Systems Engineering and Computer Science Graduate Program

Alberto Luiz Coimbra Institute for Graduate Studies and Research in Engineering

FEDERAL UNIVERSITY OF RIO DE JANEIRO

TECHNICAL REPORT

TR-PESC/Coppe/UFRJ- 796/2025

Um problema de otimização não-linear e não-convexo solucionado por geração de colunas

Nelson Maculan

COPPE-IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro

correspondente: maculan@cos.ufrj.br

Renan Vicente Pinto

IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Amanda Matos Ferreira

COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Juan Esteban Villarreal

IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Abstract.

A method for solving a non-convex continuous optimization problem using column generation techniques in non-linear optimization.

Keywords: continuous optimization, non-convexity, column generation.

Resumo.

Um método para a resolução de um problema de otimização contínua não convexo utilizando as técnicas de geração de colunas em otimização não linear.

Palavras-chaves: otimização contínua, não-convexidade, geração de colunas.

Publication Date: 13/02/2025

Um problema de otimização não-linear e não-convexo solucionado por geração de colunas

Nelson Maculan
COPPE-IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro
correspondente: maculan@cos.ufrj.br

Renan Vicente Pinto
IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Amanda Matos Ferreira
COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro

Juan Esteban Villarreal
IM-Universidade Federal do Rio de Janeiro

29 de janeiro de 2025

Abstract

Um método para a resolução de um problema de otimização contínua não convexo utilizando as técnicas de geração de colunas em otimização não linear.
Palavras-chaves: otimização contínua, não-convexidade, geração de colunas.

1 Introdução

Estudaremos a resolução de um problema especial de otimização não-linear e não-convexo, para o qual apresentaremos um algoritmo associado aos métodos de geração de colunas em otimização linear, diferente do apresentado em [1]. Conseguimos dessa maneira obter o ótimo global, algo muito diícil nos algoritmos de otimização não-linear utilizados. Uma revisão rápida sobre a geração de colunas em Otimização Linear pode ser feita em [3] e sobre a programação não-linear [2].

2 Definições

Considere o modelo clássico de programação linear (1)-(3) com n variáveis e m restrições:

$$
\begin{aligned}
(LP) \quad \min \quad & z \;=\; \sum_{j \in J} c_j \, x_j && && (1)\\
\text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \;=\; b_i \,, && i \in I && (2)\\
& x_j \;\geq\; 0 \,, && j \in J && (3)
\end{aligned}
$$

sendo $I = \{1, \ldots, m\}$ e $J = \{1, \ldots, n\}$. Os parâmetros a_{ij}, b_i e c_j são conhecidos, para todo $i \in I$ e para todo $j \in J$.

Se considerarmos que cada a_{ij} é variável com valores no intervalo $[\alpha_{ij}, \, \beta_{ij}\,]$, sendo α_{ij} e β_{ij} parâmetros conhecidos, o modelo se torna um problema de otimização não-linear e não-convexo, como em (4)-(7):

$$
\begin{aligned}
(QP) \quad \min \quad & z \;=\; \sum_{j \in J} c_j \, x_j && && (4)\\
\text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \;=\; b_i \,, && i \in I && (5)\\
& x_j \;\geq\; 0 \,, && j \in J && (6)\\
& \alpha_{ij} \;\leq\; a_{ij} \;\leq\; \beta_{ij} \,, && i \in I, \, j \in J && (7)
\end{aligned}
$$

3 Reformulação!

Poderíamos, para cada x_j, montar todas as colunas $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ possíveis. Será uma quantidade infinita e não-enumerável de colunas. Denotaremos cada uma das possibilidades por a_{jk}, sendo $k \in K$. Para cada uma delas, criaremos uma cópia da variável x_j. Assim, para uma determinada coluna a_{jk}, associaremos a variável x_{jk}, resultando em uma quantidade infinita e não-enumerável de variáveis. Porém, somente uma dessas variáveis poderá assumir valor não-nulo, indicando quais são os valores de a_{ij} na solução do problema original. Duas idéias para forçar que somente uma variável assuma valor não-nulo:

- O produto entre todos os pares de cópias deve ser 0:

  $$x_{jk_1} \cdot x_{jk_2} \;=\; 0 \,, \qquad k_1 \neq k_2, \; k_1, k_2 \in K$$

  Teremos um conjunto infinito e não-enumerável de restrições, além de tornar o modelo resultante não-linear.

