$  contém apenas um triângulo. Nesse caso,  $|V(T)| = 3$  e como  $X$  e  $Y$  são subconjuntos de  $V(T)$ , então  $|X| \leq 3$  e  $|Y| \leq 3$ . Como  $|X| + |Y| \geq |V(T)| + 2 = 5$ , então  $|X| = 3$  ou  $|Y| = 3$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $|X| = 3$ , e portanto  $|Y| \geq 2$  e a conclusão segue.

Agora suponha que  $T$  contém pelo menos dois triângulos e que o enunciado vale para todas as árvores de triângulos com menos triângulos que  $T$ . Suponha que existe um triângulo folha  $C$ .  $T_C$  é a árvore de triângulos tal que  $T = T_C \cup C$  e  $X, Y \subseteq V(T_C)$ . Tome  $X' = X \cap V(T_C)$  e  $Y' = Y \cap V(T_C)$ . Neste caso, claramente temos  $|X'| + |Y'| \geq |V(T_C)| + 2$ . Então, pela hipótese de indução, existe um triângulo  $C'$  em  $T_C$  de forma que as árvores de triângulos em  $T_C - A(C')$  podem ser rotuladas por  $T_C^1, T_C^2, T_C^3$  de forma que  $Y \cap V(T_C)$  intercepte  $T_C^1$  e  $T_C^2$  e  $X \cap V(T_C)$  intercepte  $T_C^2$  e  $T_C^3$ . Como  $C$  é um triângulo folha de  $T$ , então podemos tomar o triângulo  $C'$  em  $T$  que o lema será satisfeito pelas árvores de triângulos  $T_C^1, T_C^2, T_C^3$ .

Por outro lado, suponha que para todo triângulo folha vale  $|X \cap V(T_C)| + |Y \cap V(T_C)| < |V(T_C)| + 2$ . Como  $|V(T)| = |V(T_C)| + 2$  e  $|X| + |Y| \geq |V(T)| + 2$  então  $|X| + |Y| \geq |V(T_C)| + 4$ . Além disso, como  $X = (X \cap V(T_C)) \cup (X \setminus V(T_C))$  e  $Y = (Y \cap V(T_C)) \cup (Y \setminus V(T_C))$ , temos  $|X| = |X \cap V(T_C)| + |X \setminus V(T_C)|$  e  $|Y| = |Y \cap V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)|$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |X| + |Y| &= |X \cap V(T_C)| + |X \setminus V(T_C)| + |Y \cap V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)| \\ &< |V(T_C)| + 2 + |X \setminus V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)|. \end{aligned}$$

Portanto,  $|V(T_C)| + 4 < |V(T_C)| + 2 + |X \setminus V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)|$ , de onde concluímos que  $|X \setminus V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)| > 2$ . Logo,  $|X \setminus V(T_C)| + |Y \setminus V(T_C)| \geq 3$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $|X \setminus V(T_C)| \geq 2$  e  $|Y \setminus V(T_C)| \geq 1$ . Seja  $T_2$  a árvore de ciclos de apenas um vértice, que consiste em um vértice de  $Y \setminus V(T_C)$  e seja  $T_3$  a árvore de ciclos formada apenas por um vértice de  $X \setminus (V(T_C) \cup V(T_2))$ . Podemos tomar  $T_1 = T_C$ . Assim,  $T - A(C)$  consiste nas árvores  $T_1, T_2$  e  $T_3$ . Por definição,  $X$  intercepta  $T_2$  e  $T_3$  e  $Y$  intercepta  $T_2$ . Se  $Y$  também intercepta  $T_1$ , não há mais o que mostrar. Caso contrário, como  $|X| + |Y| \geq |V(T)| + 2$ , temos  $Y = T_2 \cup T_3$  e  $X = V(T)$ , e podemos renomear  $T_1, T_2, T_3$  para, respectivamente,  $T_a, T_b, T_c$ . Isso conclui a prova.  $\square$

### 2.3.2 Árvores de triângulos em torneios

Os teoremas a seguir são ferramentas importantes utilizadas para provar que a Conjectura 4 vale para Torneios. A demonstração do teorema 24 foge ao escopo desse texto e será omitida, mas pode ser encontrada no artigo original de Tewes e Volkman [41].

**Teorema 24** (Tewes–Volkman [41]). *Seja  $D$  um torneio  $p$ -partido com partição  $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ . Então existe uma partição  $Q_1, Q_2, \dots, Q_l$  de  $D$  tal que*

- *cada  $Q_i$  induz um conjunto independente ou um subdigrafo fortemente conexo,*
- *não há arcos de  $Q_j$  a  $Q_i$  para todo  $j > i$ , e há um arco de  $Q_i$  a  $Q_{i+1}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ .*

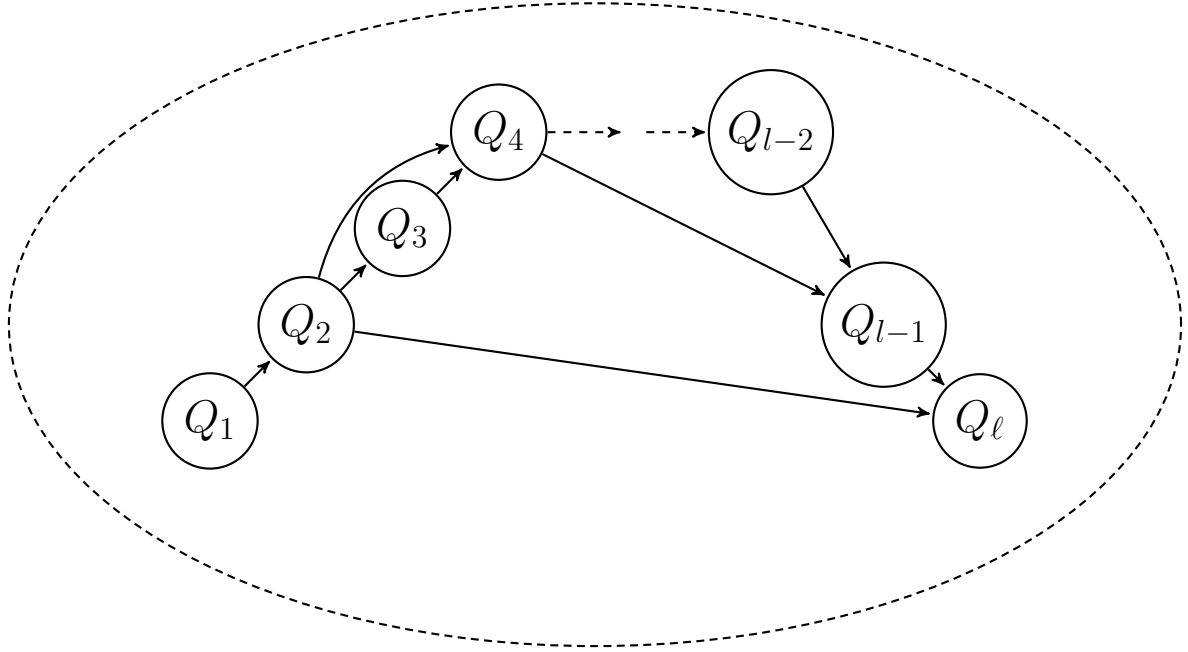


Figura 2.17: Uma partição conforme o Teorema 24.

Também fazemos uso do seguinte resultado de Guo e Volkman [15]. A prova deste resultado também é apresentada no Apêndice.

**Teorema 25.** (Guo–Volkman [15]) *Seja  $D$  um torneio  $p$ -partido fortemente conexo com partição  $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ , existe um vértice  $x \in V_i$  que pertence a um  $k$ -ciclo para todo  $k \in \{3, \dots, p\}$ .*

Finalmente, podemos provar o resultado principal desta seção. A seguinte notação será útil para essa demonstração. Dados um digrafo  $D$  e  $U, W \subseteq V(D)$ , denotamos por  $D[U, W]$  o digrafo bipartido consistindo dos arcos que vão de  $U$  para  $W$ .

**Teorema 26** ([19]). *Todo torneio  $D$  possui uma  $\delta^+(D)$ -árvore de triângulos.*

*Demonstração.* Podemos supor que  $D$  é um torneio fortemente conexo, caso contrário, consideramos a componente fortemente conexa terminal de  $D$ . Seja  $T$  uma

árvore de triângulos de tamanho máximo em  $D$ . Note que se  $T$  possui  $k$  triângulos, então  $|V(T)| = 2k + 1$ . Suponha, por contradição, que  $|V(T)| < 2\delta^+(D) + 1$ . Seja  $D^{MT}$  o digrafo obtido a partir de  $D$  ao excluirmos todos os arcos que possuem ambas extremidades em  $V(T)$  (veja a Figura 2.21). Note que  $D^{MT}$  é um torneio multipartido (orientação de um grafo multipartido completo), em que uma das partes é  $V_1 = V(T)$  e as partes restantes são formadas pelos conjuntos de vértices unitários de  $V(D) - V(T)$ .

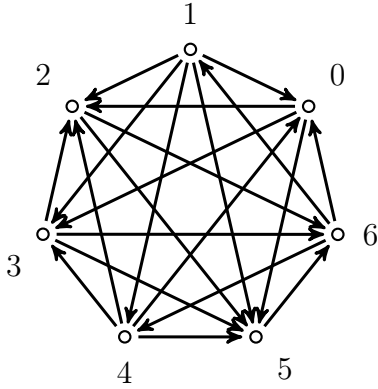


Figura 2.18: Um torneio  $|V(D)| = 7$  e  $\delta^+(D) = 2$ .

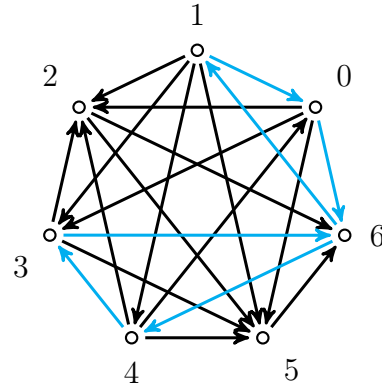


Figura 2.19: Em azul, destacamos  $T$ , a maior árvore de triângulos em  $D$ .

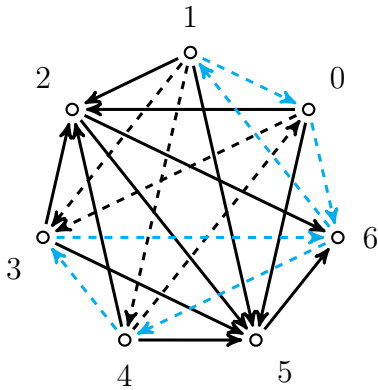


Figura 2.20: Remoção de arcos com ambos extremos em  $T$ .

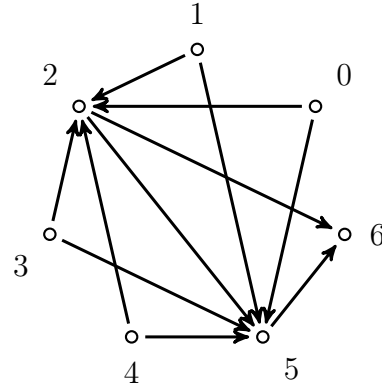


Figura 2.21:  $D^{MT}$ , o torneio multipartido obtido de  $D$ .

