

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR INTEIRA MISTA APLICADA AO  
PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

Jéssica Soares da Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Márcia Helena Costa Fampa  
Fernanda Maria Pereira Raupp

Rio de Janeiro  
Novembro de 2022

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR INTEIRA MISTA APLICADA AO  
PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

Jéssica Soares da Costa

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E  
COMPUTAÇÃO.

Orientadores: Márcia Helena Costa Fampa  
Fernanda Maria Pereira Raupp

Aprovada por: Prof. Márcia Helena Costa Fampa, D.Sc.  
Prof. Fernanda Maria Pereira Raupp, D.Sc.  
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.  
Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho, D.Sc.  
Prof. Wendel Alexandre Xavier de Melo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
NOVEMBRO DE 2022

Soares da Costa, Jéssica

Programação Não-Linear Inteira Mista Aplicada ao Problema de Dimensionamento de Lotes/Jéssica Soares da Costa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2022.

XIV, 70 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Márcia Helena Costa Fampa

Fernanda Maria Pereira Raupp

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 67 – 70.

1. Problema de Dimensionamento de Lotes.
  2. PNLIM.
  3. Programação Matemática.
- I. Helena Costa Fampa, Márcia *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*"Mesmo que eu tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência; mesmo que tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, sem caridade, eu nada seria"*  
*(Coríntios 1:2).*

*Dedico aos meus pais, Shirley e  
Carlos, que nunca mediram  
esforços para que eu conseguisse  
alcançar meus objetivos.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e a intercessão dos meus Santos de devoção, em especial Nossa Senhora Aparecida pela cura de uma meningite pela qual fui acometida aos 6 anos de idade. São Jorge, São Bento, São José, Santa Ana, Nossa Senhora do Carmo, São Miguel e São Rafael Arcanjos, Santa Rita de Cássia, Santo Antonio e Nossa Senhora das Graças pelos demais livramentos ao longo do caminho e pela oportunidade de cursar a pós-graduação em um Programa de referência que é o PESC/COPPE/UFRJ.

À minha família, por todo auxílio, apoio e conselhos no que diz respeito ao curso do início ao fim. Principalmente, aos meus pais, Shirley e Carlos, pela paciência que tiveram comigo durante minha rotina incansável de estudos. Às minhas Tias Terezinha, Marilene e Carla, e aos meus Tios Ricardo e Amaro (*in memoriam*) por toda a atenção, todos os conselhos e momentos de descontração. Aos meus primos Diego Amaro e Douglas, pela parceria de sempre. Às minhas avós, Maria da Glória (*in memoriam*) e Maria, e ao meus avôs Antonio e Zeca (*in memoriam*) por todo carinho que têm por mim.

Aos meus professores, por todo esforço e dedicação no exercício de sua profissão. Por todos os conhecimentos e ensinamentos transmitidos aos seus alunos. Em especial, à minha orientadora Márcia Fampa e coorientadora Fernanda Raupp. Também agradeço ao meu orientador da graduação Erito Marques pelo incentivo e motivação mesmo após a graduação. E ao professor Ronaldo Gregório da graduação, que apresentou-me a Otimização pela primeira vez. Ainda agradeço aos professores Nelson Maculan Filho, Virgílio José Martins Ferreira Filho e Wendel Alexandre Xavier de Melo por aceitarem fazer parte da banca desta dissertação.

Aos amigos do PESC. Por todo afeto, ânimo, suporte, coragem, caronas, conselhos, dicas e ajuda, Marcella Braga, Amanda Azevedo, Victor Hugo, Patrícia Wang, João Paulo Monteiro e Daniela Lubke.

Aos funcionários do PESC, em especial, Ana Paula Rabello, Gutty, Ricardo, Rosa e Lourdes pelo zelo com os alunos e pelo empenho no trabalho que exercem.

Aos amigos do Laboratório CAPGov/PESC/COPPE onde realizei Pesquisa e Desenvolvimento. Em especial, Emerson Yamamoto e Gustavo, pela oportunidade; Gabriel Mannarino, Juan Baptista, Manoel Ribeiro e Alexandre Vaz pelo com-

partilhamento de seus conhecimentos comigo. À Caroline Lima, Beatris Xavier, Wanderson Lomenha e Victória Garcia por toda alegria, vontade e motivação que transmitem a quem tem a oportunidade de tê-los como amigos dentro e fora do laboratório.

Às amigas de uma vida toda, pelas conversas e pelo incentivo em ser melhor a cada dia na saúde física e mental, Luana, Caroline Trevisol, Gabriele, Alessandra e Camila. E às amigas da graduação que levarei da Rural para a vida, Caroline Lima (novamente), Aline e Isis.

Ao amigo Douglas Paranhos que, mesmo geograficamente longe, está perto. E ao Erick Menezes, que tornou-se um grande amigo mesmo após o fim da graduação, pelo exemplo e inspiração.

À minha psicóloga Paula Marinho, por semanalmente tentar me manter equilibrada para que meu rendimento nas minhas atividades acadêmicas não fosse prejudicado mesmo nos esporádicos momentos de intempéries pessoais.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que foi essencial para minha permanência no mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR INTEIRA MISTA APLICADA AO PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

Jéssica Soares da Costa

Novembro/2022

Orientadores: Márcia Helena Costa Fampa

Fernanda Maria Pereira Raupp

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um dos problemas de planejamento de produção mais estudados é o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL). Basicamente, tal problema consiste na decisão de quando e quanto produzir de um item ao longo de um horizonte de planejamento com o objetivo de otimizar custos ou ganhos, e, ao mesmo tempo, satisfazer a demanda pelo item. Neste trabalho, estudamos o PDL num sistema de produção de um único item e com limitação na capacidade de produção, através de modelos de Otimização Não-Linear Inteira Mista (ONLIM), em que, não apenas a quantidade a produzir e os períodos em que ocorrerá produção são variáveis de decisão, mas também o preço unitário e a demanda pelo item produzido. Diferentes modelos são comparados, considerando relações distintas entre preço e demanda. Mostramos que os modelos propostos são modelos de ONLIM convexa, ou seja, as relaxações contínuas dos modelos abordados são problemas de otimização convexa. Discutimos experimentos numéricos, comparando a relação preço-demanda modelada por funções quadrática, exponencial e hiperbólica. Para efeito de comparação, foram construídas instâncias aleatórias para as variantes modeladas do problema, que foram resolvidas utilizando os pacotes computacionais **Gurobi** e **Muriqui**. Utilizando os mesmos pacotes computacionais, realizamos também experimentos comparativos em uma extensão dos modelos que leva em consideração a incerteza nos custos de produção e nos custos de manutenção de estoques. Analisamos também a influência da aversão ao risco na política de produção em todos os modelos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## MIXED INTEGER NONLINEAR PROGRAMMING APPLIED TO LOT-SIZING PROBLEM

Jéssica Soares da Costa

November/2022

Advisors: Márcia Helena Costa Fampa

Fernanda Maria Pereira Raupp

Department: Systems Engineering and Computer Science

One of the most studied production planning problems is the Lot-Sizing Problem (LSP). Basically, this problem consists of the decision of when and how much to produce of an item in a planning horizon with the objective of optimizing costs or gains and, at the same time, satisfying the item demand. In this work, we study the LSP in a production system of a single item and with limited production capacity, through models of Mixed Integer Nonlinear Optimization (MINLO), in which not only the quantity to be produced and the periods in which production will occur are decision variables, but also the unit price and the demand for the item produced. Different models are compared, considering different relationships between price and demand. We show that the proposed models are convex MINLO models, that is, the continuous relaxations of the models addressed are convex optimization problems. We discuss numerical experiments, comparing the price-demand relationship modeled by quadratic, exponential and hyperbolic functions. For the purpose of comparison, random instances were built for the modeled variants of the problem, which were solved by the computational packages **Gurobi** and **Muriqui**. Using the same computational packages, we also performed comparative experiments in an extension of the models that take into account the uncertainty in production and holding costs. We also analyzed the influence of risk aversion on production policy in all models.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Problema de dimensionamento de lotes . . . . .	3
1.2 Sequência de apresentação . . . . .	5
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>7</b>
<b>3 Otimização Não-linear</b>	<b>11</b>
3.1 Conjunto convexo . . . . .	12
3.2 Funções convexas . . . . .	12
3.2.1 Condições de otimalidade de primeira ordem . . . . .	12
3.2.2 Condições de otimalidade de segunda ordem . . . . .	13
3.3 Funções quasi-convexas . . . . .	14
3.4 Problemas de otimização não-linear . . . . .	14
3.5 Problemas de otimização convexa . . . . .	15
<b>4 Modelos para o PDLC</b>	<b>18</b>
4.1 Formulação matemática . . . . .	18
4.2 Análise das funções de dependência preço-demanda . . . . .	21
<b>5 Experimentos Numéricos</b>	<b>27</b>
5.1 Experimento 1 . . . . .	29
5.2 Experimento 2 . . . . .	31
5.3 Experimento 3 . . . . .	33
5.4 Experimento 4 . . . . .	36
5.5 Experimento 5 . . . . .	38
5.6 Experimento 6 . . . . .	41
5.7 Experimento 7 . . . . .	43
5.8 Experimento 8 . . . . .	46

5.9	Experimento 9 . . . . .	48
5.10	Resultados e discussões . . . . .	51
5.10.1	Análise da variação de $\epsilon$ . . . . .	51
5.10.2	Análise da variação de $\beta$ . . . . .	52
5.11	Análise da variação na relação preço-demanda . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Modelos para o PDLC considerando Incerteza em Custos</b>	<b>57</b>
<b>7</b>	<b>Experimentos Numéricos com Incerteza em Custos</b>	<b>59</b>
7.1	Resultados e discussões . . . . .	61
7.1.1	Análise dos modelos $(P_1^\omega)$ , $(P_2^\omega)$ e $(P_3^\omega)$ . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>65</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

# Lista de Figuras

3.1	Extraída do livro [1]: $f$ convexa. . . . .	12
3.2	Extraída do livro [1]: $f$ diferenciável e convexa . . . . .	13
4.1	Comportamento do preço e da receita para $f^1, f^2$ e $f^3$ ( $\alpha = 250, \beta = 0.5, \epsilon = 0.75, \delta = 0.4$ ) . . . . .	26
5.1	Receita ( $p_t d_t$ ), custo de produção ( $c_t x_t$ ), custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 1. . . . .	29
5.2	Receita total, lucro total, custo total de produção, custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 1. . . . .	29
5.3	Preço e Demanda no Experimento 1. . . . .	30
5.4	Preço total e Demanda total no Experimento 1. . . . .	31
5.5	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 2. . . . .	31
5.6	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 2. . . . .	32
5.7	Preço e Demanda no Experimento 2. . . . .	33
5.8	Preço total e Demanda total no Experimento 2. . . . .	33
5.9	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 3. . . . .	34
5.10	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 3. . . . .	34
5.11	Preço e Demanda no Experimento 3. . . . .	35
5.12	Preço total e Demanda total no Experimento 3. . . . .	36
5.13	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 4. . . . .	36
5.14	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 4. . . . .	37
5.15	Preço e Demanda no Experimento 4. . . . .	38
5.16	Preço total e Demanda total no Experimento 4. . . . .	38

5.17	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 5. . . . .	39
5.18	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 5. . . . .	39
5.19	Preço e Demanda no Experimento 5. . . . .	40
5.20	Preço total e Demanda total no Experimento 5. . . . .	41
5.21	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 6. . . . .	41
5.22	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 6. . . . .	42
5.23	Preço e Demanda no Experimento 6. . . . .	43
5.24	Preço total e Demanda total no Experimento 6. . . . .	43
5.25	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 7. . . . .	44
5.26	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção e custo total de preparação no Experimento 7. . . . .	44
5.27	Preço e Demanda no Experimento 7. . . . .	45
5.28	Preço total e Demanda total no Experimento 7. . . . .	46
5.29	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 8. . . . .	46
5.30	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 8. . . . .	47
5.31	Preço e Demanda no Experimento 8. . . . .	48
5.32	Preço total e Demanda total no Experimento 8. . . . .	48
5.33	Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 9. . . . .	49
5.34	Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 9. . . . .	49
5.35	Preço e Demanda no Experimento 9. . . . .	50
5.36	Preço total e Demanda total no Experimento 9. . . . .	51
5.37	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_1$ ). . . . .	54
5.38	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_2$ ). . . . .	55
5.39	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_3$ ). . . . .	55
7.1	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_1^\omega$ ). . . . .	63
7.2	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_2^\omega$ ). . . . .	63
7.3	Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_3^\omega$ ). . . . .	64

# Lista de Tabelas

4.1	Notação . . . . .	19
5.1	Experimentos 1,2,3 ( $\epsilon = 0.25$ ) . . . . .	52
5.2	Experimentos 4,5,6 ( $\epsilon = 0.50$ ) . . . . .	52
5.3	Experimentos 7,8,9 ( $\epsilon = 0.75$ ) . . . . .	52
5.4	Experimento 1,4,7( $\beta = 3$ ) . . . . .	53
5.5	Experimento 2,5,8 ( $\beta = 5$ ) . . . . .	53
5.6	Experimento 3,6,9 ( $\beta = 8$ ) . . . . .	53
5.7	Média aproximada do tempo computacional considerando os nove experimentos para cada problema $P_j$ . . . . .	56
7.1	Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_1^\omega$ ). . . . .	62
7.2	Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_2^\omega$ ). . . . .	62
7.3	Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_3^\omega$ ). . . . .	62
7.4	Média aproximada do tempo computacional considerando os seis experimentos para cada problema $P_j^\omega$ . . . . .	64

# Capítulo 1

## Introdução

Para auxiliar o gerenciamento da produção de uma indústria, é necessário ter processos bem definidos, com atividades que conciliam as demandas de mercado com a capacidade dos recursos de produção disponíveis para atendê-las. Assim, segundo Slack [2], conceitua-se o termo *Planejamento e Controle da Produção*. *Planejamento* é uma formalização de expectativa futura, ou seja, é o plano do que se espera em determinado tempo futuro. No entanto, ao longo de sua implementação, podem ocorrer imprevistos que impactem diretamente o planejamento, fazendo com que os eventos nem sempre ocorram da maneira esperada. *Controle* é o processo de lidar com situações inesperadas, envolvendo ações de replanejamento ou intervenção em alguma operação da produção para fazê-la transcorrer conforme as novas expectativas.

O processo de planejamento e controle da produção busca conciliar a demanda com o suprimento. Logo, a natureza das decisões tomadas em relação à determinada operação ao longo desse processo dependerá da natureza da demanda e da natureza do suprimento. Nesse sentido, a maneira como ocorre o gerenciamento do processo poderá ser afetada pela questão da incerteza em relação à demanda, aos suprimentos e aos custos. No que diz respeito à demanda, é possível classificá-la de duas formas: demanda dependente e demanda independente. A primeira ocorre quando a demanda depende de algum outro fator já conhecido, o que permite que algumas operações possam prever a demanda com relativa certeza. A segunda ocorre quando não se tem uma visibilidade previamente determinada da demanda, isto é, a demanda é imprevisível e ainda assim precisa ser atendida.

Outra questão importante para se considerar na conciliação entre demanda e suprimento é a estocagem. Dentro desse escopo, podem surgir problemas relacionados à capacidade e ao acúmulo ou falta de materiais ou insumos em estoque, que podem impactar nas metas dos gerentes de produção. Dessa maneira, surge a necessidade também de se introduzir metodologias de gestão de capacidade de produção e de gestão de estoques.

Slack [2] define gestão da capacidade física de produção como sendo a atividade de entender as peculiaridades da demanda por produtos e serviços através do planejamento e do controle da capacidade de determinada operação. As decisões, no que diz respeito à gestão da capacidade de produção, devem ser tomadas de modo a tentar manter o equilíbrio entre capacidade e demanda pois, no caso de um desequilíbrio, aspectos de desempenho como custos e receitas podem ser afetados. Por exemplo, quando o nível de capacidade de produção se encontra acima da demanda, tem-se subutilização da capacidade, implicando em custos unitários de produção elevados entre outras consequências.

Slack diz que [2] para lidar com divergências entre demanda e capacidade, as empresas costumam utilizar três metodologias: *Plano de Capacidade Constante*, ou seja, ignorar as variações na quantidade demandada de modo a manter os níveis constantes de capacidade; *Plano de Acompanhamento da Demanda*, que significa ajustar a capacidade para refletir a oscilação da quantidade demandada; e por último, *Gestão da Demanda*, cujo esforço é direcionado em alterar a quantidade demandada para ajustá-la à disponibilidade de capacidade.

Quando a demanda é independente, a gestão torna-se mais difícil devido à dificuldade de se prever a demanda futura próxima da demanda real, e atender satisfatoriamente a demanda real. Essa situação é comumente tratada por meio da gestão de estoques. Segundo Slack [2], estoque é o termo usado para descrever a acumulação de materiais e informações. Quando o estoque é formado somente por materiais físicos, pode ser denominado *inventário*. A gestão de estoques realiza o gerenciamento dessas acumulações. Tarefa essa que é muito importante pois, por um lado, manter um estoque é custoso, já que se torna um ativo, comprometendo parte do capital de giro. Por outro lado, manter um estoque proporciona certo nível de segurança perante a incerteza de ambiente com demandas imprevisíveis. De maneira geral, enquanto a gestão de capacidade busca conciliar produção e demanda, a gestão de estoque busca conciliar suprimento e demanda. Quando a taxa de suprimento excede a taxa de demanda, o estoque aumenta. Caso contrário, o estoque diminui. Nessa lógica, se uma operação conseguir igualar níveis de suprimento e demanda, ela tenderá a diminuir seus níveis de estoque.

Diferentemente dos sistemas produtivos sob encomenda (*make-to-order*), aqueles em que a produção de um item é iniciada após uma encomenda do cliente, os sistemas produtivos para estocar (*make-to-stock*) antecipam os pedidos dos clientes, produzindo e estocando itens. Nesse último caso, mesmo que estoques gerem custos, eles apresentam vantagens ao garantir: (a) um suprimento antecipado, e (b) atendimento da demanda inesperada em curto prazo. De fato, a manutenção de estoque permite que as operações tenham a possibilidade de aproveitar oportunidades a curto prazo, permite a antecipação de demandas futuras, e também pode reduzir

os custos totais de determinada operação ou processo.

## 1.1 Problema de dimensionamento de lotes

Desde o início da industrialização, o dimensionamento de lotes já era considerado um objetivo fundamental para as empresas [3]. É sabido que o planejamento de produção pode ser impactado por imprevistos durante as operações a serem realizadas, ao longo do processo de produção. O problema de dimensionamento de lotes aparece, naturalmente, a partir do momento em que tais operações são necessárias entre as execuções de produção de um item, em uma linha de produção, com objetivo de alcançar competitividade de mercado, ou seja, custos mínimos. De uma maneira geral, o custo de preparação dessas operações não depende da quantidade de itens a serem processados. Portanto, para minimizar custos, a produção deve ser executada em lotes, preferencialmente com mais de uma unidade do item a ser produzido. Por outro lado, num sistema de produção *make-to-stock*, isso pode gerar custos altos de estoque (ou custos de inventário). Como é o caso de insumos e alguns outros itens semiacabados que devem ser estocados, além das unidades produzidas, desde o momento de produção até o momento do envio para o consumidor final. Assim, a otimização do dimensionamento de lotes tem por objetivo alcançar o melhor *trade-off* entre os custos de produção propriamente ditos, de preparação e de manutenção de estoque para obtenção de planos de produção mais competitivos [3], de maneira a garantir que a demanda seja de preferência satisfeita e respeitando a limitação de capacidade de produção das máquinas. Isto é, o problema visa determinar o momento e o nível de produção ideais [4], de modo a minimizar os custos totais.

Por mais de cinco décadas, modelos de otimização para planejamento de produção têm sido um importante objeto de estudo. Um trabalho antigo, porém instigante até o presente, sobre dimensionamento de lotes é o trabalho de Wagner e Whitin [5], o qual aborda a formulação para tal problema de planejamento de produção para um único item, em um único recurso, com capacidade de produção e de estocagem ilimitadas. Desde então, a pesquisa sobre o tema tem focado em modelos mais realísticos e aproximações algorítmicas para permitir a solução de tal problema. Leituras sobre esses tópicos são indicadas em [6–8]. Um estudo minucioso sobre formulações matemáticas para problemas de dimensionamento de lotes, buscando relaxações lineares mais justas e bons limites inferiores para o problemas podem ser encontradas em [9].

Ao longo dos anos, o problema de dimensionamento de lotes (PDL) ganhou diversas classificações, as quais tiveram como base inúmeros critérios referentes a

características incorporadas ao problema. Dentre diversos critérios que podem ser considerados, vale citar: restrições de capacidade, número de níveis de produção [10] e número de tipos de produtos. No que diz respeito ao critério de capacidade, é possível classificar o PDL como capacitado (*capacitated*) ou como não capacitado (*uncapacitated*), isto é, com restrições de capacidade ou com capacidade de produção ilimitada. No que diz respeito ao critério referente à quantidade de níveis de produção, é possível classificar o PDL como sendo de nível único (*single-level*) ou de múltiplos níveis (*multi-level*). No que diz respeito ao critério referente ao produto, é possível classificar o PDL como sendo de item único (*single-item*) quando apenas um tipo de produto é considerado ou de múltiplos itens (*multi-item*) quando mais de um tipo de produto é considerado.

Nesta dissertação, abordaremos o problema de otimização de dimensionamento de lotes capacitado que surge em um planejamento de produção de nível único e de um único item estocável. Tal problema se destacou por ser relativamente simples e por poder ser tratado como um subproblema de alguns outros problemas de dimensionamento de lotes mais complexos [10]. A versão clássica do PDL capacitado de item único visa a determinação da quantidade a ser produzida, ao longo de um horizonte de planejamento (HP), que minimiza, ao longo de todos os períodos, os custos fixos de preparação, os custos lineares de produção e de estocar. Uma característica específica desse problema clássico é que a demanda prevista é conhecida, podendo variar ao longo do tempo, porém sempre atendida. Além disso, é assumido que cada quantidade positiva de produção durante um período induz uma preparação da máquina (*setup*), mesmo em casos onde a produção ocorra em dois períodos consecutivos.

Outros trabalhos da literatura foram analisados num esforço para ajustar as suposições do modelo clássico de otimização de dimensionamento de lotes para situações mais realísticas, focando na dependência entre a demanda pelo item e o preço de venda. Para isso, em vez de minimizar o custo total, maximizamos os ganhos, considerando a receita com comportamento não-linear. Evidências empíricas mostram que a clássica suposição de uma demanda constante em cada período do horizonte de planejamento é uma excessiva simplificação da realidade. Já em [11], os autores relaxam essa suposição, considerando um modelo em que a demanda reduz linearmente com o aumento do preço de venda. Ainda em [11], a receita é modelada como uma função quadrática côncava, conduzindo para um problema de otimização quadrática inteira mista (PQIM) convexa. A dificuldade em resolver essa classe de problemas anos atrás é refletida em [11], que propõe uma decomposição algorítmica para resolver o subproblema que surge quando as variáveis inteiras do modelo são fixas. Outros trabalhos acadêmicos consideram diferentes versões do problema de dimensionamento de lotes com demandas não constantes, abordando suas dependên-

cias no nível de inventário [12, 13], preço [14], preço e despesas de *marketing* [15], e preço de produto e seu desempenho ambiental [16]. Modelos do tipo preço-demanda mais realísticos são apresentados em [17], também.

Dispondo da recente evolução na área de otimização não-linear inteira mista (ONLIM), damos um passo adiante no que diz respeito ao ajuste de modelos clássicos de dimensionamento de lotes a situações mais realistas, considerando funções não-lineares mais adequadas para modelar a relação entre preço e demanda. Esta dissertação apresentará uma análise teórica das funções consideradas em nossos modelos para estabelecer a correspondência entre a dependência não-linear preço-demanda proposta neste trabalho e a dependência linear adotada em [11]. Além disso, este trabalho mostrará que nosso problema de ONLIM também é convexo. Por meio de experimentos numéricos, formulações propostas com dependência preço-demanda exponencial e hiperbólica serão comparadas à formulação com dependência preço-demanda linear da literatura. Enfatizamos que além da introdução de uma relação não-linear entre preço e demanda, também introduzimos no modelo utilizado em [11], os custos de preparação que, enquanto tornam o modelo mais realista, requerem para isso a adição de variáveis binárias, aumentando significativamente a dificuldade de sua resolução. Ainda assim, mostramos com nossos experimentos numéricos, a possibilidade de obter a solução exata do problema para as instâncias consideradas.

