COPPE UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

GRAFOS TIMBRAIS: PROPRIEDADES ESTRUTURAIS E APLICAÇÃO MUSICAL

Luan Simões Cardoso

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Março de 2025

GRAFOS TIMBRAIS: PROPRIEDADES ESTRUTURAIS E APLICAÇÃO MUSICAL

Luan Simões Cardoso

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Aprovada por: Prof. Márcia Rosana Cerioli
Prof. Pauxy Gentil-Nunes Filho
Prof. Antonio Nigro
Prof. Jorge Petrucio Viana

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2025

Cardoso, Luan Simões

Grafos Timbrais: propriedades estruturais e aplicação musical/Luan Simões Cardoso. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2025.

IX, 85 p.: il.; $29,7$cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 82 – 85.

1. grafos timbrais. 2. número-clique. 3. ciclos hamiltonianos. 4. grupos de automorfismos de grafos. 5. grafos e música. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Agradecimentos

Quero expressar meu carinho e sincera gratidão a todas as pessoas que estiveram ao meu lado nestes últimos três anos. Cada uma delas contribuiu imensamente para o desenvolvimento desta dissertação, assim como para o meu amadurecimento como pesquisador e, principalmente, como pessoa. Aqui vão alguns agradecimentos especiais.

Primeiro, como não poderia ser diferente, para minha mãe e para Mar, pelo tanto de apoio que me deram em todos os momentos, pela escuta atenciosa e pelo acolhimento. O amor que recebi foi meu maior motor para seguir em frente em meio às dificuldades.

Segundo, para meu amigo Bruba que, além de ter dado contribuições fundamentais para esta pesquisa, tornou os dias de trabalho muito mais leves — infinitamente, eu diria — com sua ótima companhia.

Terceiro, para meus amigos Marotti, Psy e Carlin, por escutarem meus desabafos e devolverem os seus. Pelo crescimento que vivenciamos em conjunto nos últimos anos.

Gostaria, também, de agradecer à professora Márcia e aos professores Petrucio, Pauxy e Antonio, pelas orientações, sugestões e críticas sempre pertinentes. Pela enorme contribuição para este trabalho.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa que me foi concedida, e que possibilitou que eu me dedicasse integralmente ao mestrado. Por investir no meu trabalho e na minha formação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

GRAFOS TIMBRAIS: PROPRIEDADES ESTRUTURAIS E APLICAÇÃO MUSICAL

Luan Simões Cardoso

Março/2025

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Grafos relacionados com a teoria de códigos são amplamente estudados com foco em suas propriedades algébricas, na existência de ciclos hamiltonianos e na determinação do tamanho de suas cliques máximas. Nesta dissertação, investigamos os grafos timbrais $T_{n,k,\ell}$, cujos vértices são as palavras de comprimento k construídas sobre um alfabeto de n símbolos, de modo que duas palavras são adjacentes se, e somente se, concordam em exatamente ℓ posições. Esses grafos foram introduzidos por A. Akhmedov e M. Winter em 2014 sob a perspectiva de modelar formas específicas de se compor música. Contudo, sua estreita relação com grafos advindos da teoria de códigos motiva investigações sobre outros aspectos dessa classe de grafos. Em particular, empreendemos estudos sobre os grupos de automorfismos dos grafos timbrais, examinando suas ações sobre os conjuntos dos vértices, arestas, arcos e pares de vértices equidistantes; sobre a existência de ciclos hamiltonianos, caracterizando os grafos timbrais que possuem essa propriedade; e sobre o tamanho de uma clique máxima, determinando limitantes superiores e inferiores para esse parâmetro e demonstrando a correspondência entre uma clique de tamanho n^2 em $T_{n,n+1,1}$ e um plano afim de ordem n. Além disso, exploramos uma aplicação desses grafos na modelagem de composições musicais, desenvolvendo e avaliando métodos para a geração de fragmentos musicais.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TIMBRAL GRAPHS: STRUCTURAL PROPERTIES AND MUSICAL APPLICATION

Luan Simões Cardoso

March/2025

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

Graphs related to coding theory are widely studied, with a focus on their algebraic properties, the existence of Hamiltonian cycles, and the size of their maximum cliques. In this dissertation, we investigate timbral graphs $T_{n,k,\ell}$, whose vertices represent fixed-length words of size k built on an alphabet of n symbols, where two words are adjacent if and only if they agree in exactly ℓ positions. These graphs were introduced by A. Akhmedov and M. Winter in 2014 as a model for specific approaches to musical composition. However, their strong connection to graphs arising from coding theory motivates further exploration of other aspects of this class. In particular, we study the automorphism group of timbral graphs, examining its action on sets of vertices, edges, arcs, and pairs of equidistant vertices; the existence of Hamiltonian cycles, characterizing the timbral graphs that have this property; the size of a maximum clique, determining bounds for this parameter and establishing a correspondence between a clique of size n^2 in $T_{n,n+1,1}$ and an affine plane of order n. Finally, we present an application of these graphs to the modeling of musical compositions, developing and evaluating methods for generating musical fragments.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

1 Introdução **1**
1.1 Grafos timbrais 3

2 Automorfismos de grafos timbrais **9**
2.1 Teoria algébrica de grafos 10
2.1.1 Grupo de automorfismos 10
2.1.2 Produtos de grupos 12
2.2 Grupo de automorfismos dos grafos timbrais 14
2.3 Arco-transitividade dos grafos timbrais 16

3 Distância-transitividade nos grafos timbrais **20**
3.1 Grafos timbrais distância-transitivos 20
3.2 Grafos timbrais não distância-transitivos 27

4 Hamiltonicidade de grafos timbrais **37**
4.1 Morfologias timbrais e ciclos hamiltonianos 37
4.2 Hamiltonicidade de grafos timbrais 39

5 Número clique de grafos timbrais **46**
5.1 Número clique: exemplos e limites triviais 47
5.2 Códigos corretores de erro 50
5.3 Novos limites superiores para o número clique 53
5.4 Número clique de $T_{n,k,1}$ 57

6 Aplicação musical **65**
6.1 Grafos e música 66
6.2 Interpretações musicais para grafos timbrais 68
6.2.1 Interpretação harmônico-timbral 69
6.2.2 Interpretação melódica 70
6.2.3 Interpretação rítmica 71

6.2.4 Interpretação harmônico-rítmica 72
6.3 Processo composicional de *Amálgama* 72
6.3.1 Estrutura geral 73
6.3.2 Interpretações utilizadas 73
6.3.3 Geração dos módulos 74
6.3.4 Análise de alguns fragmentos 75

7 Perspectivas **80**

Referências Bibliográficas **82**

Lista de Figuras

1.1 Partitura contendo uma sequência de orquestrações. 4
1.2 Grafos timbrais com grau no máximo 3. 6
1.3 Grafo $T_{2,4,3}$, ou seja, o hipercubo Q_4. 7
1.4 Grafo $T_{3,2,0}$. 8

2.1 Rotação seguida de reflexão em um C_6. 13
2.2 Diferença entre dois automorfismos de C_6. 13
2.3 Grafo $K_{m,n}$, com $m \neq n$. 17

4.1 Ciclo hamiltoniano em $T_{2,4,3}$ referente à Figura 1.1. 38

5.1 Grafo $T_{3,2,0}$, com uma clique máxima em destaque. 47
5.2 Subgrafo de $T_{3,4,2}$ isomorfo a $T_{3,2,0}$. 48
5.3 Componente conexo de $T_{2,4,2}$. 50
5.4 Plano afim de ordem 3. 58
5.5 Classes de linhas paralelas do plano afim de ordem 3. 58
5.6 Clique K de $T_{3,4,1}$, exibida no Exemplo 60. 59

6.1 Ciclo de quintas 66
6.2 Tonnetz Neo-Riemanniana, com a tríade GBD em destaque. 67
6.3 Partitura alternativa para o trecho inicial exibido na Figura 1.1. . . . 68
6.4 Sequência de acordes orquestrados para dois instrumentos. 70
6.5 Melodia gerada por um C_4 induzido em $T_{7,6,3}$. 71
6.6 Fragmento rítmico gerado por um C_4 induzido em $T_{2,6,3}$. 71
6.7 Fragmento gerado a partir de $T_{6,6,4}$. 72
6.8 Primeiros compassos das madeiras em *Amálgama*. 76
6.9 Primeiros compassos das cordas dedilhadas em *Amálgama*. 77
6.10 Trecho entre os compassos 117 e 120 de *Amálgama*. 78

Capítulo 1

Introdução

Desde as suas raízes, a teoria dos grafos possui ligações com inúmeros campos do conhecimento, tanto formais, como a topologia e a química teórica, quanto lúdicos, como os jogos de tabuleiro e os enigmas [8]. Além dessas aplicações clássicas, podemos encontrar algoritmos e técnicas baseadas em grafos na biologia [29], nas ciências sociais [23] e nas artes, particularmente na música [2, 31]. Esta última é de onde extraímos a classe de grafos abordada nesta dissertação.

Estudamos os *grafos timbrais* — introduzidos por Azer Akhmedov e Michael Winter [2], em 2014 —, como ferramentas para a modelagem de composições musicais que exploram orquestrações de um acorde em um conjunto de instrumentos, respeitando um grau de parcimônia pré-estabelecido. Fixados três números naturais n, k e ℓ, o grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ é o grafo cujos vértices são as sequências de comprimento k, com termos pertencentes ao conjunto $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, e tal que dois vértices estão conectados por uma aresta se, e somente se, existem exatamente ℓ coordenadas nas quais eles coincidem.[1]

Akhmedov e Winter investigaram os $T_{n,k,\ell}$ com o objetivo de obter *morfologias timbrais* por meio de ciclos hamiltonianos, o que levou à designação desses grafos como "grafos timbrais". A respeito da existência de um ciclo hamiltoniano, os autores demonstraram que $T_{n,k,\ell}$ é hamiltoniano para todo $n \geq 3$, deixando o caso $n = 2$ em aberto. Além dos grafos timbrais, eles também estudaram a hamiltonicidade de outras três classes de grafos, cujos vértices representam acordes, ao invés de orquestrações. Os estudos de hamiltonicidade empreendidos por Akhmedov e Winter, além de revelarem propriedades dos grafos timbrais que são úteis ao processo composicional, também possuem conexões com os *códigos de Gray* [33].

De maneira similar, conexões entre a classe dos grafos timbrais e outras duas classes de grafos advindas da *teoria de códigos* [37, 39] nos sugeriram pontos de partida para os nossos próprios estudos.

[1] Adotamos os conceitos, nomenclaturas e notações usuais da teoria dos grafos, conforme apresentado no livro-texto [9].

Em primeiro lugar, os grafos timbrais generalizam os *grafos de Hamming*. Estes são definidos no mesmo conjunto de vértices dos grafos timbrais, sendo que há uma aresta entre dois vértices se, e somente se, existe uma única coordenada na qual eles diferem ou, equivalentemente, existem exatamente $k-1$ coordenadas nas quais eles coincidem. Dessa forma, os grafos de Hamming são, precisamente, os grafos timbrais $T_{n,k,k-1}$.

Há, também, uma estreita relação entre os grafos timbrais e os *grafos de Hamming-distância* [24, 32, 37]. Estes também possuem o mesmo conjunto de vértices dos grafos timbrais, sendo que dois vértices são adjacentes se, e somente se, existem ao menos d coordenadas em que eles coincidem. Dessa forma, os grafos de Hamming-distância são a união dos grafos timbrais $T_{n,k,\ell}$, com ℓ variando de 0 a $k-d$.

A partir dessas relações, descrevemos dois dos aspectos que foram investigados no presente trabalho.

Um de nossos interesses foi o de estudar propriedades conhecidas dos grafos de Hamming, na tentativa de determinar quais delas podem ser generalizadas para os grafos timbrais. Em especial, os grafos de Hamming são um exemplo característico de grafos distância-transitivos [10], propriedade que examinamos nos grafos timbrais.

De maneira análoga, a conexão entre os grafos timbrais e os grafos de Hamming-distância nos levou à análise do tamanho das cliques máximas em grafos timbrais, representado pelo *número clique* $\omega(T_{n,k,l})$. O estudo desse parâmetro nos grafos timbrais abre um caminho em potencial para a obtenção de novos resultados relacionados ao tamanho máximo de um código corretor de erros com distância mínima d, um problema amplamente tratado na teoria de códigos [37, 39].

Neste trabalho, apresentamos um estudo dos grafos timbrais $T_{n,k,\ell}$, contendo como contribuições:

1. Provas de algumas propriedades de transitividade do grupo de automorfismos dos grafos timbrais, mostrando que $T_{n,k,\ell}$ é uma família de grafos *arco-transitivos*.

2. Caracterização dos grafos timbrais que são distância-transitivos.

3. Demonstração alternativa à apresentada por Akhmedov e Winter [2], baseada em propriedades algébricas e conexidade, de que $T_{n,k,\ell}$ é hamiltoniano, para todo $n \geq 3$.

4. Caracterização dos grafos timbrais que são hamiltonianos, para $n = 2$, problema deixado em aberto por Akhmedov e Winter [2].

5. Estabelecimento de limites superiores e inferiores para o número clique de $T_{n,k,\ell}$, a partir das relações existentes entre vértices de uma mesma clique.

6. Prova de que $\omega(T_{n,n+1,1}) \geq n^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem n.

7. Aplicação dos grafos timbrais em composição musical, através de um método composicional que explora o nível de parcimônia entre sequências de orquestrações.

Este texto está organizado da maneira a seguir.

Na Seção 1.1, apresentamos os grafos timbrais, exibindo definições, exemplos, motivação e propriedades básicas.

No Capítulo 2, fazemos uma revisão de conceitos e resultados da *teoria algébrica de grafos* e os aplicamos no estudo dos grafos timbrais. Descrevemos alguns automorfismos de grafos timbrais, bem como a forma como eles atuam sobre os vértices, arestas e pares de vértices adjacentes do grafo. Encerramos o capítulo demonstrando que os grafos timbrais são *arco-transitivos*.

No Capítulo 3, tratamos da propriedade de *distância-transitividade* nos grafos timbrais. Caracterizamos os grafos timbrais que são distância-transitivos, mostrando que esta não é uma propriedade compartilhada por todos os grafos na classe.

No Capítulo 4, complementamos o estudo de hamiltonicidade realizado por Akhmedov e Winter [2]. Apresentamos uma demonstração alternativa à apresentada por estes autores e determinamos os critérios para a existência de um ciclo hamiltoniano em $T_{2,k,\ell}$.

No Capítulo 5, apresentamos resultados sobre o número clique de grafos timbrais. Fornecemos limites superiores e inferiores para o caso geral e avaliamos mais minuciosamente $\omega(T_{n,k,1})$.

No Capítulo 6, apresentamos uma aplicação dos grafos timbrais na música, que culminou na elaboração de um método composicional assistido por computadores, que foi utilizado na peça *Amálgama*, uma parceria do presente autor com Pauxy Gentil-Nunes (EM-UFRJ) e Petrucio Viana (IME-UFF).

Por fim, no Capítulo 7, apresentamos um resumo do trabalho, seguido de uma lista de temas para trabalhos futuros.

1.1 Grafos timbrais

Para compreendermos a interpretação musical associada aos grafos timbrais, consideremos um *acorde* fixo com k *alturas* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Neste contexto, uma *orquestração* desse acorde é uma distribuição das k alturas a n instrumentos $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, de maneira que cada altura esteja associada a um único instrumento. Nosso objetivo é tocar orquestrações do acorde em sequência, de modo que orquestrações tocadas

consecutivamente possuam exatamente ℓ alturas inalteradas, isto é, ℓ alturas que permanecem nos mesmos instrumentos em ambas as orquestrações.

Exemplo 1. *Queremos compor um trecho de música em que um acorde de C7M, formado pelas alturas a_0 = dó, a_1 = mi, a_2 = sol e a_3 = si, deve ser orquestrado para dois instrumentos b_0 e b_1. Pretendemos variar as orquestrações desse acorde e tocá-las sequencialmente, com a restrição de que orquestrações consecutivas devem coincidir em exatamente* 3 *alturas.*

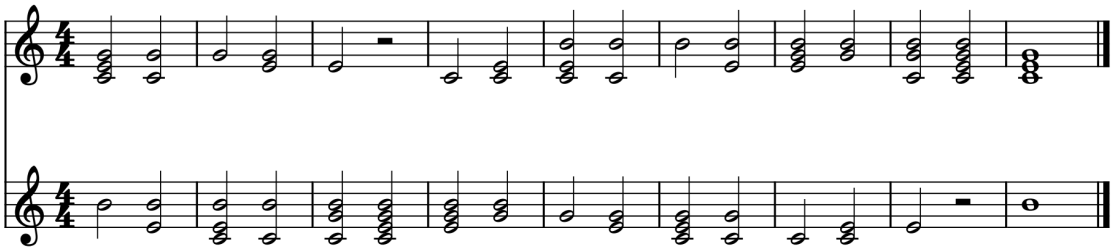

Figura 1.1: Partitura contendo uma sequência de orquestrações.

O fragmento exibido na Figura 1.1 apresenta uma sequência de orquestrações que respeita o critério que definimos.

Formalmente, cada altura pode ser representada por um elemento do conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Assim, cada orquestração pode ser representada por uma k-upla $v = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$, onde $x_i \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq i < k$. Essa representação indica que, na orquestração v, para cada $i \in \mathbb{Z}_k$, a altura a_i é executada pelo instrumento b_{x_i}. Como usual, $\mathbb{Z}_n^k$ é o conjunto das k-uplas cujos termos são elementos de $\mathbb{Z}_n$. Assim, $\mathbb{Z}_n^k$ é o conjunto de todas as orquestrações de k alturas em n instrumentos.

Exemplo 2. *Representando as alturas a_0, a_1, a_2, a_3 por* $0, 1, 2, 3$*, respectivamente, na partitura do Exemplo 1, começamos com a orquestração* $(0, 0, 0, 1)$*, em que apenas o si é tocado pelo instrumento b_1. Na sequência, escolhemos a orquestração* $(0, 1, 0, 1)$ *dentre as quatro orquestrações possíveis,* $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$ *e* $(0, 0, 0, 0)$*, que diferem de* $(0, 0, 0, 1)$ *em exatamente uma coordenada. As orquestrações subsequentes foram obtidas de modo similar, escolhendo-se exatamente uma altura para trocar de instrumento com relação à orquestração anterior.*

Notemos que a formalização proposta assegura que cada altura seja tocada por um único instrumento, mas permite que instrumentos toquem mais de uma altura — o que, de fato, condiz com o que queremos. Assim, de forma equivalente, poderíamos representar cada orquestração como uma função $f : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_n$, em que $f(i)$ indica o instrumento que tocará a altura a_i em f. Neste trabalho, damos preferência à representação por k-uplas, alinhando-nos à formalização de Akhmedov e Winter [2].

Vamos introduzir duas convenções para simplificar a forma como as orquestrações serão representadas no decorrer do texto. A primeira delas é que optamos por omitir os parênteses e vírgulas na representação das k-uplas, o que proporciona um ganho na legibilidade das demonstrações e no entendimento das figuras. A orquestração $(0, 1, 0, 1)$, por exemplo, passará a ser escrita como 0101, simplesmente. Em alguns momentos, também iremos abreviar orquestrações que repetem um mesmo elemento consecutivamente. Por exemplo, a orquestração em que todos os k termos possuem o valor 0 será representada por 0^k.

Antes de apresentarmos a definição formal de $T_{n,k,\ell}$, introduzimos um conceito auxiliar que nos permite formalizar o critério de encadeamento entre as orquestrações, o que equivale a um critério para a existência de arestas no grafo.

Definição 3. Sejam n e k números naturais e $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$. O **conjunto de coincidências** entre u e v é definido por

$$I_c(u, v) = \{i \in \mathbb{Z}_k : u_i = v_i\}.$$

O **índice de coincidência** entre u e v, denotado por $i_c(u, v)$, é a cardinalidade de $I_c(u, v)$, ou seja, $i_c(u, v) = |I_c(u, v)|$.

Assim, o grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ é definido como se segue.

Definição 4. Sejam n, k e ℓ números naturais tais que $n > 1$ e $k > \ell$. O **grafo timbral** $T_{n,k,\ell}$ é o grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \mathbb{Z}_n^k$ e $E = \{uv \in \binom{V}{2} : i_c(u, v) = \ell\}$.

Decorre da definição que todo grafo timbral possui n^k vértices. Além disso, os grafos timbrais são grafos regulares, isto é, todo vértice possui o mesmo número de vizinhos. Para observar esse fato, considere o conjunto S dos vértices que possuem exatamente $k-\ell$ termos diferentes de 0. O conjunto de vizinhos de um vértice v pode ser descrito por $N(v) = \{v + w : w \in S\}$, em que o símbolo de adição representa a operação de adição módulo n em $\mathbb{Z}_n$, realizada coordenada a coordenada nos vértices. O conjunto S possui $\binom{k}{\ell}(n-1)^{k-\ell}$ elementos, número que corresponde ao grau de cada vértice em um grafo timbral.

Vejamos alguns exemplos de grafos timbrais de grau pequeno, ilustrados na Figura 1.2.

- Os únicos grafos timbrais de grau 1 são os $T_{2,k,0}$, que correspondem aos grafos com 2^k vértices cujo conjunto de arestas é um emparelhamento perfeito. O grafo P_2, por exemplo, é o $T_{2,1,0}$.

- Os únicos grafos timbrais de grau 2 são o $T_{3,1,0}$ e o $T_{2,2,1}$, que correspondem ao C_3 e ao C_4, respectivamente.

- Os únicos grafos timbrais cúbicos são o $T_{4,1,0}$, o $T_{2,3,1}$ e o $T_{2,3,2}$. Esses grafos correspondem ao K_4, ao $2K_4$ e ao grafo cubo Q_3.