Sejam  $\mathcal{P} = (V_1, V_2, \dots, V_p)$  os conjuntos da partição de  $D^{MT}$  definidos de forma que  $V_1 = V(T)$  e  $|V_i| = 1$  para todo  $i > 1$ . Como  $D^{MT}$  é multipartido, podemos considerar  $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_l\}$  uma nova partição de  $V(D^{MT})$  conforme descrita pelo Teorema 24. Primeiramente, suponha que existe algum índice  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $Q_i \cap V_1 \neq \emptyset$  e  $Q_i \not\subseteq V_1$ . Como  $Q_i \not\subseteq V_1$  e  $Q_i \cap V_1 \neq \emptyset$ , o subdigrafo  $D^{MT}[Q_i]$  possui pelo menos um arco, e então, pelo Teorema 24 é fortemente conexo. Assim,  $Q_i$  contém pelo menos dois conjuntos de  $\mathcal{P}$ , e portanto, tem pelo menos um ciclo. No



entanto, como  $V_1$  é um conjunto independente, para que um vértice qualquer de  $V_1$  pertença a um ciclo  $C$  em  $D^{MT}$ , é necessário que um vértice em  $V(D^{MT}) \setminus V_1$  pertença a  $C$ . Em particular, pode-se notar que pelo menos três conjuntos de  $\mathcal{P}$  interceptam  $Q_i$ , pois o subdigrafo  $D^{MT}[Q_i]$  não seria fortemente conexo se houvessem apenas dois conjuntos de  $\mathcal{P}$  não disjuntos a  $Q_i$ , visto que  $|V_j| = 1$  para todo  $j > 1$ . Pelo Teorema 25, existe um triângulo  $T'$  em  $D^{MT}[Q_i]$  contendo exatamente um vértice de  $V_1$ . Mas então  $T \cup T'$  é uma árvore de triângulos em  $D$ , o que contradiz a maximalidade de  $T$ . Portanto, podemos assumir que para todo  $i$ , temos que  $Q_i$  é um subconjunto de  $V_1$ , ou  $Q_i \cap V_1 = \emptyset$ . Afirmamos que

$$Q_1 \cap V_1 \neq \emptyset \text{ e } Q_l \cap V_1 \neq \emptyset,$$

De fato, como  $D$  é fortemente conexo, para todo  $i$ , existe arcos entrando e saindo de  $Q_i$ . No entanto, pelo Teorema 24, não há arcos entrando em  $Q_1$  nem arcos saindo de  $Q_l$ , o que implica que esses arcos foram removidos de  $D$  quando construimos  $D^{MT}$ . Consequentemente, obtemos  $Q_1 \subset V_1$  e  $Q_l \subset V_1$ , portanto,  $Q_1 \cup Q_l \subset V_1$ . Considere agora o digrafo  $D' = D[V_1]$ . Se existe um vértice  $x \in Q_l$  com  $d_{D'}^+(x) \leq \frac{|V_1| - 1}{2}$ , então  $d_D^+(x) \leq \frac{|V_1| - 1}{2}$ , visto que  $Q_l \subset V_1$  e além disso,  $Q_l$  não tem arcos saindo para nenhum outro  $Q_j$ , portanto, o grau de saída de  $x$  é o mesmo em  $D'$  e em  $D$ . Dessa forma,  $d_D^+(x) \leq \frac{|V_1| - 1}{2}$  se e somente se  $|V(T)| \geq 2d^+(x) + 1$ . De onde se conclui que  $d_D^+(x) \leq \frac{|V_1| - 1}{2}$  implica que  $|V(T)| \geq 2\delta^+(D) + 1$ , uma contradição. Então, podemos concluir que  $d_D^+(x) > \frac{|V_1| - 1}{2}$ . Isso implica que  $d_D^+(x) \geq \frac{|V_1| + 1}{2}$ , para todo  $x \in Q_l$ , pois como  $T$  é uma árvore de triângulos, que  $|V_1|$  é ímpar. Denote por  $G_1$  o grafo bipartido,  $V(G_1) = V_1$ , com bipartição  $D^{MT}[Q_l, V_1 \setminus Q_l]$ . Obtemos a seguinte relação:

$$|Q_l| \frac{|V_1| + 1}{2} \leq \sum_{u \in Q_l} d_{D'}^+(u) = \binom{|Q_l|}{2} + |A(G_1)| = \frac{|Q_l|(|Q_l| - 1)}{2} + |A(G_1)| \quad (2.4)$$

Isso implica que

$$|A(G_1)| \geq |Q_l| \left( \frac{|V_1| + 1}{2} - \frac{(|Q_l| - 1)}{2} \right) = \frac{|Q_l|(|V_1| - |Q_l|)}{2} + |Q_l|.$$

Pelo Corolário 1, há uma componente  $C^*$  em  $G_1$  de ordem pelo menos  $\frac{|V_1|}{2} + \sqrt{2|Q_l|} \geq |V_1|/2 + \sqrt{2}$ .

Como  $|C^*|$  é um número inteiro, temos  $|C^*| \geq |V_1|/2 + 3/2$ . No que segue, dividimos a prova dependendo do valor de  $|Q_{l-1}|$  ou se  $Q_{l-2} \not\subseteq V_1$  ou  $Q_{l-2} \subseteq V_1$ . Primeiramente, considere  $|Q_{l-1}| > 1$  ou  $Q_{l-2} \not\subseteq V_1$  (ou ambos). Consideramos inicialmente o caso em que  $|Q_{l-1}| > 1$ . Sob esta condição, tomamos quaisquer dois

vértices distintos em  $Q_{l-1}$  e definimos  $Z = \{z_1, z_2\}$ . Por outro lado, se  $Q_{l-2} \not\subseteq V_1$  e  $|Q_{l-1}| = 1$  tome  $Z$  formado por quaisquer dois vértices distintos em  $Q_{l-1} \cup Q_{l-2}$ . Pela definição de  $Z$  e de cada  $Q_i$ , notamos que  $Z \cap V_1 = \emptyset$ , pois  $Q_{l-1} \subsetneq V_1$ . Além disso, todos os arcos de  $V_1 \setminus Q_l$  até  $Z$  e de  $Z$  até  $Q_l$  existem, pois  $V_1$  é completo. Nosso objetivo agora é definir os conjuntos  $X$  e  $Y$  para utilizar o Lema 23. Para tanto, defina  $X = Y = V(C^*)$ . Note que

$$|X| + |Y| = 2|C^*| \geq 2 \frac{|V_1| + 3}{2} = |V_1| + 3 \geq |V_1| + 2.$$

Pelo Lema 23, há um triângulo  $C$  em  $T$ , tal que as três árvores de triângulos disjuntas,  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , de  $T - A(C)$  se interceptam em  $X$  (já que  $X = Y$ ). Como  $X$  é o conjunto de vértices de uma componente em  $G_1$ , existem arcos,  $u_1v_1$  e  $u_2v_2$ , de  $G_1$  tais que o arco  $u_1v_1$  conecta  $T_3$  a  $T_j$ , enquanto  $u_2v_2$  conecta  $T_{3-j}$  a  $T_j \cup T_3$ , com  $j \in \{1, 2\}$ . Suponha que  $u_1, u_2 \in Q_l$  e  $v_1, v_2 \in V_1 \setminus Q_l$ . Agora se consideramos o grafo  $T - A(C)$  juntamente com os vértices  $z_1$  e  $z_2$ , e adicionado os triângulos  $v_1z_1u_1v_1$  e  $v_2z_2u_2v_2$ , obtemos uma árvore de triângulos em  $D$  com mais triângulos do que  $T$ , uma contradição com a maximalidade de  $T$ .

Então podemos assumir que  $|Q_{l-1}| = 1$  e  $Q_{l-2} \subseteq V_1$ . Vale destacar que  $k > 3$ , pois caso contrário  $|V(D) \setminus V(T)| = 1$  e teríamos uma contradição. Isso implica que  $k > 4$  pois  $Q_1 \subseteq V_1$ , e portanto,  $Q_2 \not\subseteq V_1$ . Agora considere  $Q_{l-1} = \{z_1\}$  e seja  $z_2 \in Q_{l-3}$  um vértice arbitrário. Denote por  $G_2 = D[Q_l, Q_{l-2}]$  e considere  $A = Q_l \cup Q_{l-2}$ ,  $B = V_1 \setminus A$ , e  $A(G_2) = \{uv \mid u \in A, v \in B, uv \in A(D)\}$ .

Recorde que  $d_{D'}^+(x) \geq \frac{|V_1| + 1}{2}$  para todo  $x \in Q_l$ . Analogamente, como  $|Q_{l-1}| = 1$ , temos que  $d_{D'}^+(y) \geq \frac{|V_1| + 1}{2} - 1$  para todo  $y \in Q_{l-2}$ . Portanto, temos:

$$|A| \frac{|V_1| + 1}{2} - |Q_{l-2}| \leq \sum_{u \in A} d_{D'}^+(u) = \binom{|A|}{2} + |A(G_2)| \quad (2.5)$$

Isso implica que

$$|A(G_2)| \geq \frac{|A|(|V_1| - |A|)}{2} + |A| - |Q_{l-2}|,$$

Pelo Corolário 1, há uma componente em  $G_2$  de ordem pelo menos  $\frac{|V_1|}{2} + \sqrt{2|Q_l|}$ , uma vez que  $|A| - |Q_{l-2}| = |Q_l|$ . Podemos afirmar que  $|Q_l| > 1$ , caso contrário, o único vértice em  $Q_{l-1}$  tem grau de saída 1, já que existe um arco de  $Q_{l-1}$  para  $Q_l$ , o que é uma contradição. Assim, há uma componente em  $G_2$  de ordem pelo menos  $\frac{|V_1|}{2} + 2$  e, portanto, pelo menos  $\frac{|V_1|}{2} + \frac{5}{2}$ , já que  $|V_1|$  é ímpar. Tome  $X = V(C_{G_1})$ , em que  $C_{G_1}$  é uma componente de  $G_1$  de ordem  $|C_{G_1}| \geq \frac{|V_1|}{2} + \frac{3}{2}$ , e  $Y = V(C_{G_2})$ ,

em que  $C_{G_2}$  é uma componente em  $G_2$  de ordem  $|C_{G_2}| \geq \frac{|V_1|}{2} + \frac{5}{2}$ . Novamente, pelo Lema 23 há um triângulo  $C$  em  $T$ , tal que as três árvores de triângulos disjuntas,  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , de  $T - A(C)$  têm a seguinte propriedade: O conjunto  $Y$  intercepta  $T_1$  e  $T_2$  e o conjunto  $X$  intercepta  $T_2$  e  $T_3$ . Pela definição de  $X$  e  $Y$  podemos concluir que existem arcos,  $u_1v_1 \in A(G_1)$  e  $u_2v_2 \in A(G_2)$ , tais que o arco  $u_1v_1$  conecta  $T_3$  e  $T_j$ , em que  $j \in \{1, 2\}$  e  $u_2v_2$  conecta  $T_{3-j}$  e  $T_j \cup T_3$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $u_1, u_2 \in Q_l$  e  $v_1, v_2 \in V_1 \setminus Q_l$ . Agora se consideramos o digrafo  $T - A(C)$ , juntamente com os vértices  $z_1$  e  $z_2$ , e adicionado os triângulos  $v_1z_1u_1v_1$  e  $v_2z_2u_2v_2$ , obtemos uma árvore de triângulos em  $D$  com mais triângulos do que  $T$ , novamente uma contradição à maximalidade de  $T$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Feedback Arc Sets Minimais

Neste capítulo, vamos abordar um problema envolvendo grau de saída mínimo de digrafos e conjuntos de arcos especiais chamados *feedback arc sets*.

Um conjunto de arcos  $F \subseteq A(D)$  é um *feedback arc set (FAS)* de  $D$  se  $D - F$ , o digrafo obtido de  $D$  pela remoção dos arcos em  $F$ , não contém ciclos. Além disso, dizemos que um FAS  $F$  é *minimal* se não existe nenhum outro FAS  $F'$  em  $D$  tal que  $F' \subsetneq F$ , e é *mínimo* quando não existe nenhum outro FAS  $F'$  em  $D$  tal que  $|F'| < |F|$  (veja a Figura 3.1).



Figura 3.1: Em azul, ilustramos um FAS minimal e um FAS mínimo.

Note que para todo digrafo  $D$ ,  $A(D)$  é um FAS. Então, naturalmente estamos interessados em FAS mínimos ou FAS minimais. Determinar o FAS mínimo de um digrafo foi originalmente proposto por Runyon, que o citou como problema de Feedback Cut Set [35] e é um problema  $\mathcal{NP}$ -difícil [24]. Aneja [1] descreve diversas aplicações para o problema de FAS mínimo, como por exemplo no estudo de sistemas de grande escala que podem ser modelados através de redes direcionadas [31]. Há também aplicações em problemas da economia (problema da triangulação), na arqueologia (relações ótimas de ancestralidade) e no gerenciamento de operações [22, 33].