Aproveitamos as formulações propostas para também criar uma extensão das mesmas considerando a incerteza nos custos de produção e manutenção de estoque e realizamos mais experimentos comparativos nesse sentido. O modelo utilizado para considerar as incertezas, penaliza a variância nos custos e foi proposto em [18]. Mostramos com este trabalho, que com o avanço nas últimas décadas na resolução numérica de problemas de ONLIM convexa, podemos não apenas considerar modelos mais realistas para o PDL com relação aos trabalhos considerados da literatura, como obter soluções ótimas para aplicações deste problema. Resultados parciais desta dissertação foram apresentados em [19, 20].

## 1.2 Sequência de apresentação

A fim de apresentar formalmente os resultados alcançados com este estudo, iremos seguir uma sequência de, primeiramente, no Capítulo 2, realizar uma breve revisão bibliográfica no sentido de apresentar artigos que serviram de inspiração para esta dissertação. No Capítulo 3, apresentaremos uma série de conceitos teóricos relacionados à otimização não-linear, incluindo os de funções convexa e côncava, a fim de antecipar conceitos que serão necessários para o entendimento do capítulo seguinte. No Capítulo 4, iremos propor as formulações matemáticas do problema

abordado nesta dissertação, assim como faremos uma análise das funções de dependência preço-demanda utilizadas nos modelos. No Capítulo 5, discutiremos os experimentos numéricos. Descreveremos detalhadamente cada experimento, assim como exibiremos resultados de cada experimento separadamente. Também realizaremos as análises das variações de parâmetros nos experimentos considerando agrupamentos convenientes para a realização das comparações. No Capítulo 6, iremos propor uma extensão para as formulações matemáticas do Capítulo 4, de maneira a incorporar incertezas com relação aos custos de produção e manutenção de estoque em nossos modelos. No capítulo 7, iremos verificar através de novos experimentos numéricos como a aversão ao risco afeta os resultados obtidos nos modelos determinísticos anteriormente considerados. No Capítulo 8, as considerações finais sobre esta dissertação serão apresentadas. E, por fim, as referências bibliográficas utilizadas serão apresentadas.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Neste Capítulo, citaremos trabalhos que se destacaram por abordar modelos matemáticos com especificidades distintas, assim como métodos de solução, com respeito à evolução da pesquisa em torno do problema de dimensionamento de lotes.

Citado em quase todos os artigos pesquisados para esta dissertação, o primeiro trabalho na área de planejamento de produção foi publicado por Harris em 1913 [21] [3]. Nele, é apresentado o modelo matemático para a determinação do tamanho ótimo do lote econômico (modelo EOQ), ou seja, a quantidade de itens do pedido que minimiza os custos totais de produção e estocagem. O modelo considera como parâmetros, o custo fixo de produção, custo de preparação e o custo variável de estocagem baseado no nível médio dos estoques, e ainda taxa mensal de demanda constante e contínua pelo item [22]. Seu objetivo é minimizar os custos num único período e sem restrições. Muitas extensões baseadas no modelo básico EOQ surgiram ao longo do tempo.

Wilson realizou análises minuciosas no trabalho de Harris a fim de estudar possíveis aplicações em empresas [23] [24]. Em 1934, o modelo EOQ foi popularizado através do trabalho de Wilson [25] [3]. Utilizando uma abordagem estatística, o autor acrescentou ao modelo de Harris a premissa de um tempo entre a colocação e o recebimento do pedido, o que significa determinar um ponto de pedido a fim de contornar possíveis problemas de falta de produtos no estoque devido à flutuação da demanda [26].

Apesar da popularização conferida ao trabalho de Harris por meio do trabalho de Wilson, segundo [27], o artigo de Harris passou muito tempo esquecido, sendo redescoberto somente em 1988. Desde então, o modelo de Harris vem se tornando um dos resultados mais citados e aplicados em planejamento da produção. Vários pesquisadores desenvolveram novas formulações, variantes e extensões para o PDL de maneira a incluir no modelo questões sobre sistemas de estoque em vários estágios, incentivos, ou produtividade [28], tentando refletir casos tão próximos da realidade quanto possíveis, [11], [29], [30].

Em 1958, Wagner e Whitin propuseram pela primeira vez, no artigo [5] [3], um método que encontra solução ótima para o problema de planejamento abordado. O método se baseia na programação dinâmica e heurística para resolver o problema de planejamento para um sistema de produção em que as quantidades demandadas pelo item são conhecidas e distintas em cada período  $n$ , o mesmo que dizer demanda dinâmica. Também levaram em consideração custo de estocagem variável de período para período. De fato, o problema determina as quantidades ótimas a serem encomendadas, por produção ou compra, e estocadas a fim de minimizar os custos de encomendar e estocar ao longo do horizonte de tempo. Os autores afirmaram suas suposições no artigo através de provas de teoremas propostos, apresentação de algoritmo e exemplo numérico. A escolha do método de resolução foi bem aceita, exceto para situações que considerassem um longo horizonte de planejamento, devido à grande quantidade de tempo de processamento requerida. Apesar disso, até hoje, eles também são citados com grande frequência em artigos da área, [3].

Em 1997, foi publicado um artigo muito interessante [11] que apresentou um algoritmo para um problema de programação quadrática que surgiu como um sub-problema em uma versão de maximização de lucro do problema de dimensionamento de lotes capacitados (CLSP). O modelo apresentado trata preço unitário e demanda como variáveis do problema com interdependência linear.

Ainda em 1997, foi publicado o artigo [31], também muito interessante e diferenciado por formular o problema de dimensionamento de lotes como um problema de programação não-linear inteira mista. Apesar de pequeno, tal artigo é relativamente denso devido a sua formulação não trivial. Em suma, é importante destacar que Sox aborda o problema em questão considerando as seguintes características: lote de item único e dinâmico, custos variáveis e demanda aleatória. A incerteza de demanda é aplicada tanto no que diz respeito à quantidade demandada quanto no tempo. Sobre a formulação, é possível mencionar que após algumas simplificações a função objetivo obtida foi uma função de perda não-linear e convexa conhecida na teoria de estoque. Tal função, ainda foi manipulada mais algumas vezes através de substituições e por fim resultou em uma função objetivo de caráter separável entre as variáveis referentes à quantidade demandada. Para resolver tal problema, foi proposto um algoritmo recursivo de programação dinâmica. Esse trabalho ainda contou com demonstrações de lema e teoremas, além de exemplos numéricos comparativos.

Com a expansão da pesquisa, foi publicado em 2003, o artigo [6] que aborda o desenvolvimento feito com respeito ao problema de dimensionamento de lotes de nível único, em termos de modelos matemáticos e métodos de solução exatos e heurísticos, até então propostos. Tal artigo menciona as características principais que podem ser consideradas na modelagem de um problema de dimensionamento de lotes como horizonte de planejamento, quantidade de níveis (*single-level* ou *multi-level*),

quantidade de tipo produto (*single-item* ou *multi-item*), restrições de capacidade, restrições de recursos, questão de deterioração de itens do estoque, demanda determinística (fixa ou dinâmica), demanda probabilística, questão de custo de preparação (simples ou complexos) e questão de escassez de estoque. Karimi ainda cita alguns algoritmos heurísticos para resolução do problema de dimensionamento de lotes não capacitado de nível único utilizados na literatura bem como seus autores. Já para a versão capacitada do problema, Karimi cita alguns algoritmos dividindo-os em três categorias: métodos exatos, heurísticas especializadas e heurísticas baseadas em programação matemática. Na primeira categoria, o autor aponta como métodos de solução as técnicas do *branch-and-bound*, de geração de corte e de redefinição de variável. Na segunda categoria, fala sobre heurísticas dos tipos "período a período" e "de melhoria". Finalmente, na terceira categoria, fala sobre heurísticas de relaxação, baseadas em *branch-and-bound*, e de particionamento de conjuntos e geração de colunas.

O artigo de 2006 [32] fez uma revisão de métodos de solução para o problema dinâmico de dimensionamento de lotes enfatizando a aplicação de meta-heurísticas como busca tabu, *simulated annealing* e *algoritmo genético* como alternativa a fim de contornar o problema da complexidade em extensões de problemas de dimensionamento de lotes. No mesmo artigo, o autor também relembra e compara outras metodologias que podem ser aplicadas ao problema como programação dinâmica, relaxação lagrangeana, heurísticas especializadas, planos de cortes e decomposição de Dantzig-Wolfe.

Também em 2006, [10], refere-se ao estado da arte daquela época do problema de dimensionamento de lotes de item único. Brahimi *et al* fala sobre algumas formulações diferentes para o problema: a formulação padrão do problema, a formulação sem a variável referente ao custo de estocagem, formulação do caminho mais curto e a formulação baseada em localização de facilidades. Essas quatro foram apresentadas tanto para versão capacitada quanto para a versão não capacitada do problema. O autor também fala da possibilidade de acrescentar algumas especificidades ao problema de modo a gerar novas versões do mesmo. Dentre tais características, é possível citar *backlogging* que significa a consideração do atraso no modelo do problema, múltiplas facilidades, estoque perecível, remanufatura e janela de tempo. Como técnicas de solução, o artigo faz menção à programação dinâmica, *branch-and-bound*, métodos de aproximação, e desigualdades válidas e *branch-and-cut*.

Em 2008, foi publicado um estudo sobre modelos para o problema de dimensionamento de lotes com limitação de estoque. O artigo conteve-se em apresentar formulações que caracterizavam-se por incorporar questões de remanufatura, de janela de tempo para produção e de capacidades cumulativas de maneira a apresentar detalhadamente a formulação para cada uma dessas extensões do problema. [33].

Em 2014, o artigo [28] apresentou um estudo terciário em que mostrava as diversas extensões de modelos de dimensionamento de lotes que foram elaboradas a partir do modelo de Harris ao longo do tempo. Nesse trabalho, o autor menciona a importância do controle de estoques para a economia global destacando a atividade como uma das principais operações da indústria pelo poder de redução de custos que a mesma tem quando gerenciada eficientemente. O autor ainda fala sobre algumas possibilidades de integração do problemas em questão com outros problemas como de *scheduling*, modelos que consideram sistemas de incentivos, e questões de produtividade.

Em 2017, foi publicado o artigo [34] como uma forma de atualização do estado da arte sobre o problema de dimensionamento de lotes dinâmico de item único focando em trabalhos publicados até o ano de 2016. Tal artigo é bastante informativo em vários aspectos. Ele fala sobre as mesmas abordagens para solução já mencionadas em [10], porém com algumas referências mais recentes. O autor também acrescenta e explica novas características que podem ser embutidas de modo a gerar novas versões do problema. Vale destacar o parâmetro denominado "política de serviço" que pode ter as seguintes classificações características: demanda atendida no prazo, pedido não atendido, vendas perdidas, subcontratação. Além disso, o trabalho em questão retoma a ideia de integrar o problema de dimensionamento de lotes com outros temas relacionados como o problema de *scheduling*, localização do armazém, transporte e roteamento de veículos, aceitação de pedidos e seleção de mercado, seleção de fornecedores, e coordenação da cadeia de suprimentos. Esse último é um tema bem atual, de fato, na área de planejamento e controle de produção.

O problema de dimensionamento de lotes é considerado um dos problemas mais importantes e mais difíceis na área de planejamento da produção [6]. Como já mencionado anteriormente, o artigo de Harris, propondo o modelo EOQ, e o artigo de Wagner e Whitin, propondo um método de solução, serviram de semente para se construir novos modelos matemáticos e métodos. Porém, apesar da existência e contínuo surgimento de modelagens e algoritmos para o PDL, há uma certa dificuldade em encontrar modelagens de cunho não-linear, cujos métodos de solução aplicados também sejam oriundos de programação não-linear contínua. Nesse sentido, tomamos como base o artigo [11] já mencionado ao longo deste capítulo, aproveitamos a ideia da interdependência linear e propomos nesta dissertação justamente uma formulação com características de programação não-linear inteira mista que retoma a ideia da interdependência entre variáveis e com aplicação de método exato para problemas desta área.

## Capítulo 3

# Otimização Não-linear

A modelagem de um problema real tem duas dificuldades. A primeira diz respeito a simplificação do problema através de um modelo matemático, visando o seu tratamento. A segunda diz respeito ao risco de considerar mais elementos do que o necessário na montagem do modelo, exigindo mais recursos computacionais. O autor em [35] considera essa questão, dizendo que um modelo só será útil e adequado, caso caracterize um comportamento mais realista, com grau de não linearidade, e por isso mais complexo de ser resolvido. Ainda, conceitua problemas de Otimização Não-Linear (ONL) como sendo problemas de otimização em que a função-objetivo e/ou pelo menos uma das restrições envolvidas **não** são funções lineares das variáveis de decisão. E que, diferentemente de problemas de Otimização Linear (OL) cuja solução ótima é encontrada nos extremos do conjunto de soluções viáveis, em um problema de ONL a solução ótima pode assumir qualquer valor do conjunto de soluções viáveis, isto é, pode estar localizada em um ponto extremo, em um ponto de fronteira ou em um ponto interior do conjunto de soluções viáveis.

A seguir, veremos alguns conceitos importantes sobre convexidade em problemas de ONL que ajudarão no entendimento das seções adiante. Nosso objetivo é definir um problema de otimização convexa, um subconjunto bastante especial dos problemas de ONL. Mostraremos no próximo capítulo, que os modelos que construímos nesta dissertação são modelos de Otimização Não-Linear Inteira (ONLI), cuja relaxação obtida ao se remover as restrições de integralidade sobre as variáveis inteiras, são modelos de otimização convexa. Este fato será por fim, considerado na escolha dos algoritmos e pacotes computacionais utilizados nos nossos experimentos numéricos. Todos os resultados e exemplos apresentados neste capítulo foram obtidos de [1]. Os incluímos aqui apenas para o texto ficar autocontido.

## 3.1 Conjunto convexo

Um conjunto  $C$  é *convexo* se o segmento de reta entre quaisquer dois pontos em  $C$  estiver em  $C$ , ou seja, se para qualquer  $x_1, x_2 \in C$  e qualquer  $\theta$  com  $0 < \theta < 1$ , temos:

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C.$$

## 3.2 Funções convexas

Uma função  $f : R^n \rightarrow R$  é *convexa* se **dom**  $f$  for um conjunto convexo e se para todo  $x, y \in \mathbf{dom} f$  e  $\theta$  com  $0 \leq \theta \leq 1$ , temos:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \quad (3.1)$$

Geometricamente, essa desigualdade significa que o segmento de reta entre  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  encontra-se acima do gráfico de  $f$  (figura 3.1 abaixo). Uma função  $f$  é *estritamente convexa* se a desigualdade estrita vale em (3.1) sempre que  $x \neq y$  e  $0 < \theta < 1$ . Dizemos que  $f$  é *côncava* se  $-f$  for convexa, e *estritamente côncava* se  $-f$  for estritamente convexa.

Para uma função afim linear temos igualdade em (3.1), então todas as funções afim lineares são convexas e côncavas. Por outro lado, qualquer função que é convexa e côncava é afim linear.

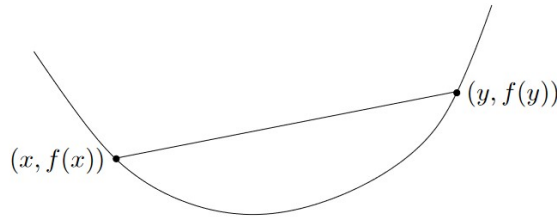


Figura 3.1: Extraída do livro [1]:  $f$  convexa.

### 3.2.1 Condições de otimalidade de primeira ordem

Suponha que  $f$  seja diferenciável (ou seja, seu gradiente  $\nabla f$  existe em cada ponto em **dom**  $f$ , que é aberto). Então  $f$  é convexa se, e somente se, **dom**  $f$  é convexo e

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (3.2)$$

vale para todo  $x, y \in \mathbf{dom} f$ . Essa desigualdade é ilustrada na figura 3.2 abaixo.

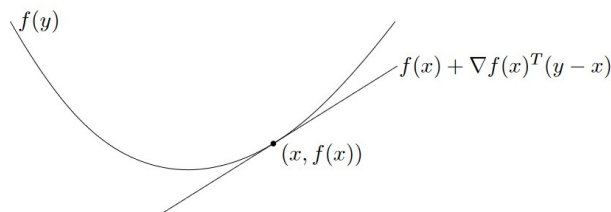


Figura 3.2: Extraída do livro [1]:  $f$  diferenciável e convexa

A função afim de  $y$  dada por  $f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$  é a aproximação de Taylor de primeira ordem de  $f$  próximo a  $x$ . A desigualdade 3.2 afirma que para uma função convexa, a aproximação de Taylor de primeira ordem é um *subestimador global* da função. Por outro lado, se a aproximação de Taylor de primeira ordem de uma função é sempre um subestimador global da função, então a função é convexa.

A desigualdade 3.2 mostra que a partir de *informações locais* sobre uma função convexa (ou seja, seu valor e derivada em um ponto) podemos derivar *informações globais* (ou seja, um subestimador global dela). Esta é talvez a propriedade mais importante das funções convexas e explica algumas das propriedades notáveis das funções convexas e dos problemas de otimização convexa. Como um exemplo simples, a desigualdade 3.2 mostra que se  $\nabla f(x) = 0$ , então para todo  $y \in \text{dom } f$ ,  $f(y) \geq f(x)$ , ou seja,  $x$  é um minimizador global da função  $f$ .

A convexidade estrita também pode ser caracterizada por uma condição de primeira ordem:  $f$  é estritamente convexa se, e somente se,  $\text{dom } f$  é convexo e para  $x, y \in \text{dom } f$ ,  $x \neq y$ , temos:

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T(y - x). \quad (3.3)$$

Para funções côncavas temos a caracterização correspondente:  $f$  é côncava se, e somente se,  $\text{dom } f$  é convexo e:

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (3.4)$$

para todo  $x, y \in \text{dom } f$ .

### 3.2.2 Condições de otimalidade de segunda ordem

Assumimos agora que  $f$  é duas vezes diferenciável, ou seja, sua *Hessiana* ou segunda derivada  $\nabla^2 f$  existe em cada ponto de  $\text{dom } f$ , que é aberto. Então  $f$  é convexa se, e somente, se  $\text{dom } f$  é convexo e sua Hessiana é semidefinida positiva, ou seja, para todo  $x \in \text{dom } f$ ,

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0. \quad (3.5)$$

Para uma função em  $\mathbf{R}$ , isso se reduz à simples condição  $f''(x) \geq 0$  (e  $\mathbf{dom} f$  convexo, ou seja, um intervalo), o que significa que a derivada é não decrescente. A condição  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$  pode ser interpretada geometricamente como o requisito de que o gráfico da função tenha curvatura positiva (para cima) em  $x$ .

Similarmente,  $f$  é côncava se e somente se  $\mathbf{dom} f$  é convexo e  $\nabla^2 f(x) \preceq 0$  para todo  $x \in \mathbf{dom} f$ . A convexidade estrita pode ser parcialmente caracterizada por condições de segunda ordem. Se  $\nabla^2 f(x) \succ 0$  para todo  $x \in \mathbf{dom} f$ , então  $f$  é estritamente convexa. A recíproca, entretanto, não é verdadeira: por exemplo, a função  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , dada por  $f(x) = x^4$ , é estritamente convexa, mas tem derivada segunda zero em  $x = 0$ .

### 3.3 Funções quasi-convexas

Uma função  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  é *quasi-convexa* se o seu domínio e todos os seus conjuntos de subnível, definidos por  $S_\alpha := \{x \in \mathbf{dom} f \mid f(x) \leq \alpha\}$ , para todo  $\alpha \in \mathbf{R}$ , são convexos.

Uma função  $f$  é quasi-côncava se  $-f$  é quasi-convexa, isto é, se o seu domínio e todos os seus conjuntos de supernível, definidos por  $S_\alpha := \{x \in \mathbf{dom} f \mid f(x) \geq \alpha\}$ , para todo  $\alpha \in \mathbf{R}$ , são convexos.

### 3.4 Problemas de otimização não-linear

Um *problema de otimização não-linear* pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f_0(x) \\ & \text{sujeito a :} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.6}$$

no qual objetivamos encontrar o valor de  $x$  que minimiza  $f_0(x)$  dentre todos os valores de  $x$  que satisfazem as condições  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Chamamos  $x \in \mathbf{R}^n$  de *variável de decisão* e a função  $f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de *função objetivo* ou *função de custo*. As desigualdades  $f_i(x) \leq 0$  são chamadas de *restrições de desigualdade*, e as funções correspondentes  $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  são chamadas de *funções de restrição de desigualdade*. As equações  $h_i(x) = 0$  são chamadas de *restrições de igualdade*, e as funções  $h_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  são as *funções de restrição de igualdade*. Se não houver restrições (ou seja,  $m = p = 0$ ), dizemos que o problema 3.6 é *irrestrito*.

O conjunto de pontos para os quais a função objetivo e todas as funções de

restrição são definidas,

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom } h_i, \quad (3.7)$$

é chamado de **domínio** do problema de otimização 3.6. Um ponto  $x \in D$  é **viável** se satisfaz as restrições  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . O problema 3.6 é dito viável se existir pelo menos um ponto viável, e **inviável** caso contrário. O conjunto de todos os pontos viáveis é chamado de **conjunto viável**.

O **valor ótimo**  $p^*$  do problema 3.6 é definido como:

$$p^* = \inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \ h_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, p\}. \quad (3.8)$$

Permitimos que  $p^*$  assuma os valores estendidos  $\pm\infty$ . Se o problema for inviável, temos  $p^* = \infty$  (seguindo a convenção padrão de que o ínfimo do conjunto vazio é  $\infty$ ). Se existem pontos viáveis  $x_k$  com  $f_0(x_k) \rightarrow -\infty$  como  $k \rightarrow \infty$ , então  $p^* = -\infty$ , e dizemos que o problema 3.6 é **ilimitado inferiormente**.

### Pontos ótimos e localmente ótimos

Dizemos que  $x^*$  é uma **solução ótima**, ou resolve o problema 3.6, se  $x^*$  for viável e  $f_0(x^*) = p^*$ . O conjunto de todas as soluções ótimas é o **conjunto ótimo**, denotado por:

$$X_{opt} = \{x \mid f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \ h_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, p, \ f_0(x) = p^*\}. \quad (3.9)$$

Se existe uma solução ótima para o problema 3.6, dizemos que o valor ótimo foi **atingido** ou **alcançado**, e o problema é **solucionável**.

Dizemos que uma solução viável  $x$  é um **ótimo local** se existe um  $\rho > 0$  tal que:

$$f_0(x) = \inf \{f_0(z) \mid f_i(z) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \quad (3.10)$$

$$h_i(z) = 0, \ i = 1, \dots, p, \ ||z - x||_2 \leq \rho\}. \quad (3.11)$$

Isso significa que  $x$  minimiza  $f_0$  sobre pontos próximos no conjunto viável. Caso  $x$  minimize  $f_0$  sobre todos os pontos do conjunto viável, então dizemos que  $x$  é um **ótimo global**.

## 3.5 Problemas de otimização convexa

Um **problema de otimização convexa** é um caso particular do problema de otimização não-linear (3.6), que pode ser formulado como :

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && f_0(x) \\
& \text{sujeito a :} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& && a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde  $f_0, \dots, f_m$  são funções convexas.

Comparando 3.12 com o problema de otimização não-linear mais geral 3.6, o problema convexo tem os seguintes três requisitos adicionais:

- a função objetivo deve ser convexa,
- as funções de restrição de desigualdade devem ser convexas,
- as funções de restrição de igualdade  $h_i(x) = a_i^T x - b_i$  devem ser afins.