- Usar variáveis binárias y_{jk} que assumem valor 1 se $x_{jk} > 0$ e valor 0 se $x_{jk} = 0$. Usamos as restrições

  $$x_{jk} \;\leq\; M \, y_{jk} \,, \qquad k \in K$$

$$\sum_{k \in K} y_{jk} \ \leq \ 1$$

$$y_{jk} \in \{0,1\}$$

Para o big-M, se $\alpha_{ij} \geq 0$, pode-se usar b_i/a_{ijk}. Teremos um conjunto infinito e não-enumerável de restrições, além do uso de variáveis inteiras.

Assim, poderíamos reformular (4)-(7) como um problema de programação linear inteira mista, como segue:

$$
\begin{aligned}
(ILP) \quad \min \quad & z \ = \ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_j \, x_{jk} && (8)\\
\text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{ijk} \, x_{jk} \ = \ b_i \,, \qquad i \in I && (9)\\
& x_{jk} \ \geq \ 0 \,, \qquad j \in J, \, k \in K && (10)\\
& x_{jk} \ \leq \ M \, y_{jk} \,, \qquad j \in J, \, k \in K && (11)\\
& \sum_{k \in K} y_{jk} \ \leq \ 1 && (12)\\
& y_{jk} \in \{0,1\} && (13)
\end{aligned}
$$

Conjectura: O valor ótimo da variável a_{ij}, em (5), será ou α_{ij} ou β_{ij}, para todo $i \in I$ e para todo $j \in J$.

Cada coluna $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ pertence a um paralelepípedo em $\mathbb{R}^m$, definido pelos limitantes dessas variáveis. Cada um desses paralelepípedos contém 2^m vértices. A partir da conjectura, podemos considerar, no modelo (8)-(13), apenas as colunas que correspondem a vértices desses paralelepípedos. O modelo terá, então, uma quantidade finita de restrições e de variáveis.

4 Exemplo que não usa o modelo de otimização acima

O método para a solução de (P) pode ser escrito baseando-se no exemplo a seguir.
Consideremos um problema (P) com os seguintes dados:

$m = 2,\ n = 6,\ b_1 = 240,\ b_2 = 500,\ c_1 = 2,\ c_2 = 3,\ c_3 = 4,\ c_4 = 4,$
$c_5 = 2,\ c_6 = 1.$

$4 \leq a_{11} \leq 10,\ 6 \leq a_{21} \leq 8;$

$3 \leq a_{12} \leq 5,\ 8 \leq a_{22} \leq 10;$

$2 \leq a_{13} \leq 8,\ 5 \leq a_{23} \leq 15;$

$7 \leq a_{14} \leq 12,\ 10 \leq a_{24} \leq 16;$

$5 \leq a_{15} \leq 7,\ 8 \leq a_{25} \leq 10;$

$15 \leq a_{16} \leq 22,\ 20 \leq a_{26} \leq 30.$

Tomaremos uma solução básica viável associada às colunas a_1 e a_2, por exemplo $a_1 = (4\ \ 6)^T$ e $a_2 = (3\ \ 8)^T$ e formaremos uma matriz $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Obteremos a inversa de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Sejam $x_{\mathcal{B}} = (x_1\ \ x_2)^T$ e $b = (b_1\ \ b_2)^T = (240\ \ 500)^T$.

Queremos calcular $x_{\mathcal{B}}$ tal que $\mathcal{B}x_{\mathcal{B}} = b$, isto é, $x_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}b = (30\ \ 40)^T$, fazendo com que $z = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 40 = 60 + 120 = 180$.

Obtivemos uma solução básica viável fonecendo um valor igual a 180 para a função objetivo. Verificaremos se é ótima.

Definiremos $c_{\mathcal{B}} = (c_1\ \ c_2) = (2\ \ 3)$, $a_j = (a_{1j}\ \ a_{2j})^T$, $z_j = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_j$

Será que existe uma coluna a_k, $1 \leq k \leq 6$, que possa entrar na nova base visando a diminuir o valor de z.

Podemos escrever:

$$z = 180 + (c_k - z_k)\, x_k, \quad x_{\mathcal{B}} = (30\ \ 40)^T - \mathcal{B}^{-1}a_k.$$

Verificaremos se exixte um k, tal que $(c_k - z_k) < 0$.