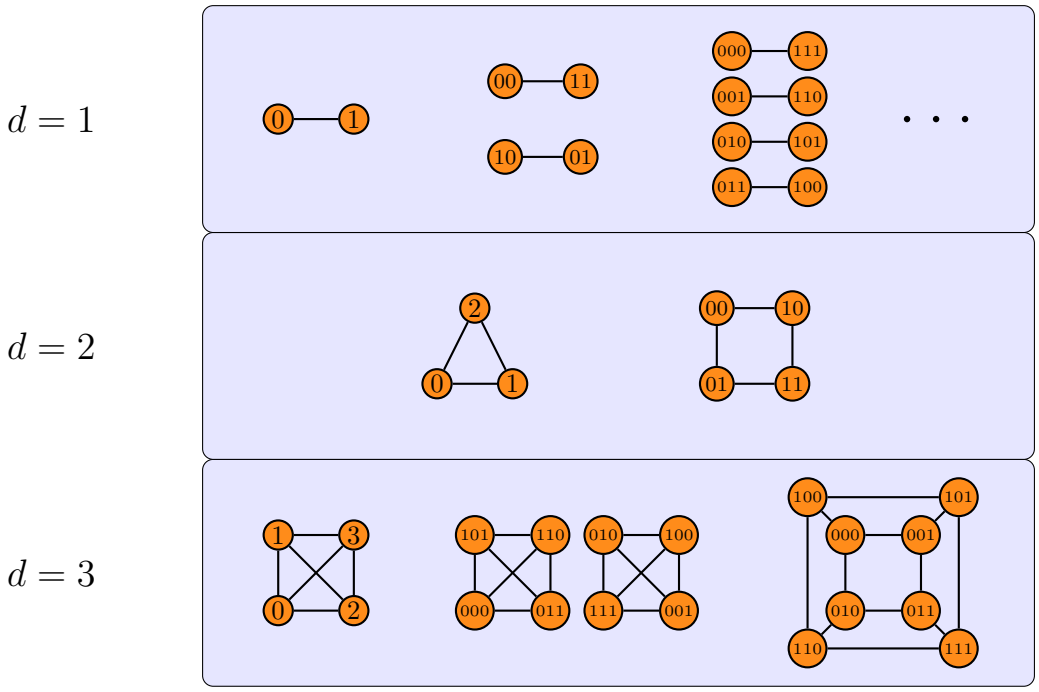

Figura 1.2: Grafos timbrais com grau no máximo 3.

Na Figura 1.2, vemos que os grafos completos K_2, K_3 e K_4 são exemplos de grafos timbrais. De modo geral, o grafo completo K_n é o grafo timbral $T_{n,1,0}$, cujos vértices são rotulados por sequências unitárias e dois vértices são adjacentes se não coincidem naquela única posição, isto é, se são vértices distintos. Observamos que K_n é um grafo com n^1 vértices, cada um com $(n-1)^1$ vizinhos, como estipulamos no parágrafo anterior. Dentre os grafos ciclo, entretanto, apenas C_3 e C_4 pertencem à classe dos grafos timbrais.

Os grafos timbrais estão diretamente relacionados a outras classes de grafos construídas sobre o mesmo conjunto de vértices $\mathbb{Z}_n^k$ e cujas arestas são definidas a partir do conceito de *distância de Hamming*, que revisamos a seguir.

Definição 5. Sejam $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$. A **distância de Hamming** entre u e v é definida por $d_H(u,v) = |\{i \in \mathbb{Z}_k : u_i \neq v_i\}|$. De maneira equivalente, a distância de Hamming entre u e v é, simplesmente, $k - i_c(u,v)$.

O grafo cubo Q_3 que aparece na Figura 1.2, por exemplo, pertence à classe dos hipercubos, que é definida a partir desse conceito. O hipercubo Q_k é o grafo cujo conjunto de vértices é $\mathbb{Z}_2^k$ e dois vértices são adjacentes se, e somente se, a distância de Hamming entre eles é igual a 1. Por definição, o hipercubo Q_k é o grafo $T_{2,k,k-1}$.

Em especial, o grafo associado aos Exemplos 1 e 2 é o $T_{2,4,3}$, que corresponde ao hipercubo Q_4, exibido na Figura 1.3.

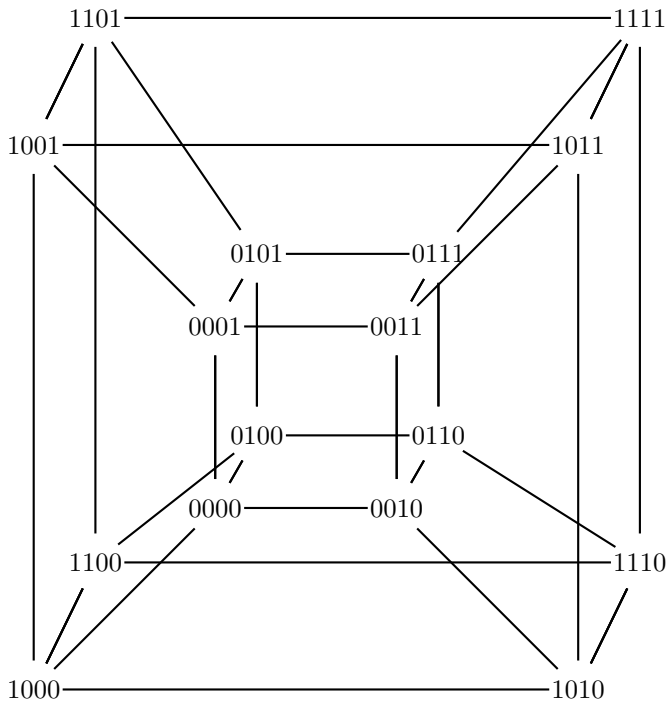

Figura 1.3: Grafo $T_{2,4,3}$, ou seja, o hipercubo Q_4.

Outra família notável de grafos que pertencem à classe dos grafos timbrais são os *grafos da torre*. Estes são os grafos em que os vértices são pares ordenados que representam as casas de um tabuleiro de xadrez $n \times n$ e dois vértices são adjacentes se, e somente se, correspondem a um movimento de uma torre no xadrez, ou seja, estão na mesma linha ou na mesma coluna do tabuleiro. Assim, os grafos da torre são os grafos $T_{n,2,1}$. De fato, duas casas do tabuleiro são adjacentes, segundo este critério, se, e somente se, coincidem em exatamente uma coordenada.

Grande parte dos exemplos que vimos até agora — como os grafos completos, os hipercubos e os grafos da torre — pertencem à classe dos *grafos de Hamming*.

O grafo de Hamming $H(k, n)$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $\mathbb{Z}_n^k$ e dois vértices u e v são adjacentes se, e somente se, $d_H(u, v) = 1$, ou seja, $i_c(u, v) = k - 1$. Esta classe de grafos corresponde, portanto, aos grafos timbrais $T_{n,k,k-1}$. Uma das principais propriedades dos grafos de Hamming é que, neles, a distância entre dois vértices quaisquer é igual à distância de Hamming entre eles [10]. Os grafos de Hamming são, também, os grafos obtidos como resultado do produto cartesiano de k grafos completos de mesma ordem.

Por fim, convém apresentar um exemplo de grafo timbral que não é um grafo de Hamming. A Figura 1.4 exibe o grafo $T_{3,2,0}$ que, em nossa interpretação musical, representaria orquestrações de 2 alturas em um conjunto de 3 instrumentos, de modo que duas orquestrações só podem ser encadeadas se não concordam em nenhuma posição.

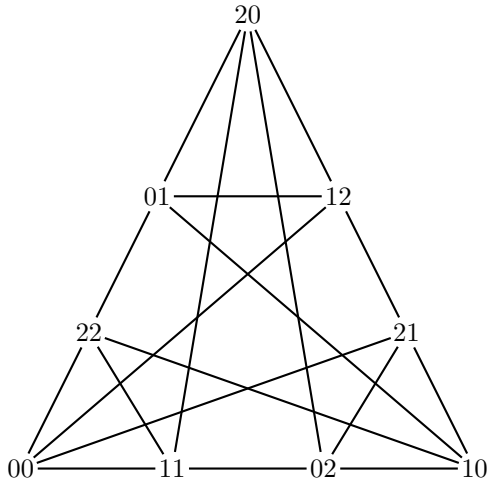

Figura 1.4: Grafo $T_{3,2,0}$.

Como podemos observar, tanto o hipercubo $T_{2,4,3}$ quanto o grafo $T_{3,2,0}$ são grafos que exibem certo grau de simetria. De fato, algumas das principais características dos grafos de Hamming dizem respeito às suas simetrias ou, mais precisamente, ao seu grupo de automorfismos. Exploraremos esse assunto nos Capítulos 2 e 3, mostrando que parte das propriedades de simetria dos grafos de Hamming se estendem a toda a classe dos timbrais, enquanto outras propriedades são restritas a apenas alguns integrantes da classe.

Capítulo 2

Automorfismos de grafos timbrais

Neste capítulo, estudamos os *automorfismos* dos grafos timbrais, onde um automorfismo de um grafo é uma permutação de seus vértices que preserva tanto a existência quanto a não-existência de arestas. Os automorfismos são melhor examinados quando organizados como uma estrutura de *grupo*, o *grupo de automorfismos* do grafo em questão.

Com base no artigo [30], de Seyed Morteza Mirafzal e Meysam Ziaee, revisamos alguns fatos sobre o grupo de automorfismos dos grafos de Hamming e descrevemos este grupo como um produto das permutações de $\mathbb{Z}_n$ com as permutações de $\mathbb{Z}_n^k$. Mostramos que os automorfismos de um grafo de Hamming $T_{n,k,k-1}$ também são automorfismos de $T_{n,k,\ell}$, para todo $\ell \leq k-1$. Utilizando este resultado, provamos que os automorfismos dos grafos timbrais nos permitem mapear qualquer par de vértices adjacentes em qualquer outro, o que caracteriza a propriedade de *arco-transitividade*.

Organizamos este capítulo em três seções, cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 2.1, revisamos conceitos fundamentais da teoria de grupos, estabelecendo a base teórica necessária para os resultados subsequentes. Essa seção está dividida em duas subseções. Na Subseção 2.1.1, apresentamos definições acerca da noção de grupo e exemplificamos sua aplicação no estudo de grafos, observando alguns resultados básicos. Na Subseção 2.1.2, definimos os produtos de grupos que utilizaremos para entender melhor o grupo de automorfismos dos grafos de Hamming e sua relação com os grafos timbrais.

Na Seção 2.2, descrevemos os dois conjuntos de automorfismos que constituem o grupo de automorfismos dos grafos de Hamming e provamos que estes também são automorfismos dos grafos timbrais, em geral.

Por fim, na Seção 2.3, provamos que os grafos timbrais são grafos *arco-transitivos*, apresentando os conceitos necessários para o entendimento desse resultado. Além disso, destacamos o fato de que os grafos timbrais são *grafos de Cayley*.

2.1 Teoria algébrica de grafos

Em [30], Mirafzal e Ziaee monstraram que o grupo de automorfismos dos grafos de Hamming é isomorfo ao *produto entrelaçado* $S_n \wr S_k$. Um de nossos objetivos é determinar se essa propriedade se estende para os grafos timbrais. Para tal, vamos revisar definições e resultados básicos relacionados ao conceito de grupo de automorfismos de um grafo, bem como as definições dos produtos de grupos envolvidos na construção do grupo de automorfismos dos grafos de Hamming.

2.1.1 Grupo de automorfismos

Primeiramente, lembramos que dois grafos G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção $f : V(G) \to V(H)$ tal que $f(u)f(v)$ é uma aresta de H se, e somente se, uv é uma aresta de G, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$. A bijeção f, nesse caso, é dita ser um *isomorfismo* de G em H.

Um *automorfismo* de um grafo G, por sua vez, é um isomorfismo de G em si próprio.

Queremos examinar o *grupo de automorfismos* dos grafos timbrais.

Um *grupo* $\langle A, * \rangle$ é uma estrutura dotada de um conjunto A e uma operação binária $*$, que satisfaz:

1. **[Fechamento]** $a * b \in A$, para todos $a, b \in A$.

2. **[Associatividade]** $(a * b) * c = a * (b * c)$, para todos $a, b, c \in A$.

3. **[Existência de neutro]** Existe $e \in A$ tal que, $a * e = e * a = a$, para todo $a \in A$.

4. **[Existência de inverso]** Para todo $a \in A$, existe $a^{-1} \in A$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Como usual, denotamos um grupo $\langle A, * \rangle$ simplesmente por A e o produto $a * b$ por ab, sempre que a operação de grupo estiver clara no contexto.

O conjunto $\mathbb{Z}_n$ forma um grupo $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ com a operação $+$ de adição módulo n. O elemento neutro é o 0 e o inverso aditivo de cada elemento a é $n - a$, pois a adição , módulo n destes elementos é igual a 0. Se, em vez da adição, considerarmos a multiplicação módulo n, o elemento neutro passa a ser o 1, e as três primeiras propriedades ainda se mantêm. Entretanto, a estrutura $\langle \mathbb{Z}_n, \times \rangle$ nem sempre é um grupo, pois a existência de inversos multiplicativos não é garantida para todos os elementos. Em particular, essa estrutura é um grupo se, e somente se, n é um número primo.

O conjunto $Aut(G)$ dos automorfismos de um grafo G forma um grupo com a operação $\circ$ de composição de funções. O elemento neutro é a função identidade e

o inverso de cada automorfismo f é a função inversa f^{-1}. O grupo $\langle Aut(G), \circ \rangle$ em questão é o chamado *grupo de automorfismos* do grafo G e, na maior parte das vezes, é representado simplesmente por $Aut(G)$.

De modo geral, os termos *homomorfismo*, *isomorfismo* e *automorfismo* são utilizados na matemática quando queremos fazer refência a funções que preservam a estrutura de um determinado objeto. Suas definições, portanto, variam de acordo com o contexto.

Um *homomorfismo* de um grupo A em um grupo A' é uma função $\phi : A \to A'$ tal que $\phi(e_A) = e_{A'}$ e $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$, para todos $a_1, a_2 \in A$.

Se, além disso, ϕ é uma bijeção, então é dita ser um *isomorfismo* de A em A'. Nesse caso, dizemos que os grupos são *isomorfos*, o que é denotado por $A \simeq A'$.

Se, além disso, A e A' são o mesmo grupo, então ϕ é um *automorfismo* desse grupo. O conjunto dos automorfismos de A também forma um grupo com a operação de composição de funções que, de maneira análoga ao caso dos grafos, é denotado por $Aut(A)$.

Para ilustrar esses conceitos, vamos determinar $Aut(K_m)$, isto é, o grupo de automorfismos do grafo completo com n vértices. Note que toda permutação dos vértices de K_m é um automorfismo do grafo, uma vez que há uma aresta entre todo par de vértices. O grupo de automorfismos de K_m, então, é o grupo formado pelas permutações do conjunto $V(G)$. De modo geral, o grupo de todas as permutações de um conjunto A é chamado de *grupo simétrico* de A e denotado por $Sym(A)$. O grupo simétrico do conjunto $\mathbb{Z}_m$, em particular, é denotado simplesmente por S_m. Assim, temos que $Aut(K_m) \simeq S_m$.

Tomemos como um segundo exemplo o grafo vazio com m vértices, denotado por N_m. Esse grafo é o complemento de K_m e, da mesma forma, qualquer permutação dos m vértices também é um automorfismo de N_m. Então, $Aut(N_m) = Aut(K_m) \simeq S_m$. De fato, o grupo de automorfismos de um grafo coincide com o de seu complemento [4].

Se A é um grupo e B é um subconjunto de A que forma um grupo com a restrição da operação de A a B, dizemos que B é um *subgrupo* de A. Nesse caso, escrevemos $B \leq A$. Observamos que $Aut(G) \leq Sym(V(G))$. Por conta disso, dizemos que $Aut(G)$ é um *grupo de permutações* de $V(G)$. Os grafos K_m e N_m, entretanto, são os únicos grafos cujo grupo de automorfismos é $Sym(V)$ [4].

Dado um grupo A e um subconjunto $B \subset A$, o *subgrupo gerado* por B, denotado por $\langle B \rangle$, é o menor subgrupo de A que contém B. O grupo $Aut(T_{n,k,k-1})$, como definido em [30], é gerado por dois de seus subconjuntos próprios, como veremos adiante.

Exemplo 6. *Consideremos o grafo K_6 que, como mencionamos, possui S_6 como seu grupo de automorfismos. Seja $r \in S_6$ a permutação que leva o vértice x no vértice*

$x + 1 \mod 6$, *isto é, a rotação de uma posição no grafo. O subgrupo* $\langle\{r\}\rangle$ *— ou* $\langle r\rangle$*, simplesmente – é o grupo formado pelas permutações da forma* $r^m(x) = x + m \mod 6$*. É importante percebermos que, pela definição de grupo, é necessário que* $\langle r\rangle$ *contenha o elemento identidade* r^0 *e todas as potências de* r *– para garantir a propriedade de fechamento. Além disso, vale observar que existem automorfismos de* K_6 *que não respeitam a ordem cíclica, ou seja, não são potências de* r *e, portanto,* $\langle r\rangle \neq S_6 = Aut(K_6)$*.*

O argumento de que $|Aut(G)| > |A|$ é suficiente para mostrar que A não é isomorfo a $Aut(G)$. No entanto, esse argumento não é necessário, no sentido de que é possível que $Aut(G)$ e A estejam definidos em conjuntos de mesmo tamanho – ou até no mesmo conjunto – mas apresentem comportamentos distintos com relação à operação de grupo. Ao estudarmos o grupo de automorfismos de um grafo, não estamos interessados apenas em suas simetrias, mas também em como elas interagem entre si. Para melhorar nosso entendimento desse fato, vamos revisar algumas noções de produtos de grupos.

2.1.2 Produtos de grupos

Inicialmente, recordamos a noção usual de produto de grupos.

Definição 7. Sejam A e B grupos. O **produto direto** de A com B, denotado por $A \times B$, é o grupo formado pelo conjunto $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ munido da operação definida por $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$, para todos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$.

Os $T_{n,k,\ell}$ nos fornecem um primeiro bom exemplo de produto direto. O grupo formado pelo conjunto $\mathbb{Z}_n^k$ dos vértices de um grafo timbral com a operação de soma de vetores é o produto cartesiano de k cópias do grupo $\langle\mathbb{Z}_n, +\rangle$. O elemento neutro é o vértice $0^k = 00\ldots00$ e, para cada $v \in \mathbb{Z}_n^k$, o inverso de v é o vértice $(-v_0)(-v_1)\ldots(-v_{k-1})$.

Vejamos, agora, o caso dos grafos ciclo. O grupo de automorfismos de um grafo ciclo C_n corresponde ao grupo de simetrias de um n-ágono regular. Esse grupo é conhecido como o *grupo diedral* D_n e é gerado por dois tipos de simetrias: as rotações e as reflexões do polígono.

Exemplo 8. *Tomemos como exemplo o grupo* D_6*, correspondente às simetrias de um hexágono regular. Ele contém as seis rotações simples* r^m *que definimos no Exemplo 6 e mais as seis rotações do polígono refletido. Assim,* D_6 *contém o subgrupo* $R = \langle r\rangle$ *e o subgrupo* $F = \langle f\rangle$*, gerado pela reflexão* $f(x) = -x$ *em torno do eixo horizontal. O subgrupo* F*, em especial, possui apenas dois elementos, posto que*

$f^2 = e$. Assim, temos que $|D_6| = |R||F| = 12$. A Figura 2.1 exibe uma sequência de automorfismos do C_6, de cada uma das famílias mencionadas.

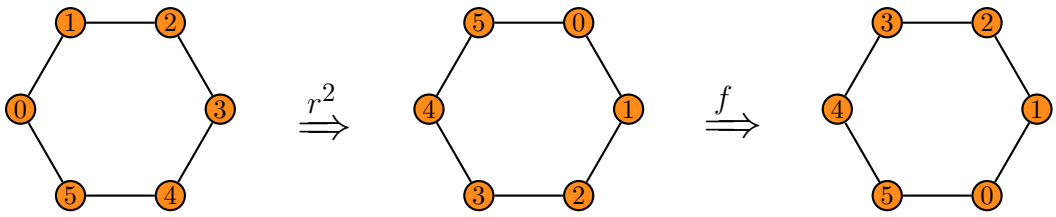

Figura 2.1: Rotação seguida de reflexão em um C_6.

Tendo em conta que $|D_6| = |R \times F|$, é razoável buscar uma representação do grupo diedral como um produto entre R e F – em que o elemento (r^a, f^b) representa a composição $r^a \circ f^b$. Nessa busca, pode-se pensar erroneamente que D_6 comporta-se como o produto direto $R \times F$. Entretanto, embora toda simetria de um hexágono regular seja, de fato, uma composição entre uma rotação e uma reflexão, a composição entre dois automorfismos (r^a, f^b) e (r^c, f^d) não é obtida através do produto (r^{a+c}, f^{b+d}). Caso fosse, a ordem em que realizamos as rotações e reflexões no polígono não afetaria o resultado final. A Figura 2.2 ilustra a diferença entre o automorfismo $(r, f) \circ (r, f)$ – que equivale a (e, e) – e o automorfismo (r^2, f^2). Nela, reforça-se a ideia de que, ainda que a cardinalidade de um grupo seja igual à cardinalidade do produto direto entre dois de seus subgrupos, eles podem ser distintos pela forma como seus elementos interagem sob a operação de grupo.

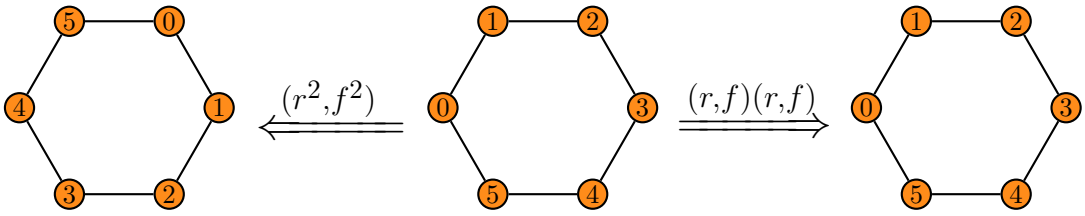

Figura 2.2: Diferença entre dois automorfismos de C_6.

Para obter o grupo D_n como um produto de suas rotações e reflexões, necessitamos de uma outra noção de produto que considera uma interação entre as coordenadas dos elementos operados.

Definição 9. Sejam A e B grupos e ϕ um homomorfismo de B em $Aut(A)$. O **produto semidireto** $A \rtimes_\phi B$ é o grupo formado pelo conjunto $A \times B$ munido da operação definida por $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1\phi(b_1)(a_2), b_1b_2)$, para todos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$.

A diferença fundamental entre o produto direto $A \times B$ e o produto semidireto $A \rtimes B$ é que, no primeiro, cada coordenada é independente em relação à operação de grupo. Mais especificamente, a operação em cada coordenada do produto corresponde à operação no respectivo fator. Por outro lado, no produto semidireto, o

comportamento da operação de grupo na primeira coordenada do produto depende do elemento na segunda coordenada.