Notamos imediatamente uma propriedade importante: o conjunto viável de um problema de otimização convexo é convexo, pois é a interseção do domínio do problema:

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i, \tag{3.13}$$

que é um conjunto convexo (uma vez que as funções  $f_i$  são todas convexas) com  $m$  conjuntos de subníveis (convexos)  $\{x \mid f_i(x) \leq 0\}$  e  $p$  hiperplanos  $\{x \mid a_i^T x = b_i\}$ . (Podemos assumir sem perda de generalidade que  $a_i \neq 0$ : se  $a_i = 0$  e  $b_i = 0$  para algum  $i$ , então a  $i$ -ésima restrição de igualdade pode ser deletada; se  $a_i = 0$  e  $b_i \neq 0$ , a  $i$ -ésima restrição de igualdade é inconsistente e o problema é inviável.) Assim, em um problema de otimização convexa, minimizamos uma função objetivo convexa sobre um conjunto convexo.

### Problemas de maximização côncava

Com um pequeno abuso de notação, também nos referiremos a

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar} && f_0(x) \\
& \text{sujeito a :} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& && a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p
\end{aligned} \tag{3.14}$$

como um problema de otimização convexa se a função objetivo  $f_0$  for côncava e as funções de restrição de desigualdade  $f_1, \dots, f_m$  são convexas. Este **problema de maximização côncava** é prontamente resolvido minimizando a função objetivo convexa  $-f_0$ . Todos os resultados, conclusões e algoritmos para o problema de minimização são facilmente transpostos para o caso de maximização.

A relevância do estudo de problemas de otimização convexa se dá pelo seguinte fato: todo ótimo local de um problema de otimização convexa é também um ótimo

global do problema. Desta forma, a satisfação de critérios que nos indiquem otimalidade local de uma solução viável são suficientes para garantir a resolução do problema.

# Capítulo 4

## Modelos para o PDLC

A metodologia de pesquisa adotada nesta dissertação é do tipo quantitativa, pois aborda experimentos computacionais com modelos de otimização não-linear inteira mista (ONLIM) para um problema específico de planejamento da produção e estoques, conhecido por Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado (PDLC). A pesquisa teve como motivação o modelo encontrado em Haugen *et al.* [11], que considera preço e demanda como variáveis do modelo, com interdependência linear, fazendo com que a função objetivo que representa os ganhos seja uma função quadrática.

A proposta deste estudo é apresentar novas formulações matemáticas para o mesmo problema, explorando a interdependência não linear entre demanda e preço.

### 4.1 Formulação matemática

Nesta seção, apresentamos uma formulação de otimização não-linear inteira mista (ONLIM) para o problema de otimização de dimensionamento de lotes capacitado de um único item, em que preço de venda, em cada período do horizonte de planejamento, depende da demanda pelo item. Investigaremos as três funções a seguir para modelar essa dependência. Vale lembrar que o formato das duas últimas funções não-lineares foram inspirados em ideias de [36].

$$\begin{aligned} f^1(d_t) &:= \frac{1}{\beta_t}(\alpha_t - d_t), \\ f^2(d_t) &:= \gamma_t e^{\theta_t d_t}, \\ f^3(d_t) &:= \frac{1}{\tau_t d_t + \mu_t} - \rho_t, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $f^j(d_t)$  é o valor do preço de venda de uma unidade do item se a quantidade demandada for  $d_t$  no período  $t$ , para cada  $j = 1, 2, 3$ ; e  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \theta_t, \tau_t, \mu_t, \rho_t$  são parâmetros dados. A partir de agora, faremos a distinção entre parâmetros e dados. Os parâmetros estão associados à definição das funções em (4.1), enquanto que os

dados referem-se aos dados de instâncias dos modelos do problema PDL.

A dependência linear de preço-demanda modelada por  $f^1$  foi adotada no problema PDL um único item em [11]. Os parâmetros  $\alpha_t > 0$  e  $\beta_t \in (0, 1)$  representam, respectivamente, a demanda para preço zero e a taxa de decréscimo da demanda à medida que o preço cresce. Supor que a demanda decresce à medida que o preço cresce é certamente mais realista do que supor que a demanda não depende do preço, e considerar isso no problema PDL leva a melhores decisões relativas a produção e preço. Porém, a taxa de decréscimo da demanda constante à medida que o preço aumenta ainda é uma boa aproximação da realidade. Por isso, buscamos melhorar o modelo, propondo as funções convexas alternativas  $f^2$  e  $f^3$  para modelar essa dependência. Em seguida, incluímos os novos modelos de dependência na formulação de [11]. A Tabela 4.1 mostra a notação utilizada para dados e variáveis nos nossos modelos.

Dados	
$t$	período no horizonte de planejamento $T$ ;
$i_0$	quantidade do item em estoque inicial;
$r_t$	capacidade de produção do item no período $t$ ;
$h_t$	custo unitário de estocar o item ao final do período $t$ ;
$c_t$	custo unitário de produção do item no período $t$ ;
$q_t$	custo de preparação para a produção do item no período $t$ ;
Variáveis	
$d_t$	demanda pelo item no período $t$ ;
$p_t$	preço unitário de venda do item no período $t$ ;
$i_t$	quantidade do item em estoque no final do período $t$ ;
$x_t$	quantidade produzida do item no período $t$ ;
$y_t$	indica existência (1) ou não (0) de produção do item no período $t$ .

Tabela 4.1: Notação

Para cada  $j = 1, 2, 3$ , formulamos:

$$(P_j) \ z := \max \sum_{t \in T} p_t d_t - c_t x_t - h_t i_t - q_t y_t \quad (4.2)$$

$$\text{sujeito a:} \quad d_t = x_t + i_{t-1} - i_t, \quad t \in T \quad (4.3)$$

$$x_t \leq r_t y_t, \quad t \in T \quad (4.4)$$

$$p_t = f^j(d_t), \quad t \in T \quad (4.5)$$

$$x_t, i_t, d_t, p_t \geq 0, \quad t \in T \quad (4.6)$$

$$y_t \in \{0, 1\}. \quad t \in T \quad (4.7)$$

A função objetivo (4.2) modela o ganho total dado pela soma, em todos os períodos, da diferença entre a receita da venda e o custo total em cada período, isto é, da soma do custo de produção propriamente, de manutenção em estoque e de preparação para

a produção. A restrição (4.3) representa o equilíbrio de fluxo do item no período  $t$ . As entradas são o estoque anterior  $i_{t-1}$  e a produção  $x_t$ , e as saídas são a demanda  $d_t$  e o estoque ao final  $i_t$ . A restrição (4.4) impõe capacidade máxima de produção e também fixa a variável binária  $y_t$  em 1, ativando o custo de preparação quando houver produção positiva. A restrição (4.5) estabelece a relação preço-demanda. Na prática, substituímos  $p_t$  na função objetivo por  $f(d_t)$ . Assim, eliminamos a variável  $p_t$  do modelo.

Observamos, no entanto, que em nosso problema, além de decidir o tamanho do lote a ser produzido e a quantidade a ser estocada em cada período, também decidimos implicitamente o preço de venda e a demanda periódica. Por fim, as restrições (4.6-4.7) determinam o domínio das variáveis de decisão.

Na Proposição 1, a seguir, definimos a relação entre os parâmetros dos três modelos ( $j = 1, 2, 3$ ), e estabelecemos seu alcance ou sinal. Isso será relevante para a análise apresentada na Seção 4.2 e para a interpretação dos resultados numéricos discutidos no Capítulo 5. Os parâmetros associados a cada modelo são relacionados de forma a permitir a comparação dos resultados. Daqui por diante, os parâmetros utilizados seguirão as definições na Proposição 1.

**Proposição 1.** *Sejam  $\epsilon, \delta \in (0, 1)$ . Para cada  $t \in T$ , considere  $\alpha_t > 0$ ,  $\beta_t > 0$ , e defina*

$$\theta_t := \ln(1 - \epsilon) / (\epsilon \alpha_t), \quad (4.8)$$

$$\gamma_t := \alpha_t / \beta_t, \quad (4.9)$$

$$\rho_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t(1 + \frac{\delta}{1-\epsilon})^2}, \quad (4.10)$$

$$\mu_t := \beta_t / (\alpha_t + \beta_t \rho_t), \quad (4.11)$$

$$\tau_t := \frac{1}{\delta \alpha_t} \left( \sqrt{\frac{\mu_t}{\rho_t}} - \mu_t \right). \quad (4.12)$$

Então, o parâmetro  $\theta_t$  em (4.8) é negativo e todos os demais definidos em (4.9)–(4.12) são positivos.

*Demonstração.* Temos, para cada  $t \in T$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon \in (0, 1), \alpha_t > 0 &\Rightarrow \ln(1 - \epsilon) < 0, \epsilon \alpha_t > 0 \Rightarrow \theta_t < 0, \\ \alpha_t > 0, \beta_t > 0 &\Rightarrow \gamma_t > 0, \\ \alpha_t > 0, \beta_t > 0 &\Rightarrow \rho_t > 0. \end{aligned}$$

Uma vez que provamos que  $\rho_t > 0$ , temos

$$\alpha_t > 0, \beta_t > 0, \rho_t > 0 \Rightarrow \mu_t > 0.$$

Para  $\tau_t$ , observamos que

$$\frac{\mu_t}{\rho_t} = \frac{\mu_t \beta_t (1 + \frac{\delta}{1-\epsilon})^2}{\alpha_t} > \frac{\mu_t \beta_t}{\alpha_t} > \frac{\mu_t \beta_t}{\alpha_t + \beta_t \rho_t} = \mu_t^2.$$

Logo, concluímos que  $\left(\sqrt{\frac{\mu_t}{\rho_t}} - \mu_t\right) > 0$ . Como  $\delta > 0$  e  $\alpha_t > 0$ , finalmente, temos que  $\tau_t > 0$ .  $\square$

## 4.2 Análise das funções de dependência preço-demanda

A definição dos parâmetros na Proposição 1 estabelece a correspondência entre as três funções apresentadas em (4.1) e o comportamento dos três modelos investigados nesta dissertação. Nesta seção, analisamos semelhanças e diferenças entre os modelos, e extraímos dessa análise, como a atribuição de valores aos parâmetros pode ser usada para melhor adaptá-los às diferentes características de problemas reais.

Verificamos, primeiramente, através da Proposição 2, que o preço assume valor igual a  $\alpha_t/\beta_t$ , quando a demanda se anula, em todos os modelos.

**Proposição 2.** *Temos  $f^1(0) = f^2(0) = f^3(0) = \alpha_t/\beta_t$ .*

*Demonstração.* Pela definição de  $f^1$ , temos que  $f^1(0) = \alpha_t/\beta_t$ . Também, segue que

$$\begin{aligned} f^2(0) &= \gamma_t := \frac{\alpha_t}{\beta_t} \\ f^3(0) &= \frac{1}{\mu_t} - \rho_t := \frac{\alpha_t + \beta_t \rho_t}{\beta_t} - \rho_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t}. \end{aligned}$$

$\square$

Na Proposição 3, veremos que o parâmetro  $\epsilon$  pode ser usado para estabelecer mais um valor da demanda (além de zero), para o qual temos preços correspondentes de  $f^1$  e  $f^2$  idênticos.

**Proposição 3.** *Temos  $f^1(\epsilon\alpha_t) = f^2(\epsilon\alpha_t) = (1 - \epsilon)\frac{\alpha_t}{\beta_t}$ .*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} f^1(\epsilon\alpha_t) &= \frac{1}{\beta_t}(\alpha_t - \epsilon\alpha_t) = (1 - \epsilon)\frac{\alpha_t}{\beta_t}, \\ f^2(\epsilon\alpha_t) &= \gamma_t \mathbf{e}^{\theta_t \epsilon \alpha_t} = \frac{\alpha_t}{\beta_t} \mathbf{e}^{\ln(1-\epsilon) \frac{1}{\epsilon \alpha_t} \epsilon \alpha_t} = (1 - \epsilon)\frac{\alpha_t}{\beta_t}. \end{aligned}$$

$\square$

Na Proposição 4, veremos como os parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$  também podem ser usados para determinar o valor da demanda para um preço zero ao considerar  $f^3$ . Observamos que este valor da demanda é  $\alpha_t$  para  $f^1$  e inexistente para  $f^2$ , visto que  $f^2(d_t) > 0$ , para todo  $d_t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 4.** *Seja  $\zeta := (1 + \frac{\delta}{1-\epsilon})^2$  e defina*

$$\hat{d}_t := \frac{\delta\zeta}{\sqrt{\zeta+1}-1}\alpha_t.$$

Então,

$$f^3(\hat{d}_t) = 0.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} f^3(d_t) &= \frac{1}{\tau_t d_t + \mu_t} - \rho_t \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\delta\alpha_t} \left( \sqrt{\frac{\mu_t}{\rho_t}} - \mu_t \right) d_t + \mu_t} - \rho_t \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\delta\alpha_t} \left( \sqrt{\frac{\beta_t}{(\alpha_t + \beta_t \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t}) \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t}}} - \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t}} \right) d_t + \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t}}} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \\ &= \frac{\alpha_t}{\frac{1}{\delta} \left( \sqrt{\frac{\beta_t^2}{(\alpha_t^2(1+\frac{1}{\zeta}))^{\frac{1}{\zeta}}} - \frac{\beta_t}{\alpha_t(1+\frac{1}{\zeta})}} \right) d_t + \frac{\beta_t}{1+\frac{1}{\zeta}}} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \\ &= \frac{\alpha_t}{\frac{1}{\delta} \left( \sqrt{\frac{\zeta^2\beta_t^2}{\alpha_t^2(\zeta+1)} - \frac{\zeta\beta_t}{\alpha_t(\zeta+1)}} \right) d_t + \frac{\zeta\beta_t}{\zeta+1}} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \\ &= \frac{\alpha_t}{\frac{\zeta\beta_t}{\delta\alpha_t} \left( \frac{1}{\sqrt{\zeta+1}} - \frac{1}{\zeta+1} \right) d_t + \frac{\zeta\beta_t}{\delta\alpha_t} \frac{\delta\alpha_t}{\zeta+1}} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \\ &= \frac{\alpha_t}{\frac{\zeta\beta_t}{\delta\alpha_t} \left( \frac{\sqrt{\zeta+1}-1}{\zeta+1} \right) d_t + \frac{\zeta\beta_t}{\delta\alpha_t} \frac{\delta\alpha_t}{\zeta+1}} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \\ &= \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t (\sqrt{\zeta+1}-1)d_t + \delta\alpha_t} - \frac{\alpha_t}{\zeta\beta_t} \end{aligned} \tag{4.13}$$

O resultado segue substituindo  $d_t$  por  $\hat{d}_t$  em (4.13).  $\square$

No restante desta seção, analisamos a função receita, dada pelo produto entre o preço de venda do item e a demanda correspondente, para cada função em (4.1). Verificamos que cada função de receita possui um único ponto de máximo, e apresentamos os intervalos de valores da demanda para os quais todas as três funções são côncavas. Esta é uma característica importante para a seleção da abordagem algorítmica a ser usada para resolver nossos problemas.

**Proposição 5.** *Sejam as funções  $rev^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $rev^j(d_t) := f^j(d_t) d_t$ , para  $j = 1, 2, 3$ . Então, temos*

$$\begin{aligned} rev^1(d_t) &= \frac{1}{\beta_t}(\alpha_t d_t - d_t^2), \\ rev^2(d_t) &= \gamma_t d_t e^{\theta_t d_t}, \\ rev^3(d_t) &= \frac{d_t}{\tau_t d_t + \mu_t} - \rho_t d_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dd_t} rev^1(d_t) &= \frac{1}{\beta_t}(\alpha_t - 2d_t), \\ \frac{d}{dd_t} rev^2(d_t) &= (1 + \theta_t d_t) \gamma_t e^{\theta_t d_t}, \\ \frac{d}{dd_t} rev^3(d_t) &= \frac{\mu_t}{(\tau_t d_t + \mu_t)^2} - \rho_t, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dd_t^2} rev^1(d_t) &= -\frac{2}{\beta_t}, \\ \frac{d^2}{dd_t^2} rev^2(d_t) &= (2\theta_t + \theta_t^2 d_t) \gamma_t e^{\theta_t d_t}, \\ \frac{d^2}{dd_t^2} rev^3(d_t) &= -2 \frac{\mu_t \tau_t}{(\tau_t d_t + \mu_t)^3}. \end{aligned}$$

**Corolário 1.** *Sejam as funções  $rev^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $rev^j(d_t) := f^j(d_t) d_t$ , para  $j = 1, 2, 3$ . Então, segue que:*

- $rev^1(\cdot)$  é estritamente côncava e  $d_t = \alpha_t/2$  é o único ponto crítico de  $rev^1(d_t)$ ,
- $rev^2(\cdot)$  é (estritamente) côncava em  $0 \leq d_t(<) \leq -2/\theta_t$ , e  $d_t = -1/\theta_t$  é o único ponto crítico de  $rev^2$ ,
- $rev^2(\cdot)$  é estritamente quase-côncava,
- $rev^3(\cdot)$  é estritamente côncava, e  $d_t = \delta \alpha_t$  é o único ponto crítico de  $rev^3$ .

*Demonstração.* Considerando a Proposição 5, podemos verificar todos os resultados acima.

Primeiro consideraremos as funções  $rev^1(\cdot)$  e  $rev^3(\cdot)$ . Para verificar que as funções são estritamente côncavas, basta observar que as segundas derivadas de ambas em relação a  $d_t$  são sempre negativas.

O ponto crítico de  $rev^1(\cdot)$  é o único ponto onde a função afim que define sua primeira derivada se anula.

O ponto crítico de  $rev^3$ , é derivado de (4.12) e de

$$\frac{d}{dd_t} rev^3(\delta\alpha_t) = \frac{\mu_t}{(\tau_t\delta\alpha_t + \mu_t)^2} - \rho_t = \frac{\mu_t}{\left(\sqrt{\frac{\mu_t}{\rho_t}} - \mu_t + \mu_t\right)^2} - \rho_t = 0.$$

Observamos ainda que a primeira derivada de  $rev^2(\cdot)$  se anula apenas em  $d_t = -1/\theta_t$  e a segunda derivada é (estritamente) positiva para  $0 \leq d_t(<) \leq -2/\theta_t$ , o que confirma a segunda observação do corolário.

Finalmente, verificamos que  $rev^2(\cdot)$  é estritamente quase-côncava, porque  $\frac{d}{dd_t} rev^2(d_t) > 0$ , para todo  $d_t < -\frac{1}{\theta_t}$  e  $\frac{d}{dd_t} rev^2(d_t) < 0$ , para todo  $d_t > -\frac{1}{\theta_t}$ .  $\square$

Baseados na discussão do Capítulo 3 e no Corolário 1, com o intuito de construirmos modelos de otimização convexa, é razoável considerarmos a inclusão de uma restrição nos modelos  $(P_j)$ , para  $j = 1, 2, 3$ , que limite superiormente a demanda em cada período. Nosso objetivo é garantir que todas as funções de receita sejam estritamente côncavas na região viável dos problemas que abordamos.

Para facilitar nossas análises numéricas comparativas, incluiremos a mesma restrição  $d_t \leq \alpha_t$ , para cada período  $t$ , nos três modelos, e consideraremos o seguinte resultado para a escolha do parâmetro  $\epsilon$ .

**Corolário 2.** Tome  $\epsilon \leq 0.79$  e defina  $rev^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $rev^2(d_t) := f^2(d_t) d_t$ . Então,  $rev^2$  é estritamente côncava em  $0 \leq d_t \leq \alpha_t$ .

*Demonstração.* De acordo com o Corolário 1,  $rev^2$  é estritamente côncava em  $0 \leq d_t < -2/\theta_t$ . Basta portanto, garantir que  $\alpha_t < -2/\theta_t$ . Considerando a definição de  $\theta$  em (4.8), temos:

$$\alpha_t < -2/\theta_t \Rightarrow \alpha_t < -2\epsilon\alpha_t/\ln(1 - \epsilon) \Rightarrow \ln(1 + \epsilon) + 2\epsilon < 0.$$

Denotando então por  $\tilde{\epsilon}$  a solução da equação  $\ln(1 + \epsilon) + 2\epsilon = 0$ , temos que  $\alpha_t < -2/\theta_t$ , se  $\epsilon < \tilde{\epsilon}$ . Com um método numérico para obter a raiz de uma função real, podemos verificar que  $\tilde{\epsilon} \approx 0,79681$ , finalizando a demonstração.  $\square$

Dos Corolários 1 e 2, concluímos que  $rev^j$  é estritamente côncava em  $[0, \alpha_t]$ , para todo  $j = 1, 2, 3$ , se  $\epsilon \leq 0.79$ . Então, respeitando a restrição em  $\epsilon$  e restringindo a demanda ao intervalo  $[0, \alpha_t]$  em cada período  $t$ , podemos calcular a solução ótima global de  $(P_j)$  com um solver de ONLIM convexo, para todo  $j = 1, 2, 3$ .

Finalmente, observamos que esta restrição já é imposta implicitamente em  $(P_1)$  pelas restrições de não negatividade em  $p_t$ . A partir dos Corolários 1 e 2, estabelecemos o seguinte resultado, que nos permite aplicar algoritmos para ONLIM convexas a  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  com garantia de otimalidade global na solução obtida.

**Corolário 3.** Considerando que o parâmetro  $\epsilon$  satisfaz  $\epsilon \leq 0.79$ , os problemas  $(P_j)$ , para  $j = 1, 2, 3$ , com a restrição  $d_t \leq \alpha_t$ , para todo período  $t$ , são problemas de

*ONLIM convexos. Isto decorre do fato de que, se (4.7) for substituído por  $y_t \in [0, 1]$ , para todo  $t \in T$ , então a relaxação de  $(P_j)$  obtida é um problema de otimização convexa.*

Na Figura 4.1, ilustramos os gráficos de preço e demanda, e receita e demanda, associados a  $f^1, f^2$  e  $f^3$ . Ainda, no gráfico das derivadas das funções de receita, apresentamos os pontos das demandas em que as derivadas se anulam, ou seja, os pontos de receita máxima. Neste último gráfico, ainda observamos o ponto da demanda até onde  $f^2$  é côncava.

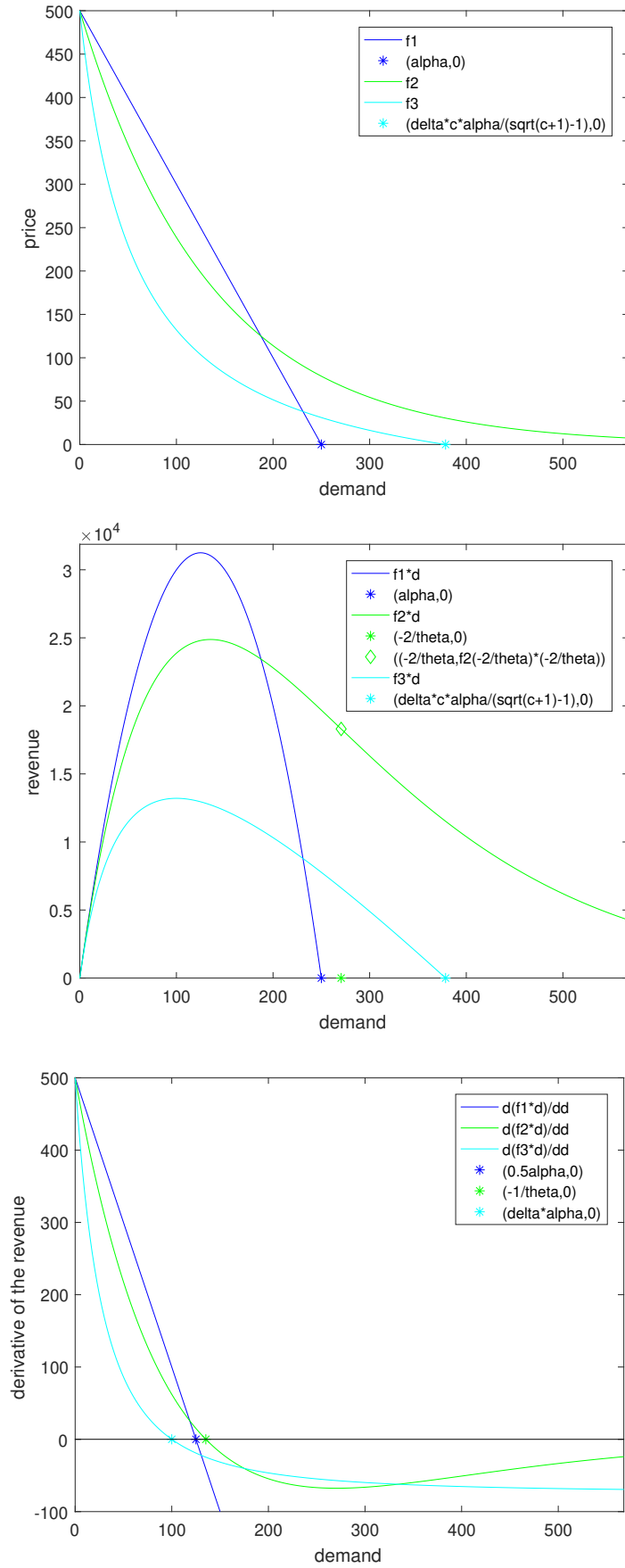


Figura 4.1: Comportamento do preço e da receita para  $f^1, f^2$  e  $f^3$  ( $\alpha = 250, \beta = 0.5, \epsilon = 0.75, \delta = 0.4$ )

# Capítulo 5

## Experimentos Numéricos

Os nossos experimentos numéricos tiveram como objetivo verificar como as diferentes relações entre demanda e preço afetam a solução do nosso problema. Para tanto, resolvemos o problema modelado com as três funções em (4.1), e para diferentes valores atribuídos aos parâmetros que as definem. A relação entre os parâmetros foi apresentada na Proposição 1.