Como $c_6 = 1$ é o menor custo, minimizaremos $(c_6 - z_6)$, isto é,

$\min\ [1 - c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_6]$, que equivale a $\max\ [z_6 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_6]$.

$$\max z_6 = (2\ \ 3)\mathcal{B}^{-1}a_6.$$

Explicitando:

$$z_6 = \frac{1}{14}(-2\ \ 6)(a_{16}\ \ a_{26})^T = \frac{1}{14}(-2a_{16} + 6a_{26}).$$

Como $15 \leq a_{16} \leq 22,\ 20 \leq a_{26} \leq 30,$ facilemte verificamos que o máximo de z_6 será no ponto $a_{16} = 15$ e $a_{26} = 30$. Fornecendo o máximo de $z_6 = \frac{150}{14}$.

logo

$$\min(c_6 - z_6) = -\frac{136}{14} < 0.$$

Temos que $\mathcal{B}^{-1}a_6 = \frac{1}{14}(30 \ \ 30)^T$.

Poderemos escrever:

$$z = 180 - \frac{136}{14}x_6$$

$$x_1 = 30 - \frac{30}{14}x_6 \geq 0$$

$$x_2 = 40 - \frac{30}{14}x_6 \geq 0$$

Qual é o máximo valor que x_6 pode chegar mantendo $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$
É fácil verificar que o máximo de $x_6 = 14$, fazendo com que $x_1 = 0$ e $x_2 = 10$, fornecendo $z = 49$.

A nova base

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 30 & 8 \end{pmatrix}$$

Isto é $\mathcal{B} = (a_6 \ \ a_2)$. Esta solução é ótima?

Verificaremos.
Obteremos a inversa da nova $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -30 & 15 \end{pmatrix}$$

Teremos que minimizar os novos $c_j - z_j$, para $j = 1, 3, 4, 5$.

Definiremos o novo $c_{\mathcal{B}} = (c_6 \ \ c_2) = (1 \ \ 3),\ a_j = (a_{1j} \ \ a_{2j})^T,\ \ z_j = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_j$

Calculemos o mínimo de cada $c_j - z_j, j = 1, 3, 4, 5$. Começaremos por calcular

$$c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1} = (1 \ \ 3)\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{30}(-82 \ \ 42).$$

$z_1 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{30}(-82a_{11}+42a_{21})$, cujo máximo será para $a_{11} = 4$ e $a_{21} = 8$.

$\min(c_1 - z_1) = 2 - \frac{1}{30}(-82 * 4 \ + \ 42 * 8) = 2 - \frac{8}{30} > 0$.

$z_3 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_3 = \frac{1}{30}(-82a_{13}+42a_{23})$, cujo máximo será para $a_{13} = 4$ e $a_{23} = 8$.

$\min(c_3 - z_3) = 4 - \frac{1}{30}(-82 * 2 \ + \ 42 * 15) = 4 - \frac{104}{30} > 0$.

$z_4 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_4 = \frac{1}{30}(-82a_{14}+42a_{24})$, cujo máximo será para $a_{14} = 7$ e $a_{24} = 16$.

$\min(c_4 - z_4) = 4 - \frac{1}{30}(-82 * 7 \ + \ 42 * 16) = 4 - \frac{98}{30} > 0$.

$z_5 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{30}(-82a_{15}+42a_{25})$, cujo máximo será para $a_{15} = 5$ e $a_{25} = 10$.

$\min(c_5 - z_5) = 2 - \frac{1}{30}(-82 * 5 \ + \ 42 * 10) = 2 - \frac{10}{30} > 0$.

Como a coluna $a_2 = (3 \quad 8)^T$, escolhida inicialmete é um vértice do paralelepípedo $3 \leq a_{12} \leq 5, \ 8 \leq a_{22} \leq 10$, devemos verificar se há um outro vértice que nos dê um novo $c_2 - z_2 < 0$.

$\min(c_2 - z_2) = 3 - \frac{1}{30}(-82 * 3 \ + \ 42 * 10) = 3 - \frac{174}{30} = -\frac{84}{30} < 0$.

Logo a solução encontrada ainda não é ótima. Consideraremos agora $a_2 = (3 \ \ 10)^T$.

A nova base será:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$$

Isto é $\mathcal{B} = (a_6 \ \ a_2)$. Esta solução é ótima?