Exemplo 10. *Retomando os grupos abordados no Exemplo 8, seja* $\phi : F \to Aut(R)$ *o homomorfismo que associa* f^a *ao automorfismo* $r^m \mapsto r^{f^a(m)}$*. Mais especificamente,* ϕ *associa* f *ao automorfismo* $r^m \mapsto r^{-m}$ *e* $f^2 = e$ *ao automorfismo identidade. O produto entre* R *e* F *que procurávamos para definir o grupo* D_6 *é, então, o grupo* $R \rtimes_\phi F$*. Observamos que, neste grupo, temos* $(r^a, f^b)(r^c, f^d) = (r^{a+f^b(c)}, f^{b+d})$*. Aplicando ao produto* $(r, f) \circ (r, f)$ *que exibimos na Figura 2.2, temos* $(r, f) \circ (r, f) = (r^0, f^2) = (e, e)$ *– como ilustrado.*

Para finalizar esta revisão sobre produtos de grupos, recordamos uma outra noção de produto, construído a partir dos produtos anteriores.

Definição 11. Sejam m um inteiro positivo, A um grupo e $H \leq S_m$. Além disso, seja $B = A^m$, o produto direto de m cópias de A. Nesse caso, existe um homomorfismo $\phi : H \to Aut(B)$ definido por $\phi_h(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}) = (b_{h^{-1}(0)}, b_{h^{-1}(1)}, \ldots, b_{h^{-1}(m-1)})$, para todos $h \in H$ e $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}) \in B$. O **produto entrelaçado** $A \wr_m H$ é o produto semidireto $B \rtimes_\phi H$, ou seja, $A^m \rtimes_\phi H$.

Podemos omitir o índice m no produto entrelaçado quando o grupo simétrico $S_m \geq H$ está claro pelo contexto. Esse é o caso de $S_n \wr S_k$ que, como mencionamos, é isomorfo ao grupo $Aut(T_{n,k,k-1})$.

2.2 Grupo de automorfismos dos grafos timbrais

Nesta seção, vamos definir os dois subgrupos de $Aut(T_{n,k,k-1})$ que interagem para gerar o grupo como um todo. Mostraremos que eles também são subgrupos de $Aut(T_{n,k,\ell})$ e que, portanto, $S_n \wr S_k \simeq Aut(T_{n,k,k-1}) \leq Aut(T_{n,k,\ell})$, para todo $\ell \in \mathbb{Z}_k$.

Definição 12. Seja $\pi \in S_k$. Denotamos por $a_\pi : \mathbb{Z}_n^k \to \mathbb{Z}_n^k$ a função definida por

$$a_\pi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = (x_{\pi^{-1}(0)}, x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(k-1)}),$$

para todo $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{Z}_n^k$. Além disso, denotamos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as funções deste tipo, isto é, $\mathcal{P} = \{a_\pi : \pi \in S_k\}$.

Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é um conjunto de automorfismos de $T_{n,k,\ell}$ e, mais ainda, que é um subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$ isomorfo a S_k.

Proposição 13. $\mathcal{P} \simeq S_k$ *é subgrupo de* $Aut(T_{n,k,\ell})$*.*

Prova. Seja $\pi \in S_k$ e sejam $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$. Primeiramente, mostraremos que a_π é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$, isto é, que $a_\pi(u)a_\pi(v)$ é uma aresta do grafo se, e somente se, uv também é. Para tal, seja $I_c(u,v) = \{i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}\}$. Como π é uma bijeção, temos que $I_c(a_\pi(u), a_\pi(v)) = \{\pi^{-1}(i_0), \pi^{-1}(i_1), \ldots, \pi^{-1}(i_{r-1})\}$. Assim, a_π preserva $i_c(u,v)$. Portanto, $i_c(a_\pi(u), a_\pi(v)) = \ell$ se, e somente se, $i_c(u,v) = \ell$. Logo, a_π é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$. Para finalizar, provaremos que $\pi \mapsto a_\pi$ é um isomorfismo de S_k em $\mathcal{P}$. Denotando por e o elemento neutro de S_k, obtemos que $a_e(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$, isto é, a_e é a identidade de $Aut(T_{n,k,\ell})$. Além disso, pela Definição 12, temos que $a_{\pi\circ\pi'} = a_\pi \circ a_{\pi'}$. Portanto, $\mathcal{P} \simeq S_k$, e este é subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$. ■

Em seguida, vamos generalizar a Definição 12, definindo um segundo conjunto de automorfismos de $T_{n,k,\ell}$, associado ao grupo S_n^k.

Definição 14. Seja $\Sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}) \in S_n^k$. Denotamos por $a_\Sigma : \mathbb{Z}_n^k \to \mathbb{Z}_n^k$ a função definida por

$$a_\Sigma(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = (\sigma_0(x_0), \sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_{k-1}(x_{k-1})),$$

para todo $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{Z}_n^k$. Além disso, denotamos por $\mathcal{O}$ o conjunto de todas as funções deste tipo, isto é, $\mathcal{O} = \{a_\Sigma : \Sigma \in S_n^k\}$.

Agora, generalizando a Proposição 13, vamos mostrar que $\mathcal{O}$ é um conjunto de automorfismos de $T_{n,k,\ell}$ e, mais ainda, que é um subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$ isomorfo a S_n^k.

Proposição 15. *$\mathcal{O} \simeq S_n^k$ é subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$.*

Prova. Seja $\Sigma \in S_n^k$ e sejam $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$. Primeiramente, mostraremos que a_Σ é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$. Para tal, seja $i \in \mathbb{Z}_k$. Observemos que, como σ_i é uma bijeção, vale que $\sigma_i(u_i) = \sigma_i(v_i)$ se, e somente se, $u_i = v_i$. Isso nos garante que as coordenadas em que u e v coincidem são as mesmas em que $a_\Sigma(u)$ e $a_\Sigma(v)$ coincidem e, consequentemente, que $i_c(u,v) = i_c(a_\Sigma(u), a_\Sigma(v))$. Logo, a_Σ é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$. Por fim, demonstraremos que $\Sigma \mapsto a_\Sigma$ é um isomorfismo de $\mathcal{O}$ em S_n^k. Denotando o elemento neutro de S_n^k por e, temos que $a_e(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$, ou seja, a_e é o elemento neutro de $Aut(T_{n,k,\ell})$. Além disso, pela Definição 14, temos que $a_{\Sigma\circ\Sigma'} = a_\Sigma \circ a_{\Sigma'}$. Logo, $\mathcal{O}$ é isomorfo a S_n^k. ■

Como ambas as famílias são constituídas por automorfismos de $T_{n,k,\ell}$, composições entre automorfismos de cada família também são automorfismos do grafo. Mais especificamente, o subgupo gerado por $\mathcal{P}$ e $\mathcal{O}$ também é subgrupo de $Aut(T_{n,k,\ell})$. Esse subgrupo, como descrito em [30], é o grupo $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P}$ que, por sua vez, é isomorfo ao produto entrelaçado $S_n \wr S_k$.

Por definição, esse grupo possui $|\mathcal{P}||\mathcal{O}|$ elementos e todos os seus elementos correspondem a composições entre um elemento de $\mathcal{P}$ e um elemento de $\mathcal{O}$. Um de nossos objetivos é determinar se $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P} = Aut(T_{n,k,\ell})$. Responderemos a essa questão no Capítulo 3.

Mesmo que ainda não tenhamos determinado $Aut(T_{n,k,\ell})$, já sabemos que $Aut(T_{n,k,k-1}) \leq Aut(T_{n,k,\ell})$. Mais ainda, como tanto os elementos de $\mathcal{O}$ quanto os de $\mathcal{P}$ preservam o índice de coincidência entre dois vértices, sabemos que os elementos de $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P}$ herdam essa propriedade. Usaremos esses fatos para demonstrar a propriedade de arco-transitividade nos grafos timbrais.

2.3 Arco-transitividade dos grafos timbrais

Por ser um grupo de permutações, dizemos que o grupo de automorfismos de um grafo *age* sobre seus vértices permutando seus elementos. Formalmente, uma *ação* de um grupo de permutações A sobre um conjunto X é uma função que associa, a cada par $(a, x) \in A \times X$ um elemento $A_a(x)$ de X, tal que:

(i) $A_e(x) = x$, para todo $x \in X$;

(ii) $A_a(A_b(x)) = A_{ab}(x)$, para todos $a, b \in A$ e $x \in X$.

Notamos que, para todo grafo G, o grupo $Aut(G) = A$ age sobre $V(G)$ de forma trivial, isto é, A_a é o próprio automorfismo a, para todo $a \in Aut(G)$. Por consequência dessa ação, também podemos obter ações de $Aut(G)$ sobre outros conjuntos associados a G. O grupo $Aut(G)$ age sobre $E(G)$, por exemplo, com ação dada por $A_a(uv) = a(u)a(v)$, para todos $a \in Aut(G)$ e $uv \in E(G)$. De modo semelhante, $Aut(G)$ age sobre o conjunto dos caminhos maximais de G levando um caminho $P = v_0v_1 \dots v_{m-1}$ em outro $A_a(P) = a(v_0)a(v_1) \dots a(v_{m-1})$, para todo $a \in Aut(G)$. Por simplicidade, vamos cometer um abuso de notação, substituindo $A_a(x)$ por $a(x)$, referindo-nos à ação de $Aut(G)$ sobre um dado conjunto $X \supset \{x\}$, e especificando o que significa essa ação quando for necessário.

Parte do estudo das propriedades algébricas dos grafos se concentra exatamente nas características das ações de seus grupos de automorfismos sobre determinadas estruturas. Uma dessas características é a *transitividade*.

Um grupo de permutações A age *transitivamente* sobre um conjunto X se, para todo par de elementos distintos x_1 e x_2 em X, existe um elemento $a \in A$ tal que $a(x_1) = x_2$. Se $Aut(G)$ age transitivamente sobre $V(G)$, dizemos que G é *vértice-transitivo*.

De maneira similar, se $Aut(G)$ age transitivamente sobre $E(G)$, dizemos que G é *aresta-transitivo*.

Uma propriedade mais restritiva que, a princípio, se assemelha à aresta-transitividade, é a de *arco-transitividade*. Um *arco* de G é um par ordenado de vértices adjacentes em G. Dizemos que G é *arco-transitivo* se $Aut(G)$ age transitivamente sobre o conjunto de arcos de G, isto é, se, para todo par de arcos (u_1, v_1) e (u_2, v_2), existe $f \in Aut(G)$ tal que $f(u_1) = u_2$ e $f(v_1) = v_2$.

As propriedades de arco-transitividade e aresta-transitividade, embora possam ser confundidas, representam características bem distintas de um grafo. De modo geral, se um grafo não possui vértices isolados, então a arco-transitividade implica tanto na vértice-transitividade quanto na aresta-transitividade [4, 21]. Tomemos como exemplo o grafo bipartido completo $K_{m,n}$, com $m \neq n$, exibido na Figura 2.3. Primeiramente, observamos que $K_{m,n}$ não é vértice-transitivo, pois não existe automorfismo que relacione vértices de partes distintas, uma vez que estes possuem, também, graus distintos. No entanto, toda permutação independente dos vértices de cada parte preserva a estrutura do grafo, permitindo-nos identificar $Aut(K_{m,n})$ com o grupo $S_m \times S_n$, isto é, com o grupo cujos elementos são pares de permutações, cada uma a ser aplicada em uma das partes do grafo.

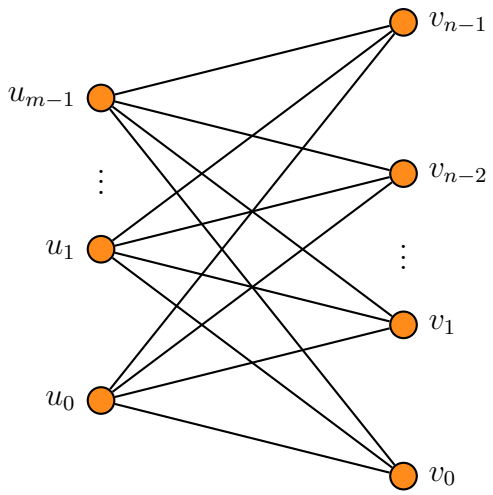

Figura 2.3: Grafo $K_{m,n}$, com $m \neq n$.

Notamos, então, que, para qualquer par de arestas $u_i v_j$ e $u_{i'} v_{j'}$, haverá um automorfismo $a \in Aut(K_{m,n})$ tal que $a(u_i) = u_{i'}$ e $a(v_j) = v_{j'}$. Esse grafo é, portanto, aresta-transitivo. Se tomarmos os arcos (u_i, v_j) e $(v_{j'}, u_{i'})$, entretanto, não existe automorfismo que testifica a arco-transitividade pois, novamente, não existe automorfismo que relaciona vértices de partes distintas. Assim, $K_{m,n}$ não é arco-transitivo.

Determinar se um grafo possui alguma dessas propriedades de transitividade que listamos é particularmente importante pois, a partir delas, podemos fazer afirmações mais precisas sobre questões relativas a conectividade, emparelhamento máximo, hamiltonicidade, número de independência e número clique do grafo ([4, 13, 21]). Nesse contexto, é importante introduzir uma família específica de grafos vértice-

transitivos: os *grafos de Cayley*.

Definição 16. Sejam $\langle A, *\rangle$ um grupo e S um subconjunto de A que não contém o elemento neutro. O **grafo de Cayley** $Cay(A, S)$ é o grafo tal que $V(Cay(A, S)) = A$ e $E(Cay(A, S)) = \{a(a * s) : a \in A, s \in S\}$.

Consideremos novamente o conjunto S das sequências em $\mathbb{Z}_n^k$ que possuem exatamente $k - \ell$ termos não nulos. Na Seção 1.1, quando observamos que os grafos timbrais são grafos regulares, argumentamos que a vizinhança de todo vértice v em $T_{n,k,\ell}$ pode ser obtida pela adição de v com cada elemento de S. De fato, como toda aresta representa uma alteração de $k-\ell$ coordenadas, o conjunto de arestas de $T_{n,k,\ell}$ é gerado dessa maneira. O $T_{n,k,\ell}$ é, portanto, o grafo $Cay(\mathbb{Z}_n^k, S)$.[2]

Por serem grafos de Cayley, sabemos que os $T_{n,k,\ell}$ são vértice-transitivos [21]. Para encerrar o capítulo, mostraremos que $T_{n,k,\ell}$ também é uma classe de grafos arco-transitivos. Antes, vejamos um exemplo de como os automorfismos de $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P}$ agem sobre os arcos de $T_{n,k,\ell}$.

Exemplo 17. *Consideremos os arcos* $(0000, 0011)$ *e* $(0110, 1010)$*, em* $T_{2,4,2}$*. Para construir um automorfismo que leve o primeiro arco no segundo, podemos, inicialmente, permutar as coordenadas de modo que os pares de vértices coincidam nas mesmas coordenadas. Por exemplo, a permutação* $\pi \in S_k$ *que rotaciona cada vértice duas coordenadas para a esquerda, definida por* $\pi(i) = i - 2 \mod k$*, satisfaz o que queremos. Nesse caso, temos que* $a_\pi(0000, 0011) = (0000, 1100)$ *e, então,* $I_c(0000, 1100) = I_c(0110, 1010)$*. Com essa propriedade, basta que apliquemos o automorfismo que soma cada vértice com* 0110*, isto é, que troca o elemento na segunda e na terceira coordenadas em todos os vértices, levando* $(0000, 1100)$ *em* $(0110, 1010)$*, como queríamos. Note que esse segundo automorfismo pertence à família* $\mathcal{O}$*, enquanto o primeiro pertence a* $\mathcal{P}$*, de tal modo que o automorfismo que construímos é a composição de elementos das duas famílias.*

Embora tenhamos utilizado pares de arcos, note que o automorfismo que construímos não depende do parâmetro ℓ, pois sempre preserva o índice de coincidência entre quaisquer dois vértices. Ainda que considerássemos outro grafo da forma $T_{2,4,\ell}$, o mesmo automorfismo levaria o primeiro par de vértices no segundo. A estratégia que utilizamos no exemplo, então, pode ser usada para demonstrar o resultado geral.

Teorema 18. *Sejam* (u, v) *e* (x, y) *dois pares de vértices de* $T_{n,k,\ell}$*. Se* $i_c(u, v) = i_c(x, y)$*, então existe automorfismo* $a \in Aut(T_{n,k,\ell})$ *tal que* $a(u) = x$ *e* $a(v) = y$*.*

Prova. Suponha $i_c(u, v) = i_c(x, y)$. Tome uma permutação $\pi \in S_k$ tal que $\pi[I_c(u, v)] = I_c(x, y)$, isto é, tal que a imagem do conjunto $I_c(u, v) \subseteq \mathbb{Z}_k$ por π

[2] Essa observação já foi feita anteriormente em [34] para *grafos de Hamming generalizados*, classe de grafos que contém os grafos timbrais.

seja o conjunto $I_c(x, y)$. Como ambos os conjuntos possuem tamanho ℓ, é possível estabelecer uma bijeção entre eles e, portanto, é possível escolher π dessa maneira. Ademais, como vimos na Proposição 13, a_π é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$. Tomemos, agora, uma sequência $\Sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$ de permutações em S_n^k, de modo que $\sigma_i(u_{\pi^{-1}(i)}) = x_i$ e $\sigma_i(v_{\pi^{-1}(i)}) = y_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}_k$. Observe que é possível construir Σ dessa maneira, isto é, que a restrição imposta sobre Σ nunca forçará que σ_i deixe de ser bijetiva, uma vez que $u_{\pi^{-1}(i)} = v_{\pi^{-1}(i)}$ se, e só se, $x_i = y_i$, pois a_π associa as coordenadas em que os pares coincidem. Ademais, $a_\Sigma \circ a_\pi$ também é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$, definido por

$$a_\Sigma \circ a_\pi(w) = (\sigma_0(w_{\pi^{-1}(0)}), \sigma_1(w_{\pi^{-1}(1)}), \ldots, \sigma_{k-1}(w_{\pi^{-1}(k-1)})).$$

Note que, pelas restrições que colocamos sobre Σ, temos que $a_\Sigma \circ a_\pi(u) = x$ e $a_\Sigma \circ a_\pi(v) = y$. Logo, para todos dois pares de vértices (u, v) e (x, y) tais que $i_c(u, v) = i_c(x, y)$, existe automorfismo $a = a_\Sigma \circ a_\pi$ tal que $a(u) = x$ e $a(v) = y$. ■

A demonstração do Teorema 18 estabelece uma família de automorfismos que levam (u, v) em (x, y). Todo par $(\Sigma, \pi) \in S_n^k \times S_k$ que atende aos critérios que especificamos corresponde a um automorfismo desse tipo. Observemos, também, que o enunciado do Teorema 18 pode ser reescrito na forma de uma outra propriedade de transitividade. O que demonstramos, em outras palavras, é que $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente em $\{(u, v) \in V(T_{n,k,\ell})^2 : i_c(u, v) = c\}$, para todo $c \in \mathbb{Z}_k$. Felizmente, obtemos a arco-transitividade como consequência dessa propriedade.

Corolário 19. *Todo grafo timbral é arco-transitivo.*

Prova. O conjunto de arcos de $T_{n,k,\ell}$ é definido por $\{(u, v) \in V(T_{n,k,\ell})^2 : i_c(u, v) = \ell\}$. Pelo Teorema 18, $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente nesse conjunto e, portanto, $T_{n,k,\ell}$ é arco-transitivo. ■

Observamos que a existência de um automorfismo que leva um par de vértices (u, v) em outro par (x, y) só é possível quando ambos os pares estão à mesma distância no grafo. Assim, o Teorema 18 nos garante que $i_c(u, v)$ determina $d(u, v)$, isto é, que, se dois pares de vértices possuem o mesmo índice de coincidência, então eles estão à mesma distância no grafo. Esse fato será a base de várias das demonstrações que faremos no Capítulo 3, no qual estudaremos outra propriedade transitiva: a *distância-transitividade*.

Capítulo 3

Distância-transitividade nos grafos timbrais

Neste capítulo, estudamos a propriedade de *distância-transitividade* nos grafos timbrais, onde um grafo é *distância-transitivo* se, para todo número natural d, seu grupo de automorfismos permite mapear qualquer par de vértices separados à distância d em qualquer outro par de vértices que também estejam a essa mesma distância um do outro.

Nosso principal resultado é uma caracterização da distância-transitividade nos grafos timbrais, ou seja, a determinação de quais grafos timbrais são distância-transitivos. Faremos isto analisando o grupo de automorfismos e o tamanho da interseção das vizinhanças de dois vértices em um grafo timbral.

O capítulo está organizado em duas seções, cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 3.1, revisamos a definição formal de distância-transitividade e apresentamos exemplos de grafos timbrais que possuem esta propriedade. Para alguns grafos timbrais pequenos, realizamos uma busca computacional para identificar automorfismos que evidenciam sua distância-transitividade. Também destacamos que os automorfismos encontrados computacionalmente não pertencem ao grupo $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P}$, o que responde à questão levantada no Capítulo 2.

Na Seção 3.2, mostramos que os grafos que identificamos na seção anterior são os únicos grafos timbrais distância-transitivos, concluindo nossa caracterização.

3.1 Grafos timbrais distância-transitivos

No Capítulo 2, começamos a exibir uma hierarquia das propriedades de transitividade em grafos. A vértice-transitividade e a aresta-transitividade estão na base dessa hierarquia, estabelecendo uma equivalência estrutural entre todos os vértices — e arestas, respectivamente — do grafo. Em seguida, a arco-transitividade garante

essa equivalência para pares de vértices adjacentes, implicando nas duas propriedades anteriores, para grafos sem vértices isolados. O próximo e último passo que daremos na hierarquia diz respeito à equivalência estrutural entre pares de vértices equidistantes. Relembramos que, como usual, $d(u, v)$ denota a distância entre os vértices u e v em um grafo.

Definição 20. Seja G um grafo. Dizemos que G é **distância-transitivo** se, para quaisquer dois pares de vértices de G, (u, v) e (x, y), tais que $d(u, v) = d(x, y)$, existe $a \in Aut(G)$ para o qual $a(u) = x$ e $a(v) = y$.

A Definição 20 indica, equivalentemente, que um grafo G é distância-transitivo se, para toda distância d no grafo, o grupo $Aut(G)$ age transitivamente no conjunto $V_d = \{(u, v) \in V(G)^2 : d(u, v) = d\}$. Observamos, então, que todo grafo distância-transitivo é arco-transitivo, pois $Aut(G)$ age transitivamente sobre V_1, isto é, sobre o conjunto de arcos de G.

Como queremos determinar os grafos timbrais que são distância-transitivos, um ponto de partida, são os grafos de Hamming $T_{n,k,k-1}$, que possuem essa propriedade [7]. Além desses os grafos $T_{2,k,0}$ também são distância-transitivos, pois suas arestas formam um emparelhamento, como ilustrado na Figura 1.2, com $d = 1$. Os grafos dessas famílias não são os únicos exemplos.