Atribuímos ao parâmetro  $\beta$ , os valores 3, 5 e 8, e ao parâmetro  $\epsilon$ , os valores 0.25, 0.50 e 0.75 (respeitando o limite sobre  $\epsilon$  dado no Corolário 2). Pela Proposição 1, ao aumentar  $\epsilon$ , reduzimos o valor de  $\theta_t$ , acelerando assim o decréscimo de  $f^2(d_t)$  à medida que  $d_t$  aumenta. Além disso, aumentando  $\epsilon$ , aumentamos também  $\tau_t$  e  $\mu_t$ , e reduzimos  $\rho_t$ , levando a uma redução mais rápida de  $f^3(d_t)$  à medida que  $d_t$  aumenta.

No Algoritmo 1, apresentamos o procedimento usado para gerar aleatoriamente nossas instâncias de teste. Para cada valor de  $\epsilon$ , fixamos o parâmetro  $\delta = 0.4$ . Em todas as instâncias consideramos o estoque inicial  $i_0 = 0$  e consideramos 12 períodos no horizonte de planejamento.

Para melhor comparar a aplicação de cada função em  $(P_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sorteamos  $\alpha_t$  em  $[60, 90]$ , e o definimos como o mesmo limite superior para  $d_t$  nos três modelos analisados. Assim, podemos verificar que  $\hat{d}_t \geq \alpha_t$  para todo  $\epsilon \in (0, 1)$  ( $\hat{d}_t$  definido em Proposição 4 é tal que  $f^3(\hat{d}_t) = 0$ ). Portanto, os valores de  $f^1$ ,  $f^2$  e  $f^3$  são não negativos em  $[0, \alpha_t]$ . Com isso, restringindo  $d_t$  a este intervalo em  $(P_j)$ , podemos remover as restrições  $p_t \geq 0$ .

Note que, como a demanda é uma variável em nosso problema, nossas instâncias são sempre viáveis, independente da capacidade de produção em cada período.

```

1 for  $\epsilon := 0.25, 0.50, 0.75$  do
2    $t_{\max} := 12;$ 
3    $\delta := 0.4;$ 
4   for  $t = 1, \dots, t_{\max}$  do
5      $\alpha_t := \text{randi}(60, 90);$ 
6      $\beta_t := 3, 5, 8;$ 
7      $r_t := \text{randi}(60, 90);$ 
8      $h_t := 1;$ 
9      $c_t := 2;$ 
10     $q_t := 100;$ 

```

**Algorithm 1:** Geração de instâncias aleatórias

Utilizamos o **Scilab** para implementar nosso gerador de instâncias aleatórias. Para cada modelo  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  consideramos nove experimentos, um para cada combinação dos valores atribuídos a  $\epsilon$  e  $\beta$ . Para cada um dos nove experimentos, geramos 10 instâncias e reportamos as médias encontradas para as mesmas.

Os nove experimentos foram executados para cada modelo de otimização  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  num computador com Windows 11, com processador Intel Core i7, e 16GB de RAM. O **AMPL** foi utilizado como linguagem de modelagem algébrica. Os resultados para o modelo  $(P_1)$  foram obtidos utilizando o solver Gurobi [37]. Dentre alguns solvers existentes para programação não-linear inteira mista que podem ser chamados via **AMPL** como **BARON**, **Bonmin**, **Knitro** e **Muriqui**, escolhemos aplicar o solver **Muriqui Optimizer** [38] para os modelos  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . O algoritmo **Outer Approximation (OA)** do **Muriqui Optimizer** foi usado (veja [39] para detalhes).

Utilizamos o *software* **R** para implementar os programas para tratamento de dados, análise de dados e para geração de gráficos. A etapa de tratamento de dados consistiu na implementação de programas para obter informações sobre dados de entrada, valor da função objetivo, variáveis de decisão e tempo de execução geradas pelo **AMPL**.

Já a etapa de análise de dados e geração de gráficos consistiu na implementação de programas capazes de ler os arquivos de dados tratados na etapa anterior, realizar o cálculo de médias, e com base nisso, gerar os gráficos que serão apresentados nas subseções seguintes. Vale ressaltar que o mesmo conjunto de dez instâncias foi utilizado em todos os experimentos com a única diferença nos valores atribuídos ao parâmetros  $\epsilon$  e  $\beta$  em cada experimento.

## 5.1 Experimento 1

No Experimento 1, ao considerar  $\epsilon = 0.25$  e  $\beta = 3$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.0703125s, do modelo ( $P_2$ ) foi de 42.33594s, e de ( $P_3$ ) 71.77031s. Na Figura 5.1, ( $P_2$ ) obteve a receita mais elevada em todos os períodos. Os custos apresentaram uma faixa de alternância para ( $P_1$ ) e ( $P_3$ ), bem maior do que para ( $P_2$ ), em quase todos os períodos.

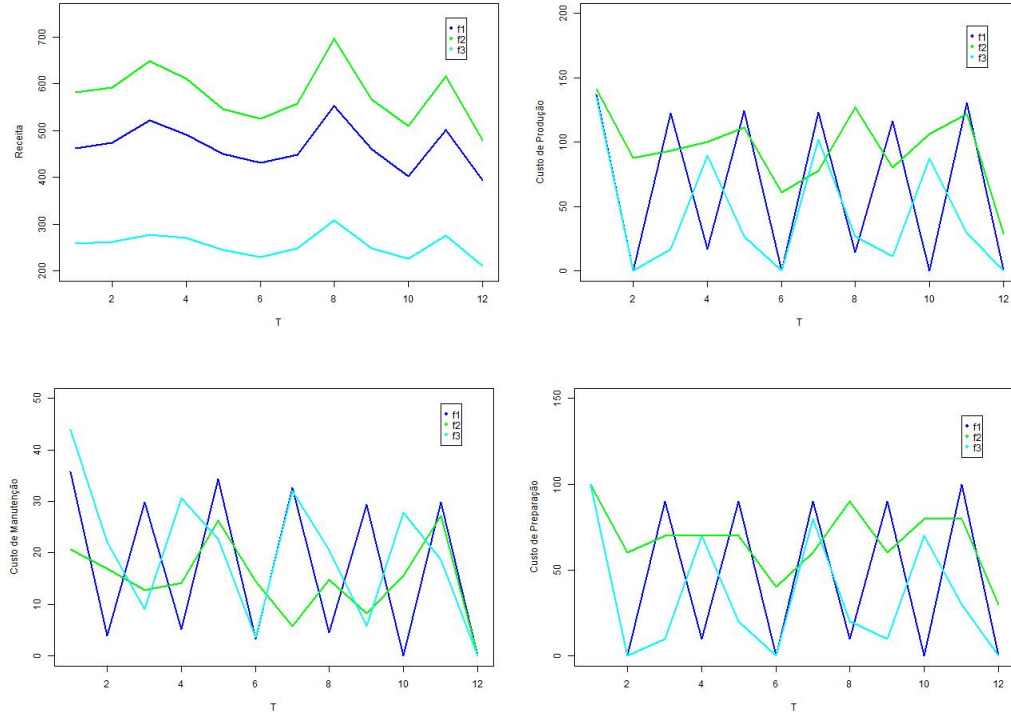


Figura 5.1: Receita ( $p_t d_t$ ), custo de produção ( $c_t x_t$ ), custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 1.

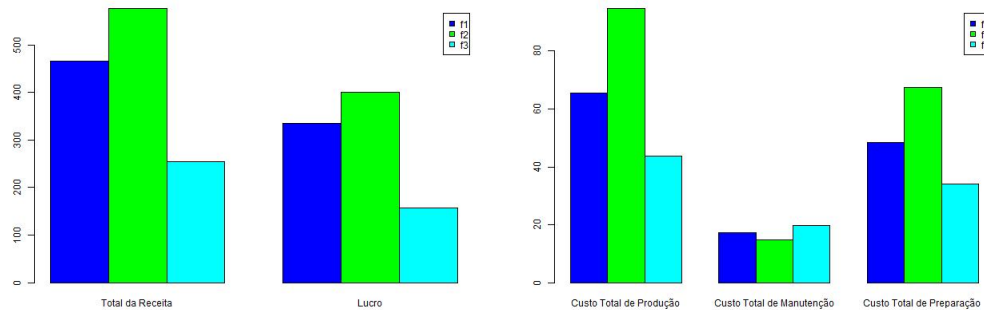


Figura 5.2: Receita total, lucro total, custo total de produção, custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 1.

Na Figura 5.2, nota-se que  $(P_2)$  obteve majoritariamente custos maiores e ainda assim, alcançou o maior lucro.

Vejam os alguns valores aproximados para posterior comparação ao longo deste capítulo. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 400 para  $(P_1)$ , acima de 500 para  $(P_2)$  e acima de 200 para  $(P_3)$ . Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão acima de 300 para  $(P_1)$ , aproximadamente 400 para  $(P_2)$ , e acima de 100 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão acima de 60, acima de 80 e ligeiramente acima de 40, respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão acima 40, 60 e 30. Já os custos médios totais de manutenção de estoque estão na faixa do valor 20 com  $(P_3)$  tendo o maior valor, seguido de  $(P_1)$  e  $(P_2)$ .

Na Figura 5.3, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$  apresentou preço de venda acima de  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . Esses últimos apresentaram valores médios relativos ao preço de venda próximos, apesar disso, em todos os períodos, exceto no terceiro,  $(P_3)$  apresentou os menores preços de venda. No que diz respeito à demanda, notamos que a execução do modelo  $(P_2)$  resultou numa demanda maior do que as de  $(P_1)$  e  $(P_3)$  em todos os períodos.  $(P_3)$  apresentou os menores valores médios de demanda. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre  $(P_2)$  e  $(P_3)$  é relativamente evidente mesmo que o preço de venda de ambos os problemas estejam próximos. Também é notável o fato de  $(P_1)$  possuir a média de preço de venda mais alta em relação a  $(P_2)$  e no gráfico da demanda possuir valores médios de demanda menores que  $(P_2)$ .

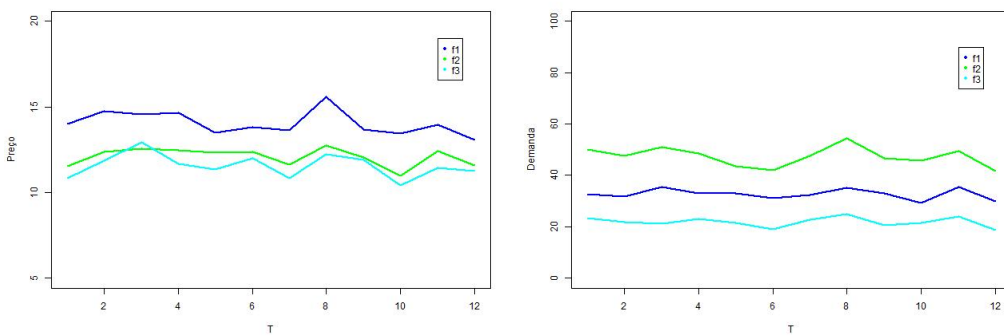


Figura 5.3: Preço e Demanda no Experimento 1.

Note ainda que os valores médios do preço unitário estão na faixa de 10 a 17 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos valores, considerando as especificidades deste experimento 1. O que é um ponto positivo para o consumidor. Na Figura 5.4, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

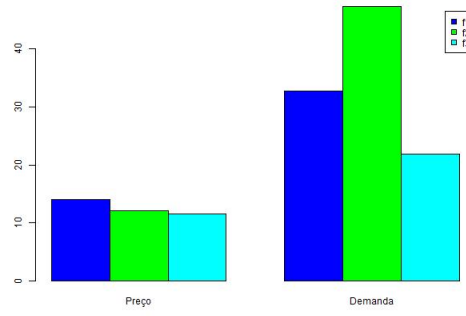


Figura 5.4: Preço total e Demanda total no Experimento 1.

## 5.2 Experimento 2

No Experimento 2, ao considerar  $\epsilon = 0.25$  e  $\beta = 5$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.071875s, do modelo ( $P_2$ ) foi 53.77656s, e ( $P_3$ ) 121.5641s. Na Figura 5.5, ( $P_2$ ) continuou com a receita mais elevada em todos os períodos. No entanto, é notável que, de maneira geral, ao aumentarmos  $\beta$  de 3 para 5, as receitas de ( $P_1$ ), ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ) sofreram queda.

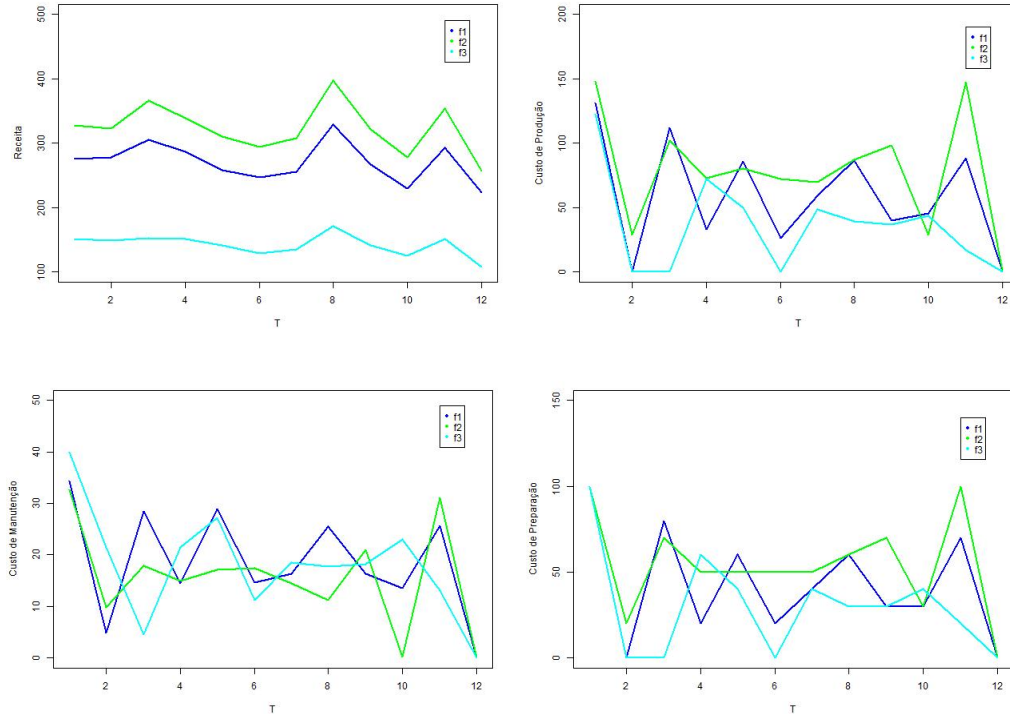


Figura 5.5: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 2.

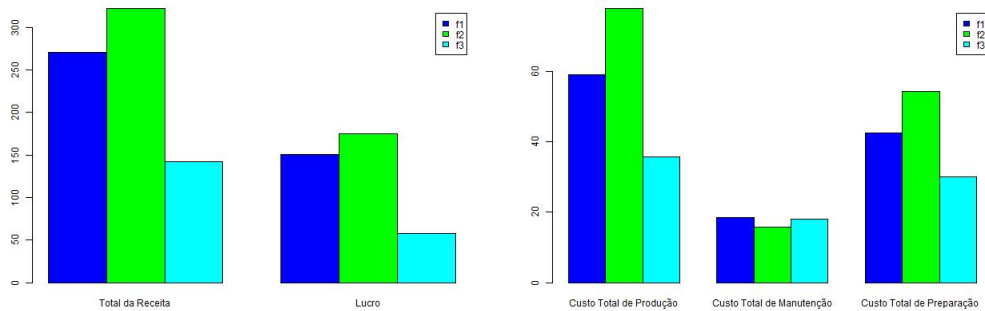


Figura 5.6: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 2.

Na Figura 5.6, nota-se que o experimento 2 apresentou comportamento parecido com o experimento 1, no sentido de que ( $P_2$ ) obteve majoritariamente custos maiores e ainda assim, alcançou ganho maior. Porém, é possível notar que ocorreu uma queda nos valores, ao aumentarmos  $\beta$  de 3 para 5.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado no experimento anterior. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 250 para ( $P_1$ ), acima de 300 para ( $P_2$ ) e abaixo de 150 para ( $P_3$ ). Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão no nível de 150 para ( $P_1$ ), acima de 150 para ( $P_2$ ), e no nível de 50 para ( $P_3$ ). Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão abaixo de 60, acima de 60 e abaixo de 40, respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão acima 40, abaixo de 60 e acima de 20. Já os custos médios totais de estocar estão no nível de 20, com ( $P_1$ ) tendo o maior valor, seguido por ( $P_3$ ) e ( $P_2$ ).

Na Figura 5.7, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda do experimento 2 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento. ( $P_1$ ) apresentou preço de venda acima de ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ). Esses últimos apresentaram valores médios relativos ao preço de venda ainda mais próximos do que no experimento 1. No que diz respeito à demanda, notamos que os experimentos com o modelo ( $P_2$ ) apresentaram uma demanda maior do que as de ( $P_1$ ) e ( $P_3$ ) em todos os períodos, seguindo o padrão do experimento anterior. ( $P_3$ ) apresentou os menores valores médios de demanda. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ) é relativamente evidente mesmo que o preço de venda de ambos os problemas estejam muito próximos. Também é notável o fato de ( $P_1$ ) possuir a média de preço de venda mais alta em relação a ( $P_2$ ) e no gráfico da demanda possuir valores médios menores do que ( $P_2$ ).

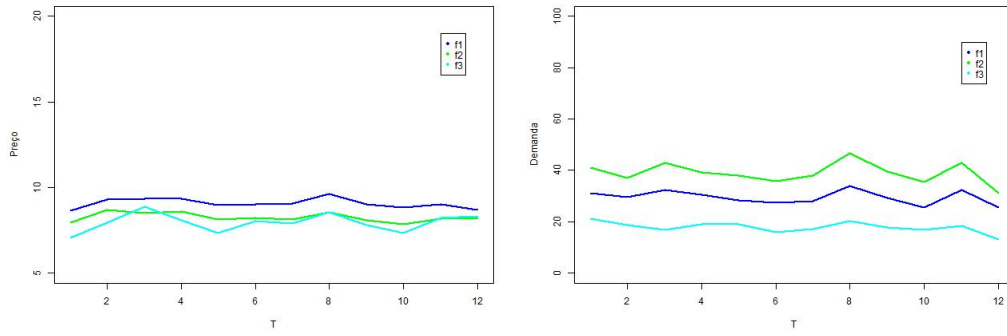


Figura 5.7: Preço e Demanda no Experimento 2.

De maneira geral, o aumento do  $\beta$  de 3 para 5 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem, assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 10 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos valores do preço de venda, considerando as especificidades deste experimento 2. Na Figura 5.8, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

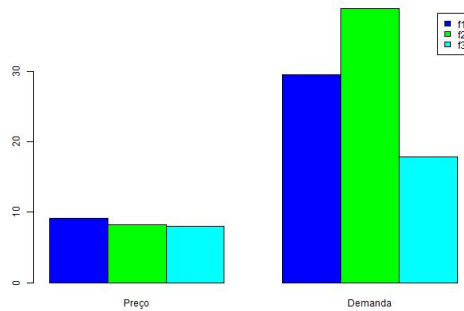


Figura 5.8: Preço total e Demanda total no Experimento 2.

### 5.3 Experimento 3

No Experimento 3, ao considerar  $\epsilon = 0.25$  e  $\beta = 8$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo  $(P_1)$  foi de 0.0921875s. O modelo  $(P_2)$  levou o tempo de 92.84063s, e  $(P_3)$  o tempo de 162.0156s. Na Figura 5.9,  $(P_2)$  seguiu com a receita mais elevada em todos os períodos. De maneira geral, ao aumentarmos  $\beta$  de 5 para 8,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  seguiram com seus valores de receita em queda. Apesar disso, os três modelos apresentaram declínio e ascensão de receita, na maioria das vezes, nos mesmos períodos novamente. Os custos apresentaram tendência de queda novamente, principalmente para  $(P_1)$  e  $(P_3)$ .

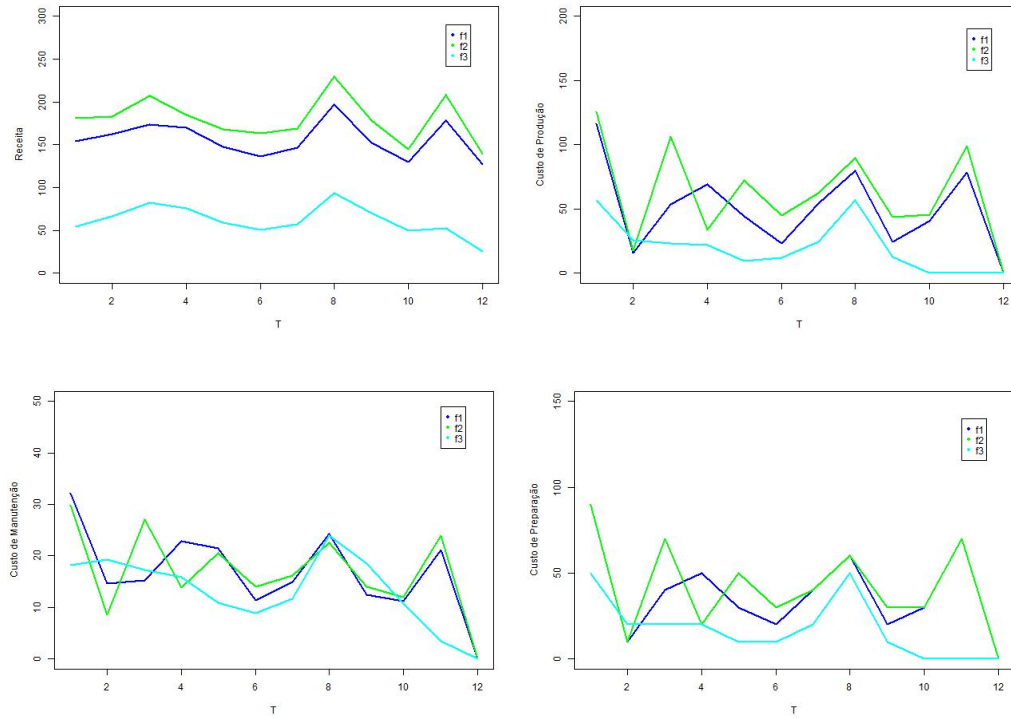


Figura 5.9: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 3.