Verificaremos.
Obteremos a inversa da nova $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -30 & 15 \end{pmatrix}$$

Calcularemos x_6 e x_2 novamente: $(x_6 \ \ x_2)^T = \mathcal{B}^{-1}b = (15 \ \ 5)^T$,
cujo valor da funcão objetivo $z = 15x_6 + 5x_2 = 15 * 1 + 5 * 3 = 30$.

Podemos garantir que $x_6 = 15, \ x_2 = 5$ seja uma solução ótima para $z = 30$?

Verificaremos novamente:

Calculemos o mínimo de cada $c_j - z_j, j = 1,2,3,4,5,6.$ Começaremos por calcular

$$c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1} = (1 \;\; 3)\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{60}(-80 \;\; 42).$$

$z_1 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{60}(-82a_{11}+42a_{21})$, cujo máximo será para $a_{11} = 4$ e $a_{21} = 8$.

$\min(c_1 - z_1) = 2 - \frac{1}{60}(-80 * 4 \; + \; 42 * 8) = 2 - \frac{16}{60} > 0.$

$z_2 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_2 = \frac{1}{60}(-82a_{12}+42a_{22})$, cujo máximo será para $a_{12} = 3$ e $a_{22} = 10$.

$\min(c_2 - z_2) = 3 - \frac{1}{60}(-80 * 3 \; + \; 42 * 10) = 3 - \frac{180}{60} = 0$, está na base.

$z_3 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_3 = \frac{1}{60}(-80a_{13}+42a_{23})$, cujo máximo será para $a_{13} = 2$ e $a_{23} = 15$.

$\min(c_3 - z_3) = 4 - \frac{1}{60}(-80 * 2 \; + \; 42 * 15) = 4 - \frac{160}{60} = 4 - 6.15 < 0.$

$z_4 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_4 = \frac{1}{360}(-80a_{14} + 42a_{24})$, cujo máximo será para $a_{14} = 7$ e $a_{24} = 16$.

$\min(c_4 - z_4) = 4 - \frac{1}{60}(-80 * 7 \; + \; 42 * 16) = 4 - \frac{92}{60} > 0.$

$z_5 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{60}(-80a_{15} + 42a_{25})$, cujo máximo será para $a_{15} = 5$ e $a_{25} = 10$.

$\min(c_5 - z_5) = 2 - \frac{1}{60}(-80 * 5 \; + \; 42 * 10) = 2 - \frac{20}{60} > 0.$

$z_6 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{60}(-80a_{16} + 42a_{26})$, cujo máximo será para $a_{16} = 15$ e $a_{26} = 30$.

$\min(c_5 - z_5) = 1 - \frac{1}{60}(-80 * 15 \; + \; 42 * 30) = 1 - \frac{60}{60} = 1 - 1 = 0$, está na base.

Como $\min(c_3 - z_3) < 0$, o valor de z pode ainda diminuir.

Colocaremos $a_3 = (2 \;\; 15)^T$ no lugar de a_2 na nova matriz $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 30 & 15 \end{pmatrix}$$

Isto é $\mathcal{B} = (a_6 \;\; a_3)$.

Verificaremos.
Obteremos a inversa da nova $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{165}\begin{pmatrix} 15 & -2 \\ -30 & 15 \end{pmatrix}$$

Calcularemos x_6 e x_3, isto é,

$$(x_6 \quad x_3)^T = \mathcal{B}^{-1}b = (\frac{520}{33} \quad \frac{60}{33})^T, \; z = \frac{760}{33}$$

ou ainda:

$$x_6 = \frac{520}{33} = 15,7575..., \; x_3 = \frac{60}{33} = 1,8181..., \; z = \frac{760}{33} = 23,0303...$$

Calculemos o mínimo de cada $c_j - z_j, j = 1,2,3,4,5,6$. Começaremos por calcular

$$c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1} = (1 \quad 4)\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{165}(-105 \quad 58).$$

$z_1 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{165}(-105a_{11} + 58a_{21})$, cujo máximo será para $a_{11} = 4$ e $a_{21} = 8$.

$\min(c_1 - z_1) = 2 - \frac{1}{165}(-105 * 4 \; + \; 58 * 8) = 2 - \frac{44}{165} > 0.$

$z_2 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_2 = \frac{1}{165}(-105a_{12} + 58a_{22})$, cujo máximo será para $a_{12} = 3$ e $a_{22} = 10$.