Proposição 21. *$T_{n,2,0}$ é distância-transitivo, para todo $n \geq 2$.*

Prova. Sejam (u, v) e (x, y) dois pares de vértices tais que $d(u, v) = d(x, y) = d$. Vamos demonstrar que existe um automorfismo que leva (u, v) em (x, y). Para $d = 0$, esta propriedade é garantida, pela vértice-transitividade. Para $d = 1$, pelo Corolário 19, todo grafo timbral é arco-transitivo e, portanto, a existência de um automorfismo como queremos está garantida. Assim, consideremos $d \geq 2$. Nesse caso, temos que $i_c(u, v) = 1$, pois se $i_c(u, v)$ fosse igual a 0 ou 2, teríamos $d = 1$ ou $d = 0$. O mesmo vale para $i_c(x, y)$. Portanto, $i_c(u, v) = i_c(x, y)$ e, pelo Teorema 18, existe automorfismo a tal que $a(u) = x$ e $a(v) = y$. Logo, $T_{n,2,0}$ é distância-transitivo. ■

A demonstração da Proposição 21 revela uma característica da noção de distância-transitividade nos grafos timbrais. Se, para todos dois vértices u e v, temos que $d(u, v)$ determina $i_c(u, v)$ — como em $T_{n,2,0}$ —, então o grafo é distância-transitivo. Vamos formalizar essa propriedade.

Lema 22. *Sejam $d \in \mathbb{Z}_{k+1}$ e $V_d = \{(u, v) \in V(T_{n,k,\ell})^2 : d(u, v) = d\}$. Se existe $c \in \mathbb{Z}_k$ tal que $i_c(u, v) = c$, para todo $(u, v) \in V_d$, então $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente em V_d.*

Prova. Seja $c \in \mathbb{Z}_k$. Pelo Teorema 18, $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente no conjunto $C = \{(u,v) \in V(T_{n,k,\ell})^2 : i_c(u,v) = c\}$. Além disso, quaisquer dois pares de vértices com índice de coincidência c estão à mesma distância, pois isto é necessário para que exista um automorfismo que leva um par no outro. Assim, todo par de vértices com índice de coincidência c é um elemento de V_d. Se, além disso, todo par de vértices em V_d possuir índice de coincidência c, então $V_d = C$ e, portanto, $Aut(T_{n,k,\ell})$ age transitivamente em V_d. ■

O Lema 22 é suficiente para demonstrarmos a distância-transitividade de grafos timbrais conexos cujo diâmetro é igual a k. Tal propriedade, entretanto, vale apenas para poucos grafos, como o próprio $T_{n,2,0}$ e os grafos de Hamming $T_{n,k,k-1}$. Por outro lado, podemos usar esse resultado para demonstrar a distância-transitividade em grafos timbrais desconexos, provando que $d(u,v)$ determina $i_c(u,v)$ para pares de vértices no mesmo componente conexo.

Como os grafos timbrais são vértice-transitivos, seus componentes conexos são isomorfos entre si. O grupo de automorfismos de um grafo vértice-transitivo composto por h componentes conexos, todos eles isomorfos ao mesmo grafo H, é dado por $Aut(H) \wr S_h$ [4]. Isso significa que os automorfismos do grafo correspondem a composições entre uma permutação de seus componentes e uma sequência de automorfismos, um para cada componente.

Lema 23. *Seja G um grafo vértice-transitivo. Então, G é distância-transitivo se, e somente se, todos os componentes conexos de G induzem subgrafos distância-transitivos.*

Prova. ($\Rightarrow$) Se G é distância-transitivo, então para todos os pares de vértices (u,v) e (x,y) em um mesmo componente conexo, tais que $d(u,v) = d(x,y)$, existe automorfismo a tal que $a(u) = x$ e $a(v) = y$. Mais ainda, o automorfismo a preserva o componente conexo em que estão os vértices e, portanto, a restrição de a a esse componente é um automorfismo do subgrafo induzido por ele. Logo, todo componente conexo induz um subgrafo distância-transitivo.
($\Leftarrow$) Suponha que todos os componentes conexos de G induzam subgrafos distância-transitivos. Como G é vértice-transitivo, todos os seus componentes conexos são isomorfos. Assim, os automorfismos de G correspondem a uma permutação dos componentes conexos, seguida da aplicação de automorfismos restritos a cada componente. Sejam (u,v) e (x,y) dois pares de vértices de G tais que $d(u,v) = d(x,y)$. Temos dois casos:

***Caso 1*:** Se u e v estão em componentes conexos distintos H_1 e H_2, então x e y também estão em componentes distintos H_1' e H_2'. Nesse caso, tomemos um automorfismo f que permuta os componentes de modo a levar H_1 em H_1' e,

analogamente, H_2 em H_2'. Como os componentes induzem subgrafos distância-transitivos, existe um automorfismo a, que age sem permutar componentes, tal que $a(f(u)) = x$ e $a(f(v)) = y$. Assim, $a \circ f$ satisfaz o que queremos.

***Caso 2*:** Se u e v estão em um mesmo componente H, então x e y também estão em um mesmo componente H'. Nesse caso, podemos tomar um automorfismo f que permuta H com H'. Como todo componente conexo induz um subgrafo distância-transitivo, existe automorfismo a que não permuta componentes e atua como a identidade nos componentes diferentes de H', mas em H' leva o par $(f(u), f(v))$ em (x, y). Assim, $a \circ f$ satisfaz o que queremos.

Logo, G é distância-transitivo. ■

A partir do Lema 23, conseguimos determinar a distância-transitividade de alguns grafos timbrais desconexos. Na Figura 1.2 do Capítulo 1, exibimos alguns grafos timbrais desconexos, como o $T_{2,3,1}$. Como mostraremos no Capítulo 4, os grafos da forma $T_{2,k,\ell}$, com $k - \ell$ par, são desconexos. Utilizaremos o grafo $T_{2,6,2}$ como um primeiro exemplo da estratégia para a determinação geral da distância-transitividade em grafos timbrais desconexos.

Proposição 24. *$T_{2,6,2}$ é distância-transitivo.*

Prova. Provaremos que, em cada componente conexo, a distância entre dois vértices determina o índice de coincidência entre eles e, portanto, o subgrafo induzido por cada componente é distância-transitivo. Como sabemos que os componentes são isomorfos, basta que a propriedade seja demonstrada apenas para um deles. Além disso, pelo Teorema 18, a distância entre dois vértices u e v no grafo é determinada por $i_c(u, v)$. Dessa maneira, conhecendo-se a distância entre um par de vértices (u, v), sabemos a distância entre qualquer par de vértices com índice de coincidência igual a $i_c(u, v)$. Tomemos como pivô, então, o vértice $u = 0^6$. Notemos que, ao trocar exatamente 4 coordenadas de um vértice com número par de zeros, o vértice resultante também terá um número par de zeros, pois toda troca de "bit" altera a paridade. Assim, os únicos vértices no mesmo componente que u são os que possuem um número par de zeros. Portanto, vamos verificar apenas a distância entre u e os vértices $v = 0^2 1^4$, $w = 0110^3$ e $z = 1^6$.

- Os vértices u e v estão à distância 1, pois $i_c(u, v) = \ell$.
- O vértice w não é vizinho de u mas, por outro lado, é vizinho de v, de onde concluímos que $d(u, w) = 2$.
- Os vértices u e z não têm vizinhos em comum, pois os vizinhos de z possuem exatamente duas coordenadas iguais a 1, enquanto os vizinhos de u possuem

exatamente duas coordenadas iguais a 0. Como não há vértice que atenda a esses dois critérios e não há outro índice de coincidência par em $\mathbb{Z}_6$, temos que $d(u, z) = 3$.

Assim, os pares que apresentam distâncias $1, 2$ e 3 no grafo são os pares com índices de coincidência $2, 4$ e 0, respectivamente. Portanto, pelo Lema 22, o subgrafo induzido por cada componente conexo de $T_{2,6,2}$ é distância-transitivo e, pelo Lema 23, $T_{2,6,2}$ também é distância-transitivo. ■

A mesma estratégia que utilizamos na Proposição 24 será utilizada para demonstrar que os $T_{2,k,1}$ e os $T_{2,k,k-2}$ são distância-transitivos, a partir dos lemas 22 e 23.

Proposição 25. *Seja $k \geq 2$. Para quaisquer dois vértices u e v em um mesmo componente conexo de $T_{2,k,1}$, o valor de $i_c(u, v)$ é determinado pela distância d entre eles através da função:*

$$f(d) = \begin{cases} d, \text{ se } d \text{ é ímpar.} \\ k - d, \text{ se } d \text{ é par.} \end{cases}$$

Consequentemente, $T_{2,k,1}$ é distância-transitivo.

Prova. Indução em d.
Base: Se $d = 0$, então $u = v$ e $i_c(u, v) = f(0) = k$. Se $d = 1$, então u e v são adjacentes e, então, $i_c(u, v) = f(1) = 1$.
Hipótese: Suponha que $i_c(x, y) = f(d')$, para todo par de vértices x, y a uma distância $d' < d$ no grafo.
Passo: Seja $d \geq 2$. Seja w um vizinho de v em um caminho mínimo entre u e v. Certamente, $d(u, w) = d - 1$ e então, por hipótese, $i_c(u, w) = f(d - 1)$. Seja $I_c(v, w) = \{i\}$. Vamos separar em dois casos.

***Caso 1*:** Se $d-1$ é ímpar, então $i_c(u, w) = d-1$. Caso i pertença a $I_c(u, w)$, então u e v coincidem nas $k-(d-1)$ coordenadas em que u e w diferem, além de i. Ou seja, $i_c(u, v) = k-(d-1)+1 = k-(d-2)$. Entretanto, vértices com esse índice de coincidência estão à distância $d-2$, por hipótese, e o índice de coincidência determina univocamente a distância no grafo. Dessa maneira, sabemos que i não pertence a $I_c(u, w)$ e, portanto, u e v coincidem nas coordenadas em que w e v diferem, com exceção de i. Assim, $i_c(u, v) = k - (d - 1) - 1 = k - d$, como queremos.

***Caso 2*:** Se $d - 1$ é par, então $i_c(u, w) = k - d + 1$. Caso i não pertença a $I_c(u, w)$, então u e v coincidiriam nas coordenadas em que u e w diferem, com exceção de i. Assim, $i_c(u, v) = k-(k-d+1)-1 = d-2$. Mas, analogamente, vértices

com esse índice de coincidência estão à distância $d-2$, por hipótese, e o índice de coincidência determina univocamente a distância no grafo. Dessa maneira, sabemos que i pertence a $I_c(u,w)$ e, portanto, u e v coincidem nas $d-1$ coordenadas em que w e v diferem, além de i. Assim, $i_c(u,v) = d-1+1 = d$, como queremos.

Logo, $i_c(u,v) = f(d)$. Portanto, pelo Lema 22, todo componente conexo de $T_{2,k,1}$ induz um subgrafo distância-transitivo e, pelo Lema 23, $T_{2,k,1}$ é distância-transitivo. ■

De forma bastante semelhante, podemos demonstrar que os grafos $T_{2,k,k-2}$ são distância-transitivos.

Proposição 26. *Seja $k \geq 2$. Então, para quaisquer dois vértices u e v em um mesmo componente conexo de $T_{2,k,k-2}$, o valor de $i_c(u,v)$ é determinado pela distância d entre os vértices através da função*

$$f(d) = k - 2d.$$

Consequentemente, $T_{2,k,k-2}$ é distância-transitivo.

Prova. Indução em d.
Base: Se $d = 0$, então $i_c(u,v) = k$, isto é, $u = v$. Se $d = 1$, então $i_c(u,v) = \ell = k-2$.
Hipótese: Suponha que $i_c(x,y) = f(d')$ para todo par de vértices x, y a uma distância $d' < d$ no grafo.
Passo: Seja $d(u,v) \geq 2$. Considere um vértice w que é vizinho de v em um caminho mínimo entre u e v. Sabemos, então, que $i_c(w,v) = k-2$. Além disso, temos que $d(u,w) = d-1$. Assim, pela hipótese de indução, temos que $i_c(u,w) = k-2(d-1)$. Vamos analisar quais são os possíveis índices de coincidência para u e v. Sejam i e j as duas coordenadas em que w e v diferem. Podemos separar as coordenadas em $I_c(u,v)$ entre o conjunto $I_c(u,w) \setminus \{i,j\}$ das coordenadas em que os dois coincidem com w e o conjunto $\overline{I_c(u,w)} \cap \{i,j\}$ das coordenadas em que apenas u e v coincidem, isto é, em que tanto u quanto v diferem de w. Formalmente, temos que

$$I_c(u,v) = (I_c(u,w) \setminus \{i,j\}) \cup (\overline{I_c(u,w)} \cap \{i,j\}).$$

Assim, definindo $a = |I_c(u,w) \cap \{i,j\}|$ e $b = |\overline{I_c(u,w)} \cap \{i,j\}|$, ficamos com:

$$i_c(u,v) = i_c(u,w) - a + b = k - 2(d-1) - a + b$$

Como $a + b = 2$, ficamos com três casos.

***Caso 1*:** Se $a = 2$, então $i_c(u, v) = k - 2(d - 1) - 2 = k - 2(d - 2)$. Mas note que esse é o índice de coincidência entre dois vértices à distância $d - 2$, por hipótese, o que contradiz o Teorema 18. Assim, temos um absurdo!

***Caso 2*:** Se $a = 1$, então $i_c(u, v) = k - 2(d - 1)$. Novamente, a hipótese de indução nos diz que esse é o índice de coincidência entre dois vértices à distância $d - 1$, o que contradiz o Teorema 18. Logo, a deve ser igual a 0.

***Caso 3*:** Se $a = 0$, então $i_c(u, v) = k - 2(d - 1) + 2 = k - 2d$, como queremos.

Portanto, $i_c(u, v) = k - d(u, v)$ para todo par de vértices u e v. Assim, $i_c(u, v)$ é determinado por $d(u, v)$ em cada componente e, pelos lemas 22 e 23, sabemos que $T_{2,k,k-2}$ é distância-transitivo. ■

A estratégia utilizada até agora para demonstrar a distância-transitividade de grafos timbrais não é capaz de nos garantir essa propriedade para outros exemplares da classe, diferentes dos que já vimos. Para o caso geral, nos restaria uma busca exaustiva por automorfismos que satisfazem as condições desejadas. É inviável, entretanto, realizar essa busca para todos os pares de vértices à mesma distância em um grafo com n^k vértices. Felizmente, há um fato que atenua este problema. Mostraremos, a seguir, que podemos utilizar o Teorema 18 para reduzir consideravelmente o número de pares de vértices para os quais precisamos encontrar automorfismos.

Lema 27. *Sejam $u, v, x, y \in \mathbb{Z}_n^k$. Se existe $a \in Aut(T_{n,k,\ell})$ tal que $a(u, v) = (x, y)$, então, para todos os pares de vértices (u', v') e (x', y') tais que $i_c(u, v) = i_c(u', v')$ e $i_c(x, y) = i_c(x', y')$, existe $a' \in Aut(T_{n,k,\ell})$ para o qual $a'(u', v') = (x', y')$.*

Prova. Suponha a existência de um automorfismo a tal que $a(u, v) = (x, y)$. Pelo Teorema 18, existem automorfismos a_1 e a_2 tais que $a_1(u', v') = (u, v)$ e $a_2(x, y) = (x', y')$, para todos $u', v', x', y' \in \mathbb{Z}_n^k$ tais que $i_c(u, v) = i_c(u', v')$ e $i_c(x, y) = i_c(x', y')$. Assim, $a' = a_2 \circ a \circ a_1$ é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$ tal que $a'(u', v') = (x', y')$. ■

Consideremos, agora, o conjunto $I_d = \{i_c(u, v) : (u, v) \in V_d\}$. Para demonstrar a distância-transitividade de $T_{n,k,\ell}$, no caso geral, vamos demonstrar que a ação de $Aut(T_{n,k,\ell})$ é transitiva sobre o conjunto V_d, para toda distância d no grafo. Em uma busca exaustiva, precisaríamos verificar a existência de um automorfismo para todos dois pares de vértices em V_d. Entretanto, como consequência do Lema 27, podemos tomar apenas uma escolha de pares (u, v) e (x, y) em V_d para cada par de índices em I_d. Vejamos um exemplo.

Exemplo 28. *Consideremos o grafo $T_{4,3,1}$. Nele, os vértices* 000 *e* 012 *são adjacentes. Os vértices* 111 *e* 001 *são ambos vizinhos de* 012 *e, por conta disso, estão à distância* 2 *com relação a* 000*. Dessa forma, concluímos que o conjunto V_2 é formado*

pelos pares de vértices que coincidem em 0 *ou* 2 *coordenadas, isto é,* $I_2 = \{0, 2\}$. *Pelo Lema 27, para demonstrar que o grupo de automorfismos de* $T_{4,3,1}$ *age transitivamente em* V_2*, basta exibirmos um automorfismo que leva* $(000, 111)$ *em* $(000, 001)$. *Como esse é um grafo relativamente pequeno, fomos capazes de realizar essa tarefa com a ajuda de um* script *em* Python*, utilizando a biblioteca* networkx.[3] *Assim, sabemos que* $Aut(T_{4,3,1})$ *age transitivamente sobre o conjunto* V_2. *Como o grafo é arco-transitivo, sabemos que a ação de* $Aut(T_{4,3,1})$ *sobre* V_1 *também é transitiva e, como a maior distância em* $T_{4,3,1}$ *é* 2*, podemos afirmar que* $T_{4,3,1}$ *é distância-transitivo.*

Utilizamos o mesmo programa em *Python* para encontrar automorfismos que garantem a distância-transitividade de $T_{2,5,2}, T_{2,7,3}$ e $T_{3,4,1}$.

A distância-transitividade desses grafos revela a existência de automorfismos de grafos timbrais que não preservam o índice de coincidência entre dois vértices. No Capítulo 2, mostramos que todos os automorfismos no grupo $\mathcal{O} \rtimes \mathcal{P}$ possuem essa propriedade. Isso significa que o grupo de automorfismos dos grafos de Hamming, isomorfo a $S_n \wr S_k$, não se estende para todos os grafos timbrais — respondendo a questão que colocamos anteriormente.

Para encerrar a seção, vamos resumir os resultados apresentados. Demonstramos, nas páginas anteriores, que os grafos listados abaixo são distância-transitivos:

- $T_{n,2,0}$, pela Proposição 21.
- $T_{2,k,0}$, pois seu conjunto de arestas é um emparelhamento.
- $T_{2,6,2}$, pela Proposição 24.
- $T_{2,k,1}$, pela Proposição 25.
- $T_{2,k,k-2}$, pela Proposição 26.
- Os grafos $T_{2,5,2}, T_{2,7,3}, T_{3,4,1}$ e $T_{4,3,1}$, pelos automorfismos encontrados computacionalmente.

Além desses, os grafos de Hamming $T_{n,k,k-1}$ também são distância-transitivos. Na próxima seção, resolvemos o problema para os casos restantes.

3.2 Grafos timbrais não distância-transitivos

Para finalizar nossa análise sobre a distância-transitividade nos grafos timbrais, vamos mostrar que os casos cobertos na seção anterior — além dos grafos de Ham-

[3] O *script* que auxiliou na busca por automorfismos está disponível em `https://github.com/luansimoes/GrafosTimbrais/`.

ming — correspondem aos únicos grafos timbrais distância-transitivos. Nossa estratégia, para tal, será a de mostrar que, para os outros casos — salvo algumas exceções, que cobriremos separadamente — existem pares de vértices à distância 2 que possuem diferentes números de vizinhos em comum. Note que isso não pode ocorrer em grafos distância-transitivos, pois, caso contrário, haveria alguma aresta que não é preservada pelo automorfismo — ou por seu elemento inverso em $Aut(T_{n,k,\ell})$. Formalizaremos esta estratégia no lema que segue. Nele, denotamos a vizinhança em comum entre dois vértices u e v por $N(u,v)$, isto é, $N(u,v) = N(u) \cap N(v)$.

Lema 29. *Sejam (u,v) e (x,y) dois pares de vértices de $T_{n,k,\ell}$ tais que $d(u,v) = d(x,y) = 2$. Se $|N(u,v)| \neq |N(x,y)|$, então não existe automorfismo que leva (u,v) em (x,y).*

Prova. Considere que a vizinhança comum entre u e v possui um tamanho diferente do tamanho da vizinhança comum entre x e y. Assim, seja $f \in Sym(\mathbb{Z}_n^k)$ uma permutação dos vértices de $T_{n,k,\ell}$ tal que $f(u) = x$ e $f(v) = y$. Observemos que é impossível que a imagem de $N(u,v)$ por f seja $N(x,y)$, dada a diferença entre os tamanhos. Portanto, é certo que existe $w \in N(u,v)$ tal que $f(w) \notin N(x,y)$ ou, então, existe $w \in N(x,y)$ tal que $f^{-1}(w) \notin N(u,v)$. Logo, f não é um automorfismo de $T_{n,k,\ell}$, isto é, não existe automorfismo do grafo que leve (u,v) em (x,y). ■

Para seguir com a nossa estratégia, vamos encontrar uma expressão que nos dê o tamanho do conjunto $N(u,v)$. Antes de apresentarmos tal expressão, entretanto, vamos tecer alguns comentários. Utilizaremos, a seguir, a notação $\binom{a}{b}$, que indica o número de b-subconjuntos de um conjunto com a elementos, formalmente definido por $\binom{a}{b} = |\{X \subseteq \mathbb{Z}_a : |X| = b\}|$. Para dois naturais a e b tais que $b \leq a$, esse número é computado pela expressão $\frac{a!}{b!(a-b)!}$. Se $b \notin \mathbb{N}$ ou $b > a$, então não existe um subconjunto de $\mathbb{Z}_a$ com esse tamanho e, portanto, $\binom{a}{b} = 0$.