Tucker [45] desenvolveu uma formulação para o problema usando programação inteira, enquanto Younger [48] fez uma análise teórica da estrutura de um FAS. Lawler [26] propôs uma formulação para o problema de FAS mínimo em um Problema

Quadrático de Alocação (QAP), e algoritmos de aproximação foram propostos na literatura por Seymour [36] e Even [13].

Em determinadas classes de digrafos, encontrar um FAS minimal pode ser uma tarefa simplificada pelo uso de algumas características especiais. Por exemplo, se um digrafo tem uma *fonte* (ou um *sumidouro*), isto é, um vértice no qual os arcos incidentes sobre ele são todos de entrada (ou todos de saída), então nenhum desses arcos pode pertencer a um FAS minimal, e se um vértice tiver apenas um arco de entrada e um arco de saída, então qualquer FAS minimal que contém um destes arcos necessariamente não pode conter o outro.

### 3.1 A Conjectura de Lichiardopol

O problema que estamos interessados neste trabalho é a seguinte conjectura, que foi apresentada por Blair D. Sullivan [40] em um manuscrito sobre problemas relacionados à Conjectura de Caccetta–Häggkvist.

**Conjectura 5.** (Lichiardopol [3, 40]) *Todo digrafo  $D$  possui um feedback arc set minimal cujo digrafo induzido contém um caminho de comprimento  $\delta^+(D)$ .*

Neste texto, contribuimos com a verificação desta Conjectura para todo digrafo  $D$  com  $\delta^+(D) = 2$  e construímos uma família de contraexemplos para os digrafos com grau de saída mínimo pelo menos 3 (Seção 3.1.2). Nós ainda realizamos testes computacionais para torneios fortemente conexos que possuem até dez vértices (Seção 3.3). Estes resultados foram apresentados na forma de pôster no Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais (WPCCG) [34]. Além disso, analisamos digrafos que possuem ciclos hamiltonianos com uma propriedade especial, que definimos como *ciclos triangulados* (Proposição 3), e mostramos que a conjectura de Lichiardopol vale para todos digrafos que satisfazem essa propriedade (veja a Seção 3.2.1).

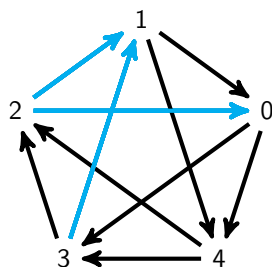


Figura 3.2: Um FAS minimal sem caminhos de comprimento  $\delta^+(D) = 2$ .

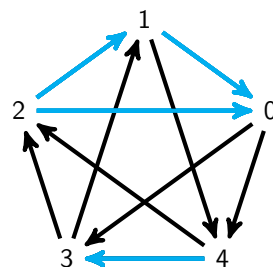


Figura 3.3: Um FAS minimal que possui um caminho de comprimento  $\delta^+(D) = 2$ .

Motivados pela Conjectura 5, neste capítulo, dizemos que um FAS  $F$  em um digrafo  $D$  é *bom* se  $F$  é um FAS minimal tal que  $D[F]$  possui um caminho de comprimento  $\delta^+(D)$ .

### 3.1.1 Uma caracterização para FAS minimais

A proposição a seguir introduz uma propriedade relevante para FAS minimais.

**Proposição 27.** *Seja  $D$  um digrafo. Se  $F$  é um FAS minimal de  $D$ , então para todo arco  $uv \in F$ , existe um  $vu$ -caminho em  $D - F$ .*

*Demonstração.* Seja  $F$  um FAS minimal de  $D$  e tome  $uv \in F$ . Pela minimalidade de  $F$ , o conjunto  $F' = F \setminus \{uv\}$  não é um FAS, e portanto,  $D - F'$  contém um ciclo  $C$ . Como  $F$  é um FAS, temos  $C \not\subseteq D \setminus F$ . Logo,  $uv \in A(C)$  e  $C \setminus \{uv\}$  é um  $vu$ -caminho em  $D - F$ , como desejado.  $\square$

Introduzimos a seguinte definição que explora essa propriedade: Um conjunto de arcos  $R \subseteq A(D)$  é um *conjunto retornável* se para todo arco  $uv \in R$ , existe um  $vu$ -caminho em  $D - R$  (veja as Figuras 3.4 e 3.5). Tal caminho é chamado de *caminho de retorno* para  $uv$ . Um caminho  $P$  é um *caminho retornável* quando  $E(P)$  é um conjunto retornável. Uma consequência da Proposição 27 é que todo FAS minimal é um conjunto retornável. Em particular, todo FAS minimal é um conjunto retornável maximal. De fato, seja  $F$  um FAS minimal. Se  $F$  não é retornável maximal, então existe um arco  $uv \in A(D) \setminus F$  tal que  $F' = F \cup \{uv\}$  é um conjunto retornável. Neste caso, existe um  $vu$ -caminho  $P \subseteq D - F' = (D - F) - uv \subsetneq D - F$ . Como  $uv \notin F$  e  $P \not\subseteq F$ , então  $uvP$  é um ciclo em  $D - F$ . Uma contradição, pois  $F$  é FAS.

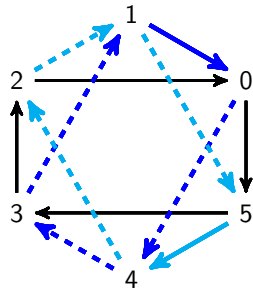


Figura 3.4: O conjunto  $R = \{10, 54\}$  é retornável. Ilustramos os arcos de  $R$  em azul e azul claro. Para cada arco de  $R$  pontilhamos o caminho de retorno com a mesma cor do arco.

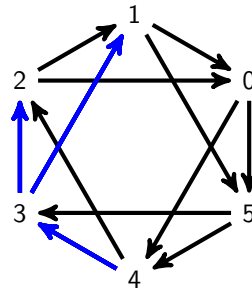


Figura 3.5: O conjunto  $R = \{43, 32, 31\}$  não é retornável. Todo 34-caminho em  $D$  possui arcos de  $R$ , portanto, não existe caminho de retorno para o arco 43.

A seguinte propriedade de FAS minimais, apesar de não usada neste texto, é bastante interessante.

**Proposição 28.** *Seja  $D$  um digrafo. Se  $F$  é uma FAS minimal em  $D$ , então  $D[F]$  é acíclico.*

*Demonstração.* Seja  $F$  um FAS minimal em  $D$ . Suponha por contradição que  $D[F]$  contém um ciclo  $C$ . Como  $A(C) \subseteq F$ , todo arco  $uv \in C$ , é tal que  $uv \in F$ . Logo, pela Proposição 27, para todo  $uv \in A(C)$ , existe um caminho de retorno  $P_{vu}$  em  $D - F$ . Note que  $\left( \bigcup_{uv \in A(C)} P_{vu} \right)$  é uma trilha fechada (que começa e termina no mesmo vértice), que consequentemente, contém um ciclo em  $D - F$  (veja a Figura 3.6). Uma contradição, pois  $F$  é um FAS.  $\square$

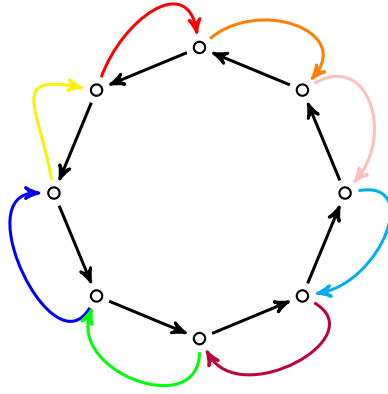


Figura 3.6: Em preto destacamos o ciclo de  $F$ . Nas demais cores, representamos os caminhos de retorno para cada arco de  $F$ .

A proposição a seguir diz que a Conjectura 5 implica na Conjectura 4 que, por sua vez, implica na Conjectura 1.

**Proposição 29.** *Se  $D$  é um digrafo que possui um FAS bom, então  $D$  possui uma  $\delta^+(D)$ -floresta de ciclos.*

*Demonstração.* Seja  $D$  um digrafo e tome  $k = \delta^+(D)$ . Suponha que existe um FAS minimal  $F$  em  $D$  tal que  $D[F]$  contém um caminho  $P = v_0 \cdots v_d$  com comprimento pelo menos  $k$ . Pela Proposição 27, para todo arco  $v_{i-1}v_i \in A(P)$  com  $i = 1, \dots, d$ , existe um caminho de retorno  $P_i$ . Afirmamos que tais caminhos são internamente disjuntos. De fato, suponha, por contradição, que pelo menos um par desses caminhos se interceptam internamente em vértices e tome  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  tais que  $V(P_i) \cap V(P_j) \setminus \{v_i\} \neq \emptyset$ , com  $i < j$  e  $j - i$  mínimo. Seja  $u$  o primeiro vértice de  $P_i$  em  $P_j$ . Note que  $C = P_i|u \cup \left( \bigcup_{l=i+1}^{j-1} P_l \right) \cup u|P_j$  é um ciclo em  $D - F$  (veja a Figura 3.8). Mas isso é uma contradição, pois  $F$  é FAS. Logo,  $P \cup \left( \bigcup_{i=1}^d P_i \right)$  forma uma  $d$ -árvore de ciclos. Como  $d \geq k$ ,  $D$  contém uma  $k$ -árvore de ciclos.  $\square$

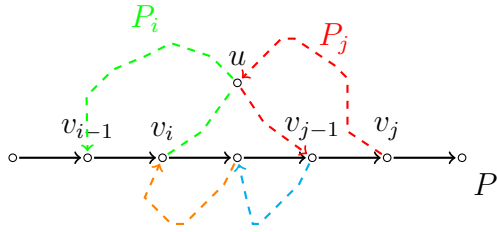


Figura 3.7: Os caminhos de retorno dos arcos de  $P$ .

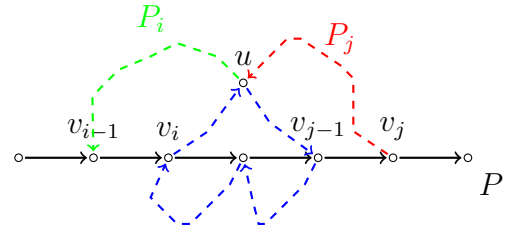


Figura 3.8: Ciclo formado pelos caminhos de retorno.

A proposição acima mostra que a Conjectura 5 implica em um resultado mais forte que a Conjectura 4. Se o digrafo induzido por um FAS minimal possui um caminho de comprimento  $k$ , então obtemos uma  $k$ -árvore de ciclos “linear”, i.e, uma  $k$ -árvore de ciclos contendo um caminho de comprimento precisamente  $k$ , que possui um arco de cada ciclo.

As definições de FAS e conjuntos retornáveis podem naturalmente induzir a ideia de que buscar FAS minimais e buscar conjuntos retornáveis maximais são problemas correspondentes, ou em outras palavras, que apresentam uma relação Min-Max. Apesar de todo FAS minimal ser um conjunto retornável maximal, a recíproca não é verdadeira (veja a Figura 3.9), isto é, há digrafos que possuem conjuntos retornáveis maximais que não são FAS minimais. Veremos que FAS minimais são equivalentes a uma outra estrutura (Proposição 30).

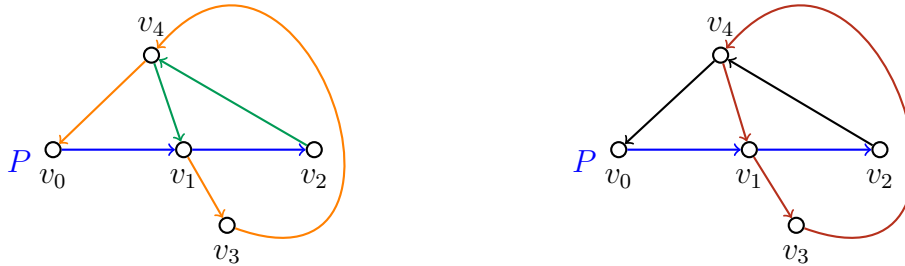


Figura 3.9: Em azul, um caminho retornável  $P = v_0v_1v_2$ . O caminho  $P$  é maximal, pois cada arco em  $A(D - P)$  pertence ao caminho de retorno de algum arco de  $P$ . Note que  $P$  não é um FAS minimal, uma vez que  $v_1v_3v_4v_1$  é um ciclo em  $D - P$ .