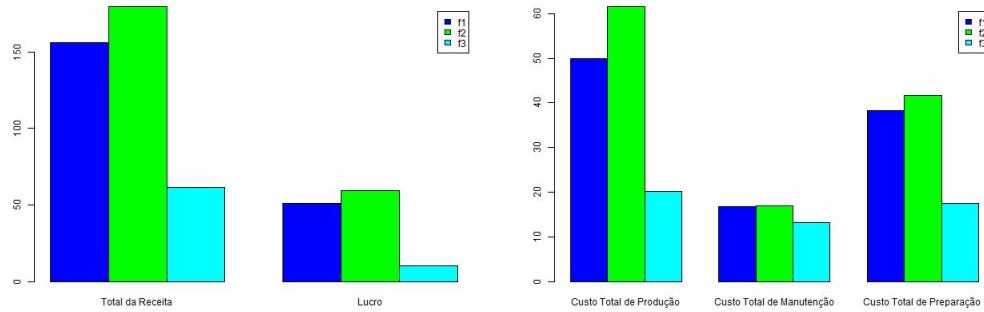


Figura 5.10: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 3.

Na Figura 5.10, nota-se que o experimento 3 apresentou comportamento parecido com os experimentos 1 e 2, no sentido de que ( $P_2$ ) obteve a maioria de custos altos e ainda assim, alcançou o maior lucro mais uma vez. Porém, é possível notar que ocorreu novamente uma queda nos valores conforme aumentamos  $\beta$  de 5 para 8.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado anteriormente. Observe que os valores médios totais de Receita estão um pouco acima de 150 para ( $P_1$ ), bastante acima de 150 para ( $P_2$ ) e um pouco acima

de 50 para  $(P_3)$ . Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão na faixa de 50 para  $(P_1)$ , acima de 50 para  $(P_2)$ , e muito abaixo de 50 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão no nível de 500, no nível de 60 e no nível de 20, respectivamente. Os custos médios totais de preparação para produzir estão no nível de 40, acima de 60 e abaixo de 20. Já os custos médios totais de manter estoques estão abaixo de 20 com  $(P_2)$  tendo o maior valor, seguido de  $(P_1)$  e  $(P_3)$ .

Na Figura 5.11, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda do experimento 3 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  apresentaram preços médios de venda muito aproximados. No que diz respeito à demanda, notamos que a execução do modelo  $(P_2)$  continuou resultando em uma demanda maior do que as de  $(P_1)$  e  $(P_3)$  em todos os períodos seguindo o padrão do experimento anterior.  $(P_3)$  apresentou os menores valores médios de demanda. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre  $(P_2)$  e  $(P_3)$  continua sendo relativamente evidente mesmo que o preço de venda de ambos os problemas estejam muito próximos. Apesar disso, dessa vez,  $(P_3)$  superou os demais no quesito preço de venda.

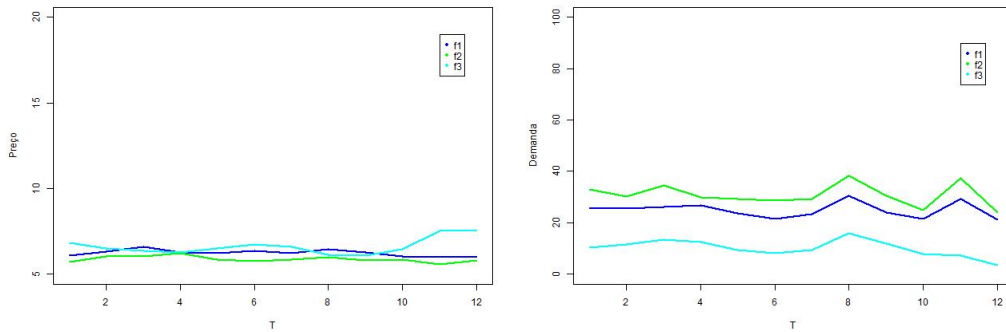


Figura 5.11: Preço e Demanda no Experimento 3.

De maneira geral, o aumento de  $\beta$  de 5 para 8 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem, assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 8 para os três modelos, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades do experimento 3. Na Figura 5.12, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

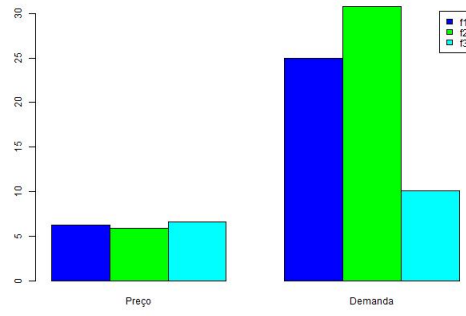


Figura 5.12: Preço total e Demanda total no Experimento 3.

## 5.4 Experimento 4

No Experimento 4, ao considerar  $\epsilon = 0.50$  e  $\beta = 3$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.0484375s, do modelo ( $P_2$ ) foi de 38.22969s, e de ( $P_3$ ) 76.38281s.

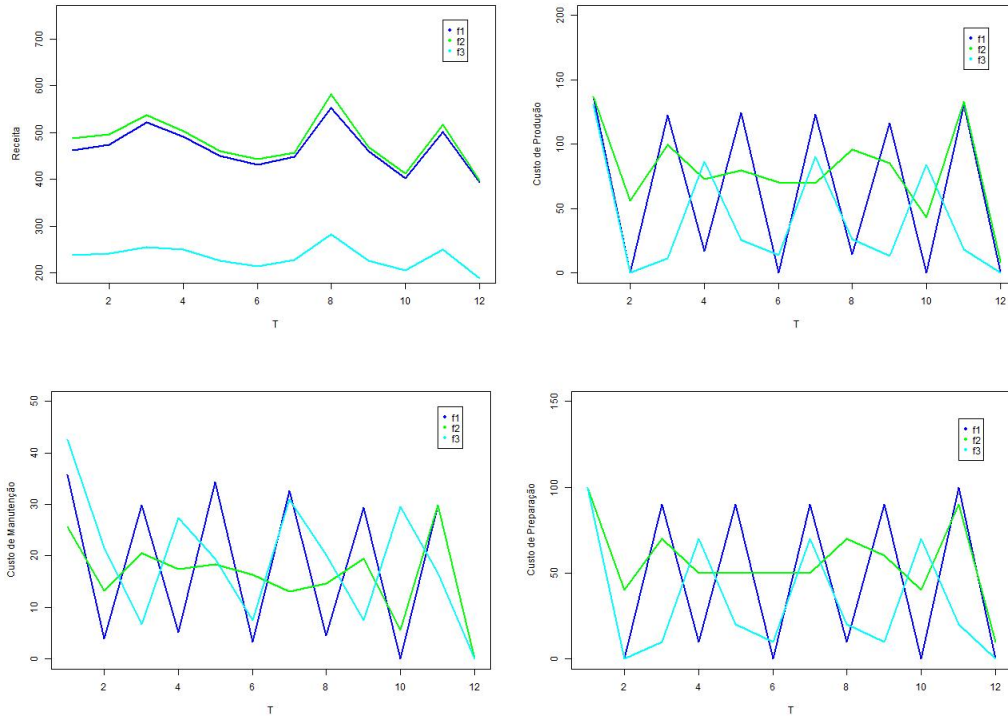


Figura 5.13: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 4.

Na Figura 5.13, ao comparar o Experimento 1 com o Experimento 4, observamos que com o aumento  $\epsilon$  de 0.25 para 0.50, o valor médio da receita de ( $P_2$ ) sofreu queda, se aproximando do valor de ( $P_1$ ), na maioria dos períodos.

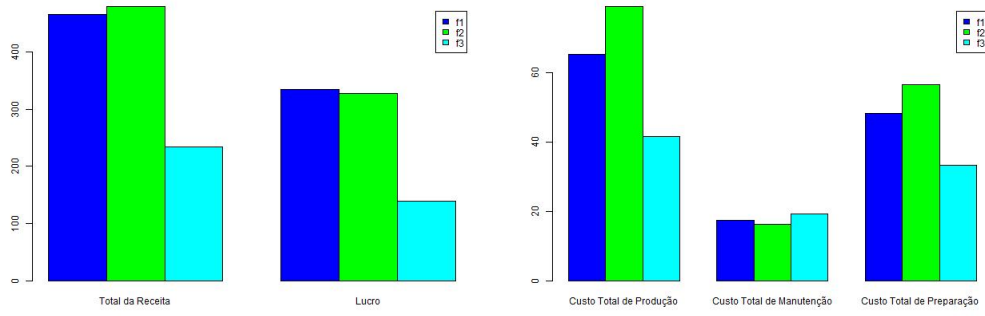


Figura 5.14: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 4.

Na Figura 5.14, nota-se que ( $P_2$ ) obteve majoritariamente custos maiores, alcançou a maior receita e, dessa vez, mesmo ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) apresentando lucros médios bem próximos, ( $P_1$ ) obteve lucro médio maior.

Vejamos alguns valores aproximados para posterior comparação. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 400 para ( $P_1$ ), acima de 400 para ( $P_2$ ) e acima de 200 para ( $P_3$ ). Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão acima de 300 para ( $P_1$ ), acima de 300 para ( $P_2$ ), e acima de 100 para ( $P_3$ ). Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão acima de 60, acima de 60 e no nível de 40, respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão acima 40, abaixo de 60 e abaixo de 40. Já os custos médios totais de manter estoques estão no nível de 20 com ( $P_3$ ) tendo o maior valor, seguido de ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ).

Na Figura 5.15, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda se comportaram ao longo do horizonte de planejamento no experimento 4. ( $P_1$ ) apresentou preço de venda acima de ( $P_2$ ) e ( $P_3$ ). Esses últimos apresentaram valores médios relativos ao preço de venda próximos. Apesar disso, ( $P_3$ ) apresentou os menores preços de venda em todos os períodos. No que diz respeito à demanda, notamos para o modelo ( $P_2$ ) uma demanda resultante maior do que as de ( $P_1$ ) e ( $P_3$ ), em todos os períodos. ( $P_3$ ) apresentou os menores valores médios de demanda. É notável o fato de ( $P_1$ ) possuir a média de preço de venda mais alta em relação a ( $P_2$ ) e no gráfico da demanda possuir valores médios menores que ( $P_2$ ).

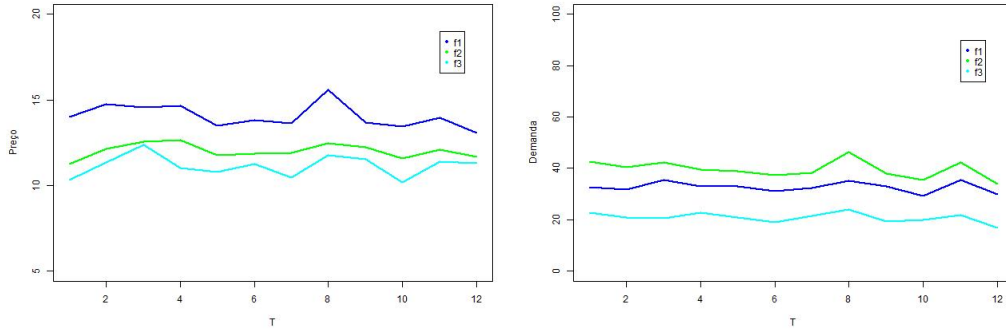


Figura 5.15: Preço e Demanda no Experimento 4.

Note ainda que a média dos preços de venda está na faixa de 10 a 17 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades deste experimento 4. O que é um ponto positivo para o consumidor. Na Figura 5.16, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

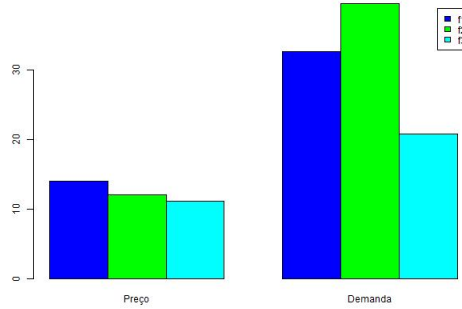


Figura 5.16: Preço total e Demanda total no Experimento 4.

## 5.5 Experimento 5

No Experimento 5, ao considerar  $\epsilon = 0.50$  e  $\beta = 5$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.0640625s, do modelo ( $P_2$ ) foi 51.2375s e de ( $P_3$ ) 134.3141s. Na Figura 5.17, observe que ao aumentarmos  $\epsilon$  de 0.25 para 0.50 e  $\beta$  de 3 para 5, o valor médio da receita de ( $P_2$ ) continuou a diminuir, de modo a interceptar ( $P_1$ ) em diversos pontos, ao longo do horizonte de planejamento. Dessa maneira, é possível notar que, neste experimento, ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) atingiram valores médios de receita muito próximos. Os custos apresentaram uma faixa de alternância para ( $P_2$ ) um pouco maior do que para ( $P_1$ ) e ( $P_3$ ) em quase todos os períodos, exceto o custo de manter estoques.

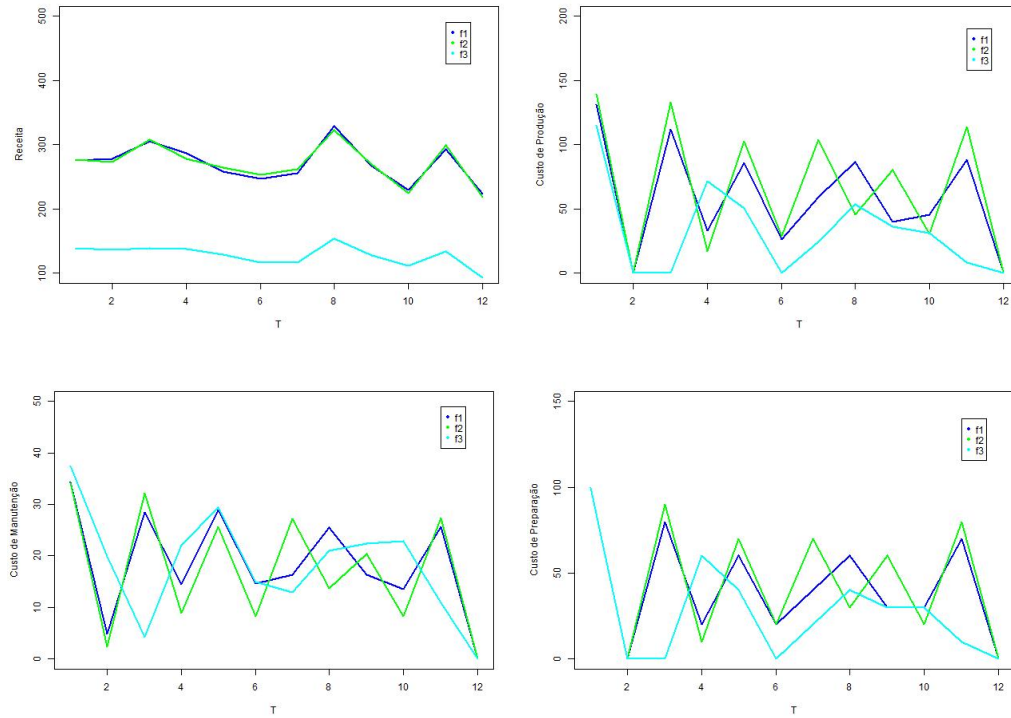


Figura 5.17: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 5.

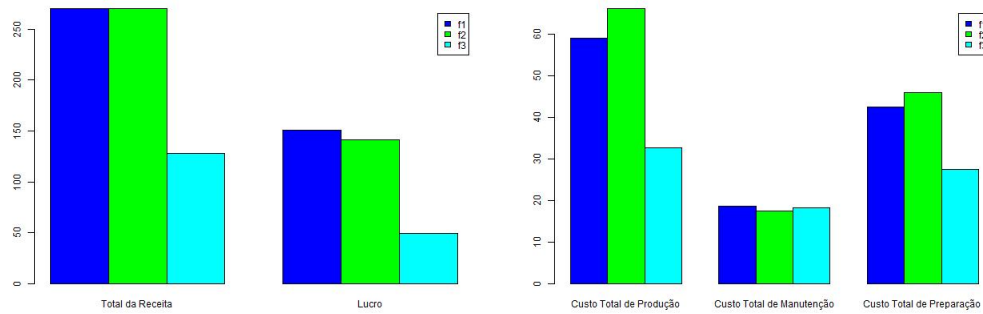


Figura 5.18: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 5.

Na Figura 5.18, nota-se que o experimento 5 apresentou comportamento parecido com o experimento 1, no sentido de que ( $P_2$ ) obteve majoritariamente custos maiores, mas não alcançou o maior lucro. ( $P_1$ ) obteve o maior lucro médio. Além disso, é possível notar que ocorreu uma queda nos valores ao aumentarmos  $\beta$  de 3 para 5.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado no experimento anterior. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 250 para ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ), abaixo de 150 para ( $P_3$ ). Os valores médios

totais relacionados ao Lucro estão na faixa de 150 para  $(P_1)$ , abaixo de 150 para  $(P_2)$ , e no nível de 50 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão abaixo de 60, acima de 60 e acima de 30 respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão acima 40, abaixo de 50 e abaixo de 30. Já os custos médios totais de manutenção de estoques estão em torno de 20, com  $(P_1)$  tendo o maior valor, seguido por  $(P_3)$  e  $(P_2)$ .

Na Figura 5.19, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda no experimento 5 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$  apresentou preço de venda acima de  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . Esses últimos apresentaram valores médios relativos ao preço de venda muito próximos. No que diz respeito à demanda, notamos que para  $(P_2)$  a demanda resultante é maior do que as de  $(P_1)$  e  $(P_3)$ , em todos os períodos, seguindo o padrão do experimento anterior porém  $(P_2)$  se aproxima de  $(P_1)$ .  $(P_3)$  apresentou os menores valores médios de demanda. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre  $(P_2)$  e  $(P_3)$  é relativamente evidente, mesmo que o preço de venda de ambos os problemas estejam muito próximos. Também é notável o fato de  $(P_1)$  possuir a média de preço de venda mais alta em relação a  $(P_2)$  e no gráfico da demanda possuir valores médios menores que  $(P_2)$ .

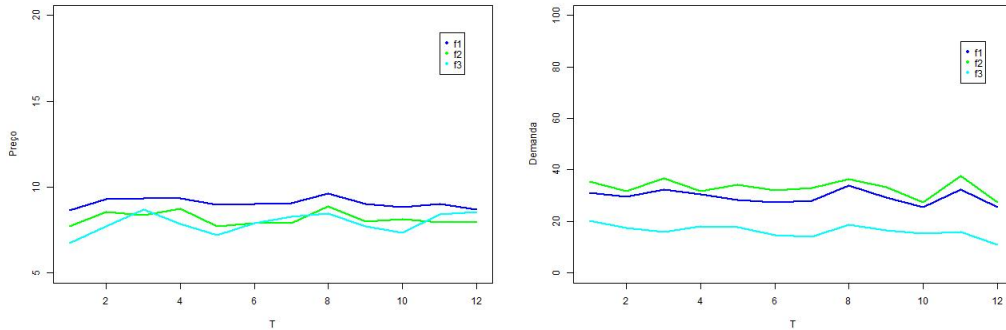


Figura 5.19: Preço e Demanda no Experimento 5.

De maneira geral, o aumento do  $\beta$  de 3 para 5 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem, assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 10 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades deste experimento 5. Na Figura 5.20, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

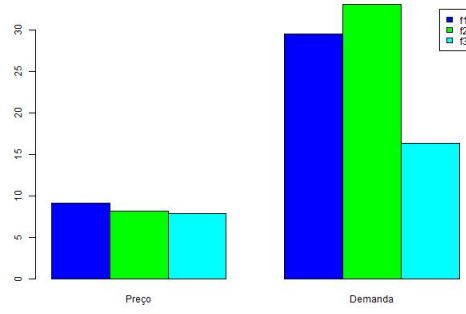


Figura 5.20: Preço total e Demanda total no Experimento 5.

## 5.6 Experimento 6

No Experimento 6, ao considerar  $\epsilon = 0.50$  e  $\beta = 8$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.078125s, do modelo ( $P_2$ ) foi de 138.3562s, e do ( $P_3$ ) 146.4797s. Na Figura 5.21, observe que ao aumentarmos  $\epsilon$  de 0.25 para 0.50 e  $\beta$  de 5 para 8, o valor médio da receita de ( $P_2$ ) seguiu em queda, sendo menor que a receita média de ( $P_1$ ), na maioria dos períodos.

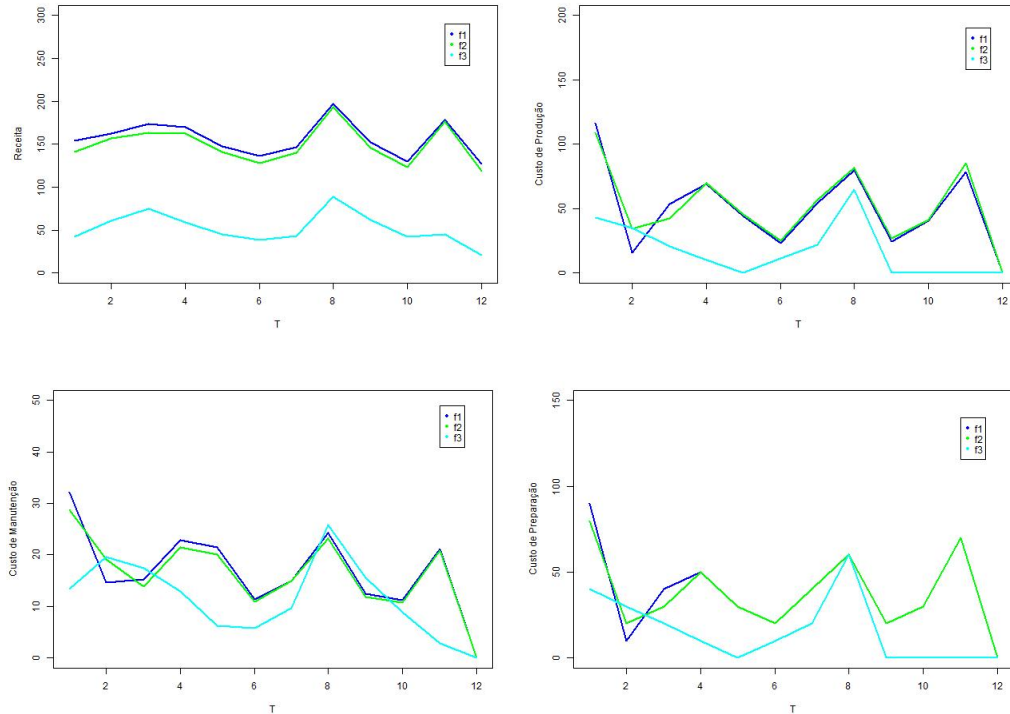


Figura 5.21: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 6.

De maneira geral, em comparação ao experimento anterior, os valores médios de

receita dos três modelos diminuiriam consideravelmente. Os custos relacionados a  $(P_1)$  e  $(P_2)$  tiveram comportamento parecido, ao longo do horizonte de planejamento, já  $(P_3)$  apresentou custos bem menores.

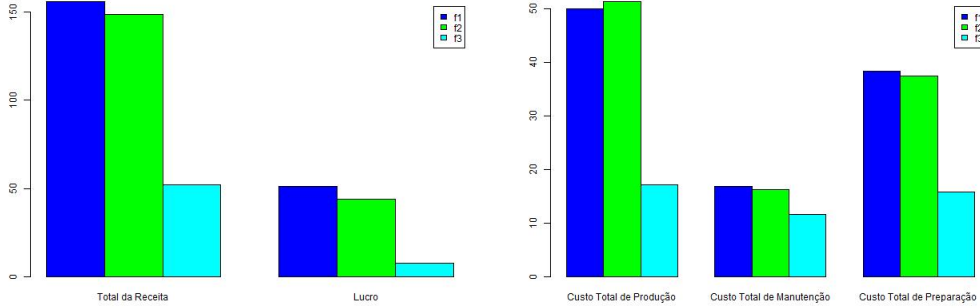


Figura 5.22: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 6.