Lema 30. *Sejam u e v dois vértices de $T_{n,k,\ell}$ e $c = i_c(u,v)$. Então, o tamanho do conjunto $N(u,v)$ é dado pela função $\mathtt{cn} : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{N}$, definida por:*

$$\mathtt{cn}(c) = \begin{cases} \sum_{a=0}^{c} \binom{c}{a}\binom{k-c}{\ell-a}\binom{k-c-(\ell-a)}{\ell-a}(n-1)^{c-a}(n-2)^{k-c-2(\ell-a)}, & \text{se } n \geq 3 \\ \binom{c}{\ell-(k-c)/2}\binom{k-c}{(k-c)/2}, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Prova. Vamos contar o tamanho do conjunto $|N(u,v)|$. Primeiramente, seja $w \in \mathbb{Z}_n^k$. Considere uma partição do conjunto $I_c(u,w)$ em A e B, em que A é o conjunto das coordenadas em que u, v e w coincidem e B é o conjunto das coordenadas em que apenas u e w coincidem. Analogamente, particionaremos o conjunto $I_c(v,w)$ nas partes A e C, em que C é o conjunto das coordenadas em que apenas v e w

coincidem. Desta forma, $i_c(u,w) = \ell$ se, e somente se, $|A|+|B| = \ell$. Analogamente, $i_c(v,w) = \ell$ se, e somente se, $|A| + |C| = \ell$. Ou seja,

$$i_c(u,w) = i_c(v,w) = \ell \iff |B| = |C| = \ell - |A|.$$

Se $n = 2$, então, havendo apenas duas opções para cada termo de um vértice, w deve coincidir com u ou com v em cada coordenada na qual u e v diferem. Assim, B e C particionam o conjunto das $k - c$ coordenadas em que u e v diferem. Desta forma, $|B| + |C| = k - c$ e, então, vale que $|B| = |C|$ se, e somente se, $|B| = (k-c)/2$. Portanto, temos que

$$i_c(u,w) = i_c(v,w) = \ell \iff |B| = (k-c)/2 = \ell - |A|.$$

Agora, note que toda escolha dos conjuntos A, B e C determina um único vértice w. O tamanho de $N(u,v)$, então, pode ser contado pelo número de formas de se escolher os conjuntos A, B e C com essas restrições. O número de formas de se escolher A é o número de subconjuntos de $I_c(u,v)$ com $\ell - (k-c)/2$ elementos, isto é, $\binom{c}{\ell-(k-c)/2}$. Pelo mesmo raciocínio, o número de formar de se escolher B, dentre as coordenadas em que u e v diferem, é $\binom{k-c}{(k-c)/2}$. O conjunto C é forçado pela escolha de B e, portanto, só pode ser escolhido de uma forma. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos que, se $n = 2$, então

$$|N(u,v)| = \binom{c}{\ell - (k-c)/2}\binom{k-c}{(k-c)/2}.$$

Por outro lado, se $n \geq 3$, então B e C não necessariamente particionam o conjunto de coordenadas em que u e v diferem. Mais ainda, as escolhas de A, B e C não determinam w univocamente. Na realidade, apenas as coordenadas em $A \cup B \cup C$ têm seu valor determinado. Assim, para contar o número de vértices em $N(u,v)$, precisaremos contar o número de escolhas para os conjuntos A, B e C, juntamente com o número de vértices para cada combinação dessas escolhas. Nossa única restrição, para $n \geq 3$, é que $|B| = |C| = \ell - |A|$. Fixado $|A| = a$, podemos escolher A de $\binom{c}{a}$ formas, enquanto B pode ser escolhido de $\binom{k-c}{\ell-a}$ formas e C pode ser escolhido dentre as coordenadas de $\mathbb{Z}_k \setminus (I_c(u,v) \cup B)$ de $\binom{k-c-(\ell-a)}{\ell-a}$ formas. Ademais, para cada combinação dos conjuntos, o número de vértices que satisfazem a combinação é dado pelo número de variações que podemos fazer nas $k - 2\ell + a$ coordenadas restantes, separadas entre as $c - a$ coordenadas de $I_c(u,v) \setminus A$ e as $k - c - 2(\ell - a)$ coordenadas de $\mathbb{Z}_k \setminus (I_c(u,v) \cup B \cup C)$. Para as primeiras, u coincide com v e, portanto, temos $n - 1$ opções para cada coordenada, totalizando $(n-1)^{c-a}$ formas de escolher. Para as outras, u difere de v, deixando $n-2$ opções para cada coordenada, totalizando $(n-2)^{k-c-2(\ell-a)}$ formas de escolher. Novamente, utilizando o princípio

fundamental da contagem, e considerando que $|A|$ pode variar livremente entre 0 e c, obtemos:

$$|N(u,v)| = \sum_{a=0}^{c} \binom{c}{a}\binom{k-c}{\ell-a}\binom{k-c-(\ell-a)}{\ell-a}(n-1)^{c-a}(n-2)^{k-c-2(\ell-a)}$$

Por fim, note que nem todo valor de a entre 0 e c é de fato válido, uma vez que pode ser impossível escolher $2(\ell-a)$ coordenadas dentre as $k-c$ em que u e v diferem. Nesse caso, porém, $\binom{k-c-(\ell-a)}{\ell-a}$ será igual a 0 e, então, o caso não contribuirá para o somatório. A função $\mathtt{cn}$, portanto, fornece o número exato de vértices na interseção das vizinhanças. ■

Agora, utilizaremos a função $\mathtt{cn}$ para mostrar que, na maior parte dos grafos timbrais que ainda não averiguamos, existem índices c_1 e c_2 tais que os pares de vértices com estes índices de coincidência estão à distância 2 no grafo, mas $\mathtt{cn}(c_1) \neq \mathtt{cn}(c_2)$ e, pelo Lema 29, não existe automorfismo que leve um par com índice c_1 em um par com índice c_2. Começaremos pelos grafos timbrais com $n = 2$.

Proposição 31. *$T_{2,6,3}$ não é distância-transitivo.*

Prova. Tomemos pares de vértices com índice de coincidência 0 e 2, como por exemplo os pares $(0^6, 1^6)$ e $(0^6, 0^2 1^4)$. Pelo Lema 29, temos que:

$$\mathtt{cn}(0) = \binom{0}{0}\binom{6}{3} = 20$$
$$\mathtt{cn}(2) = \binom{2}{1}\binom{4}{2} = 12$$

Esses pares, embora estejam à mesma distância no grafo, possuem números diferentes de vizinhos em comum. Portanto, pelo Lema 30, não há automorfismo que relacione esses pares e, consequentemente, $T_{2,6,3}$ não é distância-transitivo. ■

Na Seção 3.1, mostramos que os grafos $T_{2,6,2}$ e $T_{2,7,3}$ são distância-transitivos. Além disso, argumentamos que $T_{2,4,0}$ é distância-transitivo e, pela Proposição 25, o grafo $T_{2,5,1}$ também é. Mostraremos, agora, que nenhum outro grafo da forma $T_{2,k,k-4}$ possui essa propriedade, usando a mesma estratégia da Proposição 31.

Proposição 32. *$T_{2,k,k-4}$ não é distância-transitivo, para todo $k \geq 8$.*

Prova. Seja $k \geq 8$. Pelo Lema 30, temos:

$$\mathtt{cn}(k-8) = \binom{k-8}{k-8}\binom{8}{4} = 70$$
$$\mathtt{cn}(k-6) = \binom{k-6}{k-7}\binom{6}{3} = 20(k-6)$$

Note, então, que $\mathtt{cn}(k-8) \neq \mathtt{cn}(k-6)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como ambos os valores são maiores que 0, também sabemos que pares de vértices que apresentam esses índices de coincidência estão à distância 2 em $T_{2,k,k-4}$. Logo, o Lema 29 nos permite afirmar que $T_{2,k,k-4}$ não é distância-transitivo. ■

Com esse resultado, cobrimos um número suficiente de exceções para provar o resultado para os valores restantes de ℓ e k.

Lema 33. *Seja $G = T_{2,k,\ell}$, com $2 \leq \ell \leq k-3$. Sendo assim, se G não é o $T_{2,7,3}$, o $T_{2,6,2}$ ou o $T_{2,5,2}$, então G não é distância-transitivo.*

Prova. Se $k < 7$, então $G \in \{T_{2,5,2}, T_{2,6,2}, T_{2,6,3}\}$, casos que satisfazem o enunciado, pela Proposição 31. Considere, então, $k \geq 7$. Se $\ell = k-4$ e $G \neq T_{2,7,3}$, então a Proposição 32 nos garante que G não é distância-transitivo. Assim, tomemos $\ell \neq k-4$. Vamos avaliar $\mathtt{cn}(k-2)$ e $\mathtt{cn}(k-4)$, que certamente representam pares de vértices não-adjacentes em G. Pelo Lema 30, temos que:

$$\begin{aligned}\mathtt{cn}(k-2) &= 2\binom{k-2}{\ell-1}\\ \mathtt{cn}(k-4) &= 6\binom{k-4}{\ell-2}\end{aligned}$$

Primeiramente, note que ambas as quantias são positivas, de onde tiramos que pares de vértices com esses índices de coincidência estão à distância 2 no grafo. Veremos que $\mathtt{cn}(k-2) \neq \mathtt{cn}(k-4)$ e, por consequência, o grafo não é distância-transitivo. Desenvolvendo os coeficientes binomiais, obtemos

$$\mathtt{cn}(k-2) = 2 \cdot \frac{(k-2)(k-3)(k-4)!}{(\ell-1)(\ell-2)!(k-\ell-1)(k-\ell-2)!} = \frac{2(k-2)(k-3)}{(\ell-1)(k-\ell-1)}\binom{k-4}{\ell-2}.$$

Mas note que $(\ell-1)(k-\ell-1) = -\ell^2 + k\ell + (1-k)$, parábola que tem seu ponto máximo em $(k-2)^2/4$. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned}\mathtt{cn}(k-2) &\geq \frac{8(k-2)(k-3)}{(k-2)^2}\binom{k-4}{\ell-2}\\ &= \frac{8(k-3)}{k-2}\binom{k-4}{\ell-2}\end{aligned}$$

Como $k \geq 7$, temos que $(k-3)/(k-2) \geq 4/5$ e, então:

$$\begin{aligned}\mathtt{cn}(k-2) &\geq \frac{32}{5}\binom{k-4}{\ell-2}\\ &> 6\binom{k-4}{\ell-2} = \mathtt{cn}(k-4)\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 29, G também não é distância transitivo nesse caso. Portanto, com exceção de $T_{2,5,2}, T_{2,6,2}$ e $T_{2,7,3}$, o grafo $T_{2,k,\ell}$ não é distância-transitivo, para todo ℓ natural no intervalo $[2, k-3]$. ■

Para $n = 2$, os únicos grafos timbrais não cobertos pelo Lema 33 são exatamente os da forma $T_{2,k,k-1}$, $T_{2,k,k-2}$, $T_{2,k,0}$ e $T_{2,k,1}$, casos em que já demonstramos a distância-transitividade. Seguiremos com os casos em que $n \geq 3$, começando pelos $T_{n,k,k-2}$. Lembramos que os grafos $T_{n,2,0}$ e $T_{n,2,1}$ são distância-transitivos, como argumentamos na Seção 3.1.

Lema 34. *Seja $G = T_{n,k,k-2}$, para $n \geq 3$ e $k \geq 3$. Se G não é o $T_{4,3,1}$, então G não é distância-transitivo.*

Prova. Considere os pares de vértices $(0^k, 0^{k-3}1^3)$ e $(0^k, 0^{k-1}1)$, que estão à distância 2 em G, pois não são adjacentes e o vértice $0^{k-2}12$ é vizinho dos três vértices em questão. Vamos mostrar que $N(0^k, 0^{k-3}1^3)$ induz um subgrafo livre de triângulos, enquanto $N(0^k, 0^{k-1}1)$ possui triângulos, exceto nos casos $T_{3,3,1}$ e $T_{3,4,1}$, que lidaremos separadamente.

Afirmação. *O subgrafo induzido por $N(0^k, 0^{k-3}1^3)$ é livre de triângulos.*

Prova da Afirmação. Substituindo os valores na equação dada pelo Lema 30, temos:

$$\mathtt{cn}(k-3) = \sum_{a=0}^{k-3} \binom{k-3}{a} \binom{3}{k-2-a} \binom{a-k+5}{k-2-a} (n-1)^{k-3-a} (n-2)^{2a-2k+7}$$

Perceba que o único termo não-nulo do somatório se dá quando $a = k-3$ pois, para todo $a \leq k-4$, temos que $a-k+5 < k-2-a$ e, portanto, $\binom{a-k+5}{k-2-a} = 0$. Isso significa que todo vértice que é simultaneamente vizinho de 0^k e $0^{k-3}1^3$ coincide com ambos nas $k-3$ primeiras coordenadas, isto é, possui 0^{k-3} como prefixo. Dessa forma, podemos distinguir os vértices em $N(0^k, 0^{k-3}1^3)$ apenas pelas três últimas coordenadas, dentre as quais cada par de vértices coincide em exatamente uma. Em outras palavras, podemos identificar essa vizinhança com o subgrafo de $T_{n,3,1}$ induzido pela vizinhança $N(000, 111)$, que nomearemos por H. Mostraremos, agora, que H é livre de triângulos. Lembremos que todo vértice de H é tal que exatamente uma coordenada possui o valor 0 e exatamente uma coordenada possui o valor 1. Para todo vértice $u \in N(000, 111)$, vamos definir $\mathbf{0}_u$ como a coordenada tal que $u_{\mathbf{0}_u} = 0$ e $\mathbf{1}_u$ como a coordenada tal que $u_{\mathbf{1}_u} = 1$. Suponha que existe um triângulo formado pelos vértices u, v e w em H. Considere três casos.

***Caso 1*:** Se $\mathbf{0}_u = \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_w$, então $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v$ e $\mathbf{1}_w$ são três coordenadas distintas, pois u, v e w coincidem em uma única coordenada. A coordenada $\mathbf{0}_u$, entretanto, também deve diferir de $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v$ e $\mathbf{1}_w$, o que é um absurdo, pois $u, v, w \in \mathbb{Z}_n^3$.

***Caso 2*:** Se apenas um par de vértices coincide em uma coordenada $\mathbf{0}$ — sem perda de generalidade, considere $\mathbf{0}_u = \mathbf{0}_v \neq \mathbf{0}_w$ — então w difere de ambos u e v nas coordenadas $\mathbf{0}_u$ e $\mathbf{0}_w$. Na coordenada restante, só pode coincidir com um deles e, portanto, uvw não é um triângulo. Absurdo.

***Caso 3*:** Se $\mathbf{0}_u, \mathbf{0}_v$ e $\mathbf{0}_w$ são distintos, então u coincide com v e w em coordenadas distintas, isto é, $\mathbf{1}_u = \mathbf{1}_v \neq \mathbf{1}_w$ ou $\mathbf{1}_u = \mathbf{1}_w \neq \mathbf{1}_v$, análogo ao caso 2.

Logo, H é livre de triângulos e, portanto, o subgrafo induzido por $N(0^k, 0^{k-3}1^3)$ em $T_{n,k,k-2}$ também é livre de triângulos, como queríamos. □

Por outro lado, considere o subgrafo H' induzido por $N(0^k, 0^{k-1}1)$ em G. Vamos avaliar dois casos.

***Caso 1*:** Se $n \geq 5$, então $0^{k-2}12, 0^{k-2}23$ e $0^{k-2}34$ formam um triângulo.

***Caso 2*:** Se $k \geq 4$, então $0^{k-4}0012, 0^{k-4}0102$ e $0^{k-4}1002$ formam um triângulo.

Portanto, em ambos os casos, temos que os subgrafos induzidos por $N(0^k, 0^{k-3}1^3)$ e $N(0^k, 0^{k-1}1)$ não são isomorfos. Então, não há automorfismo que leva $(0^k, 0^{k-3}1^3)$ em $(0^k, 0^{k-1}1)$. Resta-nos examinar os grafos $T_{4,3,1}$ e $T_{3,3,1}$. Para $T_{3,3,1}$, temos que $\mathtt{cn}(0) = 6$ e $\mathtt{cn}(2) = 4$ e, portanto, não há automorfismo que satisfaça o que queremos. Logo, $T_{3,3,1}$ não é distância-transitivo. O grafo $T_{4,3,1}$, como já vimos anteriormente, é distância-transitivo. Dessa forma, se $G \neq T_{4,3,1}$, então G não é distância-transitivo. ■

Agora, o único caso restante é aquele em que $n \geq 3$ e $\ell \leq k-3$.

Lema 35. *Seja G um grafo timbral com $n \geq 3$ e $\ell \leq k-3$. Se $G \neq T_{3,4,1}$, então G não é distância-transitivo.*

Prova. Como $\ell \leq k-3$, podemos examinar o $\mathtt{cn}$ de pares de vértices com índices de coincidência $k-2$ e $k-1$. Tomando como exemplo os pares de vértices $(0^k, 0^{k-2}1^2)$ e $(0^k, 0^{k-1}1)$, podemos ver que esses índices de coincidência implicam em uma distância igual 2 em G, pois o vértice $0^\ell 2^{k-\ell}$, por exemplo, é adjacente a todos os vértices anteriores.

Afirmação. *Os únicos grafos que satisfazem $\mathtt{cn}(k-2) = \mathtt{cn}(k-1)$ são os $T_{3,3\ell+1,\ell}$, com $\ell \geq 1$.*

Prova da Afirmação. Pelo Lema 30, temos que:

$$\mathtt{cn}(k-2) = \binom{k-2}{\ell}(n-1)^{k-2-\ell}(n-2)^2 + \binom{k-2}{\ell-1}2(n-1)^{k-1-\ell}$$
$$\mathtt{cn}(k-1) = \binom{k-1}{\ell}(n-1)^{k-1-\ell}(n-2).$$

Entretanto, $\binom{k-1}{\ell} = \binom{k-2}{\ell} + \binom{k-2}{\ell-1}$, para todo $\ell \geq 0$, de onde obtemos:

$$\begin{aligned}\texttt{cn}(k-1) &= \binom{k-2}{\ell}(n-1)^{k-1-\ell}(n-2) + \binom{k-2}{\ell-1}(n-1)^{k-1-\ell}(n-2) = \\ \texttt{cn}(k-2) &+ \binom{k-2}{\ell}(n-1)^{k-2-\ell}(n-2) + \binom{k-2}{\ell-1}(n-1)^{k-1-\ell}(n-4).\end{aligned}$$

Dessa forma, para que as vizinhanças comuns possuam o mesmo tamanho, é necessário que a diferença entre $\texttt{cn}(k-1)$ e $\texttt{cn}(k-2)$ seja nula, isto é, que

$$\binom{k-2}{\ell}(n-1)^{k-2-\ell}(n-2) + \binom{k-2}{\ell-1}(n-1)^{k-1-\ell}(n-4) = 0.$$

Note, entretanto, que o primeiro termo da equação é positivo, uma vez que $n \geq 3$, $k-2-\ell \geq 1$ e $\binom{k-2}{\ell}$ é positivo. Para que a equação seja satisfeita, então, é necessário que o segundo termo seja negativo, o que só ocorre quando $n = 3$ e $\ell \geq 1$. Substituindo na equação, obtemos

$$\binom{k-2}{\ell}2^{k-2-\ell} - \binom{k-2}{\ell-1}2^{k-1-\ell} = 0.$$

Utilizando a identidade $\binom{a}{b} = \binom{a}{b-1}\frac{a-b+1}{b}$, ficamos com

$$\binom{k-2}{\ell-1}\frac{k-\ell-1}{\ell}2^{k-\ell-2} - \binom{k-2}{\ell-1}2^{k-\ell-1} = 0.$$

A partir daí, temos:

$$\begin{aligned}\binom{k-2}{\ell-1}2^{k-\ell-2}\left(\frac{k-\ell-1}{\ell} - 2\right) &= 0 \\ \frac{k-3\ell-1}{\ell} &= 0\end{aligned}$$

e, portanto, $k = 3\ell + 1$. □

Assim, se G não é da forma $T_{3,3\ell+1,\ell}$, então não é distância-transitivo. Resta-nos mostrar que nenhum grafo da forma $T_{3,3\ell+1,\ell}$, com exceção de $T_{3,4,1}$, é distância-transitivo. Para tal, consideremos $n = 3$, $k = 3\ell + 1$ e $\ell \neq 1$. Vamos comparar $\texttt{cn}(3\ell-1)$ e $\texttt{cn}(3\ell-2)$. Note que pares de vértices com esses índices de coincidência estão à distância 2 no grafo, a exemplo dos pares $(0^{3\ell+1}, 0^{3\ell-1}1^2)$ e $(0^{3\ell+1}, 0^{3\ell-2}1^3)$, cujos vértices são todos adjacentes a $0^\ell 2^{2\ell+1}$. Se ℓ fosse igual a 1, entretanto, os

vértices do segundo par seriam adjacentes. Assim, o Lema 30 nos fornece:

$$\begin{aligned}
\mathtt{cn}(3\ell-1) &= \binom{3\ell-1}{\ell}2^{2\ell-1} + \binom{3\ell-1}{\ell-1}2^{2\ell+1} \\
\mathtt{cn}(3\ell-2) &= \binom{3\ell-2}{\ell-1}3\cdot 2^{2\ell} + \binom{3\ell-2}{\ell}2^{2\ell-2}
\end{aligned}$$

Novamente, usando a identidade $\binom{3\ell-1}{\ell} = \binom{3\ell-2}{\ell} + \binom{3\ell-2}{\ell-1}$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\mathtt{cn}(3\ell-1) &= \binom{3\ell-2}{\ell}2^{2\ell-1} + \binom{3\ell-2}{\ell-1}2^{2\ell-1} + \binom{3\ell-1}{\ell-1}2^{2\ell+1} \\
&= \mathtt{cn}(3\ell-2) + \binom{3\ell-2}{\ell}2^{2\ell-2} - 5\binom{3\ell-2}{\ell-1}2^{2\ell-1} + \binom{3\ell-1}{\ell-1}2^{2\ell+1}
\end{aligned}$$

Para que as vizinhanças tenham o mesmo tamanho, precisaríamos que

$$\binom{3\ell-2}{\ell}2^{2\ell-2} - 5\binom{3\ell-2}{\ell-1}2^{\ell-1} + \binom{3\ell-1}{\ell-1}2^{2\ell+1} = 0.$$

Contudo, note que todos os termos do lado esquerdo da equação são não-nulos, uma vez que $\ell \geq 2$. Assim, podemos usar a identidade $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ para obter:

$$\begin{aligned}
\frac{(3\ell-2)!2^{2\ell-2}}{\ell!(2\ell-2)!} - 5\frac{(3\ell-2)!2^{2\ell-1}}{(\ell-1)!(2\ell-1)!} + \frac{(3\ell-1)!2^{2\ell+1}}{(\ell-1)!(2\ell)!} &= 0 \\
\binom{3\ell-2}{\ell-1}2^{2\ell-2}\Big(\frac{2\ell-1}{\ell} - 5\cdot 2 + 2^3\frac{3\ell-1}{2\ell}\Big) &= 0 \\
\frac{2\ell-1}{\ell} - 10 + \frac{8(3\ell-1)}{2\ell} &= 0 \\
4\ell - 2 - 20\ell + 24\ell - 8 &= 0 \\
8\ell &= 10 \\
\ell &= \frac{10}{8}
\end{aligned}$$

Dessa forma, não há valor inteiro de ℓ para o qual $\mathtt{cn}(3\ell-1) = \mathtt{cn}(3\ell-2)$ e, portanto, as vizinhanças compartilhadas entre os dois pares de vértices que escolhemos possuem tamanhos distintos, o que nos leva a afirmar que não há automorfismo que leve um par de vértices no outro, para todo $\ell \geq 2$. Logo, se $G \neq T_{3,4,1}$, então G não é distância-transitivo. ■

O Lema 35 encerra os casos que ainda não havíamos examinado.