**Proposição 30.** *Seja  $D$  um digrafo e  $F \subseteq A(D)$  um FAS. Então,  $F$  é um FAS minimal se e somente se  $F$  é um conjunto retornável maximal.*

*Demonstração.* Pela Proposição 27, todo FAS minimal é um conjunto retornável maximal. Suponha que  $F$  é um conjunto retornável maximal que também é FAS,



mas não é um FAS minimal. Então, existe  $xy \in F$  tal que  $F' = F - xy$  também é um FAS. Como  $F$  é retornável, existe um  $yx$ -caminho  $P$  em  $D - F$ , mas  $P \cup xy$  é um ciclo em  $D - F'$ , uma contradição.  $\square$

A Proposição 30 nos fornece uma ferramenta valiosa para verificar a Conjectura 5, uma vez que nos permite ao invés de checar todos os FAS minimais de um digrafo, checar os conjuntos retornáveis maximais, que possuem uma propriedade *hereditária* com respeito à inclusão, isto é, se  $D$  é um digrafo e  $A \subseteq A(D)$  é retornável, então todo subconjunto  $B \subset A$  é também retornável. Portanto, ao encontrarmos um conjunto  $F$  que não é retornável, não precisamos checar nenhum conjunto  $F'$  tal que  $F \subsetneq F'$ .

O próximo lema pode ser utilizado para realizar a busca por FAS minimais em um subdigrafo com menos arcos, e depois estendê-los a FAS minimais do digrafo original.

**Lema 31.** *Seja  $D$  um digrafo e  $uv \in A(D)$ . Se  $F'$  é um FAS minimal em  $D' = D - uv$ , então  $D$  contém um FAS minimal  $F$  tal que  $F' \subseteq F$ .*

*Demonstração.* Se  $uv$  não admite um caminho de retorno em  $D - F'$ ,  $F'$  é um FAS minimal em  $D$  e tomamos  $F = F'$ . Caso contrário, tomamos  $F = F' \cup \{uv\}$ . Pela Proposição 30,  $F$  é um FAS minimal.  $\square$

O corolário a seguir nos motiva a buscar FAS minimais em subdigrafos próprios, com a expectativa de encontrar um FAS bom em um subdigrafo  $D' \subseteq D$  com  $\delta^+(D') = \delta^+(D)$ .

**Corolário 2.** *Seja  $D$  um digrafo e  $D'$  um subdigrafo próprio de  $D$ . Se  $F'$  é um FAS minimal em  $D'$ , então  $D$  contém um FAS minimal  $F$  tal que  $F' \subseteq F$ .*

*Demonstração.* Seja  $F'$  um FAS minimal em  $D'$ . Seja  $uv \in D - D'$ . Pelo Lema 31, existe um FAS minimal  $F''$  em  $D'' = D' \cup \{uv\}$  tal que  $F' \subseteq F''$ . Agora consideramos um arco  $xy \in D - D''$ . Novamente, o Lema 31 garante que existe um FAS minimal  $F'''$  em  $D''' = D'' \cup \{xy\}$  tal que  $F'' \subseteq F'''$ , e portanto,  $F' \subseteq F'''$ . Repetindo esse passo indutivamente para todos os arcos em  $D - D'$ , concluímos que existe um FAS minimal  $F$  em  $D$  tal que  $F' \subseteq F$ .  $\square$

O corolário acima nos permite mostrar que a Conjectura 5 vale para digrafos que possuem grau de saída mínimo 2.

**Teorema 32.** *Todo digrafo  $D$  tal que  $\delta^+(D) = 2$  contém um FAS bom.*

*Demonstração.* Seja  $D$  um digrafo tal que  $\delta^+(D) = 2$ . Pelo Teorema 4, existem dois ciclos  $C_1$  e  $C_2$  em  $D$  com precisamente um vértice em comum, digamos  $x$ . Considere a decomposição de  $C_1 \cup C_2$  em  $P$  e  $Q$ , tal que  $P$  é um caminho com

comprimento 2 contendo  $x$  como vértice interno, i.e.,  $P = v_1xv_2$ , com  $v_1x \in C_1$  e  $xv_2 \in C_2$  e  $Q$  o caminho remanescente  $C_1 \cup C_2 - P$  (veja a Figura 3.10). Note que  $Q$  é a união de caminhos de retorno para  $v_1x$  e  $xv_2$ . De fato,  $Q = v_2 \cdots x \cdots v_1$ , e os subcaminhos  $v_2 \cdots x$  e  $x \cdots v_1$  são respectivamente um caminho de retorno para  $v_1x$  in  $A(P)$  e um caminho de retorno para  $xv_2 \in A(P)$ . Portanto,  $P$  é um FAS bom em  $D[C_1 \cup C_2]$ . Pelo Corolário 2,  $D$  admite um FAS minimal  $F$  com  $P \subseteq F$ .  $\square$

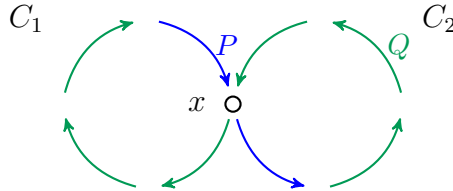


Figura 3.10: A decomposição de  $C_1 \cup C_2$  em  $P$  (em azul) e  $Q$  (em verde).  $P$  é um FAS bom, pois é um caminho de comprimento 2 e cada um de seus arcos fecha um ciclo diferente com  $Q$ .

### 3.1.2 Contraexemplos para a Conjectura de Lichiardopol

Nesta seção apresentamos uma família de contraexemplos para a Conjectura 5. Em 2006, Maria Chudnovsky, Paul Seymour e Robin Thomas organizaram um Workshop a respeito da Conjectura de Caccetta–Häggkvist. Em um relatório sobre as apresentações do evento é comentado que algumas semanas depois do workshop, Mader encontrou um contraexemplo para a “bela nova Conjectura de Lichiardopol que generalizaria várias outras Conjecturas”(tradução livre) [8]. Possivelmente, o contraexemplo de Mader se refere à Conjectura 5, mas não podemos confirmar essa informação.

A seguir, apresentamos uma família de contraexemplos. Mais especificamente, para cada  $k \geq 3$  apresentamos um digrafo  $D_k$  com  $\delta^+(D_k) \geq k$  para o qual nenhum FAS minimal induz um subdigrafo que contenha um caminho de comprimento pelo menos 3. A construção dos contraexemplos faz uso do seguinte fato simples.

**Fato 33.** *Seja  $P$  um caminho em um FAS minimal  $F$ . Se  $v$  é um vértice interno de  $P$ , então  $d_D^-(v) \geq 2$ .*

*Demonstração.* Seja  $v$  um vértice interno de  $P$ . Então, existem arcos  $uv, vw \in A(P)$ . Pela minimalidade de  $F$ , existe um ciclo  $C \in D$  para o qual  $F \cap A(C) = \{vw\}$ , e, portanto, há um caminho de retorno para o arco  $vw$ , isto é, um  $wv$ -caminho em  $D - F$ . Além disso, como  $w_1v \notin F$  temos  $uv \neq w_1v$ , o que implica  $d_D^-(v) \geq 2$ .  $\square$

Seja  $T$  a arborescência com conjuntos de vértices  $V(T) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ , onde  $V_1 = \{r\}$ ,  $V_2 = \{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $V_3 = \{u'_1, \dots, u'_{k^2}\}$ , e  $v$  é a raiz de  $T$ , todos os

vértices de  $V_3$  são folhas e cada vértice de  $V_i$  aponta para precisamente  $k$  vértices em  $V_{i+1}$ , para  $i = \{1, 2\}$ . É possível construir  $T$  de forma que para cada par de vértices  $u, w \in V(T)$ , temos  $N^+(u) \cap N^+(w) = \emptyset$ .

Sejam  $T_1, \dots, T_k$  cópias disjuntas de  $T$ , e seja  $r_i$  a raiz de  $T_i$ . Seja  $D_k$  o digrafo obtido da união  $T_1 \cup \dots \cup T_k$  pela adição dos arcos conectando cada folha a cada uma das  $k$  raízes, ou seja, o conjunto  $LR = \{wv : w \text{ é uma folha e } v \text{ é uma raiz}\}$  (veja a Figura 3.11). Este passo impõe que  $d_{D_k}^+(v) = k$ , para todo  $v \in V(D_k)$ . Finalmente, seja  $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ . Observe que  $d^-(v) = 1$  para todo  $v \notin R$ .

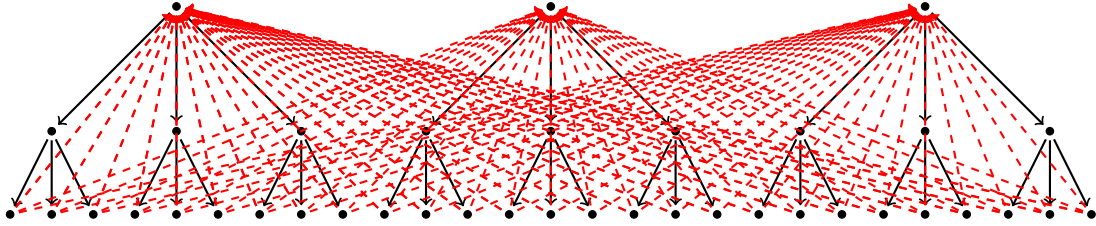


Figura 3.11: Uma ilustração de  $D_3$ . Os arcos tracejados em vermelho formam o conjunto  $LR$ .

**Teorema 34.** *Seja  $k \geq 3$ . Nenhum digrafo induzido por um FAS minimal em  $D_k$  contém um caminho com comprimento pelo menos 3.*

*Demonstração.* Seja  $F$  um FAS minimal em  $D_k$ . Pela construção de  $D_k$ ,  $R$  é um conjunto independente, e todo vértice  $v \in V(D_k)$  com  $d_{D_k}^-(v) \geq 2$  pertence a  $R$ . Seja  $P = v_0 \dots v_l$  um caminho mais longo em  $F$ . Pelo Fato 33,  $l = 2$ .  $\square$

Note que o Teorema 34 permanece válido se considerarmos arborescências com mais camadas, e também com camadas com qualquer número de vértices congruentes a 0 (mod  $k$ ). Isso nos dá uma condição suficiente para obter arborescências  $T$  para a qual  $|V(T)| = ck + 1$  para qualquer inteiro positivo  $c \geq k + 1$ .

## 3.2 Feedback arc sets minimais em Torneios.

Seja  $L = v_1, v_2, \dots, v_n$  uma ordenação dos vértices de um digrafo  $D$ . Um arco  $v_i v_j \in A(D)$  é chamado de um *arco para frente* com respeito a  $L$  se  $i < j$ . Caso contrário,  $v_i v_j$  é chamado de um *arco para trás* com respeito a  $L$ . Uma ordenação  $L$  é chamada de *ordenação mediana* de  $D$  se maximiza o conjunto de arcos para frente de  $D$  com respeito a  $L$ , ou seja, se maximiza o tamanho do conjunto  $\{v_i v_j \in A(D) : i < j\}$ . Equivalentemente, uma ordenação é mediana se  $\{v_i v_j \in A(D) : i > j\}$  é mínimo.

Ordenações medianas nos auxiliam a demonstrar o seguinte teorema, que diz que em todo digrafo na classe de torneios, sempre é possível encontrar um caminho hamiltoniano. O seguinte teorema foi obtido por Rédei em 1934 [32]

**Teorema 35** (Rédei [32]). *Todo torneio possui um caminho hamiltoniano.*

*Demonstração.* Seja  $T$  um torneio. Considere uma ordenação mediana de  $V$ ,  $L = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ . Afirmamos que  $v_1, \dots, v_n$  é um caminho hamiltoniano. De fato, suponha por contradição que  $v_{k+1}v_k \in A(T)$ , e considere a ordenação  $L' = v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, v_k, v_{k+2}, \dots, v_n$ . Note que todo arco para frente em  $L$  é um arco para frente em  $L'$  e  $v_{k+1}v_k$  é para frente em  $L'$ . Logo,  $L'$  possui mais arcos para frente do que  $L$ , uma contradição.  $\square$

Ao encontrar a ordenação mediana de um torneio, podemos colorir os arcos do digrafo com duas cores, uma para arcos para frente e outra para arcos para trás. Assim, estabelecemos uma bipartição de  $A(T)$  (conjunto de arcos para trás e conjunto de arcos para frente em dois digrafos acíclicos).