Na Figura 5.22, nota-se que o experimento 6 apresentou valores médios totais bem próximos de  $(P_1)$  e  $(P_2)$ . Dessa vez, o custo total médio de preparação de  $(P_2)$  atingiu valores abaixo de  $(P_1)$ . Ainda assim, é possível notar que ocorreu novamente uma queda nos valores conforme aumentamos  $\beta$  de 5 para 8.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado anteriormente. Observe que os valores médios totais de Receita estão um pouco acima de 150 para  $(P_1)$ , na faixa de 150 para  $(P_2)$  e em torno de 50 para  $(P_3)$ . Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão na faixa de 50 para  $(P_1)$ , abaixo de 50 para  $(P_2)$ , e muito abaixo de 50 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão na faixa de 50, um pouco acima de 50 e abaixo de 20 respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão na faixa de 40, abaixo de 40 e abaixo de 20. Já os custos médios totais de manutenção de estoques estão abaixo de 20, com  $(P_1)$  tendo o maior valor, seguido por  $(P_2)$  e  $(P_3)$ .

Na Figura 5.23, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda do experimento 6 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$   $(P_2)$  e  $(P_3)$  apresentaram preços médios de venda muito aproximados. No que diz respeito à demanda, notamos que, dessa vez, a execução do modelo  $(P_2)$  resultou em valores médios de demanda extremamente próximos aos valores médios de demanda de  $(P_1)$ .  $(P_3)$  apresentou os menores valores médios de demanda. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre  $(P_2)$  e  $(P_3)$  continua sendo relativamente evidente, mesmo que o preço de venda estejam relativamente próximos. Além disso, vale ressaltar o quão próximos  $(P_1)$  e  $(P_2)$  encontram-se nos dois últimos quesitos analisados.

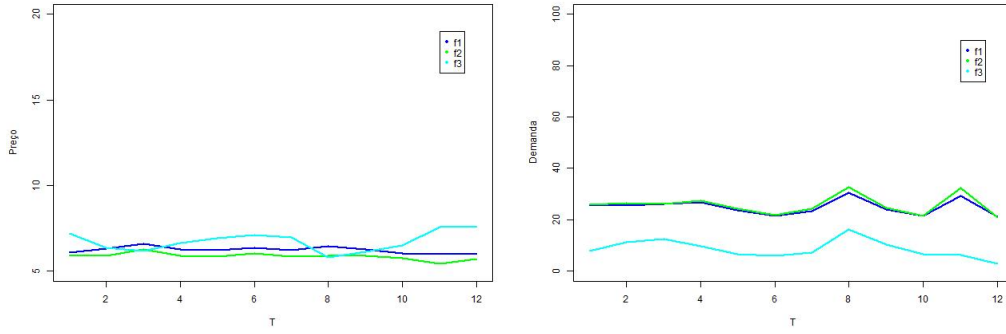


Figura 5.23: Preço e Demanda no Experimento 6.

De maneira geral, o aumento do  $\beta$  de 5 para 8 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 8 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades deste experimento 6. Em particular, a variação dos modelos ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) não teve grande impacto, nem nos preços de venda, nem na demanda. O que é algo considerável tanto para o consumidor quanto para a empresa. Além do que, tal fato reafirma a possibilidade de utilização de funções não lineares para modelagens mais realistas, sem ocasionar prejuízos. Na Figura 5.24, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

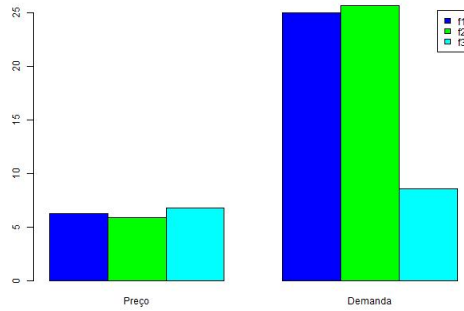


Figura 5.24: Preço total e Demanda total no Experimento 6.

## 5.7 Experimento 7

No Experimento 7, ao considerar  $\epsilon = 0.75$  e  $\beta = 3$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.05625s, do modelo ( $P_2$ ) foi de 41.68281s, e de ( $P_3$ ) 96.72031s. Na Figura 5.25, observe que ao aumentarmos  $\epsilon$  de 0.50 para 0.75, com  $\beta = 3$ , o valor médio da receita de ( $P_2$ ) comportou-se de maneira

a ficar abaixo dos valores médios de receita de  $(P_1)$  em todos os períodos. Os custos relacionados a  $(P_1)$ , embora maiores, seguiram comportamento parecido com os de  $(P_2)$ , ao longo do horizonte de planejamento, já  $(P_3)$  apresentou os menores custos.

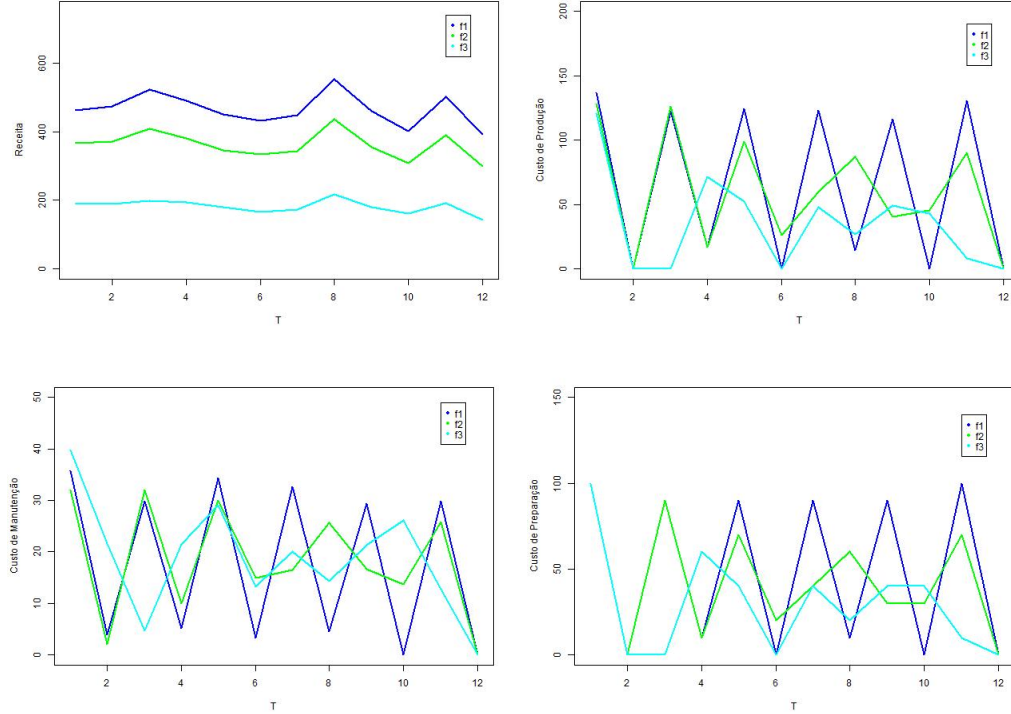


Figura 5.25: Receita  $(p_t d_t)$ , Custo de produção  $(c_t x_t)$ , Custo de manutenção de estoques  $(h_t i_t)$  e Custo de preparação  $(q_t y_t)$  no Experimento 7.

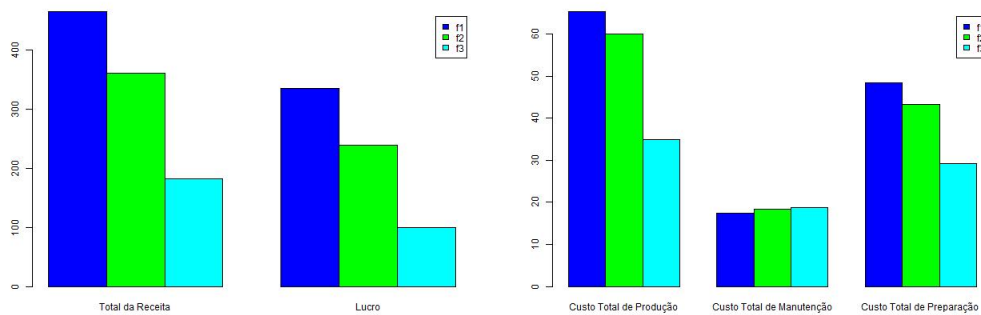


Figura 5.26: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção e custo total de preparação no Experimento 7.

Na Figura 5.26, nota-se que, dessa vez,  $(P_1)$  obteve a maioria dos custos maiores, alcançou a maior receita e o maior lucro. Vejamos alguns valores aproximados para posterior comparação. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 400 para  $(P_1)$ , abaixo de 400 para  $(P_2)$  e abaixo de 200 para  $(P_3)$ . Os valores

médios totais relacionados ao Lucro estão acima de 300 para  $(P_1)$ , abaixo de 300 para  $(P_2)$ , e na faixa de 100 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão acima de 60, abaixo de 60 e acima de 30, respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão abaixo de 50, acima de 40 e na faixa de 30. Já os custos médios totais de manutenção de estoque estão na faixa do valor 20 com  $(P_3)$  tendo o maior valor, seguido de  $(P_2)$  e  $(P_1)$ .

Na Figura 5.27, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$  apresentou preço de venda acima de  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . Esses últimos apresentaram valores médios relativos ao preço de venda ligeiramente menos próximos do que nos experimentos anteriores. No que diz respeito à demanda, notamos que a execução do modelo  $(P_2)$  resultou em uma demanda menor do que as de  $(P_1)$  e maior do que  $(P_3)$  em todos os períodos. É notável o fato de  $(P_1)$  continuar possuindo a média de preço de venda mais alta em relação a  $(P_2)$  e, no gráfico da demanda  $(P_2)$  passar a possuir valores médios de demanda menores que  $(P_1)$ .

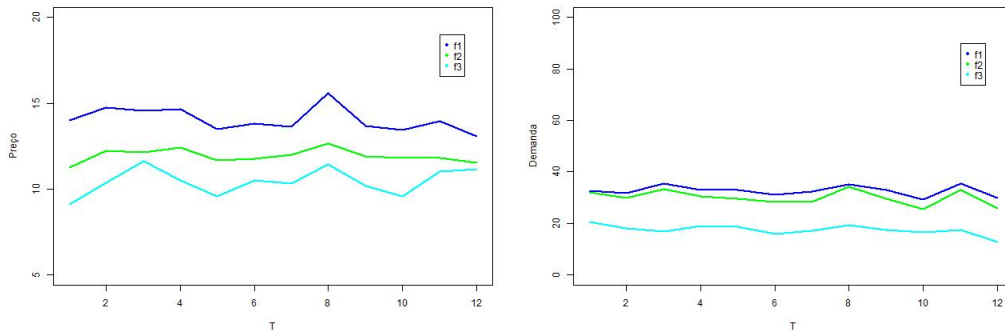


Figura 5.27: Preço e Demanda no Experimento 7.

Note ainda que a média dos preços de venda está na faixa de 9 a 17 nos três modelos, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades deste experimento 7. O que é um ponto positivo para o consumidor. Na Figura 5.28, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

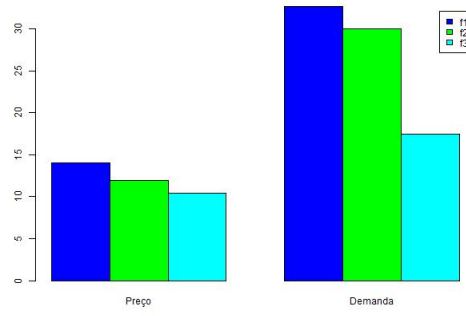


Figura 5.28: Preço total e Demanda total no Experimento 7.

## 5.8 Experimento 8

No Experimento 8, ao considerar  $\epsilon = 0.75$  e  $\beta = 5$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.0546875s, do modelo ( $P_2$ ) foi de 79.0375s, e de ( $P_3$ ) 157.9422s. Na Figura 5.29, observe que ao aumentarmos  $\epsilon$  de 0.50 para 0.75 e  $\beta$  de 3 para 5, o valor médio da receita de ( $P_2$ ) comportou-se de maneira a ficar abaixo dos valores médios de receita de ( $P_1$ ) em todos os períodos novamente.

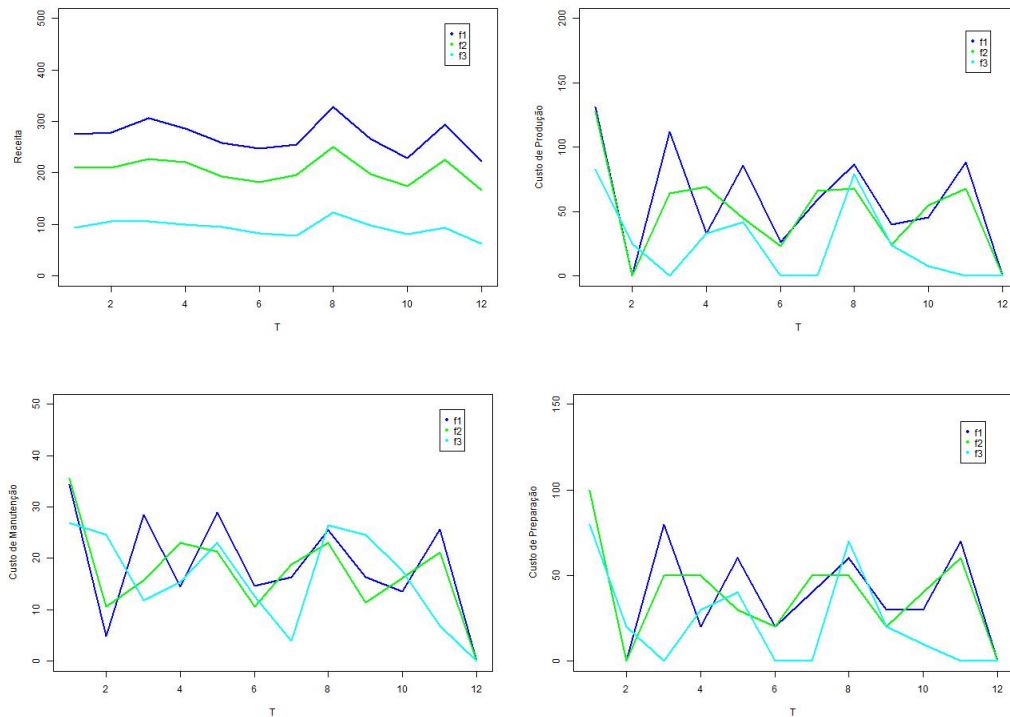


Figura 5.29: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção de estoques ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 8.

De maneira geral, o aumento para  $\beta = 5$ , influenciou para que os custos médios de receita caíssem em comparação ao experimento anterior. Os custos relacionados a  $(P_1)$  continuaram maiores, seguidos dos custos por  $(P_2)$  e  $(P_3)$ .

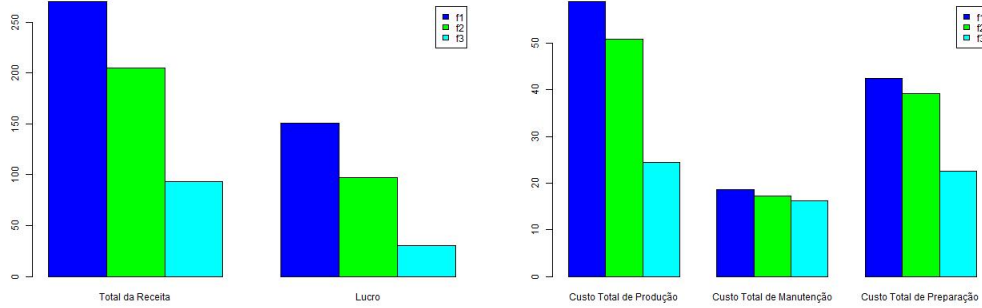


Figura 5.30: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 8.

Na Figura 5.30, nota-se, no experimento 8, que  $(P_1)$  apresentou os maiores valores totais médios em todos os cinco quesitos, e  $(P_3)$  apresentou os menores para todos os mesmos cinco quesitos. Além disso, é possível notar que ocorreu uma queda nos valores ao aumentarmos  $\beta$  de 3 para 5.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado no experimento anterior. Observe que os valores médios totais de Receita estão acima de 250 para  $(P_1)$ , na faixa de 200 para  $(P_2)$ , abaixo de 100 para  $(P_3)$ . Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão em torno de 150 para  $(P_1)$ , de 100 para  $(P_2)$ , e abaixo de 50 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão acima de 50, em torno de 50 e acima de 20, respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão acima 40, em torno de 40 e acima de 20. Já os custos médios totais de manutenção de estoques estão em torno de 20, com  $(P_1)$  tendo o maior valor, seguido por  $(P_2)$  e  $(P_3)$ .

Na Figura 5.31, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda do experimento 8 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$  apresentou preço de venda acima de  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . Esses últimos mantiveram o padrão de apresentar seus valores médios relativos ao preço de venda próximos. No que diz respeito à demanda, a demanda resultante do modelo  $(P_2)$  é menor do que as de  $(P_1)$  e maior do que as de  $(P_3)$ , em todos os períodos seguindo o padrão do experimento anterior. É interessante notar que a diferença nos valores médios de demanda entre  $(P_2)$  e  $(P_3)$  é relativamente evidente mesmo que os preços de venda de ambos estejam muito próximos. Também é notável o fato de  $(P_1)$  possuir a média de preço de venda mais alta em relação a  $(P_2)$  e, no gráfico da demanda,  $(P_2)$  apresentar valores médios menores que os de  $(P_1)$ .

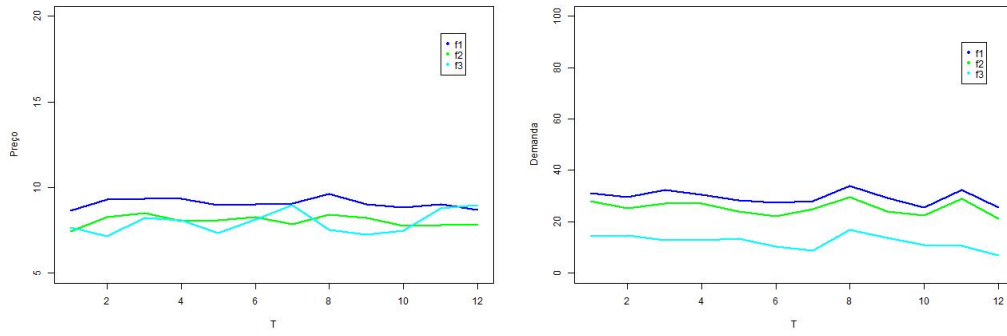


Figura 5.31: Preço e Demanda no Experimento 8.

De maneira geral, o aumento do  $\beta$  de 3 para 5 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem, assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 10 nos três modelos, o que mostra que a mudança da função preço-demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda, considerando as especificidades deste experimento 8. Na Figura 5.32, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

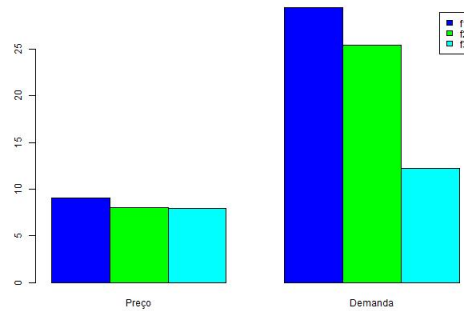


Figura 5.32: Preço total e Demanda total no Experimento 8.

## 5.9 Experimento 9

No Experimento 9, ao considerar  $\epsilon = 0.75$  e  $\beta = 8$ , o tempo médio em segundos para a execução de 10 instâncias do modelo ( $P_1$ ) foi de 0.0703125s do modelo ( $P_2$ ) foi 185.7281s, e de ( $P_3$ ) 106.3031s. Na Figura 5.33, observe que ao aumentarmos  $\epsilon$  de 0.50 para 0.75 e  $\beta$  de 5 para 8, o valor médio da receita de ( $P_2$ ) comportou-se de maneira a ficar abaixo dos valores médios de receita de ( $P_1$ ) em todos os períodos, comportamento semelhante ao ocorrido nos dois experimentos anteriores. Além disso, observe que, de maneira geral, o aumento para  $\beta = 8$ , mais uma vez causou

impacto nos custos médios da receita, pois os mesmos apresentaram uma considerável queda, tanto para  $(P_1)$  como para  $(P_2)$  e  $(P_3)$ . Os custos relacionados a  $(P_3)$  continuaram menores. Já os custos de  $(P_1)$  e  $(P_2)$  apresentaram um comportamento parecido que tentava manter a mesma faixa de alternância ao longo do horizonte de planejamento, apesar disso, os custos de  $(P_1)$  foram maiores dos que os de  $(P_2)$ , exceto o custo de manutenção de estoque que foi extremamente próximo.

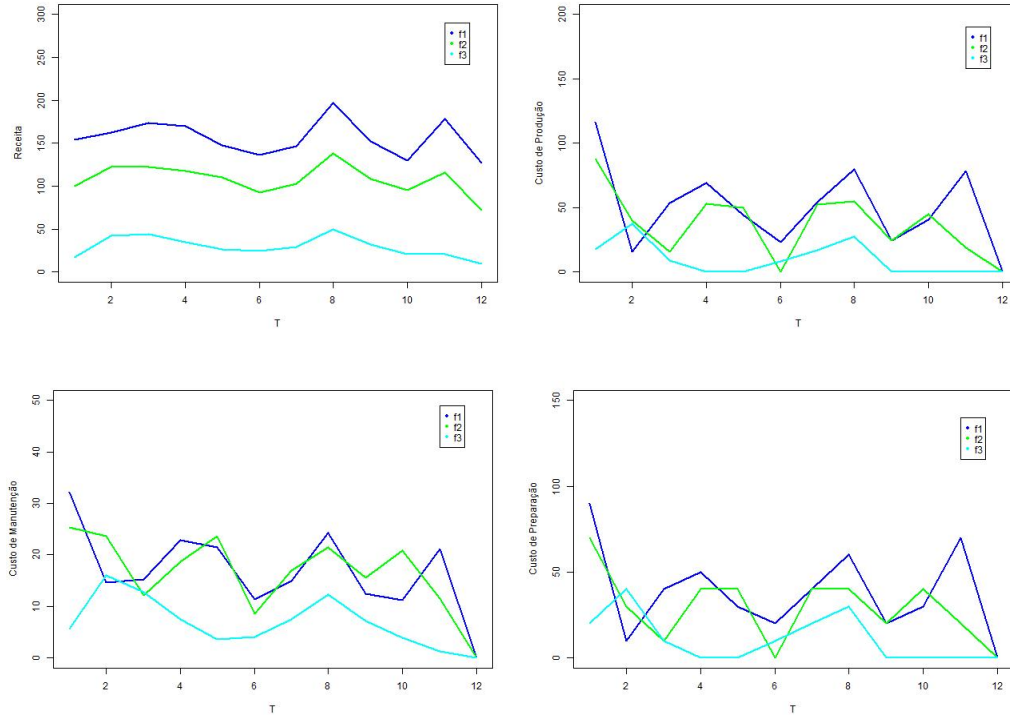


Figura 5.33: Receita ( $p_t d_t$ ), Custo de produção ( $c_t x_t$ ), Custo de manutenção ( $h_t i_t$ ) e Custo de preparação ( $q_t y_t$ ) no Experimento 9.

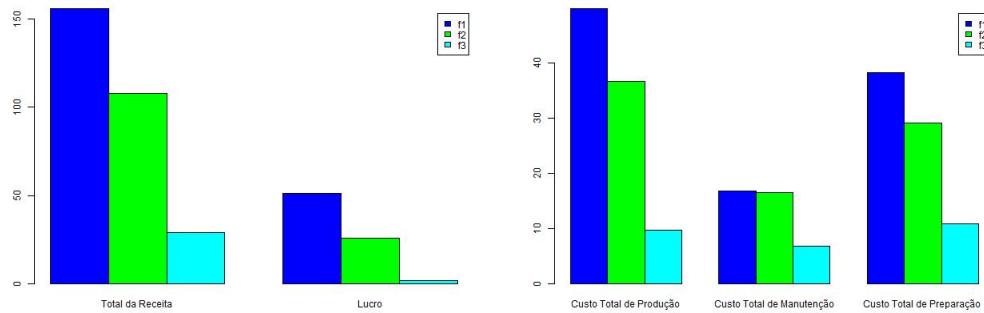


Figura 5.34: Receita total, Lucro total, Custo total de produção, Custo total de manutenção de estoques e custo total de preparação no Experimento 9.