$\min(c_2 - z_2) = 3 - \frac{1}{165}(-105 * 3 \; + \; 58 * 10) = 3 - \frac{265}{165} > 0.$

$z_3 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_3 = \frac{1}{165}(-105a_{13} + 58a_{23})$, cujo máximo será para $a_{13} = 2$ e $a_{23} = 15$.

$\min(c_3 - z_3) = 4 - \frac{1}{165}(-105 * 2 \; + \; 58 * 15) = 4 - \frac{660}{165} = 4 - 4 = 0$, está na base.

$z_4 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_4 = \frac{1}{165}(-105a_{14} + 58a_{24})$, cujo máximo será para $a_{14} = 7$ e $a_{24} = 16$.

$\min(c_4 - z_4) = 4 - \frac{1}{165}(-105 * 7 \; + \; 58 * 16) = 4 - \frac{193}{165} > 0.$

$z_5 = c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 = \frac{1}{165}(-105a_{15} + 58a_{25})$, cujo máximo será para $a_{15} = 5$ e $a_{25} = 10$.

$\min(c_5 - z_5) = 2 - \frac{1}{165}(-105 * 5 \ + \ 58 * 10) = 2 - \frac{55}{165} > 0.$

$z_6 \ = \ c_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}a_1 \ = \ \frac{1}{165}(-105a_{16} + 58a_{26})$, cujo máximo será para $a_{16} \ = \ 15$ e $a_{26} = 30$.

$\min(c_5 - z_5) = 1 - \frac{1}{165}(-105 * 15 \ + \ 58 * 30) = 1 - \frac{165}{165} = 1 - 1 = 0$, está na base.

Agora podemos dizer que a solução ótima do exemplo é

$x_6 = \frac{520}{33}, \ x_3 = \frac{60}{33}, \ \ x_j = 0, \ j = 1, 2, 4, 5,$ fornecendo $z = \frac{760}{33}$.

Observação: se $x_j = 0, \ a_{ij}$ poderá tomar qualquer valor entre α_{ij} e $\beta_{ij}, \ i = 1, 2$.

4.1 Considerando a_6, a_3 duas colunas no interior dos seus respectivos paralelepípedos

Cosideraremos $a_6 = (16 \ \ 22)^T$ e $a_3 = (3 \ \ 14)^T$.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

$(x_6 \ x_3)^T = B^{-1}(240 \ \ 500)^T$. Obteremos a inversa da nova $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{158}\begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -22 & 16 \end{pmatrix}$$

Logo $(x_6 \ \ x_3)^T = \mathcal{B}^{-1}(240 \ \ 500)^T$. Obteremos

$x_6 = \frac{930}{79}$ e $x_3 = \frac{1360}{79}$, implicando $z = \frac{6370}{79} = 80,632911...$

Uma solução muito pior comparada ao ótimo.

4.2 Usando o software ALGENCAN

O mesmo exemplo foi resolvido pelo ALGENCAN, sotware para prolemas de otimização não-linear, tendo sido encontrado um ótimo local:

$$x_2 = 5, \ x_6 = 15 \mapsto \ z = 30, \ a_{12} = 3, \ a_{22} = 10, \ a_{16} = 15, \ a_{26} = 30.$$

4.3 Resultado importante

Em cada escolha de troca de base enumeramos implicitamente todas as possibilidades do $c_j - z_j, \ j = 1, 2, ..., n$ visando à obtenção de

$$c_k - z_k = \min_{j=1,2,\ldots,n}(c_j - z_j).$$

O total de operações em cada troca é da ordem de $n(n-m)$, lembramos que o total de vértices é $n2^m$.

5 Algoritmo para solucionar (P)

O pequeno exemplo solucionando exatamente (P) gerando colunas será a base para descrevermos o nosso algoritmo.

6 Maneira clássica de resolver (QP), ver [1]

Consideremos novamente o problema (QP) com os dados do nosso exemplo. Como todos os paralelepípedos estão em R^2, só há duas restriçoes associadas aos $x_j,\ j = 1, 2, ..., 6$ havendo apenas 4 vértices em cada paralelepípedo.