Naturalmente, podemos reduzir a Conjectura de Lichiardopol para a classe de torneios fortemente conexos. Essa abordagem se mostra poderosa devido ao seguinte teorema, provado por Camion em 1959 [7].

**Teorema 36** (Camion [7]). *Todo torneio fortemente conexo possui um ciclo hamiltoniano.*

*Demonstração.* Seja  $T$  um torneio fortemente conexo. Escolha um ciclo  $C \subseteq T$  que maximiza  $|V(C)|$ . Suponha, por contradição, que  $V(C) \neq V(T)$ . Se houver algum vértice  $v \in V(T) \setminus V(C)$  tal que  $N^+(v) \cap V(C) \neq \emptyset$  e  $N^-(v) \cap V(C) \neq \emptyset$ . Então deve existir um arco  $wx \in A(C)$  tal que  $wv, vx \in A(T)$ . Mas então podemos usar esses arcos para encontrar um ciclo mais longo. Segue que os vértices em  $V(T) \setminus V(C)$  podem ser particionados em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que todo vértice  $x \in X$  tem os vértices do ciclo como seus vizinhos de saída, isto é,  $V(C) \subseteq N^+(x)$ , e todo  $y \in Y$  tem os vértices do ciclo como seus vizinhos de entrada, isto é,  $V(C) \subseteq N^-(y)$ . Segue diretamente da conexidade forte de  $T$  que  $X, Y \neq \emptyset$  e que existe um arco  $yz$  com  $y \in Y$  e  $z \in X$ . No entanto, então podemos substituir um arco  $wx \in A(C)$  pelo caminho contendo os arcos  $wy, yz, zx$  para obter um ciclo mais longo. Essa contradição completa a prova.  $\square$

A observação a seguir pode ser explorada para encontrar feedback arc set minimais. Considere um torneio  $T$  que não possui um FAS bom, e com o menor número de vértices. Se existe  $v \in V(T)$ , tal que para todo  $w \in N_T^-(v)$  tem-se  $d^+(w) > \delta^+(T)$ , então, a remoção de  $v$  não reduz o grau de saída mínimo do torneio, isto é,  $\delta^+(T - v) = \delta^+(T)$ . Podemos então supor que todo vértice de  $T$  tem algum vizinho de entrada cujo o grau de saída é precisamente  $\delta^+(T)$ . Isso implica que existe um ciclo contendo apenas vértices com grau mínimo de saída.

Tendo em vista o Teorema 36 e a construção de um FAS minimal a partir de uma ordenação de vértices, uma estratégia natural para provar a Conjectura 5 seria

considerar uma (dentre as  $|V(D)|$  ordenações) ordenação induzida por um ciclo hamiltoniano e demonstrar que o FAS minimal obtido a partir dessa ordenação possui um caminho suficientemente longo. No entanto, nem sempre é possível obter um FAS bom dessa forma. A título de exemplo, considere  $D$  o digrafo obtido a partir da orientação do grafo completo  $K_5$ , em que cada vértice possui grau de saída 2. Considere  $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  a ordenação dos vértices definida pelo ciclo hamiltoniano formado pelos arcos mais externos. Note que não podemos extrair naturalmente um FAS bom com os arcos para trás com respeito a  $L$  (veja a Figura 3.12).



Figura 3.12: Considere a ordenação dos vértices a partir do ciclo hamiltoniano externo, com arcos em azul claro. Em azul escuro, o FAS minimal obtido a partir dos arcos para trás. Note que o FAS em questão só possui caminhos de comprimento  $1 < \delta^+(D)$ .

Entretanto, observe que se reordenarmos os vértices considerando o ciclo hamiltoniano formado pelos arcos internos, então podemos obter um FAS que possui um caminho de comprimento 2, conforme ilustramos na Figura 3.13. Essa observação nos motivou uma estratégia para obter FAS minimais em ciclos hamiltonianos especiais (veja a Seção 3.2.1).



Figura 3.13: Consideramos a ordenação dos vértices a partir do ciclo hamiltoniano interno, com arcos destacados em azul claro. Em azul escuro, o FAS minimal obtido a partir dos arcos para trás na ordenação. O FAS é bom, pois possui o caminho  $P = 420$ .

### 3.2.1 FAS minimais e caminhos hamiltonianos

A técnica desenvolvida nesta seção se baseia na relação direta entre caminhos hamiltonianos e feedback arc sets minimais. O Lema 37 formaliza um procedimento para construir FAS minimais a partir de caminhos hamiltonianos em torneios. Dizemos que um caminho  $P$  induz um FAS minimal em um digrafo  $D$  quando existe um FAS minimal obtido a partir dos arcos para trás com a respeito a ordenação dos vértices de  $P$ .

**Lema 37.** *Seja  $T$  um torneio. Todo caminho hamiltoniano de  $T$  induz um FAS minimal.*

*Demonstração.* Considere  $P = v_1, v_2, \dots, v_n$  um caminho hamiltoniano em  $T$ . Para cada par de vértices  $v_i, v_j \in P$  se o arco entre  $v_i$  e  $v_j$  for um arco para trás com respeito a  $P$ , então adicione-o ao conjunto  $F$ . Ao final desse procedimento, obteremos  $F = \{v_j v_i \in A(T) : j > i\}$ . Note que os arcos em  $A(T) \setminus F$  não formam ciclos, uma vez que todos os arcos são arcos para frente, portanto  $F$  forma um FAS. Além disso, a minimalidade de  $F$  é verificada, uma vez que qualquer arco  $v_k v_l \in F$  é um arco de retorno, e portanto, fecha um ciclo com o caminho  $v_l v_{l+1} \dots v_k$  no torneio  $T$ .  $\square$

Um digrafo  $D$  é um ciclo *triangulado* se é obtido de um ciclo  $C$  pela adição do arco  $zx$  para toda tripla de vértices consecutivos  $x, y, z$  em  $C$ . Um ciclo *hamiltoniano triangulado* em um digrafo  $D$  é um ciclo triangulado que possui todos os vértices em  $D$  (veja a Figura 3.14).

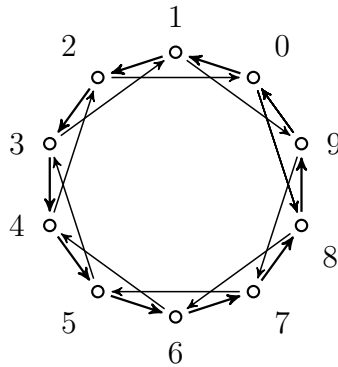


Figura 3.14: Um ciclo triangulado  $C$ .

**Proposição 38.** *Se  $D$  é um ciclo triangulado, então  $D$  possui um subdigrafo induzido por um FAS minimal que contém caminho de comprimento  $\lfloor \frac{|V(D)|-1}{2} \rfloor$ .*

*Demonstração.* Seja  $u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  a sequência de vértices de  $D$ . Como  $D$  é triangulado,  $u_{i+2} u_i \in A(D)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Considere  $F = \{u_j u_i \in A(D) : j > i\}$ . Como  $P = u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n$  é um caminho hamiltoniano, então  $F$  é um FAS.

Mas note que  $Q = u_n u_{n-2} u_{n-4} \dots u_k$ , com  $u_k \in \{u_1, u_2\}$  é um caminho em  $F$  de comprimento  $\lfloor \frac{|V(D)|-1}{2} \rfloor$ .  $\square$

O corolário a seguir diz que um FAS bom pode ser facilmente obtido em todo grafo orientado que possui um ciclo hamiltoniano triangulado.

**Corolário 3.** *Seja  $D$  uma orientação de um grafo. Se  $D$  possui um ciclo hamiltoniano triangulado, então  $D$  possui um FAS bom.*

*Demonstração.* Seja  $D$  um grafo orientado com  $k = \delta^+(D)$ . Seja  $C = u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$  um ciclo hamiltoniano triangulado em  $D$ . Pela Proposição 38, temos que  $F = \{u_j u_i \in A(T) : j > i\}$  é um FAS minimal tal que  $D[F]$  possui um caminho de comprimento  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ . Agora, note que

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \sum_{v \in V(D)} d^+(v) \geq \sum_{i=1}^n \delta^+(D) = n\delta^+(D)$$

Portanto,  $\delta^+(D) \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ . Logo,  $F$  é um FAS bom.  $\square$

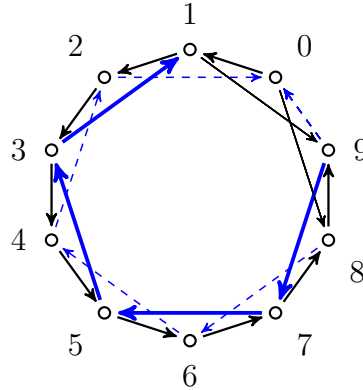


Figura 3.15: Em azul o FAS minimal induzido pelo ciclo hamiltoniano triangulado, pontilhamos o arcos do FAS que não pertencem ao caminho de comprimento  $\lfloor 9/2 \rfloor = 4$ . Os arcos azuis lisos formam um caminho bom em  $C$ .

### 3.2.2 Uma correspondência biunívoca entra FAS minimais e caminhos hamiltonianos.

Como vimos no Lema 37, é fácil ver que podemos extrair FAS minimais diretamente de caminhos hamiltonianos. Surpreendentemente, a recíproca deste resultado também é verdadeira. Em 1990, Amotz Bar-Noy e Joseph Naor [4] publicaram um estudo a respeito do problema de ordenação generalizada, e mostraram que este pode ser resolvido em tempo proporcional a  $\log n$ . Nesse artigo, os autores apresentaram um método geral para traduzir a ordenação de algoritmos de comparação em

algoritmos que calculam um caminho hamiltonianos em um torneio. Tal tradução é baseada na relação entre o conjunto de FAS minimais e o conjunto de caminhos hamiltonianos em torneios, que é provada através de uma correspondência biunívoca entre esses conjuntos. No entanto, a demonstração de Bar-Noy e Joseph Naor é extensa e foge aos objetivos centrais deste texto.

**Teorema 39** ([4]). *Sejam  $T$  um torneio,  $\mathcal{P}$  o conjunto de todos os caminhos hamiltoniano em  $T$  e  $\mathcal{F}$  o conjunto de todos os feedback arc sets minimais em  $T$ . Então, existe uma bijeção entre  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{F}$ .*

Nesta seção apresentamos uma prova alternativa para o Teorema 39.

### Uma prova alternativa para a bijetividade

Nesta subseção, demonstraremos uma prova alternativa para a correspondência biunívoca entre FAS minimais e caminhos hamiltonianos em torneios.

Primeiramente, lembre que o Lema 37 afirma que todo caminho hamiltoniano induz um FAS minimal. A proposição a seguir mostra a injetividade desta relação.

**Proposição 40.** *Seja  $T$  um torneio e  $P_1, P_2$  dois caminhos hamiltonianos em  $T$ . Se  $P_1$  e  $P_2$  induzem o mesmo FAS minimal em  $T$ , então  $P_1 = P_2$ .*

*Demonstração.* De fato, sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois caminhos hamiltonianos em  $T$ . Considere  $F_1$  e  $F_2$  os FAS minimais induzidos por  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente. Considere  $v$  o primeiro vértice que difere a ordenação de  $P_1$  da ordenação de  $P_2$ , isto é, se  $P_1 = v_0v_1 \dots v_iv_{i+1} \dots v_j \dots v_n$  e  $P_2 = v_0v_1 \dots v_iv_j \dots v_l$ , então  $v = v_j$ . Pela definição de  $P_1$ , temos  $v_iv_{i+1} \in A(D)$  e pela definição de  $P_2$ , temos  $v_iv_j \in A(D)$ .

No que segue, a prova é dividida em dois casos, dependendo da orientação do arco entre  $v_{i+1}$  e  $v_j$ . Primeiramente, suponha que  $v_{i+1}v_j \in A(D)$ . Neste caso,  $v_{i+1}v_j$  é um arco para frente segundo a ordenação de  $P_1$ , e portanto não pertence a  $F_1$ . Por outro lado,  $v_{i+1}v_j$  é um arco para trás segundo a ordenação de  $P_2$ , e portanto pertence a  $F_2$ . Logo,  $F_1 \neq F_2$ .