Na Figura 5.34, nota-se que neste experimento 9, novamente,  $(P_1)$  apresentou

os maiores valores totais médios em todos os cinco quesitos e  $(P_3)$  apresentou os menores para todos os mesmos cinco quesitos. E mais uma vez, é possível notar que ocorreu novamente uma queda nos valores conforme aumentamos  $\beta$  de 5 para 8.

Vejamos alguns valores aproximados para compararmos com o que foi mencionado no anteriormente. Observe que os valores médios totais de Receita estão um pouco acima de 150 para  $(P_1)$ , acima de 100 para  $(P_2)$  e abaixo de 50 para  $(P_3)$ . Os valores médios totais relacionados ao Lucro estão acima de 50 para  $(P_1)$ , abaixo de 50 para  $(P_2)$ , e muito abaixo de 50 para  $(P_3)$ . Seguindo a mesma lógica, observe também que os custos médios totais de produção estão acima de 40, abaixo de 40 e abaixo de 10 respectivamente. Os custos médios totais de preparação estão abaixo de 40, em torno de 30 e de 10. Já os custos médios totais de manutenção de estoques estão abaixo de 20 com  $(P_1)$ , obtendo o maior valor, seguido de  $(P_2)$  e  $(P_3)$ .

Na Figura 5.35, observamos como as variáveis de decisão referentes ao preço de venda e à demanda do experimento 9 se comportaram ao longo do horizonte de planejamento.  $(P_1)$  e  $(P_2)$  apresentaram preços médios de venda muito aproximados. Dessa vez,  $(P_3)$  obteve o maior valor médio de preço de venda. No que diz respeito à demanda, notamos que a execução do modelo  $(P_2)$  resultou numa demanda menor do que as de  $(P_1)$  e maior do que as de  $(P_3)$ , em todos os períodos seguindo o padrão do experimento anterior.

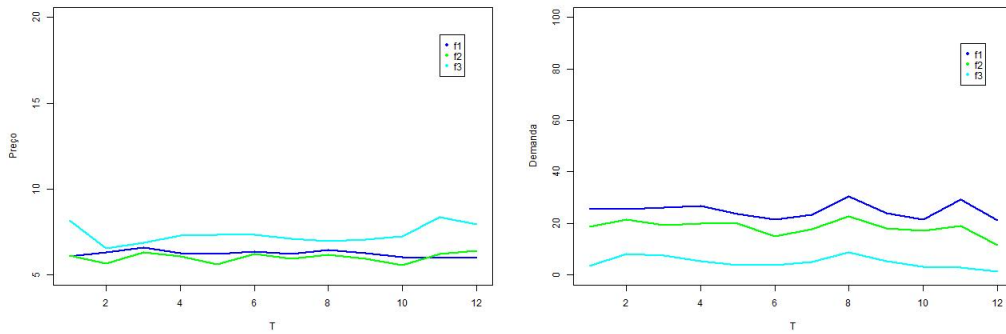


Figura 5.35: Preço e Demanda no Experimento 9.

De maneira geral, o aumento do  $\beta$  de 5 para 8 fez com que os valores médios de preço de venda e demanda baixassem assim como aconteceu com a receita, lucro e com a maioria dos custos. Além disso, note que a média dos preços de venda está na faixa de 5 a 8 para os três problemas, o que mostra que a mudança da função preço demanda utilizada não teve grande impacto nos preços de venda considerando as especificidades deste experimento 9. Na Figura 5.36, ratificamos o exposto no parágrafo anterior.

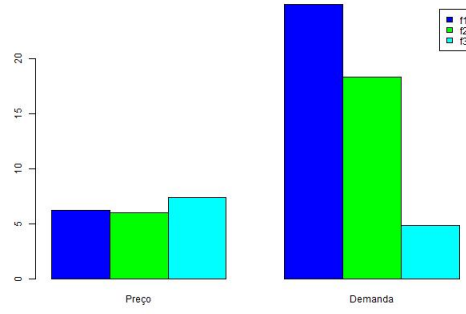


Figura 5.36: Preço total e Demanda total no Experimento 9.

## 5.10 Resultados e discussões

Nesse capítulo, descrevemos e geramos gráficos baseados nos resultados médios das 10 instâncias para os nove experimentos. O mesmo conjunto de 10 instâncias diferentes foi considerado para todos os experimentos. Os únicos elementos que variaram de um experimento para o outro foram os parâmetros  $\epsilon$  e  $\beta$  e as funções que modelam a relação preço-demanda. Neste capítulo, analisaremos de forma mais sucinta o impacto dessas variações nos resultados obtidos. É interessante lembrar que o preço pode ser calculado a partir dos valores das demandas obtidas nas soluções dos problemas. Analisaremos assim, a influência das variações mencionadas na variável de decisão explícita e na variável de decisão implícita, demanda e preço, respectivamente, e também na receita, no lucro e em todos os custos considerados no problema.

### 5.10.1 Análise da variação de $\epsilon$

Como foi descrito ao longo do capítulo anterior, foram considerados três valores diferentes para o parâmetro  $\epsilon$ : 0.25, 0.50 e 0.75. Iremos analisar o impacto desta variação, comparando os resultados médios obtidos com os experimentos que consideram o mesmo valor de  $\epsilon$ . Mais especificamente, os experimentos 1, 2 e 3 consideraram  $\epsilon = 0.25$ , os experimentos 4, 5 e 6 consideraram  $\epsilon = 0.50$  e os experimentos 7, 8 e 9 consideraram  $\epsilon = 0.75$ . Considerando esses agrupamentos, apresentamos nas tabelas seguintes os resultados médios obtidos.

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	29,07	9,79	297,43	58,13	17,60	43,06	178,64
$(P_2)$	39,07	8,74	359,99	78,14	15,78	54,44	211,63
$(P_3)$	16,61	8,72	152,80	33,23	17,01	27,22	75,34

Tabela 5.1: Experimentos 1,2,3 ( $\epsilon = 0.25$ )

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	29,07	9,79	297,43	58,13	17,60	43,06	178,64
$(P_2)$	32,82	8,68	299,95	65,63	16,62	46,67	171,03
$(P_3)$	15,25	8,60	137,81	30,49	16,29	25,56	65,47

Tabela 5.2: Experimentos 4,5,6 ( $\epsilon = 0.50$ )

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	29,07	9,79	297,43	58,13	17,60	43,06	178,64
$(P_2)$	24,59	8,66	224,67	49,19	17,37	37,22	120,89
$(P_3)$	11,50	8,59	101,48	23,01	13,89	20,83	43,75

Tabela 5.3: Experimentos 7,8,9 ( $\epsilon = 0.75$ )

Podemos ver pelas tabelas que o aumento de  $\epsilon$  não influencia os resultados de  $(P_1)$ , conforme esperado, mas leva à diminuição do preço ótimo a ser cobrado nos dois outros modelos, por levar a uma reação mais agressiva na diminuição da demanda conforme o preço aumenta. O ajuste correto do valor de  $\epsilon$  nos modelos, que represente bem quão agressiva é a queda na demanda conforme o preço aumenta, é certamente importante para a tomada de decisão correta em relação ao preço ótimo. Decréscimos médios pequenos nos preços cobrados conforme  $\epsilon$  aumenta já leva a um grande decréscimo na demanda média e a uma queda significativa no lucro da empresa.

### 5.10.2 Análise da variação de $\beta$

Como foi descrito ao longo do capítulo anterior, foram considerados três valores diferentes para o parâmetro  $\beta$ : 3, 5 e 8. Iremos analisar o impacto desta variação, comparando os resultados médios obtidos com os experimentos que utilizaram os mesmos valores de  $\beta$  em sua execução. Os experimentos 1, 4 e 7 consideraram  $\beta = 3$ , os experimentos 2, 5 e 8 consideraram  $\beta = 5$  e os experimentos 3, 6 e 9 consideraram  $\beta = 8$ . Considerando esses agrupamentos, apresentamos nas tabelas seguintes os resultados médios obtidos.

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	32,70	14,06	465,54	65,41	17,39	48,33	334,40
$(P_2)$	39,02	12,01	472,84	78,04	16,40	55,83	322,57
$(P_3)$	20,06	11,05	223,67	40,12	19,22	32,22	132,11

Tabela 5.4: Experimento 1,4,7( $\beta = 3$ )

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	29,50	9,08	270,51	59,00	18,60	42,50	150,41
$(P_2)$	32,49	8,15	266,13	64,97	16,79	46,39	137,97
$(P_3)$	15,45	7,94	120,95	30,91	17,46	26,67	45,92

Tabela 5.5: Experimento 2,5,8 ( $\beta = 5$ )

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	24,99	6,24	156,25	49,98	16,82	38,33	51,11
$(P_2)$	24,98	5,92	145,65	49,95	16,58	36,11	43,00
$(P_3)$	7,85	6,91	47,46	15,70	10,52	14,72	6,53

Tabela 5.6: Experimento 3,6,9 ( $\beta = 8$ )

Da mesma forma que o aumento de  $\epsilon$  leva a uma queda nos valores dos preços ótimos, nas demandas e na produção da indústria em geral, o aumento de  $\beta$  também leva. No entanto, para os valores de  $\beta$  escolhidos, esta queda é bem mais significativa principalmente para a  $(P_3)$ . É interessante notar que o aumento de  $\beta$  para 8, leva a um comportamento médio bem parecido para os dois primeiros modelos. No terceiro modelo a demanda claramente é mais afetada pelas variações nos parâmetros que variam em nossos experimentos.

## 5.11 Análise da variação na relação preço-demanda

Apresentamos na tabela a seguir os resultados médios obtidos com todos os experimentos feitos com cada modelo proposto nesta dissertação.

	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
$(P_1)$	29,07	9,79	297,43	58,13	17,60	43,06	178,64
$(P_2)$	32,16	8,69	294,87	64,32	16,59	46,11	167,85
$(P_3)$	14,45	8,63	130,69	28,91	15,73	24,54	61,52

Vemos que o uso das funções não-lineares utilizadas nos modelos  $(P_2)$  e  $(P_3)$  levam a uma redução no preço ótimo a ser cobrado pela empresa. A escolha do preço

ótimo leva a uma queda no lucro médio da empresa pequena quando comparamos o uso da função exponencial  $f^2$  para substituir a função afim  $f^1$ . Já a função  $f^3$  mostra uma reação mais agressiva do mercado, levando a uma queda maior do lucro, mesmo quando ao preço ótimo é considerado. Certamente um conhecimento histórico da reação do mercado com oscilações no preço é importante para a escolha do modelo a ser utilizado.

Um gráfico interessante de se ver é aquele que apresenta a quantidade máxima e mínima estocada ao final de cada período como consequência das entradas e saídas de produtos ou itens ao longo do horizonte de planejamento conforme apresentado nas Figuras 5.37, 5.38 e 5.39. Como é possível observar, em todos os três gráficos, o estoque inicial começa com zero. Em seguida, ocorre a produção, o que faz o estoque atingir seu nível máximo no período. Na sequência, ocorre o decréscimo no estoque em decorrência da demanda, o que faz o estoque atingir o nível mínimo no período. No período seguinte, o estoque máximo é o resultado da produção no período acrescida do estoque mínimo do período anterior e, assim por diante, em cada período até o nível de estoque no último período voltar a ser zero.

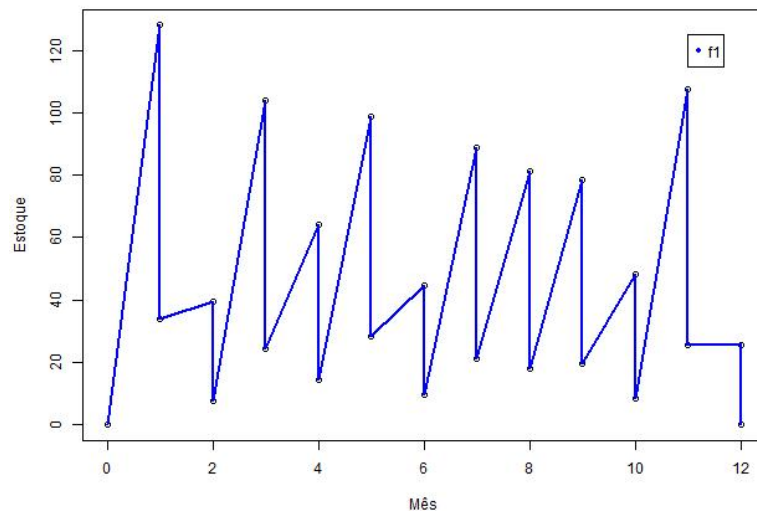


Figura 5.37: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_1$ ).

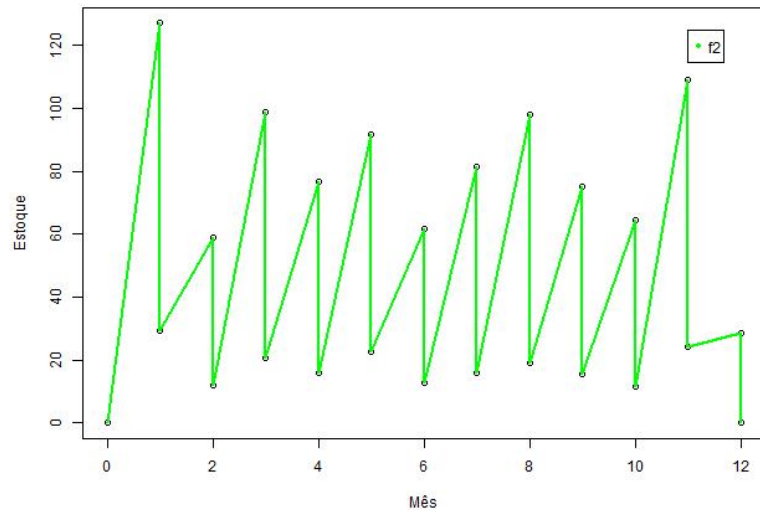


Figura 5.38: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_2$ ).

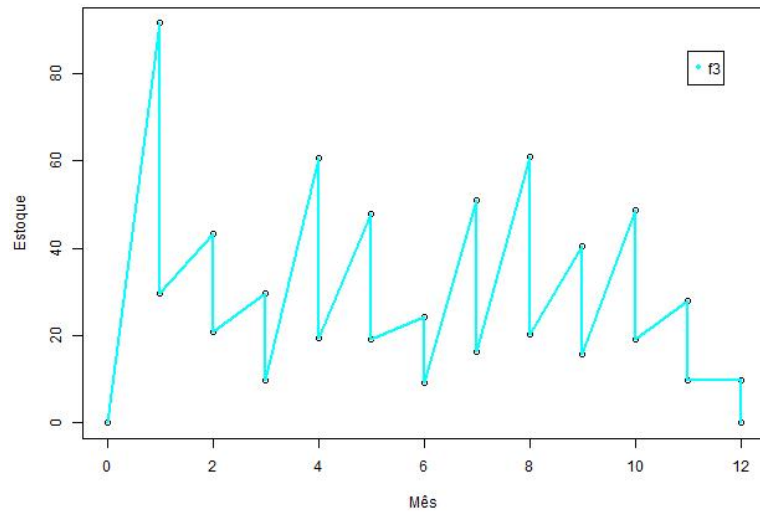


Figura 5.39: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo ( $P_3$ ).

Para finalizar esta seção, apresentamos a seguir os tempos computacionais médios para cada um dos três problemas determinísticos:

$P_j$	Tempo
$(P_1)$	0.0673s
$(P_2)$	80.3583s
$(P_3)$	119.2769s

Tabela 5.7: Média aproximada do tempo computacional considerando os nove experimentos para cada problema  $P_j$ .

## Capítulo 6

# Modelos para o PDL C considerando Incerteza em Custos

Finalmente, consideramos neste capítulo uma variação no PDL. Vamos assumir que os custos unitários de produção e de manutenção de estoques do item a ser produzido não podem ser estimados a priori, devido à incerteza nesses dados de entrada. Aplicamos aqui o uso da variância como medida de risco de variabilidade associada aos custos, conforme proposto em [18] e citado em [Seção 4.4.1][1], no exemplo “Linear program with random cost” .

Neste caso, considere os vetores  $c \in \mathbb{R}^{|T|}$  e  $h \in \mathbb{R}^{|T|}$  com valores das componentes aleatórios, com valores médios  $\bar{c}$  e  $\bar{h}$  e covariâncias  $C$  e  $H$ , respectivamente. Notamos que para um dado  $x \in \mathbb{R}^{|T|}$ , o custo de produção  $c^\top x = \sum_{t \in T} c_t x_t$  é uma constante com valor esperado ou média  $\bar{c}^\top x$  e variância  $\sum_{t, \ell \in T} x_t C_{t\ell} x_\ell = x^\top C x$ .

De modo geral, há um compromisso entre obter a média do custo pequena ou a variância do custo pequena. Uma forma de considerar a variância do custo no modelo é minimizar uma combinação linear da sua média com a variância, isto é, substituir  $c^\top x$  na função objetivo do problema por  $\bar{c}^\top x + \omega_c x^\top C x$ , termo conhecido como custo sensível ao risco. O escalar  $\omega_c \geq 0$  é conhecido como parâmetro de aversão ao risco. Quanto maior o seu valor, maior é a contribuição da variância no custo na função objetivo. Quando  $\omega_c > 0$  esperamos um aumento no custo médio de produção, para obtermos um decréscimo no efeito causado por variações no custo individual de produção. Análise similar é feita para o custo de estocagem ou manutenção.

A fim de considerar os custos sensíveis ao risco nos nossos modelos, substituiremos os modelos determinísticos  $(P_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , pelos modelos abaixo.

$$\begin{aligned}
(P_j^\omega) \quad & \max \quad \sum_{t \in T} p_t d_t - \bar{c}_t x_t - \bar{h}_t i_t - q_t y_t - \omega_c \sum_{t, \ell \in T} x_t C_{t\ell} x_\ell - \omega_h \sum_{t, \ell \in T} i_t H_{t\ell} i_\ell \\
\text{s.a:} \quad & d_t = x_t + i_{t-1} - i_t, & t \in T \\
& x_t \leq r_t y_t, & t \in T \\
& p_t = f^j(d_t), & t \in T \\
& x_t, i_t, d_t, p_t \geq 0, & t \in T \\
& y_t \in \{0, 1\}. & t \in T
\end{aligned}$$

Notamos que a única diferença em relação a  $(P_j)$ , para  $j = 1, 2, 3$ , é a substituição dos custos de produção e estocagem determinísticos pelos custos sensíveis ao risco na da função objetivo. Uma observação importante é que os termos quadráticos adicionados à função objetivo não afetam a convexidade dos nossos problemas de ONLIM. A matriz de covariância é uma matriz semidefinida positiva, portanto a função objetivo dos problemas continua sendo côncava.

No próximo capítulo, através de experimentos numéricos adicionais, analisaremos como a incerteza nos custos afeta os resultados do nosso problema.

## Capítulo 7

# Experimentos Numéricos com Incerteza em Custos

O experimento numérico descrito neste capítulo é uma extensão dos experimentos descritos no Capítulo 5. Introduziremos agora a modificação na função objetivo dos modelos a serem resolvidos, ao levar em conta a incerteza nos parâmetros de custo de produção e custo de manutenção de estoques (ou custo de estocagem).

Para isso, foi necessário considerar nos modelos dados de entrada adicionais, referentes aos custos de produção e manutenção de estoques, respectivamente: os vetores de valores médios  $\bar{c}$  e  $\bar{h}$ , as matrizes de covariância  $C$  e  $H$ , e as constantes não negativas  $w_c$  e  $w_h$ , correspondendo aos pesos das variâncias dos custos na função objetivo.

Os vetores  $\bar{c}$  e  $\bar{h}$  foram escolhidos como sendo os custos  $c$  e  $h$  do problema determinístico, conforme detalhado na Algoritmo 1. Assim, todos os componentes de  $\bar{c}$  são iguais a 2 e todos os componentes de  $\bar{h}$  são iguais a 1.

O Algoritmo 2, implementado em *Scilab*, gera os parâmetros adicionais. A função utilizada *grand*( $m, n, "nor", Av, Sd$ ) gera uma matriz de dimensão  $m \times n$  com elementos aleatórios que seguem a distribuição normal com média  $Av$  e desvio padrão  $Sd$ . Cada linha de uma matriz gerada por esta função corresponde a uma observação dos vetores de custo de produção e de manutenção em estoques. Para uma matriz de dimensão  $m \times n$ , a função *cov*( $M$ ) retorna a matriz de covariância das colunas de  $M$ , de dimensão  $n \times n$ . Cada linha de  $M$  representa uma observação e cada coluna, uma variável.

```

1  $t_{max} := 12;$ 
2  $\text{num-observações} := 50;$ 
3  $\text{média}_c := 2;$ 
4  $\text{desvio-padrão}_c := 0.5;$ 
5  $\text{matriz-obs}_c = \text{grand}(\text{num-observações}, t_{max}, \text{"nor"}, \text{média}_c, \text{desvio-padrão}_c);$ 
6  $C = \text{cov}(\text{matriz-obs}_c);$ 
7  $\text{média}_h := 1;$ 
8  $\text{desvio-padrão}_h := 0.2;$ 
9  $\text{matriz-obs}_h = \text{grand}(\text{num-observações}, t_{max}, \text{"nor"}, \text{média}_h, \text{desvio-padrão}_h);$ 
10  $H = \text{cov}(\text{matriz-obs}_h);$ 

```

**Algorithm 2:** Geração dos dados  $\bar{c}$ ,  $\bar{h}$ ,  $C$  e  $H$ .

Os demais dados considerados para as instâncias deste Capítulo são os mesmos das instâncias que foram utilizadas nos experimentos do Capítulo 5.

Como no Capítulos 5 analisamos o impacto da variação dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\beta$  através de 9 experimentos, agora iremos analisar o impacto da aversão ao risco nos resultados obtidos, causado pela variação nos pesos  $\omega_c$  e  $\omega_h$ . Para tanto, escolhemos arbitrariamente fixar os valores de  $\epsilon$  e  $\beta$  como no experimento 4. Dessa maneira, podemos subdividi-lo em seis experimentos, onde cada um considera diferentes combinações dos pesos  $\omega_c$  e  $\omega_h$ . As combinações de pesos utilizados em cada experimento foram:

- Experimento 4A:  $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 0$  (equivale ao experimento 4 do capítulo 5);
- Experimento 4B:  $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 1$ ;
- Experimento 4C:  $\omega_c = 1$  e  $\omega_h = 0$ ;
- Experimento 4D:  $\omega_c = 1$  e  $\omega_h = 1$ ;
- Experimento 4E:  $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 2$ ;
- Experimento 4F:  $\omega_c = 2$  e  $\omega_h = 0$ .

O restante do processo de testagem dos experimentos seguiu semelhante aos experimentos do Capítulo 5, ou seja, o AMPL foi utilizado como linguagem de modelagem algébrica. Os resultados para o modelo  $(P_1^\omega)$  foram obtidos utilizando o solver Gurobi [37]. Para resolver os modelos  $(P_2^\omega)$  e  $(P_3^\omega)$ , utilizamos o solver Muriqui Optimizer [38]. O algoritmo Outer Approximation (OA) do Muriqui Optimizer foi aplicado (veja [39] para detalhes). O *software* R foi utilizado para tratamento de dados, análise dos mesmos e geração de gráficos. Os seis experimentos foram

executados para cada modelo de otimização  $(P_1^\omega)$ ,  $(P_2^\omega)$  e  $(P_3^\omega)$  num computador com Windows 11, com processador Intel Core i7, e 16GB de RAM.