Por fim, resumimos os resultados do capítulo.

Teorema 36. *Se G é um grafo timbral, então G é distância-transitivo se, e somente se, uma das condições abaixo é satisfeita:*

- *G é um grafo de Hamming.*

- *G pertence a uma das classes $T_{n,2,0}$, $T_{2,k,0}$, $T_{2,k,1}$ ou $T_{2,k,k-2}$.*
- *G pertence ao conjunto $\{T_{2,5,2}, T_{2,6,2}, T_{2,7,3}, T_{3,4,1}, T_{4,3,1}\}$.*

PROVA. Pelas Proposições 24, 25, 26, 31 e 32, e Lemas 27, 33, 34 e 35. ■

Capítulo 4

Hamiltonicidade de grafos timbrais

Neste capítulo, estudamos a existência de *ciclos hamiltonianos* em grafos timbrais, onde um ciclo hamiltoniano em um grafo é um ciclo que passa por todos os seus vértices. Dizemos que um grafo *é hamiltoniano* se possui um tal ciclo.

Revisamos o resultado provado por Winter e Akhmedov [2] – de que todo grafo timbral com $n \geq 3$ é hamiltoniano – e apresentamos uma demonstração alternativa para ele, baseada no fato de que todo grafo de Cayley conexo e com ciclos é hamiltoniano [28]. Além disso, identificamos os casos dos grafos timbrais com $n = 2$ que não são conexos e, para os casos restantes, provamos por indução a existência de um ciclo hamiltoniano.

O capítulo está organizado em duas seções, cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 4.1, fornecemos um novo olhar sobre o trabalho de Winter e Akhmedov, relacionando o estudo da hamiltonicidade ao campo dos *códigos de Gray combinatórios* e indicando um caminho de pesquisa para trabalhos futuros.

Na Seção 4.2, apresentamos a demonstração alternativa de que grafos timbrais com $n \geq 3$ são hamiltonianos, além de provar que os únicos grafos timbrais não-hamiltonianos são aqueles para os quais $n = 2$ e $k - \ell$ é par.

4.1 Morfologias timbrais e ciclos hamiltonianos

O principal enfoque dado em [2] é na obtenção de *morfologias* musicais, isto é, conjuntos ordenados de elementos musicais, cuja ordem respeita restrições pré-determinadas. Para os grafos timbrais, o objetivo é construir morfologias sobre o conjunto de todas as orquestrações de k alturas em n instrumentos, de modo que a *restrição morfológica* seja representada pela existência de uma aresta em $T_{n,k,\ell}$ entre duas orquestrações subsequentes. Em outras palavras, as morfologias timbrais estudadas em [2] equivalem a caminhos hamiltonianos em grafos timbrais.

Na realidade, Akhmedov e Winter vão além e buscam por morfologias cíclicas, avaliando a existência de ciclos hamiltonianos em $T_{n,k,\ell}$. Essa busca está em linha

com a ideia de "ciclos parcimoniosos" — ou *smooth cycles*, como estudados em [15] — e segue um paradigma de composição baseado na enumeração de estruturas musicais, semelhante ao paradigma utilizado por Tom Johnson na obra *The Chord Catalogue* [25], em que todos os possíveis acordes dentro de uma oitava são tocados seguindo um critério de ordenação. A existência de um ciclo hamiltoniano nesse grafo permite a criação de uma música baseada na enumeração de todas as orquestrações possíveis para os parâmetros escolhidos, tocando-as em sequência e, finalmente, retornando à orquestração inicial. Essa é a ideia utilizada na composição da peça "maximum change" ([40]), do próprio Winter.

Na Seção 1.1, exibimos a Figura 1.1, que ilustra uma sequência de orquestrações de 4 alturas em 2 instrumentos. Retornando a ela, podemos notar que a sequência de orquestrações apresentada corresponde a uma morfologia cíclica, cuja restrição morfológica é a de que apenas uma altura se altere entre orquestrações consecutivas. Essa morfologia equivale a um ciclo hamiltoniano no grafo $T_{2,4,3}$, que agora destacamos através da Figura 4.1.

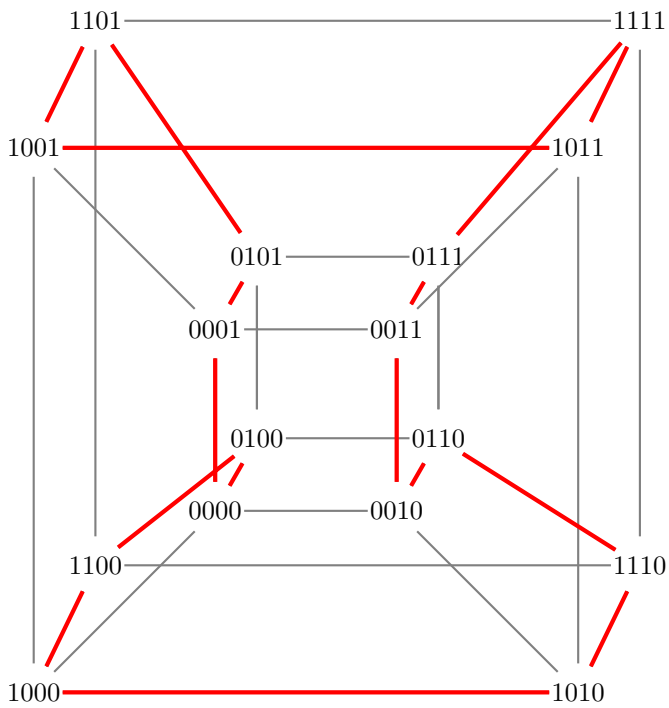

Figura 4.1: Ciclo hamiltoniano em $T_{2,4,3}$ referente à Figura 1.1.

Uma observação mais atenta nos permite notar a semelhança entre a obtenção de morfologias timbrais e o problema da construção de *códigos de Gray* [20], advindo da teoria da informação. Um código de Gray, em sua concepção original, é uma sequência das 2^k palavras binárias de comprimento k, dispostas de tal forma que palavras adjacentes no código diferem em apenas um bit. Se a última palavra no código também difere da primeira em apenas um bit, o código é dito *cíclico* [33]. O

código $00, 01, 11, 10$ é um exemplo de código de Gray cíclico com $k = 2$, e é isomorfo ao ciclo hamiltoniano $00 \to 01 \to 11 \to 10 \to 00$ em $T_{2,2,1}$.

De modo geral, todo ciclo hamiltoniano em $T_{2,k,k-1}$ corresponde a um código de Gray cíclico. A semelhança entre os problemas se torna ainda mais notória quando generalizamos a noção de código de Gray. Os trabalhos [35] e [14] apresentam códigos n-ários, isto é, com palavras que utilizam $\mathbb{Z}_n$ como alfabeto. Esses códigos se assemelham a caminhos hamiltonianos em $T_{n,k,k-1}$, com a exceção de que os códigos de Gray n-ários exigem não apenas que palavras consecutivas difiram por uma coordenada, mas também que a diferença entre os valores na coordenada em questão seja de no máximo uma unidade.

Carla Savage, em [33], descreve um código de Gray combinatório como um "método para a geração de objetos combinatórios, de maneira que objetos sucessivos difiram de modo predeterminado, costumeiramente pequeno". No mesmo trabalho, Savage destaca a estreita relação entre os códigos de Gray combinatórios e caminhos ou ciclos hamiltonianos em grafos cujos vértices são objetos combinatórios, os quais são, na realidade, duas formulações equivalentes de um mesmo problema. Com essa generalização, a busca por morfologias empreendida por Akhmedov e Winter pode ser vista sob a ótica dos códigos de Gray combinatórios, reforçando sua relevância para além da perspectiva musical. Recentemente, em [42], o próprio Winter abordou códigos de Gray, explicitamente, como forma de construir morfologias, como a que utilizou em sua composição *gray codes* [41].

Embora Akhmedov e Winter busquem apenas decidir sobre a existência de ciclos hamiltonianos em $T_{n,k,\ell}$, o resultado encontrado por eles – de que os $T_{n,k,\ell}$ são hamiltonianos para todo $n \geq 3$ – credita os grafos timbrais aos estudos relacionados a códigos de Gray. Um próximo passo nesse sentido, tanto do ponto de vista computacional quanto musical, seria analisar as propriedades dos ciclos hamiltonianos existentes em $T_{n,k,\ell}$ sob a perspectiva dos códigos de Gray combinatórios, avaliando seus efeitos sobre composições como as abordadas por Akhmedov e Winter em [2].

Na próxima seção, complementamos o estudo de hamiltonicidade dos grafos timbrais, determinando exatamente os critérios para a hamiltonicidade de $T_{n,k,\ell}$ e, ao mesmo tempo, pavimentando o caminho para a busca por códigos de Gray combinatórios nos grafos timbrais.

4.2 Hamiltonicidade de grafos timbrais

A demonstração da hamiltonicidade de $T_{n,k,\ell}$, com $n \geq 3$, apresentada por Winter e Akhmedov, baseia-se em propriedades de produtos de grafos em que um dos fatores é hamiltoniano. Nesta seção, utilizaremos uma abordagem um pouco diferente para provar este mesmo resultado e, ainda, estender para o caso $n = 2$. Para tal, nos

utilizaremos de um conhecido resultado sobre a hamiltonicidade de grafos de Cayley, demonstrado por Chen e Quimpo [13] e, paralelamente, por Marušič [28].

Teorema 37. *Todo grafo de Cayley conexo de um grupo abeliano com ordem pelo menos* 3 *é hamiltoniano.*

Um grupo A é abeliano se a operação de grupo é comutativa, isto é, se, para todos $a, b \in A$, vale que $ab = ba$. Daí, temos o resultado que segue.

Corolário 38. *$T_{n,k,\ell}$ é hamiltoniano se, e somente se, é conexo e $n^k \geq 3$.*

Prova. Como mencionamos na Seção 2.3, $T_{n,k,\ell}$ é o grafo de Cayley $Cay(\mathbb{Z}_n^k, N(0^k))$. Além disso, $\mathbb{Z}_n^k$ é abeliano, isto é, a operação de soma de vetores é comutativa. Como a hamiltonicidade depende da conexidade e da existência de pelo menos três vértices, o resultado vale. ■

Note que, se $n \geq 3$, então $T_{n,k,\ell}$ possui ao menos três vértices e, então, podemos avaliar sua conexidade.

Lema 39. *$T_{n,k,\ell}$ é conexo, para todo $n \geq 3$.*

Prova. Vamos demonstrar que, para todo $c \in \mathbb{Z}_k$, existe caminho entre o vértice 0^k e algum vértice que coincide com este em exatamente c coordenadas, isto é, que possui exatamente c zeros. Note que, pelo Teorema 18, isso garante a existência de um caminho entre quaisquer dois vértices u e v tais que $i_c(u, v) = c$. Assim, seja $c \in \mathbb{Z}_k$ e $n \geq 3$. Separamos em três casos:

***Caso 1*:** Se $c = \ell$, então qualquer vértice com exatamente c zeros é adjacente a 0^k.

***Caso 2*:** Se $c > \ell$, então existe o caminho $0^k \to 0^\ell 1^{k-\ell} \to 0^c 2^{k-c}$.

***Caso 3*:** Se $c < \ell$, então $\ell - c > 0$. Por simplicidade, consideremos $m = k - \ell$. Assim, seja q o quociente e r o resto deixado na divisão euclidiana de $\ell - c$ por m, isto é, $(\ell - c) = qm + r$, para $0 \leq r < m$. Nesse caso, a sequência de vértices

$$0^k \to 0^\ell 1^m \to 0^{\ell-m} 1^{2m} \to \ldots \to 0^{\ell-qm} 1^{(q+1)m} \to 0^{\ell-(qm+r)} 2^m 1^{qm+r}$$

é um caminho em $T_{n,k,\ell}$ entre 0^k e $0^c 2^m 1^{\ell-c}$ e, portanto, todos dois vértices com índice de coincidência c estão no mesmo componente conexo de $T_{n,k,\ell}$.

Logo, existe caminho entre todo par de vértices (u, v) em $T_{n,k,\ell}$ e, portanto, o grafo é conexo. ■

O $T_{2,1,0}$ — isto é, o K_2 — é o único grafo timbral que possui menos de 3 vértices. Daí, sabemos que este não é hamiltoniano. Além disso, temos alguns exemplos de grafos timbrais desconexos, como os $T_{2,k,0}$, com $k \geq 2$, exibidos na Figura 1.2. O conjunto de arestas de um $T_{2,k,0}$ é um emparelhamento — o grafo possui grau 1 — e, portanto, este grafo é desconexo. Lidaremos agora com os outros casos de grafos timbrais desconexos. Para tal, consideremos que um vértice é *par* se possui um número par de 1's, ou *ímpar*, caso contrário.

Lema 40. *Se $k - \ell$ é par, então $T_{2,k,\ell}$ é desconexo.*

PROVA. Seja $u \in \mathbb{Z}_2^k$ e $k - \ell$ par. Observamos que, ao trocar uma única coordenada de u, sempre alteramos sua paridade, isto é, aumentamos ou reduzimos em uma unidade o número de 1's. Dessa forma, ao trocar um número par de coordenadas de u, a paridade do vértice resultante será igual à de u. Assim, se $k - \ell$ é par, todos os vizinhos de u possuem a mesma paridade que u, pois vértices adjacentes diferem em exatamente $k - \ell$ coordenadas. Essa mesma propriedade se estende para os vizinhos de u e, por consequência, todos os vértices alcançáveis a partir de u possuem a mesma paridade que ele. Portanto, não existe caminho em $T_{2,k,\ell}$ entre u e qualquer vértice que não tenha a mesma paridade que u. Como existem vértices pares e vértices ímpares, sabemos que $T_{2,k,\ell}$ é desconexo. ■

Para o caso restante — com $n = 2$, $\ell \geq 1$ e $k - \ell$ ímpar — poderíamos nos contentar em provar apenas a conexidade do grafo mas, ao invés disso, vamos exibir uma prova indutiva da hamiltonicidade de $T_{2,k,\ell}$. O caso base dessa indução é quando $\ell = 1$ e $k - \ell$ é par, caso em que o grafo $T_{2,k,1}$ é isomorfo ao hipercubo $T_{2,k,k-1}$ e, portanto, hamiltoniano.

Proposição 41. *$T_{2,k,1}$ é isomorfo ao hipercubo Q_k, para todo k par.*

PROVA. Seja $f : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} u, \text{ se } u \text{ é par.} \\ \overline{u}, \text{ se } u \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

em que $\overline{u}$ denota o vértice que difere de u em todas as coordenadas. Vamos mostrar que f é um isomorfismo de $T_{2,k,1}$ em $T_{2,k,k-1}$. Primeiramente, sabemos que f é injetiva, pois, como k é par, a troca de todas as coordenadas preserva paridade. Em outras palavras, f age como a identidade nos pares e realiza trocas apenas entre os ímpares. Mais ainda, o número de vértices dos dois grafos é o mesmo e, portanto, f é uma bijeção. Agora, seja $u, v \in \mathbb{Z}_2^k$. Vamos mostrar que $i_c(f(u), f(v)) = k - 1$ se, e somente se, $i_c(u, v) = 1$, isto é, que f preserva a existência de arestas.

($\Rightarrow$) Seja $i_c(u,v) = 1$. Certamente, $k-1$ é ímpar e, assim, u e v possuem paridades distintas, pelo mesmo argumento que utilizamos no Lema 40. Sem perda de generalidade, consideremos que u é par e v é ímpar. Neste caso, devemos analisar se $f(u)f(v) = u\overline{v}$ é uma aresta de $T_{2,k,k-1}$. Como $i_c(u,v) = 1$ e os vértices v e $\overline{v}$ diferem em todas as coordenadas, sabemos que u e $\overline{v}$ coincidem em $k-1$ coordenadas e, portanto, $u\overline{v} \in E(T_{2,k,k-1})$.

($\Leftarrow$) Seja $i_c(u,v) \neq 1$. Se u e v possuem a mesma paridade, então $f(u)$ e $f(v)$ também possuem a mesma paridade e, portanto, diferem em um número par de coordenadas. Como $k-1$ é ímpar, eles certamente não são adjacentes. Se, por outro lado, u e v possuem paridades distintas, então $i_c(f(u), f(v)) = k - i_c(u,v) \neq k-1$. Portanto, $f(u)$ e $f(v)$ não são adjacentes em $T_{2,k,k-1}$.

Logo, $T_{2,k,1}$ é isomorfo a $T_{2,k,k-1}$, para todo k par. ■

Embora o hipercubo Q_k seja sabidamente hamiltoniano, para todo $k \geq 2$, nossa construção indutiva será mais bem aproveitada ao fornecermos uma segunda demonstração, auto-contida, da hamiltonicidade de $T_{2,k,1}$, para k par.

Definição 42. Sejam $r \in \mathbb{Z}_k$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_2^r$. Denotamos por X_α o conjunto dos vértices pares de $T_{2,k,\ell}$ que possuem α como prefixo. Analogamente, denotamos por Y_α o conjunto dos vértices ímpares de G que possuem α como prefixo. Formalmente, $X_\alpha = \{u \in \mathbb{Z}_2^k : u \text{ é par e } u_0u_1\cdots u_r = \alpha\}$ e $Y_\alpha = \{u \in \mathbb{Z}_2^k : u \text{ é ímpar e } u_0u_1\cdots u_r = \alpha\}$.

A ideia por trás da Definição 42 é a de utilizar prefixos para encontrar subgrafos que facilitem a construção de um ciclo hamiltoniano no grafo como um todo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 43. *Consideremos o grafo $T_{2,4,1}$. Nele, poderíamos tomar o prefixo $\alpha = 00$ para obter os conjuntos $X_{00} = \{0000, 0011\}$ e $Y_{00} = \{0001, 0010\}$. Equivalentemente, o prefixo 11 induziria os conjuntos $X_{11} = \{1100, 1111\}$ e $Y_{11} = \{1101, 1110\}$. Note que o conjunto $X_{00} \cup Y_{11}$ induz um subgrafo isomorfo a um C_4, tal qual o conjunto $X_{11} \cup Y_{00}$.*

Em nossa demonstração, usamos essa ideia para particionar o grafo $T_{2,2m,1}$ por prefixos de tamanho 2. Ademais, queremos construir a partição de modo que os subgrafos induzidos pelas partes sejam isomorfos a $T_{2,2(m-1),1}$, permitindo-nos aplicar a hipótese de indução.

Lema 44. *Seja $G = T_{2,2m,1}$, para $m \geq 2$. Então, o subgrafo $G[X_\alpha \cup Y_{\overline{\alpha}}]$ é isomorfo a $T_{2,2(m-1),1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2^2$.*

Prova. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_2^2$. Vamos demonstrar que $H = G[X_\alpha \cup Y_{\overline{\alpha}}] \simeq T_{2,2(m-1),1}$, através da função $f : V(H) \to \mathbb{Z}_2^{2(m-1)}$ definida por $f(v) = v_2v_3\cdots v_{2m-1}$. Em outras

palavras, f é a função que descarta os primeiros dois elementos de cada vértice. Primeiramente, precisamos mostrar que f é uma bijeção. Para tal, note que o número de vértices de H é exatamente $\frac{1}{4}$ do número de vértices pares somado com $\frac{1}{4}$ do número de vértices ímpares de G. Assim, temos que $|V(H)| = \frac{1}{4} \cdot 2^{2m} = 2^{2(m-1)}$. Portanto, o domínio e o contradomínio de f possuem a mesma cardinalidade. Mostraremos, agora, que f é injetiva, isto é, que $f(u) \neq f(v)$ para todo par de vértices distintos u e v. Sejam u e v dois vértices distintos em H.

***Caso 1*:** Se u e v possuem a mesma paridade, então coincidem nas duas primeiras coordenadas. Assim, sabemos que $f(u)$ é diferente de $f(v)$ pois, senão, u e v seriam o mesmo vértice.

***Caso 2*:** Se u e v possuem paridades distintas, então seus prefixos possuem a mesma paridade pois, como $2m$ é par, a paridade de α é igual à paridade de $\overline{\alpha}$. Assim, a diferença na paridade de u e v está exatamente nas últimas $2m-2$ coordenadas e, portanto, $f(u)$ é diferente de $f(v)$.

Logo, f é uma bijeção. Resta-nos provar que essa bijeção é um isomorfismo, isto é, que $uv \in E(H)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(T_{2,2(m-1),1})$.

($\Rightarrow$) Sejam $u, v \in V(H)$ tais que $i_c(u, v) = 1$. Nesse caso, sabemos que os vértices possuem paridades distintas, pois eles diferem em um número ímpar de coordenadas. Isso significa que u e v certamente diferem nas duas primeiras coordenadas e, portanto, a única coordenada em que eles coincidem está dentre as $2m - 2$ últimas coordenadas. Assim, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em $T_{2,2(m-1),1}$.

($\Leftarrow$) Sejam u' e v' dois vértices adjacentes em $T_{2,2(m-1),1}$. Nesse caso, sabemos que eles diferem em um número ímpar de coordenadas e, portanto, possuem paridades distintas. Sendo assim, os vértices $u = f^{-1}(u')$ e $v = f^{-1}(v')$ também possuem paridades distintas, pois os prefixos α e $\overline{\alpha}$ possuem a mesma paridade. Assim, u e v diferem nas duas primeiras coordenadas, pois um deles pertence a X_α e outro a $Y_{\overline{\alpha}}$. Logo, a única coordenada em que u' e v' coincidem corresponde à única coordenada em que u e v coincidem e, portanto, $uv \in E(H)$.

Logo, H é isomorfo a $T_{2,2(m-1),1}$. ■

Com a estratégia para a aplicação da hipótese de indução formalizada, através do Lema 44, podemos demonstrar a hamiltonicidade de $T_{2,k,1}$, com k par.