Suponha então que  $v_jv_{i+1} \in A(D)$ . Neste caso,  $v_jv_{i+1}$  é um arco para trás segundo a ordenação de  $P_1$ , e portanto pertence a  $F_1$ . Por outro lado,  $v_jv_{i+1}$  é um arco para frente segundo a ordenação de  $P_2$ , e portanto não pertence a  $F_2$ . Logo,  $F_1 \neq F_2$ .  $\square$

A seguinte proposição mostra que para todo FAS minimal  $F$  em um torneio existe um único vértice  $v$  com a seguinte propriedade: o subconjunto de  $F$  formado pelos arcos que passam por  $v$  é precisamente o conjunto dos arcos de entrada de  $v$ .

**Proposição 41.** *Seja  $D$  um torneio. Se  $F$  é um FAS minimal de  $D$ , existe exatamente um vértice  $v \in V(D)$  tal que  $F \cap (A^+(v) \cup A^-(v)) = A^-(v)$ .*



*Demonstração.* Seja  $F$  um FAS minimal em  $D$ . Sejam  $R, S \subseteq V(D)$  tais que  $S = \{v \in V(D) : A^-(v) \subseteq F\}$  e  $R = \{v \in V(D) : A^+(v) \cap F = \emptyset\}$ . Queremos mostrar que  $|S| = 1$ . Primeiramente, note que  $|S| > 0$ . De fato, suponha que  $S = \emptyset$ . Então todo vértice possui um arco de entrada que não pertence a  $F$  e portanto,  $\delta^-(D - F) \geq 1$ . Logo, existe um ciclo em  $D - F$ . Uma contradição, pois  $F$  é um FAS.

**Afirmção 41.1.**  $S \subseteq R$ .

*Demonstração.* Seja  $v \in S$  e seja  $vu \in A^+(v)$ . Afirmamos que  $vu \notin F$ . De fato, suponha que  $vu \in F$ , e seja  $F' = F - vu$ . Pela minimalidade de  $F$ , há um ciclo  $C$  em  $D - F'$ , mas então  $C$  deve conter  $vu$ , caso contrário  $F$  não seria FAS minimal de  $D$ . Logo,  $D - F'$  contém um arco que aponta para  $v$ , uma contradição uma vez que  $A^-(v) \subseteq F$ .  $\square$

**Afirmção 41.2.**  $|S| < 2$ .

*Demonstração.* Suponha que  $|S| \geq 2$ . Neste caso, existem dois vértices  $u, v \in V(D)$  tais que  $u, v \in S$ . Suponha que  $uv \in A(D)$ . Como  $v \in S$ ,  $uv \in F$ . Por outro lado, como  $u \in S \subseteq R$  e  $uv \in A^+(u)$ , então  $uv \notin F$ . Uma contradição.  $\square$

Como  $0 < |S| < 2$ , temos  $|S| = 1$ .  $\square$

**Proposição 42.** *Seja  $D$  um torneio. Se  $F$  é um FAS minimal em  $D$ , então  $F$  induz um FAS minimal em  $D' = D - v$ , onde  $v \in S = \{v \in V(D) : A^-(v) \subseteq F\}$ .*

*Demonstração.* Considere o conjunto de arcos  $F' = F \cap A(D')$ . Suponha por contradição que  $F'$  não é um FAS em  $D'$ . Em particular, existe um ciclo  $C$  em  $D' - F' = D - v - F$ . Como  $v \in S$ , então  $C$  pertence a  $D - F$ , uma contradição, pois  $F$  é FAS minimal de  $D$ . Logo,  $F'$  é um FAS.

Além disso,  $F'$  é FAS minimal em  $D'$ . Suponha por contradição que  $F'$  não é minimal, então existe um arco  $xy \in F'$  tal que  $F' - xy$  é um FAS. Mas, pela minimalidade de  $F$ ,  $F - xy$  não é FAS. Assim, existe  $yx$ -caminho  $P$  em  $D - F$ , mas não existe nenhum  $yx$ -caminho em  $D' - F'$ . Então,  $P$  contém  $v$  como vértice interno. Absurdo, pois  $D - F$  só possui arcos em  $A^+(v)$ .  $\square$

**Teorema 43.** *Seja  $D$  um torneio. Todo FAS minimal em  $D$  induz um caminho hamiltoniano em  $D$ .*

*Demonstração.* Seja  $F$  um FAS minimal em  $D$  e seja  $S_F = \{v \in V(D) : A^-(v) \subseteq F\}$ . Pela Proposição 41,  $|S_F| = 1$ . Seja  $v_0 \in V(D)$  tal que  $v_0 \in S_F$ . Considere  $D' = D - v_0$  e  $F' = F \cap A(D')$ . Pela Proposição 42,  $F'$  é um FAS minimal em  $D'$ . Pela Proposição 41,  $|S_{F'}| = 1$ . Seja  $v_1 \in V(D)$  tal que  $v_1 \in S_{F'}$ . Afirmamos que  $v_0v_1 \in A(D)$ . De fato, suponha por contradição que  $v_0v_1 \notin A(D)$ . Como  $D$  é um

torneio, isto implicaria que  $v_1v_0 \in A(D)$ . Neste caso, como  $v_0 \in S_F$  e  $v_1v_0 \in A^-(v_0)$ , então  $v_1v_0 \in F$ . Pela minimalidade de  $F$ , existe um  $v_0v_1$ -caminho em  $D - F$ . Uma contradição, pois  $A^-(v_1) \subseteq F' \subseteq F$ . Repetindo esse passo indutivamente por todos os vértices do digrafo, obtemos um caminho hamiltoniano.  $\square$

Note que para cada FAS minimal  $F$ , a Proposição 41 garante a unicidade de um vértice  $v$  tal que  $F \cap (A^+(v) \cup A^-(v)) = A^-(v)$ , o que implica que dois FAS minimais distintos não podem induzir o mesmo caminho hamiltoniano, uma vez que essa propriedade define a ordenação dos vértices no caminho hamiltoniano induzido.

Pelas Proposições 40 e 43, verificamos o Teorema 39.

### 3.3 Testes Computacionais

Nesta seção, apresentamos um algoritmo desenvolvido para testar computacionalmente a Conjectura 5. Seu código escrito em SageMath [12], que é um software de matemática livre e de código aberto.

Os testes computacionais nos permitiram verificar a seguinte proposição.

**Proposição 44.** *Seja  $D$  um digrafo fortemente conexo. Se  $|V(D)| \leq 10$ , então  $D$  possui um FAS minimal  $F$  tal que  $D[F]$  contém um caminho de comprimento  $\delta^+(D)$ .*

#### 3.3.1 Algoritmo de Backtracking

Para os testes computacionais, nós desenvolvemos o Algoritmo 13, que checkou a Conjectura 5 para os 9.540.487 torneios fortemente conexos que possuem até dez vértices e faz uso da técnica de Backtracking. Inicialmente implementamos uma função que recebe um digrafo  $D'$  e uma ordenação  $ord$  e retorna o digrafo induzido pelos arcos para trás da ordenação  $ord$  em  $D'$ . Denotamos esse digrafo por  $D[\overleftarrow{A}(D', ord)]$ .

O procedimento da busca recursiva é explorar as ordenações de vértices que induzem caminhos hamiltonianos. A estratégia é baseada no Teorema 39 que garante que todos os FAS minimais podem ser obtidos a partir dos caminhos hamiltonianos. Os dados de entrada são o digrafo  $G$ , uma ordenação parcial de vértices,  $ord\_parcial$ , um vértice  $v \in V(G)$ , que a cada passo da recursão será tomado como o último vértice explorado pela busca. Para realizar a primeira chamada do algoritmo, adicionamos um novo vértice,  $init$ , com arcos de saída para todos os vértices de  $D$ . Note que  $init$  não fará parte de nenhum caminho de retorno para a ordenação parcial, então é um vértice interessante para iniciar a busca. Nós utilizamos uma função própria da documentação do sage, chamada `longest_path()` que retorna o caminho mais longo de um digrafo. Naturalmente, o algoritmo é interrompido assim que encontra um FAS bom.

**Algoritmo 1:** Backtracking

**Dados:**  $G, ord\_parcial, v$

- 1 **se**  $ord\_parcial$  é uma ordenação total **então**
- 2      $H = D[\overleftarrow{A}(G, ord\_parcial)]$
- 3     **retorna** O comprimento do caminho mais longo de  $H$
- 4 **fim**
- 5 **para** cada  $x \in N^+(v)$  **faça**
- 6     **se**  $x$  não está na ordenação **então**
- 7         adiciona  $x$  a  $ord\_parcial$
- 8          $long = Backtracking(G, ord\_parcial, x, lista)$
- 9         Remove  $x$  da ordenação
- 10     **fim**
- 11 **fim**
- 12 Adicionamos um vértice inicial  $init$ , com arcos de saída para todo  $v \in V(D)$ .
- 13  $Backtracking(D, [init], init)$

# Capítulo 4

## Conclusão e Trabalhos Futuros

Esta dissertação pode ser vista como uma coleção detalhada de técnicas para lidar com digrafos com grau de saída mínimo prescrito. Para a Conjectura de Hoàng–Reed (Conjectura 4), estudamos profundamente três referências que apresentam provas para alguns casos particulares [19, 44, 46].

Nós rephraseamos algumas proposições e introduzimos algumas definições com o objetivo de minuciar a teoria desenvolvida por Manuel Welhan [46] a respeito de conexidade e conjuntos especiais de corte. Esperamos que tal exposição seja útil para obter resultados futuros. Em particular, mostramos que um contraexemplo mínimo para a conjectura no caso em que  $k = 4$  compartilha algumas propriedades com o contraexemplo mínimo para o caso  $k = 3$ , o que nos fornece ideias para a uma potencial prova do caso  $k = 4$ . Alguns detalhes deste conteúdo só puderam ser devidamente compreendidos durante a escrita da dissertação, o que dificultou a generalização da estratégia de Welhan em tempo hábil.

Em outra direção, com respeito à Conjectura 5, a verificamos para digrafos com grau de saída mínimo 2; torneios com até dez vértices; e apresentamos uma família de contraexemplos com grau de saída pelo menos 3. Além disso, introduzimos conjuntos retornáveis, que nos permite caracterizar feedback arc sets minimais de uma forma computacionalmente menos complexa. Isso nos permitiu criar um algoritmo de Backtracking para testar a Conjectura 5 para torneios com até nove vértices. Este resultado foi apresentado em forma de pôster no Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais (WPCCG) [34], e sugere que, embora não seja válida em sua generalidade, a Conjectura 5 ainda pode ser satisfeita para classes especiais de digrafos, como torneios. Também apresentamos uma prova alternativa para a bijeção entre FAS minimais e caminhos hamiltonianos em torneios. Um resumo com tal prova foi aceito para apresentação no 10th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG22), e tal propriedade foi utilizada para verificar a Conjectura 5 para torneios com até dez vértices. Planejamos continuar explorando a Conjectura 5 para torneios fortemente conexos, a fim de prová-la ou obter um contraexemplo.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANEJA, Y. P., SOKKALINGAM, P. T., 2004, “The minimal feedback arc set problems”, *INFOR Inf. Syst. Oper. Res.*, v. 42, n. 2, pp. 107–112. ISSN: 0315-5986. doi: 10.1080/03155986.2004.11732694. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03155986.2004.11732694>>.
- [2] BAI, Y., MANOUSSAKIS, Y., 2019, “On the number of vertex-disjoint cycles in digraphs”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 33, n. 4, pp. 2444–2451. ISSN: 0895-4801. doi: 10.1137/18M1186356. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/18M1186356>>.
- [3] BANG-JENSEN, J. R., GUTIN, G., 2009, *Digraphs*. Springer Monographs in Mathematics. Second ed. , Springer-Verlag London, Ltd., London. ISBN: 978-1-84800-997-4. doi: 10.1007/978-1-84800-998-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-84800-998-1>>. Theory, algorithms and applications.
- [4] BAR-NOY, A., NAOR, J., 1990, “Sorting, minimal feedback sets, and Hamilton paths in tournaments”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 3, n. 1, pp. 7–20. ISSN: 0895-4801. doi: 10.1137/0403002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0403002>>.
- [5] BERMOND, J.-C., THOMASSEN, C., 1981, “Cycles in digraphs—a survey”, *J. Graph Theory*, v. 5, n. 1, pp. 1–43. ISSN: 0364-9024. doi: 10.1002/jgt.3190050102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/jgt.3190050102>>.
- [6] CACCETTA, L., HÄGGKVIST, R., 1978, “On minimal digraphs with given girth”. In: *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1978)*, Congress. Numer., XXI, pp. 181–187. Utilitas Math., Winnipeg, Man.
- [7] CAMION, P., 1959, “Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 249, pp. 2151–2152. ISSN: 0001-4036.