## 7.1 Resultados e discussões

Um mesmo conjunto de 10 instâncias diferentes foi considerado para todos os experimentos com os modelos que consideram incerteza em custos. Os elementos que variaram de um experimento para o outro foram: os parâmetros  $\omega_c$  e  $\omega_h$  e as funções que modelam a relação preço-demanda. Analisaremos a influência da variação dos valores de  $\omega_c$  e  $\omega_h$  nos valores resultantes das variáveis de decisão demanda e de preço, e também a influência nos resultados de receita, ganhos e em todos os custos considerados no problema.

### 7.1.1 Análise dos modelos $(P_1^\omega)$ , $(P_2^\omega)$ e $(P_3^\omega)$

A Tabela 7.1 mostra a influência dos pesos  $\omega_c$  e  $\omega_h$  nas variáveis de decisão para o modelo  $(P_1^\omega)$ . Tomando como base o Experimento 4A que considera  $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 0$  e equivale ao experimento do Capítulo 5, é possível notar que, quando há incerteza somente no custo de manutenção de estoque (Experimento 4B:  $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 1$ ), acontece uma pequena queda nos valores de demanda, receita, custo de produção, custo de manutenção de estoque e no lucro obtido. Já o preço e o custo de preparação aumentaram. Quando há incerteza somente no custo de produção (Experimento 4C:  $\omega_c = 1$  e  $\omega_h = 0$ ), ocorre uma queda nos valores de demanda, receita, custo de produção, custo de preparação e no lucro obtido. Novamente, o preço e o custo de preparação aumentaram. Ainda baseando-se no experimento 4A, quando há incerteza no custo de produção e no custo de manutenção de estoque ao mesmo tempo (Experimento 4D:  $\omega_c = 1$  e  $\omega_h = 1$ ), ocorre novamente uma queda nos valores de demanda, receita, custo de produção, custo de manutenção de estoque e no lucro obtido. Novamente, o preço e o custo de preparação aumentaram.

Sob o ponto de vista em que somente ocorre o aumento de  $\omega_h$ , isto é, tomando como base o Experimento 4B ( $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 1$ ) e comparando-o com o Experimento 4E ( $\omega_c = 0$  e  $\omega_h = 2$ ), é possível notar um aumento nos valores de demanda, receita, custo de produção e custo de preparação enquanto preço, custo de manutenção de estoque e lucro diminuem. Sob o ponto de vista em que somente ocorre aumento de  $\omega_c$ , isto é, tomando como base o Experimento 4C ( $\omega_c = 1$  e  $\omega_h = 0$ ) e comparando-o com o Experimento 4F ( $\omega_c = 2$  e  $\omega_h = 0$ ), é possível notar um decréscimo nos valores de demanda, receita, lucro e custos de produção, manutenção de estoque e preparação.

De modo geral, nota-se que à medida que a aversão ao risco aumenta, o preço

cobrado pelo item produzido tende a aumentar, fazendo com que a demanda caia. A queda na demanda leva a queda do lucro em todos os casos onde o risco é considerado, quando o comparamos com o experimento do Capítulo 5. Notamos ainda que a incerteza no custo de estocagem, tende a diminuir o gasto com estoque e aumentar o gasto com a preparação, o que indica a tendência a produzir apenas o necessário em cada período, política de produção lote-a-lote. Nos nossos experimentos, a incerteza no custo de produção tem impacto bem maior no lucro do que a incerteza nos custos de estocagem. Apesar disso, ambos levam a uma mudança de comportamento na produção evidenciada pelo aumento no custo de preparação.

$\omega_c$ e $\omega_h$	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
(0 e 0)	32,70	14,05	465,53	65,40	17,39	48,33	334,40
(0 e 1)	32,35	14,17	463,23	64,71	10,37	61,66	326,47
(1 e 0)	20,87	18,00	380,16	41,74	10,95	66,66	260,79
(1 e 1)	20,88	17,99	378,79	41,76	5,98	77,50	253,53
(0 e 2)	32,81	14,02	464,06	65,62	5,77	75,83	316,83
(2 e 0)	14,85	20,00	298,77	29,71	8,11	60,83	200,10

Tabela 7.1: Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_1^\omega$ ).

$\omega_c$ e $\omega_h$	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
(0 e 0)	39,62	12,01	480,14	79,25	16,17	56,66	328,05
(0 e 1)	40,83	11,79	481,91	81,67	7,47	73,33	319,43
(1 e 0)	20,16	17,23	349,91	40,33	10,50	65,00	234,08
(1 e 1)	20,07	17,28	347,29	40,14	6,05	73,33	227,75
(0 e 2)	42,55	11,41	487,34	85,11	2,63	88,33	311,26
(2 e 0)	14,04	19,31	271,46	28,08	7,48	60,83	175,06

Tabela 7.2: Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_2^\omega$ ).

$\omega_c$ e $\omega_h$	Demanda	Preço	Receita	Produção	Estoque	Preparação	Lucro
(0 e 0)	20,84	11,14	233,89	41,68	19,17	33,33	139,69
(0 e 1)	19,81	11,65	227,99	39,62	9,55	45,00	133,81
(1 e 0)	11,67	15,61	179,06	23,35	7,76	52,50	95,44
(1 e 1)	11,11	16,00	172,68	22,22	5,92	52,50	92,03
(0 e 2)	19,31	11,92	224,41	38,63	7,47	49,16	129,13
(2 e 0)	8,11	17,92	141,63	16,23	6,78	45,00	73,61

Tabela 7.3: Experimentos 4A, 4B, 4C, 4D, 4E e 4F para o modelo ( $P_3^\omega$ ).

Os resultados obtidos para os problemas  $(P_2^\omega)$  e  $(P_3^\omega)$  são apresentados nas tabelas 7.2 e 7.3 acima. É possível notar que ambos reagem da mesma forma que  $(P_1^\omega)$  ao risco na alteração nos custos.

Assim como apresentado no capítulo 5 para os modelos determinísticos, a seguir serão exibidos os gráficos que mostram a quantidade máxima e mínima estocada ao final de cada período para os modelos que consideram incerteza nos custos de produção e de manutenção de estoque, através das Figuras 7.1, 7.2 e 7.3.

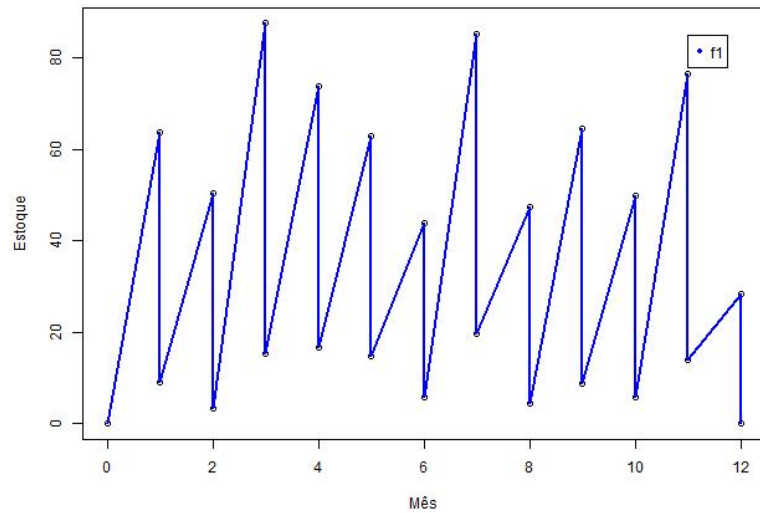


Figura 7.1: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo  $(P_1^\omega)$ .

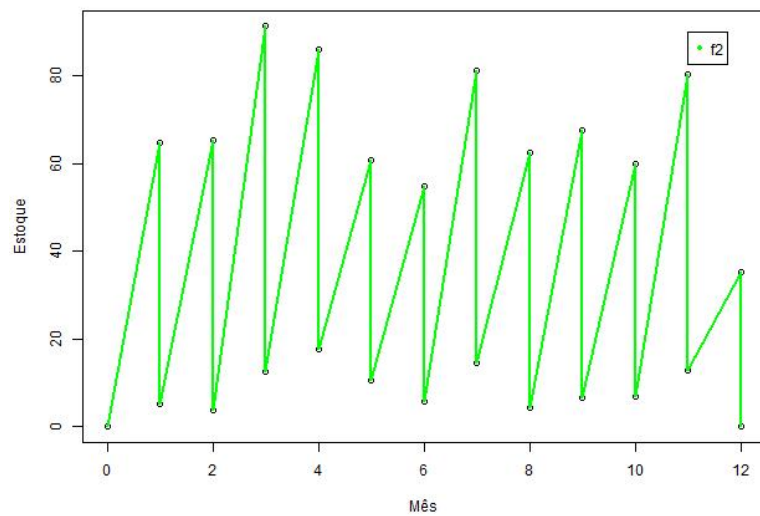


Figura 7.2: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo  $(P_2^\omega)$ .

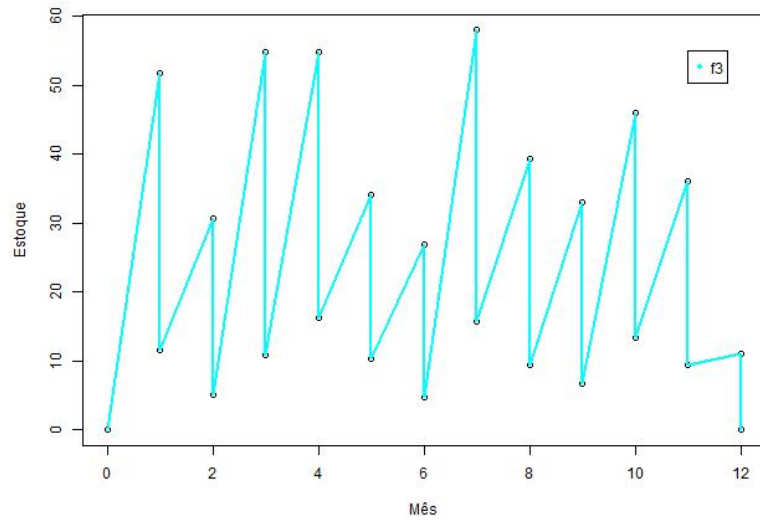


Figura 7.3: Evolução do nível de estoque em cada período para o modelo  $(P_3^\omega)$ .

Para finalizar esta seção, apresentamos a seguir os tempos computacionais médios para cada um dos três problemas estocásticos:

$P_j^\omega$	Tempo
$(P_1^\omega)$	0.1127s
$(P_2^\omega)$	274.3265s
$(P_3^\omega)$	1264.8911s

Tabela 7.4: Média aproximada do tempo computacional considerando os seis experimentos para cada problema  $P_j^\omega$ .

# Capítulo 8

## Considerações Finais

A evolução no desenvolvimento de algoritmos e solvers para otimização não-linear inteira mista convexa na última década viabilizou a construção de modelos matemáticos para problemas de otimização do planejamento da produção de maneira mais realista. Neste trabalho, exploramos essa possibilidade, considerando uma função hiperbólica e uma função exponencial para modelar a dependência das variáveis preço e demanda num problema de dimensionamento de lotes de produção. Discutimos como os parâmetros das funções podem ser usados para ajustar os correspondentes modelos às características da aplicação. Realizamos experimentos utilizando os solvers Gurobi [37] e Muriqui Optimizer [38], e a linguagem de modelagem algébrica AMPL [40]. A partir dos resultados obtidos, tratamos, analisamos e geramos gráficos comparativos através do R, que mostraram como as receitas, custos, preço de venda e demanda variam ao longo do horizonte de planejamento.

Ao todo, foram realizados nove experimentos para os três modelos estudados. O mesmo conjunto de dez instâncias aleatórias foi considerado para todos os experimentos. O que diferenciou um do outro foi somente o parâmetro  $\beta$  que variou entre 3, 5 e 8, e o parâmetro  $\epsilon$  que variou entre 0.25, 0.50 e 0.75. Foi a permutação dessas variações que permitiu a divisão em nove experimentos. Em se tratando dos resultados obtidos, foi possível analisá-los sobre dois pontos de vista: avaliação do impacto ao variar  $\beta$  e fixar  $\epsilon$ ; e avaliação do impacto ao variar  $\epsilon$  e fixar  $\beta$ . O primeiro viés foi subdividido na avaliação de três agrupamentos: "experimentos 1, 2 e 3", "experimentos 4, 5 e 6" e "experimentos 7, 8 e 9". Já o segundo viés foi subdividido nos seguintes agrupamentos: "experimentos 1, 4 e 7", "experimentos 2, 5 e 8" e "experimentos 3, 6 e 9". Após a análise dos agrupamentos, foi possível mostrar que, ao aumentarmos o valor de  $\beta$ , ocorre a queda dos valores médios de receita, lucro, custo de produção, custo de manutenção de estoque, custo de preparação, preço de venda e demanda. Já ao aumentarmos o valor de  $\epsilon$ , acontece uma queda gradativa nos valores médios de receita, lucro, custo de produção, custo de preparação e demanda para o modelo  $(P_2)$ . Tal que quando  $\epsilon = 0.25$ ,  $(P_2)$  obteve valores médios acima

de  $(P_1)$ ; quando  $\epsilon = 0.50$ ,  $(P_2)$  obteve valores muito próximos, para mais ou para menos, aos valores médios de  $(P_1)$ . Quando  $\epsilon = 0.75$ ,  $(P_2)$  obteve valores abaixo aos de  $(P_1)$ . Além disso, foi possível notar que a faixa de valores na qual os valores médios de preço de venda encontravam-se aumentou de maneira tênue a medida que  $\epsilon$  teve variação. De maneira particular, não foi possível detectar um comportamento padrão em relação aos valores médios de custos de manutenção de estoque. Porém, de maneira geral, observou-se que tal custo apresentou valores médios menores do que os valores médios referentes aos custos de produção e preparação para todos os modelos em todos os nove experimentos.

Além disso, uma variação dos modelos  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  e  $(P_3)$  foi analisada de modo a considerar incerteza nos custos de produção e de manutenção de estoque. Foram consideradas seis combinações de pesos  $\omega_c$  e  $\omega_h$  que medem a aversão ao risco em relação a variação nos custos nos modelos estudados. Por conta disso, foi possível dividir tal análise em seis experimentos. Para a análise não se tornar massiva, optou-se por introduzir os parâmetros que consideram a questão da incerteza somente no experimento 4, desse modo, tal experimento subdividiu-se nos experimentos "4A", "4B", "4C", "4D", "4E" e "4F". Assim como no Capítulo 5, os experimentos utilizaram os solvers Gurobi [37] e Muriqui Optimizer [38], o software AMPL [40] como linguagem de modelagem algébrica; e as análises de dados foram implementadas utilizando o software R. Ao final desse último experimento, foi possível concluir que, de modo geral, à medida que a aversão ao risco aumenta, o lucro obtido tende à queda para os três problemas  $(P_1^\omega)$ ,  $(P_2^\omega)$  e  $(P_3^\omega)$ .

Por fim, podemos destacar a importância do estudo dos modelos estudados para realizar planejamentos de produção de médio e de longo prazo, pois, uma vez sabendo da existência de parâmetros influentes antecipadamente, é possível incluí-los na modelagem do problema, realizar análises de sensibilidade para obter possíveis previsões e, por meio dessas, ter a possibilidade de tomar decisões mais acertadas no presente no que diz respeito ao planejamento e controle da produção para evitar prejuízos financeiros futuros. Pretende-se futuramente investigar novas funções e novas técnicas para modelar a dependência preço-demanda, tirando proveito do avanço no campo de ONLIM convexa, e assim auxiliar na tomada de decisões de sistemas de produção mais complexos.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYD, STEPHEN. E VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521833783. Disponível em: <[www.cambridge.org/9780521833783](http://www.cambridge.org/9780521833783)>.
- [2] SLACK, N., BRANDON JONES, A., JOHNSTON, R. *Administração da Produção*. 8 ed. New York, Gen / Atlas, 2020.
- [3] ULLAH, H., PARVEEN, S. “A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems.” *Global Journal of Researches in Engineering*, v. 10, pp. 21–36, 2010.
- [4] CLARK, A., ALMADA-LOBO, B., ALMEDER, C. “Lot sizing and Scheduling: Industrial Extensions and Research Opportunities”, *Internacional Journal of Production Research*, v. 49(9), pp. 2457–2461, 2011.
- [5] WAGNER, H. M., WHITIN, T. M. “Dynamic Version of the Economic Lot Size Model”, *Management Science*, v. 5, n. 1, pp. 89–96, 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mnsc.5.1.89>>.
- [6] KARIMI, B., FATEMI GHOMI, S., WILSON, J. “The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms”, *Omega*, v. 31, n. 5, pp. 365–378, 2003. ISSN: 0305-0483. doi: [https://doi.org/10.1016/S0305-0483\(03\)00059-8](https://doi.org/10.1016/S0305-0483(03)00059-8). Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048303000598>>.
- [7] BUSCHKÜHL, L., SAHLING, F., HELBER, S., et al. “Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches”, *OR Spectrum*, v. 32, n. 2, pp. 231–261, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00291-008-0150-7>>.
- [8] JANS, R., DEGRAEVE, Z. “Modeling industrial lot sizing problems: a review”, *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 6, pp. 1619–1643, 2008. doi: 10.1080/00207540600902262.

- [9] POCHET, Y., WOLSEY, L. A. *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York, NY, Springer-Verlag, 2006. ISBN: 978-0-387-33477-6. doi: 10.1007/0-387-33477-7.
- [10] BRAHIMI, N., DAUZERE-PERES, S., NAJID, M. N., et al. “Single Item Lot sizing Problems”, *European Journal of Operational Research*, v. 168, pp. 1–16, 2006.
- [11] HAUGEN, K., NYGREEN, B., OLISTAD, A. “Solving a Quadratic Program arising in Capacitated Lot Sizing”, *Nordic Operations Research Conference*, 1997. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/280878607\\_Solving\\_a\\_Quadratic\\_Program\\_arising\\_in\\_Capacitated\\_Lot\\_Sizing](https://www.researchgate.net/publication/280878607_Solving_a_Quadratic_Program_arising_in_Capacitated_Lot_Sizing)>. Acesso: 2020-05-17.
- [12] PANDO, V., SAN-JOSÉ, L. A., GARCÍA-LAGUNA, J., et al. “An economic lot-size model with non-linear holding cost hinging on time and quantity”, *International Journal of Production Economics*, v. 145, pp. 294–303, 2013.
- [13] ÖNAL, M., ALBEY, E. “Economic lot sizing problem with inventory dependent demand”, *Optimization Letters*, v. 14, pp. 2087–2116, 2020.
- [14] BURWELL, T. H., DAVE, D. S., FITZPATRICK, K. E., et al. “Economic lot size model for price-dependent demand under quantity and freight discounts”, *Int. Journal of Production Economics*, v. 48, pp. 141–155, 1997.
- [15] SADJADI, S. J., ARYANEZHAD, M.-B., JABBARZADEH, A. “An integrated pricing and lot sizing model with reliability consideration”. In: *2009 International Conference on Computers & Industrial Engineering, Troyes, France*, pp. 808–813, France, 2009. IEEE. doi: 10.1109/ICCIE.2009.5223880.
- [16] ZANONI, S., MAZZOLDI, L., ZAVANELLA, L. E., et al. “A joint economic lot size model with price and environmentally sensitive demand”, *Production & Manufacturing Research*, v. 2, n. 1, pp. 341–354, 2014.
- [17] YAO, L., CHEN, Y. F., YAN, H. “The newsvendor problem with pricing: Extensions”, *International Journal of Management Science and Engineering Management*, v. 1, n. 1, pp. 3–16, 2006. ISSN: 1 746-7233.
- [18] FREUND, R. J. “The introduction of risk into a programming model”, *Econometrica*, v. 24, n. 3.

- [19] COSTA, J., FAMPA, M., RAUPP, M. F. P., et al. “Modeling demand-price dependence in lot-sizing optimization”. In: *Proceedings of the Joint ALIO/EURO International Conference 2021-2022 on Applied Combinatorial Optimization*, pp. 60–64. OpenProceedings.org, 2022. ISBN: 978-3-89318-089-9. doi: <http://dx.doi.org/10.48786/alioeuro.2022.12>. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.48786/alioeuro.2022.12>.
- [20] COSTA, J., FAMPA, M., RAUPP, M. F. P., et al. “Otimização de dimensionamento de lotes com dependência entre as variáveis demanda e preço”. In: *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Juiz de Fora, MG, 2022.
- [21] HARRIS, F. W. “How Many Parts to Make at Once.” *Factory, The Magazine of Management*, v. 10(2), pp. 135–136, 152, 1913.
- [22] DOLGUI, A., PROTH, J.-M. *Supply Chain Engineering - Useful Methods and Techniques*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag, 2010. ISBN: 978-1-84996-016-8. doi: 10.1007/978-1-84996-017-5.
- [23] ARO-GORDON, S., GUPTE, J. “Overview of the Classic Economic Order Quantity Approach to Inventory Management”, *The Business Age*, 2016. ISSN: 2455-9423.
- [24] TINARELLI, G. U. “Inventory control: Models and problems”, *European Journal of Operational Research*, v. 14, pp. 1–12, 1983.
- [25] WILSON, R. “A Scientific Routine for Stock Control”, *Harvard Business Review*, v. 13(1), pp. 116–128, 1934.
- [26] CÁLIPO, L. G. *Análise do problema de Controle de Estoques Dinâmico para Demanda Não Estacionária e Lead-time Positivo*. Ms.D. dissertation, Universidade de São Paulo, 2014.
- [27] ERLINKOTTER, D. “Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model”, *Operations Research*, v. 38(6), pp. 937–946, 1990.
- [28] GLOCK, C. H., GROSSE, E. H., RIES, J. M. “The Lot Sizing Problem: A Tertiary Study”, *Int. J. Production Economics*, v. 155, pp. 39–51, 2014.
- [29] ERLINKOTTER, D. “Ford Whitman Harris’s economical lot size model”, *International Journal of Production Economics*, v. 155(C), 2014.

- [30] ANDRIOLO, A., BATTINI, D., GAMBERI, D., et al. “1913-2013: The EOQ theory and next steps towards sustainability”, *7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control International Federation of Automatic Control*, v. 5, pp. 89–96, 2013.
- [31] SOX, C. R. “Dynamic Lot Sizing with Random Demand and Non-stationary Costs”, *Operations Research Letters*, v. 20, pp. 155–164, 1997.
- [32] JANS, R., DEGREAVE, Z. “Meta-heuristics for Dynamic Lot sizing: A Review and Comparison of Solution Approaches”, *European Journal of Operational Research*, v. 177, pp. 1855–1875, 2007.
- [33] HEUVEL, W. V. D., WAGELMANS, A. P. M. “Four Equivalent Lot-sizing Models”, *Operations Research Letters*, v. 36, pp. 465–470, 2008.
- [34] BRAHIMI, N., ABSI, N., DAUZERE-PERES, S., et al. “Single-Item Dynamic Lot-sizing Problems: An Updated Survey”, *European Journal of Operational Research*, v. 263, pp. 838–863, 2017.
- [35] LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões - 5ª Edição*. Editora Gen|LTC, 2018.
- [36] MIKE MAY, S. J., BART, A. “Business Calculus with Excel”, Disponível em: <<https://mathstat.slu.edu/~may/ExcelCalculus/sec-2-3-NonlinearFunctions.html>>.
- [37] GUROBI OPTIMIZATION, LLC. “Gurobi Optimizer Reference Manual”. 2021. Disponível em: <<https://www.gurobi.com>>.
- [38] MELO, W., FAMPA, M., RAUPP, F. “An overview of MINLP algorithms and their implementation in Muriqui Optimizer”, *Annals of Operations Research*, v. 286, n. 1, pp. 217–241, May 2020. ISSN: 1572-9338. doi: 10.1007/s10479-018-2872-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10479-018-2872-5>>.
- [39] MELO, W., FAMPA, M., RAUPP, F. “Integrating nonlinear branch-and-bound and outer approximation for convex mixed integer nonlinear programming”, *Journal of Global Optimization*, v. 60, n. 2, pp. 373–389, 2014.
- [40] FOURER, R., GAY, D. M., KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. 2 ed. USA/Canada, Duxbury thomson, 2003.