Lema 45. *$T_{2,k,1}$ é hamiltoniano, para todo k par.*

Prova. Seja $G = T_{2,2m,1}$, para $m \in \mathbb{N}$. Seguiremos por indução em m.
Base: $T_{2,2,1}$ é o C_4, trivialmente hamiltoniano.
Hipótese: Suponha que $T_{2,2m',1}$ é hamiltoniano, para todo $m' < m$.
Passo: Seja $m \geq 2$. Consideremos os subgrafos $H_0 = G[X_{00} \cup Y_{11}]$, $H_1 = G[X_{01} \cup Y_{10}]$, $H_2 = G[X_{11} \cup Y_{00}]$ e $H_3 = G[X_{10} \cup Y_{01}]$. Note, primeiramente, que esses quatro subgrafos particionam o grafo G, uma vez que todos os vértices de G estão representados em exatamente um dos subgrafos. Ademais, pelo Lema 44, todos esses subgrafos são isomorfos ao $T_{2,2(m-1),1}$ que, por hipótese, é hamiltoniano. Assim, seja C um ciclo hamiltoniano de $T_{2,2(m-1),1}$ e uv uma aresta contida em C. Além disso, seja C' o ciclo obtido a partir de C pelo automorfismo que troca todas as coordenadas de cada vértice, que certamente contém a aresta $\overline{uv}$. Consideremos, sem perda de generalidade, que u é um vértice par e v é um vértice ímpar, uma vez que apenas vértices de paridades distintas podem ser adjacentes em G. Sejam $P = C - uv$ um uv-caminho e $P' = C' - \overline{uv}$ um $\overline{vu}$-caminho em $T_{2,2(m-1),1}$. Consideremos, então, suas versões P_i e P'_i em cada subgrafo H_i, que consistem na inserção do respectivo prefixo a cada vértice de P e P', a depender de sua paridade. Note que:

- P_0 possui $00u$ e $11v$ como extremidades. Note que a extremidade $11v$ é adjacente a $01\overline{v}$, uma vez que coincidem apenas na segunda coordenada.
- P'_1 possui $01\overline{v}$ e $10\overline{u}$ como extremidades. Note que a extremidade $10\overline{u}$ é adjacente a $11u$, uma vez que coincidem apenas na primeira coordenada.
- P_2 possui $11u$ e $00v$ como extremidades. Note que a extremidade $00v$ é adjacente a $10\overline{v}$, uma vez que coincidem apenas na segunda coordenada.
- P'_3 possui $10\overline{v}$ e $01\overline{u}$ como extremidades. Note que a extremidade $01\overline{u}$ é adjacente a $00u$, uma vez que coincidem apenas na primeira coordenada.

Como a extremidade final de cada caminho é adjacente à extremidade inicial do seguinte e a extremidade final de P'_3 é adjacente à extremidade inicial de P_0, podemos construir um ciclo hamiltoniano em $T_{2,2m,1}$ encadeando esses caminhos. Logo, $T_{2,2m,1}$ é hamiltoniano. ■

Agora que demonstramos o caso $\ell = 1$, podemos utilizá-lo como caso base na demonstração mais geral, para o grafo $T_{2,m+\ell,\ell}$, com m ímpar e $\ell \geq 1$.

Lema 46. *$T_{2,m+\ell,\ell}$ é hamiltoniano, para todos os naturais m e ℓ tais que m é ímpar e $\ell \geq 1$.*

Prova. Sejam $m, \ell \in \mathbb{N}$ tais que m é ímpar e $\ell \geq 1$, e seja $G = T_{2,m+\ell,\ell}$. Seguiremos por indução em ℓ.
Base: Se $\ell = 1$, o Lema 45 nos garante que $T_{2,m+1,1}$ é hamiltoniano.

Hipótese: Suponha que $T_{2,m+\ell',\ell'}$ seja hamiltoniano, para todo $\ell' < \ell$.
Passo: Seja $\ell \geq 2$. Vamos particionar os vértices de G em V_0 e V_1, em que $V_i = \{u \in V(G) : u_0 = i\}$. Cada uma das partes V_i induz um subgrafo H_i em que cada vértice pode ser identificado unicamente por suas $m + \ell - 1$ últimas coordenadas, dado que a primeira é igual para todos no subgrafo. Ademais, dois vértices são adjacentes em H_i se coincidem em exatamente $\ell - 1$ coordenadas dentre estas últimas. Assim, cada subgrafo H_i é isomorfo a $G' = T_{2,m+\ell-1,\ell-1}$ que, por hipótese de indução, é hamiltoniano. Assim, seja C um ciclo hamiltoniano de G' e seja uv uma aresta contida em C. Consideremos o automorfismo $f \in Aut(G')$ que troca o valor nas primeiras $m - 1$ coordenadas de cada vértice e preserva as outras ℓ coordenadas, isto é, a função definida por $f(w) = \overline{w_0 w_1 \cdots w_{m-2}} w_{m-1} w_m \cdots w_{m+\ell-2}$. Observe que, para todo $w \in V(G')$, temos que $i_c(w, f(w)) = \ell$. Então, seja C' o ciclo hamiltoniano obtido através de C pela aplicação de f, que contém a aresta $f(u)f(v)$. Consideremos os caminhos $P = C - uv$ e $P' = C' - f(u)f(v)$, com suas versões P_i e P'_i em cada subgrafo H_i. O caminho P_0 possui $0u$ e $0v$ como extremidades, enquanto P'_1 tem $1f(v)$ e $1f(u)$ como extremidades. Como $i_c(v, f(v)) = i_c(u, f(u)) = \ell$, os vértices $0u$ e $1f(u)$ são adjacentes em G, assim como os vértices $0v$ e $1f(v)$. Portanto, os extremos de P_0 e P'_1 são adjacentes e, assim, podemos construir um ciclo hamiltoniano em G. Logo, G é hamiltoniano. ■

O Lema 46 cobre o último caso que nos sobrava, a respeito da existência de ciclos hamiltonianos nos grafos timbrais. Para finalizar o capítulo, vamos formalizar os resultados obtidos através do Teorema 47.

Teorema 47. *Os únicos grafos timbrais não-hamiltonianos são os $T_{2,k,\ell}$, com $k - \ell$ par ou $\ell = 0$.*

Prova. Pelo Corolário 38 e pelos Lemas 39, 40 e 46 ■

Capítulo 5

Número clique de grafos timbrais

Neste capítulo, estudamos o número clique dos grafos timbrais, onde o número clique de um grafo é o tamanho de um maior subconjunto de seus vértices tal que quaisquer dois vértices no subconjunto são adjacentes.

Abordamos o problema passo a passo, estudando, primeiro, valores específicos de n, k e ℓ para os quais o número clique de $T_{n,k,\ell}$ pode ser determinado diretamente. Em seguida, apresentamos limites inferiores e superiores para alguns casos em que esta determinação se torna mais complicada. Ilustramos através de um exemplo que os limites obtidos em nossos estudos deixam espaço para aprimoramentos.

Além de revisarmos os resultados conhecidos sobre o assunto, desenvolvemos novos resultados, apresentando, em particular, uma prova da correspondência entre uma clique de tamanho $(k-1)^2$ em $T_{n,k,1}$ e um plano afim de ordem $k-1$, quando $(k-1) \leq n < (k-1)^2$. Este resultado ilustra a dificuldade da determinação exata do número clique dos grafos timbrais.

Os resultados obtidos em nossos estudos foram apresentados no IX Encontro de Teoria da Computação (ETC 2024) [12].

O capítulo está organizado em quatro seções, cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 5.1 fazemos uma introdução ao problema do número clique no contexto dos grafos timbrais, incluindo a análise de alguns exemplos e demonstrações de casos triviais.

Na Seção 5.2, apresentamos uma motivação para este estudo. Em particular, vemos que o número clique de grafos timbrais possui implicações na *teoria de códigos* [39], pois está relacionado com o problema de determinar o tamanho máximo de um código corretor de erros, dados seus parâmetros.

Na Seção 5.3, adentramos na estrutura das cliques em grafos timbrais, obtendo novos limites superiores para o número clique dos $T_{n,k,\ell}$.

Por fim, na Seção 5.4, aplicamos alguns dos limites ao caso específico de $T_{n,k,1}$, de onde emerge uma relação entre uma clique máxima no grafo e um *plano afim* de ordem $k-1$, estrutura do campo das *geometrias finitas*.

5.1 Número clique: exemplos e limites triviais

Uma **clique** em um grafo G é um subconjunto $K \subset V(G)$ tal que, para quaisquer dois vértices $u, v \in K$, temos que uv é uma aresta do grafo. O **número clique** de G, denotado por $\omega(G)$, é o tamanho da maior clique em G.

No contexto dos grafos timbrais, queremos determinar o tamanho do maior conjunto de sequências $K \subset \mathbb{Z}_n^k$ tal que todo par de sequências tem índice de coincidência igual a ℓ. Vejamos como esse parâmetro se comporta na classe dos $T_{n,k,\ell}$, analisando alguns exemplos. Começamos pelo caso $\ell = 0$, mais simples de se analisar.

Exemplo 48. *Vejamos o grafo $T_{3,2,0}$ da Figura 5.1, apresentado primeiramente no Capítulo 1. Nela, está destacada a clique $K = \{00, 11, 22\}$. Podemos perceber que,*

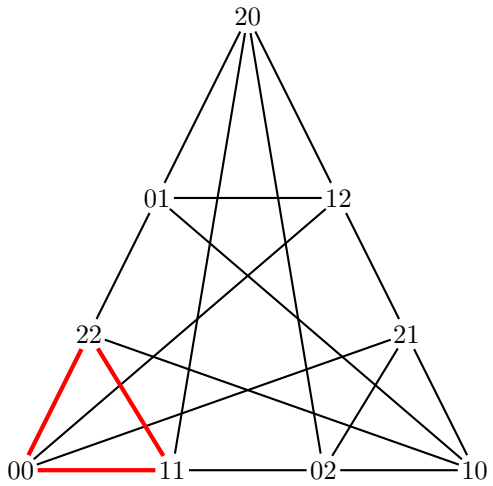

Figura 5.1: Grafo $T_{3,2,0}$, com uma clique máxima em destaque.

para qualquer coordenada que escolhermos, cada um dos símbolos – 0, 1 ou 2 – já está representado em algum dos vértices de K, o que torna impossível incluir um quarto vértice que difira dos vértices da clique em todas as coordenadas. Dessa maneira, a clique K não é subconjunto de nenhuma outra clique, isto é, K é uma clique maximal de $T_{3,2,0}$. Analisando um pouco melhor o grafo como um todo, também podemos constatar que K é uma clique máxima, já que qualquer triângulo no grafo "ocupa" toda coordenada com os três símbolos possíveis e, assim, não seria possível aumentar o número de vértices no conjunto.

Nossas observações sobre as cliques do $T_{3,2,0}$ podem ser estendidas para os outros grafos da forma $T_{n,k,0}$, obtendo:

Proposição 49. $\omega(T_{n,k,0}) = n$.

Prova. Primeiramente, podemos constatar que o conjunto formado pelos vértices $0^k, 1^k, \ldots, (n-1)^k$ é uma clique com n vértices e, portanto, temos que $\omega(T_{n,k,0}) \geq n$.

Agora, seja K uma clique de tamanho n em $T_{n,k,0}$. Para todo $i \in \mathbb{Z}_k$, é certo que não há nenhum par de vértices em K que coincidam i-ésima coordenada, pelo critério de adjacências do grafo. Assim, sabemos que todo elemento de $\mathbb{Z}_n$ está representado na i-ésima coordenada em algum vértice da clique, o que torna impossível a existência de outro vértice no grafo que não coincida com nenhum vértice em K nessa coordenada. Portanto, temos que $\omega(T_{n,k,0}) \leq n$.

Logo, $\omega(T_{n,k,0}) = n$. ■

A Proposição 49 é particularmente útil pois o grafo $T_{n,k,0}$ aparece como subgrafo induzido dos grafos timbrais com $\ell \geq 1$. Para observar melhor esse fato, vamos utilizar prefixos para determinar subconjuntos de vértices de um $T_{n,k,\ell}$, com $\ell \geq 1$, e mostrar que esses subconjuntos induzem subgrafos isomorfos a $T_{n,k-\ell,0}$.

Definição 50. Sejam v uma palavra em $\mathbb{Z}_n^k$ e w uma palavra em $\mathbb{Z}_n^r$, com $r \leq k$. Dizemos que w é **prefixo** de v se, para todo $i \in \mathbb{Z}_r$, temos $v_i = w_i$.

Por exemplo, os prefixos de $v = 1100$ em $\mathbb{Z}_2^4$ são a palavra vazia ϵ e as palavras 1, 11, 110 e 1100.

Definição 51. Seja w uma palavra em $\mathbb{Z}_n^r$, com $r \leq k$. Denotamos por V_w o conjunto das palavras em $\mathbb{Z}_n^k$ das quais w é prefixo, isto é,

$$V_w = \{v \in \mathbb{Z}_n^k : v_i = w_i, \forall i \in \mathbb{Z}_r\}.$$

A Figura 5.2, ilustra um subgrafo de $T_{3,4,2}$ isomorfo a $T_{3,2,0}$, induzido pelo conjunto de vértices que possuem o prefixo 00. Observemos que, assim como em V_{00},

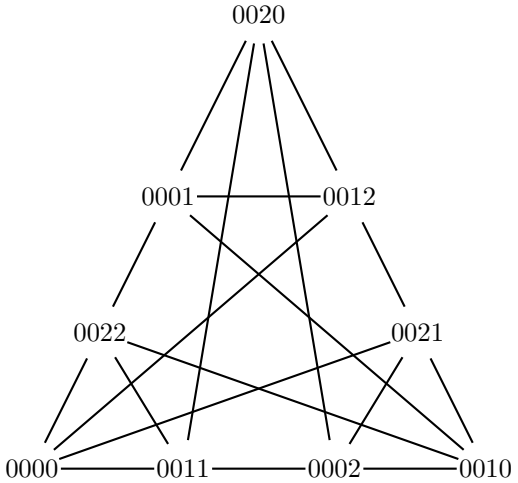

Figura 5.2: Subgrafo de $T_{3,4,2}$ isomorfo a $T_{3,2,0}$.

todo conjunto V_w associado a um prefixo de comprimento ℓ induz um subgrafo em que cada vértice pode ser diferenciado apenas pelas suas últimas $k - \ell$ coordenadas.

Além disso, dois vértices nesse subgrafo são adjacentes se, e somente se, não coincidem em nenhuma dessas coordenadas. Em outras palavras, V_w induz um subgrafo isomorfo a $T_{n,k-\ell,0}$, o que nos garante o resultado que segue, como consequência da Proposição 49.

Corolário 52. $\omega(T_{n,k,\ell}) \geq n$.

Observemos que, como cada vértice possui exatamente um prefixo para cada comprimento $r \leq k$, a família $\{V_w : w \in \mathbb{Z}_n^r\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}_n^r$. Com isso em mente, podemos demonstrar que $T_{n,k,\ell}$ é um grafo $(n^{\ell+1})$-partido, o que garante outro limite trivial para $\omega(T_{n,k,\ell})$.

Teorema 53. $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq n^{\ell+1}$.

Prova. Primeiramente, como argumentamos acima, $\{V_w : w \in \mathbb{Z}_n^{\ell+1}\}$ é uma partição de $V(T_{n,k,\ell})$ com $n^{\ell+1}$ partes. Além disso, quaisquer dois vértices em V_w coincidem em pelo menos $\ell + 1$ coordenadas e, portanto, não há aresta entre eles em $T_{n,k,\ell}$. Assim, $T_{n,k,\ell}$ é um grafo $(n^{\ell+1})$-partido e, portanto, como qualquer clique no grafo possui no máximo um vértice de cada parte, temos que $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq n^{\ell+1}$. ■

Juntando os limites exibidos no Corolário 52 e no Teorema 53, temos

$$n \leq \omega(T_{n,k,\ell}) \leq n^{\ell+1}.$$

Esses limites, apesar de justos para o caso de $T_{n,k,0}$, deixam uma grande margem para melhoria, considerando o caso geral. Vejamos o exemplo de um grafo para o qual o número clique se situa entre os limites obtidos.

Exemplo 54. *Consideremos o grafo $T_{2,4,2}$. Como vimos no Capítulo 4, esse grafo é desconexo e possui dois componentes conexos isomorfos, um com os vértices pares e outro com os vértices ímpares. A Figura 5.3 ilustra o componente conexo de $T_{2,4,2}$ que contém os vértices pares do grafo. Pelo Teorema 53, uma clique máxima em $T_{2,4,2}$ não possui mais do que 8 vértices. Em uma primeira busca por cliques no $T_{2,4,2}$, podemos perceber que o grafo contém algumas cliques de tamanho 4, como, por exemplo, a clique $K = \{0000, 1100, 0101, 1001\}$. De fato, essa é uma clique máxima no grafo. Observamos, na Figura 5.3, que $T_{2,4,2}$ pode ser obtido a partir do K_8, o grafo completo com 8 vértices, pela remoção das arestas entre cada vértice e o seu complementar — que formam um emparelhamento perfeito. Assim, como todo conjunto de pelo menos 5 vértices em um mesmo componente conexo contém ao menos um par de vértices complementares – e, portanto, não adjacentes – podemos afirmar que $\omega(T_{2,4,2}) = 4$.*

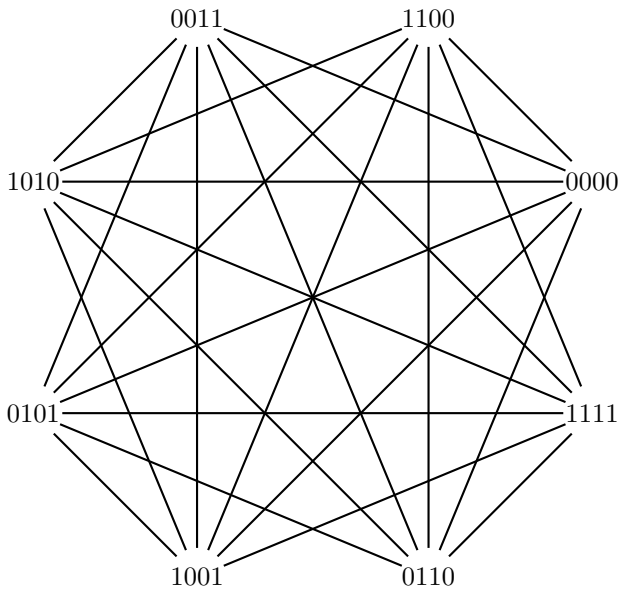

Figura 5.3: Componente conexo de $T_{2,4,2}$.

O Exemplo 54 sugere que a observação mais atenta de propriedades estruturais dos grafos timbrais possibilita aprimorarmos os limites obtidos no Teorema 53. Como veremos na Seção 5.2, a obtenção de bons limites superiores para cliques em grafos formados pela união de grafos timbrais é um campo de pesquisa importante na teoria de códigos. Nas seções 5.3 e 5.4, aprofundamos o estudo deste problema, nos restringindo à classe dos $T_{n,k,\ell}$ e a dos $T_{n,k,1}$, respectivamente.

5.2 Códigos corretores de erro

O conjunto $\mathbb{Z}_n^k$, dos vértices de um grafo timbral, aparece com destaque em diversas áreas da matemática e da computação, de onde podemos extrair conexões entre os grafos timbrais e outras estruturas. Dentre essas conexões, destaca-se a proximidade entre os grafos timbrais e os códigos corretores de erro, advindos da teoria de códigos, [27] e [39]. Fazemos aqui uma breve explicação dessa relação, apresentando o contexto básico no qual se inserem os códigos corretores de erros e o problema que os conecta ao tamanho da clique máxima de um grafo timbral.

Considere que queremos transmitir uma mensagem que consiste em palavras binárias de comprimento m, isto é, elementos de $\mathbb{Z}_2^m$. Nesse processo de transmissão, há a possibilidade de que ocorra alguma interferência na comunicação, de modo que nem toda palavra chegará ao receptor sem alterações. Os códigos corretores de erros surgem com a intenção de detectar – e, se possível, corrigir – erros nessa transmissão, através da introdução de alguma redundância na palavra enviada. Dessa forma, as palavras efetivamente transmitidas são constituídas das palavras originais acrescidas

de um número fixo de coordenadas de redundância, isto é, são elementos de $\mathbb{Z}_2^k$, para algum $k > m$. Essa palavra efetivamente enviada é dita uma *codeword*.

Como os bits acrescidos são elementos redundantes determinados a partir da palavra original, pode-se imaginar que nem toda palavra em $\mathbb{Z}_2^k$ será uma *codeword*. De fato, apenas aquelas que correspondem a palavras em $\mathbb{Z}_2^m$ são consideradas *codewords*. Assim, um *código* $\mathcal{C}$ é o conjunto das *codewords*, ou seja, o subconjunto das palavras em $\mathbb{Z}_2^k$ que correspondem a palavras em $\mathbb{Z}_2^m$, de acordo com o método de codificação adotado.

Em especial, um código $\mathcal{C}$ que possui M *codewords*, todas com comprimento k, e a distância de Hamming mínima entre quaisquer duas *codewords* é d é dito um (k, M, d)-código. O parâmetro d é de particular importância pois é a partir dele que se determina o número de erros de transmissão que podem ser detectados ou corrigidos no envio de uma palavra. Um código com distância mínima d pode corrigir $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ e detectar $\lfloor d/2 \rfloor$ erros de transmissão [27].

Assim, uma questão relevante na teoria de códigos é a de determinar o maior tamanho possível de um (k, M, d)-código, isto é, o maior número de palavras binárias de comprimento k que estão, duas a duas, a uma distância de pelo menos d. Esse número é denotado por $A(k, d)$, e o problema de determiná-lo é um dos problemas elencados por N.J. Sloane em [37], texto que apresenta alguns problemas em aberto na teoria de grafos advindos da teoria de códigos.

Vale destacar que, ao maximizar o número de *codewords* em um código, deseja-se aumentar a quantidade de mensagens que se pode transmitir e, por consequência, a quantidade de informação que efetivamente é transmitida, motivo pelo qual o problema apresentado é importante no estudo dos códigos.

Embora a formulação original do problema considere apenas códigos binários, outros autores também buscam determinar o número $A_n(k, d)$ ([1, 32, 38, 39]), em que o código é construído sobre um alfabeto de n símbolos. O número $A(k, d)$, então, refere-se a $A_2(k, d)$ nesta perspectiva mais geral.

Até o momento, entretanto, não se sabe determinar $A_n(k, d)$ com precisão. De fato, alguns pesquisadores tratam essa tarefa como algo difícil de ser concretizado (cf. [32]). Assim, as pesquisas nessa área se ocupam, majoritariamente, de aprimorar os limites que já são conhecidos.

Veremos, agora, três dos limites clássicos que constam na literatura. Nos três casos, consideramos que n, k e d são números naturais tais que $n \geq 2$ e $k \geq d$.

Teorema 55 (Singleton Bound)**.** $A_n(k, d) \leq n^{k-d+1}$.

O *Singleton Bound* é obtido através da mesma ideia que utilizamos para demonstrar o Teorema 53. Certamente, é impossível que existam duas *codewords* distintas com um mesmo prefixo de comprimento $k - d + 1$, pois a distância de Hamming

entre elas seria menor do que d. Assim, o tamanho de um código está limitado pelo número de prefixos de comprimento $k-d+1$, que é n^{k-d+1}.