- [8] CHUDNOVSKY, M., SEYMOUR, P., THOMAS, R., 2006. “The Caccetta-Haggkvist conjecture”. Disponível em: <<https://aimath.org/pastworkshops/caccettarep.pdf>>. Workshop Summary.
- [9] CHVÁTAL, V., SZEMERÉDI, E., 1983, “Short cycles in directed graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 35, n. 3, pp. 323–327. ISSN: 0095-8956. doi: 10.1016/0095-8956(83)90059-X. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0095-8956\(83\)90059-X](https://doi.org/10.1016/0095-8956(83)90059-X)>.
- [10] COHN, Z., WRIGHT, E., GODBOLE, A., 2009, “Probabilistic versions of Seymour’s distance two conjecture”, *manuscript*.
- [11] DELONG, J., 2016, “Dipaths of length at least double the minimum outdegree”, *arXiv preprint arXiv:1608.03259*.
- [12] DEVELOPERS, T. S., 2016. “SageMath”. .
- [13] EVEN, G., NAOR, J., SCHIEBER, B., et al., 1995, “Approximating minimum feedback sets and multi-cuts in directed graphs”. In: *Integer programming and combinatorial optimization (Copenhagen, 1995)*, v. 920, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pp. 14–28. Springer, Berlin. doi: 10.1007/3-540-59408-6\\_38. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/3-540-59408-6\\_38](https://doi.org/10.1007/3-540-59408-6_38)>.
- [14] FISHER, D. C., 1996, “Squaring a tournament: a proof of Dean’s conjecture”, *J. Graph Theory*, v. 23, n. 1, pp. 43–48. ISSN: 0364-9024. doi: 10.1002/(SICI)1097-0118(199601)21:1<43::AID-JGT6>3.0.CO;2-M. Disponível em: <[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199601\)21:1<43::AID-JGT6>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199601)21:1<43::AID-JGT6>3.0.CO;2-M)>.
- [15] GUO, Y., VOLKMANN, L., 1994, “Cycles in multipartite tournaments”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 62, n. 2, pp. 363–366. ISSN: 0095-8956. doi: 10.1006/jctb.1994.1075. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1075>>.
- [16] HAMIDOUNE, Y. O., 1981, “An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in groups”, *European J. Combin.*, v. 2, n. 4, pp. 349–355. ISSN: 0195-6698. doi: 10.1016/S0195-6698(81)80042-X. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(81\)80042-X](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(81)80042-X)>.
- [17] HAMIDOUNE, Y. O., 1987, “A note on minimal directed graphs with given girth”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 43, n. 3, pp. 343–348. ISSN: 0095-8956. doi: 10.1016/0095-8956(87)90009-8. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0095-8956\(87\)90009-8](https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90009-8)>.

- [18] HAVET, F., THOMASSÉ, S., 2000, “Median orders of tournaments: a tool for the second neighborhood problem and Sumner’s conjecture”, *J. Graph Theory*, v. 35, n. 4, pp. 244–256. ISSN: 0364-9024. doi: 10.1002/1097-0118(200012)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H. Disponível em: <[https://doi.org/10.1002/1097-0118\(200012\)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H](https://doi.org/10.1002/1097-0118(200012)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H)>.
- [19] HAVET, F., THOMASSÉ, S., YEO, A., 2008, “Hoàng-Reed conjecture holds for tournaments”, *Discrete Math.*, v. 308, n. 15, pp. 3412–3415. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/j.disc.2007.06.033. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.06.033>>.
- [20] HOÀNG, C. T., REED, B., 1987, “A note on short cycles in digraphs”, *Discrete Math.*, v. 66, n. 1-2, pp. 103–107. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/0012-365X(87)90122-1. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0012-365X\(87\)90122-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90122-1)>.
- [21] JACKSON, B., 1981, “Long paths and cycles in oriented graphs”, *J. Graph Theory*, v. 5, n. 2, pp. 145–157. ISSN: 0364-9024. doi: 10.1002/jgt.3190050204. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/jgt.3190050204>>.
- [22] JÜNGER, M., 1985, “Polyhedral combinatorics and the acyclic subdigraph problem”, v. 7, pp. x+128.
- [23] KANEKO, Y., LOCKE, S. C., 2001, “The minimum degree approach for Paul Seymour’s distance 2 conjecture”. In: *Proceedings of the Thirty-second Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Baton Rouge, LA, 2001)*, v. 148, pp. 201–206.
- [24] KARP, R. M., OTHERS, 1972, “Complexity of computer computations”, *Reducibility among combinatorial problems*, v. 23, n. 1, pp. 85–103.
- [25] KONTOPOULOS, E., BASSILIADES, N., 2006, “Graphical representation of defeasible logic rules using digraphs”. In: *Hellenic Conference on Artificial Intelligence*, pp. 529–533. Springer.
- [26] LAWLER, E., 1964, “A comment on minimum feedback arc sets”, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, v. 11, n. 2, pp. 296–297.
- [27] LEWANDOWSKI, M., POLCYN, J., REIHER, C., 2022, “Two disjoint cycles in digraphs”, *arXiv arXiv:2205.10826*.
- [28] MASON, O., VERWOERD, M., 2007, “Graph theory and networks in biology”, *IET systems biology*, v. 1, n. 2, pp. 89–119.

- [29] MENGER, K., 1927, “Zur allgemeinen kurventheorie”, *Fund. Math.*, v. 10, pp. 96–1159.
- [30] NISHIMURA, T., 1988, “Short cycles in digraphs”, *Discrete Math.*, v. 72, n. 1-3, pp. 295–298. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/0012-365X(88)90219-1. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0012-365X\(88\)90219-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(88)90219-1)>.
- [31] RAMACHANDRAN, V., 1988, “Finding a minimum feedback arc set in reducible flow graphs”, *J. Algorithms*, v. 9, n. 3, pp. 299–313. ISSN: 0196-6774. doi: 10.1016/0196-6774(88)90022-3. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0196-6774\(88\)90022-3](https://doi.org/10.1016/0196-6774(88)90022-3)>.
- [32] RÉDEI, L., 1934, “Ein kombinatorischer satz”, *Acta Litt. Szeged*, v. 7, n. 39-43, pp. 97.
- [33] REINELT, G., 1985, *The linear ordering problem: algorithms and applications*, v. 8, *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin. ISBN: 3-88538-208-3.
- [34] SCHNEIDER, R., BOTLER, F., “Minimal feedback arc sets containing long paths in few-vertex tournaments”, Disponível em: <[http://www.wpccg.pro.br/wpccg2021/posteres/pdf/poster\\_33\\_Rafael-Schneider.pdf](http://www.wpccg.pro.br/wpccg2021/posteres/pdf/poster_33_Rafael-Schneider.pdf)>.
- [35] SESHU, S., REED, M. B., 1961, *Linear graphs and electrical networks*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [36] SEYMOUR, P. D., 1995, “Packing directed circuits fractionally”, *Combinatorica*, v. 15, n. 2, pp. 281–288. ISSN: 0209-9683. doi: 10.1007/BF01200760. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01200760>>.
- [37] SHEN, J., 2000, “On the girth of digraphs”, *Discrete Math.*, v. 211, n. 1-3, pp. 167–181. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/S0012-365X(99)00323-4. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00323-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00323-4)>.
- [38] SHEN, J., 2002, “On the Caccetta-Häggkvist conjecture”, *Graphs Combin.*, v. 18, n. 3, pp. 645–654. ISSN: 0911-0119. doi: 10.1007/s003730200048. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s003730200048>>.
- [39] STEIGER, E., MUSSGUG, T., KROLL, L. E., 2020, “Causal analysis of COVID-19 observational data in German districts reveals effects of mobility, awareness, and temperature”, *medRxiv*.



- [40] SULLIVAN, B. D., 2006, “A summary of results and problems related to the Caccetta-Haggkvist conjecture”, *arXiv preprint arXiv:605646*.
- [41] TEWES, M., VOLKMANN, L., 1999, “Vertex deletion and cycles in multipartite tournaments”. v. 197/198, pp. 769–779. Disponível em: [http://www.sciencedirect.com/science?\\_ob=GatewayURL&\\_origin=MR&method=citationSearch&piikey=s0012365x98002775&\\_version=1&md5=3a0e852e006031536001ff7c64eeabac](http://www.sciencedirect.com/science?_ob=GatewayURL&_origin=MR&method=citationSearch&piikey=s0012365x98002775&_version=1&md5=3a0e852e006031536001ff7c64eeabac). 16th British Combinatorial Conference (London, 1997).
- [42] THOMASSEN, C., 1983, “Disjoint cycles in digraphs”, *Combinatorica*, v. 3, n. 3-4, pp. 393–396. ISSN: 0209-9683. doi: 10.1007/BF02579195. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02579195>.
- [43] THOMASSEN, C., 1985, “The 2-linkage problem for acyclic digraphs”, *Discrete Math.*, v. 55, n. 1, pp. 73–87. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/S0012-365X(85)80022-4. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(85\)80022-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(85)80022-4).
- [44] THOMASSEN, C., 1985, “Even cycles in directed graphs”, *European J. Combin.*, v. 6, n. 1, pp. 85–89. ISSN: 0195-6698. doi: 10.1016/S0195-6698(85)80025-1. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(85\)80025-1](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(85)80025-1).
- [45] TUCKER, A., 1960, “On directed graphs and integer programs”. In: *Symposium on Combinatorial Problems, Princeton University, cited in [44]*.
- [46] WELHAN, M., 2010, “The Hoàng-Reed conjecture for  $\delta^+ = 3$ ”, *Discrete Math.*, v. 310, n. 13-14, pp. 1932–1939. ISSN: 0012-365X. doi: 10.1016/j.disc.2010.03.001. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.03.001>.
- [47] WEST, D. B., 1996, *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. ISBN: 0-13-227828-6.
- [48] YOUNGER, D., 1963, “Minimum feedback arc sets for a directed graph”, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, v. 10, n. 2, pp. 238–245.

# Apêndice A

## Algumas Demonstrações

A seguinte definição introduz uma estrutura de ordem natural para o produto cartesiano de dois conjuntos previamente ordenados. Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos parcialmente ordenados, definimos a ordem *lexicográfica* sobre o produto cartesiano  $A \times B$  da seguinte forma:

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ se e somente se } a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ e } b \leq b').$$

**Lema 22.** *Seja  $k \geq 1$  e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e  $b_1, b_2, \dots, b_k$  duas sequências de reais positivos e seja  $A = \sum_{i=1}^k a_i$  e  $B = \sum_{j=1}^k b_j$ . Seja  $q \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^k a_i b_i = \frac{AB}{2} + q$ . Então existe um  $i$  tal que  $a_i + b_i \geq \frac{A+B}{2} + \sqrt{2q}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, suponha  $k = 1$ . Então, temos

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i = AB = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} + q.$$

Além disso,  $(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \geq 0$  se e somente se  $0A - 2\sqrt{AB} + B \geq 0$ . De onde obtemos  $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ . E portanto,  $A+B \geq \frac{A+B}{2} + \sqrt{AB}$ . Logo, o lema é satisfeito para  $k = 1$ . Então, podemos supor que  $k > 1$ . Podemos reagrupar os termos desta sequência de forma que

$$(a_1, b_1) \geq (a_2, b_2) \geq \dots \geq (a_k, b_k)$$

segundo a ordem lexicográfica. Tome  $r$  como o menor índice tal que  $b_r \geq b_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Observe que  $a_1 \geq \frac{|A|}{2}$ . De fato, suponha que  $a_1 < \frac{A}{2}$ . Como  $a_1 \geq a_i$  para todo  $i \in \{2, \dots, k\}$ , temos  $a_i \leq a_1 < \frac{|A|}{2}$ , que implica que

$\sum_{i=1}^k a_i b_i < \sum_{i=1}^k \frac{A}{2} b_i = \frac{AB}{2}$ . Analogamente, temos  $b_r \geq \frac{|B|}{2}$ . Considere  $a'$  e  $b'$  de modo que  $a_1 = \frac{A}{2} + a'$  e  $b_r = \frac{B}{2} + b'$ . Isso nos dá,  $a' = a_1 - \frac{A}{2}$ , e portanto,  $A - a_1 = \frac{A}{2} - a'$ , e analogamente,  $b' = b_r - \frac{B}{2}$  e  $\frac{B}{2} - b' = B - b_r$ .