Eis os dado:

$m = 2,\ n = 6,\ b_1 = 240,\ b_2 = 500,\ c_1 = 2,\ c_2 = 3,\ c_3 = 4,\ c_4 = 4,$
$c_5 = 2,\ c_6 = 1.$

Paralelepípedo associado à variável x_1 :

$4 \leq a_{11} \leq 10,\ 6 \leq a_{21} \leq 8$, possui os seguintes vértices: $(4\ \ 6)^T$, $(10\ \ 6)^T$, $(4\ \ 8)^T$, $(10\ \ 8)^T$.

Paralelepípedo associado à variável x_2 :

$3 \leq a_{12} \leq 5,\ 8 \leq a_{22} \leq 10$; possui os seguintes vértices: $(3\ \ 8)^T$, $(5\ \ 8)^T$, $(5\ \ 10)^T$, $(3\ \ 10)^T$.

Paralelepípedo associado à variável x_3 :

$2 \leq a_{13} \leq 8,\ 5 \leq a_{23} \leq 15$; possui os seguintes vértices: $(2\ \ 5)^T$, $(8\ \ 5)^T$, $(8\ \ 15)^T$, $(2\ \ 15)^T$.

Paralelepípedo associado à variável x_4 :

$7 \leq a_{14} \leq 12,\ 10 \leq a_{24} \leq 16$; possui os seguintes vértices: $(7\ \ 10)^T$, $(12\ \ 10)^T$, $(12\ \ 16)^T$, $(7\ \ 16)^T$.

Paralelepípedo associado à variável x_5 :

$5 \leq a_{15} \leq 7,\ 8 \leq a_{25} \leq 10$; possui os seguintes vértices: $(5\ \ 8)^T$, $(7\ \ 8)^T$, $(7\ \ 10)^T$, $(5\ \ 10)^T$.

Paralelepípedo associado à variável x_6 :

$15 \leq a_{16} \leq 22,\ 20 \leq a_{26} \leq 30$; possui os seguintes vértices: $(15\ \ 20)^T$, $(22\ \ 20)^T$, $(22\ \ 30)^T$, $(15\ \ 30)^T$.

Consideremos as variáveis $\lambda_{jk}, k = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$ tais que

$\sum_{k=1}^{4} \lambda_{jk} = 1,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

$\lambda_{jk} \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\quad k = 1, 2, 3, 4.$

Denominaremos v_{jk} um vértice do paralelepípedo asociado à variável x_j, onde $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $k = 1, 2, 3, 4.$

Consideremos $a_j = (a_{1j}\ a_{2j})^T,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$
Poderemos escrever que:

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{6} (\sum_{k=1}^{4} \lambda_{jk} c_j) x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{6} (\sum_{k=1}^{4} \lambda_{jk} v_{jk}) x_j = (240\ 500)^T, \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

A função objetivo z será escrita da seguinte forma:

$$z = z_1 + z_2,$$

onde

$z_1 = (2\lambda_{11}+2\lambda_{12}+2\lambda_{13}+2\lambda_{14})x_1+(3\lambda_{21}+3\lambda_{22}+3\lambda_{23}+3\lambda_{24})x_2+(4\lambda_{31}+4\lambda_{32}+4\lambda_{33}+4\lambda_{34})x_3$

$z_2 = (4\lambda_{41}+4\lambda_{42}+4\lambda_{43}+4\lambda_{44})x_4+(2\lambda_{51}+2\lambda_{52}+2\lambda_{53}+2\lambda_{54})x_5+(\lambda_{61}+\lambda_{62}+\lambda_{63}+\lambda_{64})x_6$

Restrições $g = 240$ e $h = 500$:

$g_1 = (4\lambda_{11}+10\lambda_{12}+4\lambda_{13}+10\lambda_{14})x_1+(3\lambda_{21}+5\lambda_{22}+5\lambda_{23}+3\lambda_{24})x_2+(2\lambda_{31}+8\lambda_{32}+8\lambda_{33}+2\lambda_{34})x_3$

$g_2 = (7\lambda_{41}+12\lambda_{42}+12\lambda_{43}+7\lambda_{44})x_4+(5\lambda_{51}+7\lambda_{52}+7\lambda_{53}+5\lambda_{54})x_5+(15\lambda_{61}+22\lambda_{62}+22\lambda_{63}+15\lambda_{64})x_6$

$$g = g_1 + g_2 = 240$$

$h_1 = (6\lambda_{11}+6\lambda_{12}+15\lambda_{13}+15\lambda_{14})x_1+(8\lambda_{21}+8\lambda_{22}+10\lambda_{23}+10\lambda_{24})x_2+(5\lambda_{31}+5\lambda_{32}+15\lambda_{33}+15\lambda_{34})x_3$

$h_2 = (10\lambda_{41}+10\lambda_{42}+16\lambda_{43}+16\lambda_{44})x_4+(8\lambda_{51}+8\lambda_{52}+10\lambda_{53}+10\lambda_{54})x_5+(20\lambda_{61}+20\lambda_{62}+30\lambda_{63}+30\lambda_{64})x_6$

$$h = h_1 + h_2 = 500$$

Para resolver o problema $\min z$, sujeito a: $g = 240,\ h = 500$ faremos o seguinte:

Mudança de variável: $\lambda_{jk}x_j = u_{jk} \geq 0$. Consideramos, implicitamente, que

$\lambda_{jk} \geq 0,\ k = 1,2,3,4\ \ j = 1,2,3,4,5,6.$ tais que

$\sum_{k=1}^{4} \lambda_{jk} = 1,\ j = 1,2,3,4,5,6,$

O novo problema de otimização será:

$$(\bar{P}):\ \min\ \bar{z} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$$

$\bar{z_1} = 2u_{11}+2u_{12}+2u_{13}+2u_{14}+3u_{21}+3u_{22}+3u_{23}+3u_{24}+4u_{31}+4u_{32}+4u_{33}+4u_{34}$

$\bar{z_2} = 4u_{41}+4u_{42}+4u_{43}+4u_{44}+2u_{51}+2u_{52}+2u_{53}+2u_{54}+u_{61}+u_{62}+u_{63}+u_{64}$

Sujeito a:

$$\bar{g} = 240,\ e\ \bar{h} = 500\ e\ u_{jk} \geq 0, j = 1,2,3,4,5,6\ e\ k = 1,2,3,4.$$

Onde $\bar{g} = \bar{g_1} + \bar{g_2}$ e $\bar{h} = \bar{h_1} + \bar{h_2}$

$\bar{g_1} = 4u_{11}+10u_{12}+4u_{13}+10u_{14}+3u_{21}+5u_{22}+5u_{23}+3u_{24}+2u_{31}+8u_{32}+8u_{33}+2u_{34}$

$\bar{g_2} = 7u41+12u_{42}+12u_{43}+7u_{44}+5u_{51}+7u_{52}+7u_{53}+5u_{54}+15u_{61}+22u_{62}+22u_{63}+15u_{64}$

$\bar{h_1} = 6u_{11}+6u_{12}+8u_{13}+8u_{14}+8u_{21}+8u_{22}+10u_{23}+10u_{24}+5u_{31}+5u_{32}+15u_{33}+15u_{34}$

$\bar{h_2} = 10u_{41}+10u_{42}+16u_{43}+16u_{44}+8u_{51}+8u_{52}+10u_{53}+10u_{54}+20u_{61}+20u_{62}+30u_{63}+30u_{64}$

O problema $(\bar{P})$ é de otimização linear com duas restrições e 24 variáveis.

Seja $\bar{u}_{jk},\ j = 1,2,3,4,5,6;\ k = 1,2,3,4$ uma solução ótima de $(\bar{P})$, sabemos que se $\bar{u}_{jk} = 0$, para todo k, então $\bar{x}_j = 0$. Por outro lado, caso $\bar{u}_{jk} > 0$, para algum k, poderemos escrever
$\bar{\lambda}_{jk} = \frac{\bar{u}_{jk}}{\bar{x}_j}$. Ou ainda que

$$\sum_{k=1}^{4} \bar{\lambda}_{jk} = \frac{\sum_{k=1}^{4} \bar{u}_{jk}}{\bar{x}_j} = 1.$$

Obteremos $\bar{x}_j = \sum_{k=1}^{4} \bar{u}_{jk},\ j = 1,2,3,,4,5,6,$ uma solução ótima de (QP)

Solução encontrada:
$u34 = 1.8182 = x3$, $u64 = 15.7576 = x6$ e $z = 23.0303$.

References

[1] L.S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Dover books on Mathematics. Dover Publications, 1970.

[2] D. G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Non Linear Programming*. Springer, Stanford, USA, 2008.

[3] N. Maculan and M. H. C. Fampa. *Otimização Linear*. EdUnB, Brasília, 2006.