No que segue, a prova é dividida em dois casos, dependendo se  $r = 1$ , ou  $r \neq 1$ .

Primeiramente suponha que  $r \neq 1$ . Como  $q \geq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2} &\leq \sum_{i=1}^k a_i b_i \\ &\leq a_1 b_1 + \sum_{i=2}^k a_i b_r \\ &\leq a_1(b_1 + \dots + b_k - b_r) + (a_2 + \dots + a_k)b_r \\ &= a_1(B - b_r) + (A - a_1)b_r \\ &= \left(\frac{A}{2} + a'\right) \left(\frac{B}{2} - b'\right) + \left(\frac{A}{2} - a'\right) \left(\frac{B}{2} + b'\right) \\ &= \frac{AB}{4} + \frac{a'B}{2} - \frac{b'A}{2} - a'b' + \frac{AB}{4} - \frac{a'B}{2} + \frac{b'A}{2} - a'b' \\ &= \frac{AB}{2} - 2a'b' \\ &\leq \frac{AB}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i = a_1 b_1 + \sum_{i=2}^k a_i b_i = \frac{AB}{2}.$$

Assim, as equações acima devem se todas satisfeitas com igualdade. Em particular, temos  $b_1 = (B - b_r)$ , o que implica em  $B = b_1 + b_r$ , e portanto,  $k = 2$ . Além disso, como  $\frac{AB}{2} - 2a'b' = \frac{AB}{2}$ , então  $a' = 0$  ou  $b' = 0$ , logo,  $a_1 = a_2 = \frac{A}{2}$  ou  $b_1 = b_2 = \frac{B}{2}$ . Em ambos os casos, teríamos  $r = 1$  (pela definição de ordem lexicográfica), o que é uma contradição.

Suponha agora que  $r = 1$ . Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{2} + q &= \sum_{i=1}^k a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \\
&\leq a_1 b_1 + (a_2 + \cdots + a_k)(b_2 + \cdots + b_k) \\
&\leq a_1 b_1 + (A - a_1)(B - b_1) \\
&= \left(\frac{A}{2} + a'\right)\left(\frac{B}{2} + b'\right) + \left(\frac{A}{2} - a'\right)\left(\frac{B}{2} - b'\right) \\
&= \frac{AB}{4} + \frac{a'B}{2} + \frac{b'A}{2} + a'b' + \frac{AB}{4} - \frac{a'B}{2} - \frac{b'A}{2} + a'b' \\
&= \frac{AB}{2} + 2a'b'
\end{aligned}$$

Assim, temos  $q \leq 2a'b'$ . O valor mínimo de  $a' + b'$  é obtido quando  $a' = b' = \sqrt{\frac{q}{2}}$ . Portanto,  $a_1 + b_1 \geq \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + 2\sqrt{\frac{q}{2}}$ . Isso completa a prova do lema.  $\square$

Para demonstrar o Teorema 25, introduzimos as seguintes noções: Se  $xy$  é um arco de um digrafo  $D$ , então dizemos que  $x$  *domina*  $y$ , e escrevemos  $x \rightarrow y$ . De maneira mais geral, se  $D'$  e  $D''$  são dois subdigrafos de  $D$ , dizemos que  $D'$  *domina totalmente*  $D''$  se todo vértice de  $D'$  domina todos os vértices de  $D''$ , e escrevemos  $D' \rightarrow_t D''$ .

**Teorema 25.** (Guo-Volkman [15]) *Seja  $D$  um torneio  $p$ -partido fortemente conexo com partição  $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ , existe um vértice  $x \in V_i$  que pertence a um  $k$ -ciclo para todo  $k \in \{3, \dots, p\}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $V_1, V_2, \dots, V_n$  os conjuntos de uma partição de  $V(D)$ . Mostraremos, sem perda de generalidade, que o conjunto  $V_1$  possui um vértice contido em um  $m$ -ciclo para  $m \in \{3, 4, \dots, n\}$ . A demonstração segue por indução em  $m$ .

Primeiramente, mostramos que  $V_1$  possui um vértice em um triângulo. Para tanto, considere um vértice  $v_1 \in V_1$ . Como  $D$  é fortemente conexo,  $v_1$  necessariamente pertence a algum ciclo. Considere  $C = v_1 v_2 \dots v_t v_1$  o menor ciclo contendo  $v_1$ . Se  $v_3 \notin V_1$ , e  $t \geq 4$ , então  $v_1 v_3 \in A(D)$  ou  $v_3 v_1 \in A(D)$ , e assim produzimos um ciclo mais curto que contém  $v_1$  contrariando a minimalidade de  $C$ . Suponha agora que  $v_3 \in V_1$ . Como  $v_t \rightarrow v_1$ , temos  $t \geq 4$  e  $v_4 \notin V_1$ . Como  $C$  é o menor ciclo contendo  $v_1$ , segue que  $v_4 \rightarrow v_1$  e  $t = 4$ . Se  $v_2$  e  $v_4$  pertencem a conjuntos de partições distintos, então  $v_4 \rightarrow v_2$  e  $v_2 v_3 v_4 v_2$  é um triângulo contendo  $v_3 \in V_1$ .

Agora assumimos que  $v_2, v_4 \in V_2$ . Se há um vértice  $x \in V_i$  para  $i \geq 3$  que tem um vizinho de saída e um vizinho de entrada em  $C$ , então  $v_1$  ou  $v_3$  (ou ambos) está em um triângulo contendo um arco de  $C$ . Logo, podemos supor que  $V(D) - (V_1 \cup V_2)$  consiste de dois conjuntos  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $S_2 \rightarrow_t V(C) \rightarrow_t S_1$ . Como  $n \geq 3$ , então ao menos um dos conjuntos,  $S_1$  ou  $S_2$ , é não vazio. Sem perda de generalidade, suponha que  $S_1 \neq \emptyset$ . Como  $D$  é fortemente conexo, para cada vértice em  $S_1$  há um caminho para cada vértice de  $C$ . Considere  $P = x_1x_2 \dots x_q$  um caminho mais curto, onde necessariamente  $q \geq 3$ .

Se  $V(P) \cap S_2 = \emptyset$ , então um dos vértices  $x_2$  e  $x_3$  pertence a  $V_1$  e  $x_1x_2x_3x_1$  é um triângulo desejado. Portanto, suponha que  $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Como  $P$  é um caminho mais curto dos vértices em  $S_1$  para vértices em  $C$  e como  $S_2 \rightarrow_t V(C)$ , segue que  $x_{q-1} \in S_2$ . Se  $q = 3$ , então  $v_1x_1x_2v_1$  é um triângulo. Assim, suponha que  $q \geq 4$ . Então  $x_{q-2} \in V_1$  (e  $x_{q-2}x_{q-1}v_2x_{q-2}$  é um triângulo) ou  $x_{q-2} \in V_2$  (e portanto,  $v_1x_{q-2}x_{q-1}v_1$  é um triângulo). Logo, pelo menos um vértice de  $V_1$  pertence a um triângulo. Suponha agora que  $u$  é um vértice de  $V_1$  que pertence a um ciclo de comprimento  $t$  para  $t \in \{3, 4, \dots, m\}$ , em que  $m < n$ . Afirmamos que ou  $u$  está em um  $(m+1)$ -ciclo ou  $V_1$  contém outro vértice que encontra-se em um  $t$ -ciclo para  $t \in \{3, 4, \dots, m, m+1\}$ . De fato, seja  $C = u_1u_2u_mu_1$  um  $m$ -ciclo com  $u_1 = u$ , e seja  $S$  o conjunto de vértices que pertencem a conjuntos de partições não representados em  $C$ . Se há um vértice  $x \in S$  que tem um vizinho de saída e um vizinho de entrada em  $C$ , então  $x$  tem um vizinho de entrada em  $C$  seguido imediatamente por um vizinho de saída em  $C$ , e nós podemos considerar  $x$  entre esses dois vértices de  $C$  para formar o ciclo desejado de comprimento  $(m+1)$ .

Caso contrário,  $S$  pode ser particionado em dois conjuntos  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $S_2 \rightarrow_t V(C) \rightarrow_t S_1$ . Como  $m < n$ , então podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $S_1 \neq \emptyset$ . Como  $D$  é fortemente conexo, há um caminho de  $S_1$  para  $C$ . Considere  $P = y_1y_2 \dots y_q$  um caminho mais curto, onde necessariamente  $q \geq 3$ . Suponha inicialmente que  $V(P) \cap S_2 = \emptyset$ . Então  $y_i \rightarrow y_1$  para  $i \geq 3$ , uma vez que  $P$  é um caminho mais curto de  $S_1$  para  $C$ . Se  $P$  tiver pelo menos um vértice de  $V_1$ , escolha o valor mínimo de  $s$  para os quais  $y_s \in V(P) \cap V_1$ .

Afirmamos que  $y_s$  pertence a um  $j$ -ciclo para  $j = 3, 4, \dots, m+q-1 \geq m+2$ . De fato, se  $s = 2$  ou  $s = 3$ , então esta alegação segue facilmente de  $V(C) \rightarrow_t S_1$  e  $y_i \rightarrow y_1$  para  $i = 3, 4, \dots, q$ . Se  $s \geq 4$ , então pela definição de  $y_s$ , vemos que  $y_s \rightarrow y_i$  para todo  $i \leq s-2$ . Novamente,  $y_s$  está contido em ciclos de comprimentos  $3, 4, \dots, m+q-1$ .

Se, por outro lado,  $V(P) \cap V_1 = \emptyset$ , então  $u_1 \rightarrow y_i$  para  $i \leq q-2$ , e podemos supor também que  $u_1 \rightarrow y_{q-1}$ . Como  $y_q \in V(C)$  e  $y_q \neq u_1$ , temos  $y_q = u_r$  para algum  $r \geq 2$ . Então, para cada  $i$  com  $1 \leq i \leq q-1$ , o ciclo  $u_1y_{q-i}y_{q-i+1} \dots y_qu_{r+1}u_{r+2} \dots u_mu_1$  é de comprimento  $i+m-r+2$ . Além disso, para cada  $j$  com  $1 \leq j \leq r-1$ , o

ciclo  $u_1 u_2 \cdots u_j y_2 \cdots y_{q-1} u_r u_{r+1} \cdots u_m u_1$  é de comprimento  $j + q + m - r$ . Assim,  $u_1$  intercepta em um ciclo  $t$  para  $t \in \{3, 4, \dots, m + q - 1\}$ .

Resta considerar o caso em que  $V(P) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Como  $S_2 \rightarrow_t V(C)$ , o vértice  $y_{q-1} \in S_2$ . Se  $u_1$  e  $y_{q-2}$  estiverem em conjuntos de partições distintos, então  $u_1 \rightarrow y_{q-2}$  (pela minimalidade de  $P$ ) e assim  $u_1 y_{q-2} y_{q-1} u_3 u_4 \cdots u_m u_1$  é um  $(m + 1)$  ciclo. Se  $y_{q-2}$  pertence a  $V_1$ , então  $u_2 \rightarrow y_{q-2}$  e então  $u_1 u_2 y_{q-2} y_{q-1} u_4 u_5 \cdots u_m u_1$  ou, se  $m = 3$ ,  $u_1 u_2 y_{q-2} y_{q-1} u_1$  é um  $(m + 1)$ -ciclo, conforme desejado.  $\square$