Teorema 56 (Hamming Bound)**.** $A_n(k,d) \leq \dfrac{n^k}{1+\sum\limits_{i=1}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{k}{i}(n-1)^i}$.

Sendo $B(x,i)$ o conjunto de palavras que estão à distância no máximo i com relação à *codeword* x, o tamanho de $B(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor)$ é o denominador no lado direito da inequação acima. Este tamanho é o mesmo para toda codeword e, mais ainda, temos que $B(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor) \cap B(y, \lfloor (d-1)/2 \rfloor) = \emptyset$, para todo par de *codewords* distintas x e y. Caso contrário, x e y violariam a distância mínima. Assim, temos $A_n(k,d)\ |B(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor)| \leq n^k$, o que origina o *Hamming Bound*.

Teorema 57 (Gilbert-Varshamov Bound)**.** $A_n(k,d) \geq \dfrac{n^k}{\sum\limits_{0 \leq i \leq d-1} \binom{k}{i}(n-1)^i}$.

O *Gilbert-Varshamov Bound*, diferentemente dos anteriores, é um limite inferior. Ele estipula que, para um (k,M,d)-código $\mathcal{C}$, se $M\ |B(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor)| < n^k$, então existe uma palavra y que está a uma distância de pelo menos d de todas as *codewords* em $\mathcal{C}$ e, portanto, é possível construir um $(k, M+1, d)$-código $\mathcal{C} \cup \{y\}$. Esse processo pode ser repetido até encontrar um código de tamanho M tal que $M\ |B(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor)| \geq n^k$, o que resulta na inequação acima.

Mais informações sobre esses e outros limites clássicos para $A_n(k,d)$ e, em especial, para $A(k,d)$, podem ser encontradas em [39], [27] e [32].

Como dito anteriormente, Sloane postula o problema de determinar $A(k,d)$ como um problema em grafos. Até o momento, entretanto, não apontamos a relação com a teoria de grafos de forma clara. Para entender melhor esta conexão, vamos utilizar os grafos $H_n(k,d)$, referidos na literatura como os *grafos de Hamming-distância* [24] ou, por vezes, como "grafos de Hamming" [32, 37], sobrecarregando o termo.

Definição 58. Sejam n, k e d inteiros positivos tais que $n \geq 2$ e $k \geq d$. Denotamos por $H_n(k,d)$ o grafo cujo conjunto de vértices é $\mathbb{Z}_n^k$ e tal que dois vértices $u, v \in \mathbb{Z}_n^k$ são adjacentes se, e somente se, $d_H(u,v) \geq d$.

Assim, determinar $A_n(k,d)$ é o mesmo que encontrar o número clique de $H_n(k,d)$, isto é, $A_n(k,d) = \omega(H_n(k,d))$.

De fato, as tentativas mais recentes de aprimorar os limites conhecidos aplicam resultados da teoria de grafos à $H_n(k,d)$, para concretizar seu objetivo. Jian Gu e Tom Fuja, em [22], generalizaram o *Gilbert-Varshamov Bound* para códigos construídos sobre um universo qualquer de palavras — não apenas $\mathbb{Z}_n^k$ — resultado que pode ser obtido e aprimorado como consequência do Teorema de Turán, como demonstrado por Ludo Tolhuizen em [38].

Mais tarde, El Rouayheb e Costas Georghiades [32] apresentaram demonstrações dos três limites exibidos, utilizando as relações básicas entre número clique e número de independência de um grafo, juntamente com algumas propriedades de grafos vértice-transitivos. No mesmo artigo, os autores apresentam melhorias no *Hamming Bound* utilizando propriedades de grafos.

Posteriormente, em [1], Bahman Ahmadi e Fatemeh Alinaghipour apresentam novos limites superiores para $A_2(k,d)$, para d par e para $d = 3$, obtidos através das propriedades espectrais de $H_2(k,d)$ e limites superiores para o número de independência de grafos regulares. Os limites obtidos pelos autores são melhores que o *Singleton Bound* e que o *Hamming Bound* em alguns casos, mas não em todos.

A observação final, que sela a conexão entre $A_n(k,d)$ e o tamanho da maior clique nos grafos timbrais, é que o grafo $H_n(k,d)$ é a união de grafos $T_{n,k,\ell}$, com ℓ variando de 0 a $k-d$. Formalmente,

$$H_n(k,d) = \bigcup_{0 \leq l \leq k-d} T_{n,k,\ell}.$$

Dessa forma, $A_n(k,d)$ é o número clique do grafo obtido por essa união. O estudo de $\omega(T_{n,k,\ell})$, portanto, mostra-se como um caminho viável para obtermos alguns *insights* sobre $A_n(k,d)$.

Até o momento, entretanto, não há muita informação sobre esse parâmetro para os grafos timbrais. O que sabemos, de modo geral, vem dos resultados conhecidos para os grafos de Hamming e outros grafos obtidos a partir deles. Em especial, sabemos que $\omega(T_{n,k,k-1}) = n$, resultado que também demonstramos na Seção 5.3. Além disso, Małgorzata Kuchta e Jolanta Stasiak, em [26], ao estudar subconjuntos de vértices à distância 2 no hipercubo, classificaram o conjunto das cliques maximais de $T_{2,k,k-2}$ em cliques "grandes" e "pequenas", de tamanhos k e 4, respectivamente.

5.3 Novos limites superiores para o número clique

Para obtermos outros limites superiores para $\omega(T_{n,k,\ell})$, vamos observar a estrutura interna de uma clique nesse grafo. A ideia é particionar uma clique de $T_{n,k,\ell}$ utilizando o conjunto de coordenadas coincidentes entre cada vértice da clique e um vértice pivô pertencente a ela. Para tal, introduziremos algumas definições.

Definição 59. Sejam K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e $u \in K$. Além disso, seja S um subconjunto de $\mathbb{Z}_k$ tal que $|S| = \ell$. A **$(\mathbf{u}, \mathbf{S})$-parte** de K é o conjunto

$$K_S(u) = \{v \in K : I_c(u,v) = S\}.$$

Convém ilustrar essa definição com um exemplo.

Exemplo 60. *Consideremos, em $T_{3,4,1}$, a clique*

$$K = \{0000, 1110, 2220, 0121, 1201, 2011, 0212, 1022, 2102\}.$$

Pelo Teorema 53, temos que $\omega(T_{3,4,1}) \leq 9$ e, portanto, K é uma clique máxima no grafo em questão. Ao escolhermos $u = 0000$, temos as partes $K_{\{0\}}(u) = \{0121, 0212\}$, $K_{\{1\}}(u) = \{2011, 1022\}$, $K_{\{2\}}(u) = \{1201, 2102\}$ e $K_{\{3\}}(u) = \{1110, 2220\}$.

Vale destacar que a interseção entre duas (u, S)-partes distintas – com u fixo – é sempre vazia. Ademais, a clique no Exemplo 60 possui apenas partes não-vazias, algo que não podemos assumir que valerá para toda clique.

Definição 61. Sejam K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e $u \in K$. Denotamos por $\mathcal{P}_K(u)$ a família dos ℓ-subconjuntos de $\mathbb{Z}_k$ para os quais $K_S(u)$ é não-vazia. Formalmente,

$$\mathcal{P}_K(u) = \left\{ S \in \binom{\mathbb{Z}_k}{\ell} : K_S(u) \neq \emptyset \right\}.$$

Observamos, agora, que $\{K_S(u) : S \in \mathcal{P}_K(u)\}$ é uma partição de $K \setminus \{u\}$, pois todo vértice em K coincide com u em um único conjunto de ℓ coordenadas. O Lema 62 estipula uma restrição para o tamanho de cada parte $K_S(u)$ não vazia.

Lema 62. *Seja K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e seja $u \in K$. Então, temos que $|K_S(u)| \leq n - 1$, para todo $S \in \binom{\mathbb{Z}_k}{\ell}$.*

Prova. Seja S um subconjunto de $\mathbb{Z}_k$ com ℓ elementos. Considere o conjunto $K' = K_S(u) \cup \{u\}$. Vamos mostrar que K' está em bijeção com uma clique de $T_{n,k-\ell,0}$ e, portanto, $|K'| \leq n$. Seja $\mathbb{Z}_k \setminus S = \{i_0, i_1, \ldots, i_{k-\ell-1}\}$, com $i_0 < i_1 < \ldots < i_{k-\ell-1}$. Consideremos a função $f : K' \to \mathbb{Z}_n^{k-\ell}$ definida por $f(v) = (v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-\ell-1}})$. A imagem de f é uma clique de $T_{n,k-\ell,0}$, uma vez que todo par de vértices em K' difere nas coordenadas em $\mathbb{Z}_k \setminus S$. Assim, a Proposição 49 nos garante que $|K'| \leq n$ e, portanto, $|K_S(u)| \leq n - 1$. ■

Podemos estender esse resultado para obter um limite para o número clique de $T_{n,k,\ell}$.

Lema 63. *Seja K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e seja $u \in K$. Então,*

$$|K| \leq |\mathcal{P}_K(u)|(n-1) + 1.$$

Prova. Sabemos que K possui $|\mathcal{P}_K(u)|$ partes não vazias. Mais ainda, pelo Lema 62, cada parte possui no máximo $n - 1$ vértices. Logo, $|K \setminus \{u\}| \leq |\mathcal{P}_K(u)|(n-1)$ e, portanto, $|K| \leq |\mathcal{P}_K(u)|(n-1) + 1$. ■

Teorema 64. $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq \binom{k}{\ell}(n-1)+1$.

Prova. Como $\mathcal{P}_K(u) \subset \binom{\mathbb{Z}_k}{\ell}$, o Lema 63 implica que toda clique em $T_{n,k,\ell}$ possui no máximo $\binom{k}{\ell}(n-1)+1$ elementos. ■

Para o caso de $T_{3,4,1}$, o Teorema 64 garante que $\omega(T_{n,k,1}) \leq \binom{4}{1}2+1 = 9$, que é precisamente o número clique de $T_{3,4,1}$, como vimos no Exemplo 60. Por outro lado, esse limite ainda pode ser melhorado, uma vez que para determiná-lo nos baseamos apenas na relação entre vértices dentro de uma mesma (u,S)-parte, para limitar seu tamanho. Para aprofundar nossa análise, vamos observar a relação entre vértices em partes distintas, avaliando a possibilidade de que estes coexistam na clique.

Lema 65. *Seja K uma clique em $T_{n,k,\ell}$ e seja $u \in K$. Para todos S e S', conjuntos distintos em $\mathcal{P}_K(u)$, vale que*

$$|K_S(u)| \leq \left\lfloor \frac{k-2\ell+|S\cap S'|}{\ell-|S\cap S'|} \right\rfloor.$$

Prova. Sejam S e S' dois conjuntos em $\mathcal{P}_K(u)$, e seja $v \in K_{S'}(u)$. Como K é uma clique, v é adjacente a todos os vértices em $K_S(u)$, isto é, v coincide com cada vértice em $K_S(u)$ em ℓ coordenadas. Certamente, as coordenadas em $S \cap S'$ fazem parte dessas ℓ coordenadas, pois são as coordenadas em que tanto os vértices em $K_S(u)$ quanto os vértices em $K_{S'}(u)$ coincidem com u. Ademais, v não coincide com nenhum vértice de $K_S(u)$ em nenhuma coordenada no conjunto $(S \setminus S') \cup (S' \setminus S)$, pois estas são as coordenadas em que apenas os vértices em um dos conjuntos coincidem com u. Portanto, v deve coincidir com cada vértice de $K_S(u)$ em $\ell - |S\cap S'|$ coordenadas dentre as $k-|S\cup S'| = k-2\ell+|S\cap S'|$ coordenadas restantes. Como os vértices em $K_S(u)$ diferem, dois a dois, em todas essas coordenadas, v coincide com cada vértice em $K_S(u)$ em um conjunto distinto de $\ell - |S\cap S'|$ coordenadas em $\mathbb{Z}_k \setminus (S \cup S')$ e, portanto, $|K_S(u)|$ é limitado pela quantidade de conjuntos disjuntos de tamanho $\ell - |S\cap S'|$ que podemos escolher dentre o conjunto das $k-2\ell+|S\cap S'|$ coordenadas restantes. Assim, temos que $|K_S(u)| \leq \left\lfloor \frac{k-2\ell+|S\cap S'|}{\ell-|S\cap S'|} \right\rfloor$, como queríamos. ■

O resultado no Lema 65 vale para todo par S, S' em $\mathcal{P}_K(u)$. Mais especificamente, como a expressão do lado direito da inequação cresce com $|S \cap S'|$, o limite mais estrito para uma parte $K_S(u)$ será obtido através do conjunto $S' \in \mathcal{P}_K(u)$ que possui a menor interseção com S. Denotemos por $\mu(S)$ o tamanho dessa menor interseção, isto é, $\mu(S) = \min\{|S \cap S'| : S' \in \mathcal{P}_K(u)\}$.

Lema 66. *Seja K uma clique em $T_{n,k,\ell}$ e seja $u \in K$. Se $|\mathcal{P}_K(u)| \geq 2$, então*

$$|K| \leq 1 + \sum_{S \in \mathcal{P}_K(u)} \left\lfloor \frac{k-2\ell+\mu(S)}{\ell-\mu(S)} \right\rfloor.$$

Prova. Seja K uma clique de $T_{n,k,\ell}$ e seja $u \in K$, tais que $|\mathcal{P}_K(u)| \geq 2$. Como vimos, $K \setminus \{u\}$ é a união disjunta das partes $K_S(u)$ tais que $S \in \mathcal{P}_K(u)$. Daí, obtemos

$$|K| \leq 1 + \sum_{S \in \mathcal{P}_K(u)} |K_S(u)|.$$

Além disso, como a expressão no Lema 65 cresce com $|S \cap S'|$, sabemos que, para todo $S \in \mathcal{P}_K(u)$,

$$|K_S(u)| \leq \left\lfloor \frac{k - 2\ell + \mu(S)}{\ell - \mu(S)} \right\rfloor.$$

Assim, juntando os resultados, concluímos que

$$|K| \leq 1 + \sum_{S \in \mathcal{P}_K(u)} \left\lfloor \frac{k - 2\ell + \mu(S)}{\ell - \mu(S)} \right\rfloor,$$

como queríamos. ■

Teorema 67. $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq \max\{1 + \binom{k}{\ell}(k - \ell - 1),\ n\}$.

Prova. Como $\mathcal{P}_K(u) \subseteq \binom{\mathbb{Z}_k}{\ell}$, temos que $|\mathcal{P}_K(u)| \leq \binom{k}{\ell}$ e $\mu(S) \leq k - 1$ para todo $S \in \mathcal{P}_K(u)$. Assim, o Lema 66 nos permite concluir que

$$|K| \leq 1 + \binom{k}{\ell}(k - \ell - 1).$$

Por fim, o Lema 63 nos garante que o maior tamanho que uma clique com apenas uma parte não-vazia é n. Logo, $\omega(T_{n,k,\ell}) \leq \max\{1 + \binom{k}{\ell}(k - \ell - 1),\ n\}$. ■

O limite obtido no Teorema 67 não é de muita ajuda quando não conhecemos a estrutura da clique K. Para o próprio $T_{2,4,2}$, exibido na Figura 5.3, o Teorema 67 estipula que $\omega(T_{2,4,2}) \leq 7$ — mesmo valor fornecido pelo Teorema 64. Entretanto, esse limite pode ser particularmente útil em alguns casos, em que conseguimos determinar o valor de $\mu(S)$. Sabe-se, por exemplo, que o número clique do grafo de Hamming $H(k, n) = T_{n,k,k-1}$ é igual a n, resultado que pode ser obtido ao combinarmos o Corolário 52 com o Teorema 67.

Proposição 68. $\omega(T_{n,k,k-1}) = n$.

Prova. Pelo Teorema 67, temos que $\omega(T_{n,k,k-1}) \leq \max\{1 + k(k - (k-1) - 1),\ n\} = \max\{1, n\}$. Como $n \geq 2$, podemos afirmar que $\omega(T_{n,k,k-1}) \leq n$. Entretanto, pelo Corolário 52, sabemos que $\omega(T_{n,k,k-1}) \geq n$. Logo, $\omega(T_{n,k,k-1}) = n$. ■

Por fim, outro caso no qual podemos aplicar o Teorema 67 de modo a obter um limite justo é quando $\ell = 1$, que será o foco do restante deste capítulo.

5.4 Número clique de $T_{n,k,1}$

Combinando os limites obtidos anteriormente, reduziremos o problema à análise de três casos. Posteriormente, nos aprofundaremos no estudo do caso em que $k-1 \leq n$, deixando o caso restante para análise futura.

Na Seção 5.3, obtivemos três limites superiores para $\omega(T_{n,k,\ell})$. Vamos aplicá-los a $\omega(T_{n,k,1})$:

- Pelo Teorema 53, temos que $\omega(T_{n,k,1}) \leq n^2$;
- Pelo Teorema 64, temos que $\omega(T_{n,k,1}) \leq k(n-1)+1$;
- Pelo Teorema 67, temos que $\omega(T_{n,k,1}) \leq \max\{k(k-2)+1,\ n\}$. Notemos que $k(k-2)+1 = (k-1)^2$ e, então, $\omega(T_{n,k,1}) \leq \max\{(k-1)^2,\ n\}$.

Para determinar $\omega(T_{n,k,1})$, o limite que nos interessa é aquele mais restritivo. Assim, vamos avaliar a relação entre k e n para encontrar o melhor limite em cada caso.

***Caso 1*:** Se $n < k-1$, então o Teorema 53 é o que fornece o resultado mais restritivo, pois $n^2 = (n+1)(n-1)+1 < k(n-1)+1 < k(k-2)+1$. Logo, $n \leq \omega(T_{n,k,1}) \leq n^2$.

***Caso 2*:** Se $k-1 \leq n < (k-1)^2$, então o Teorema 67 é o que fornece o resultado mais restritivo, pois $(k-1)^2 = k(k-2)+1 \leq k(n-1)+1 \leq (n+1)(n-1)+1 = n^2$. Logo, $n \leq \omega(T_{n,k,1}) \leq (k-1)^2$.

***Caso 3*:** Se $(k-1)^2 \leq n$, então o Teorema 67 é o que fornece o resultado mais restritivo, pois $n \leq k(n-1)+1 \leq (n+1)(n-1)+1 = n^2$. Logo, $n \leq \omega(T_{n,k,1}) \leq n$, isto é, $\omega(T_{n,k,1}) = n$.

Assim, o Caso 3 está resolvido, restando-nos somente os dois primeiros. Deixamos o Caso 1 para análise futura, debruçando-nos apenas sobre o Caso 2, em que determinar a existência de uma clique de tamanho $(k-1)^2$ se reduz a um conhecido problema em aberto no campo das *geometrias finitas* [6].

Para tal, explicamos brevemente o conceito de *plano afim*. Um *plano afim* é uma tripla $\mathbb{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, em que $\mathfrak{P}$ é o conjunto de *pontos*, $\mathfrak{L}$ é o conjunto de *linhas*, disjunto de $\mathfrak{P}$, e $I \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$ é a *relação de incidência*, que satisfaz:

(AP1) Para todo par de pontos, existe uma única linha incidente a ambos.

(AP2) Dados uma linha r e um ponto P que não incide em r, existe uma única linha s que não intersecta r e é incidente a P.

(AP3) Existem ao menos três pontos não-colineares.

A *ordem* de um plano afim é o número de pontos que incidem em cada linha, que é o mesmo para toda linha em $\mathfrak{L}$. Ademais, um plano afim de ordem n possui n^2 pontos e $n(n+1)$ linhas, que podem ser particionadas em $n+1$ classes de equivalência sob a relação de paralelismo [6, 17, 36].

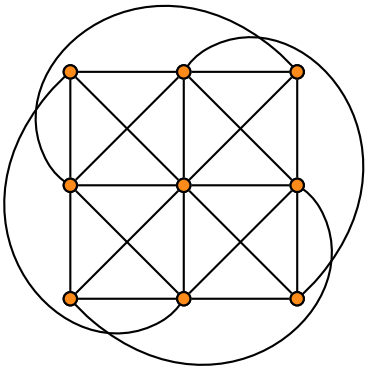

Figura 5.4: Representação gráfica do plano afim de ordem 3.

A Figura 5.4 exibe a representação gráfica mais comum do plano afim de ordem 3, em que linhas com a mesma angulação são paralelas. Vale destacar que, nesse caso, as linhas não são tomadas como as arestas de um grafo, isto é, não são simplesmente o segmento entre dois pontos adjacentes. Ao invés disso, uma linha é toda a extensão contínua dos segmentos que possuem a mesma angulação. A Figura 5.5 exibe a decomposição do plano afim de ordem 3 em suas quatro classes de linhas paralelas.

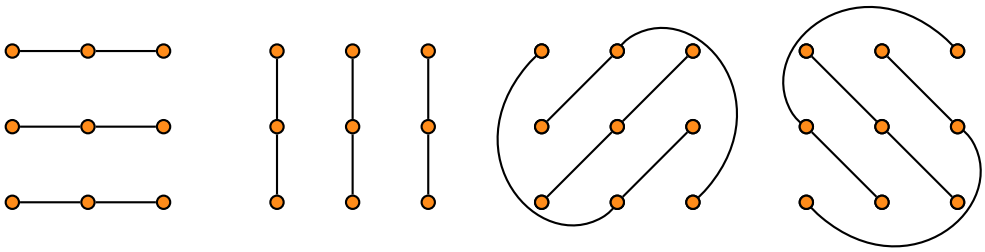

Figura 5.5: Classes de linhas paralelas do plano afim de ordem 3.

Queremos mostrar que, se $k-1 \leq n < (k-1)^2$, então o problema de determinar se existe uma clique de tamanho $(k-1)^2$ em $T_{n,k,1}$ é equivalente ao problema de determinar a existência de um plano afim de ordem $k-1$. Como se pode ver, entretanto, a Figura 5.4 não exibe um grafo completo, como gostaríamos. Nossa estratégia, então, consiste em particionar o conjunto de arestas de uma clique de tamanho n^2 em $T_{n,n+1,1}$, de modo a construir uma bijeção entre as classes de linhas paralelas de um plano afim e a partição que construímos.

Para uma melhor intuição sobre essa estratégia, observe a Figura 5.6. Nela, rotulamos os pontos do plano afim de ordem 3, apresentado na Figura 5.4, com os vértices da clique K exibida no Exemplo 60. Essa rotulação é feita de modo que cada linha corresponde a um conjunto de três vértices que coincidem, todos, na mesma coordenada. Note, por exemplo, que a linha horizontal que envolve o conjunto de pontos $\{0000, 1110, 2220\}$ é tal que os três pontos sobre essa linha possuem o valor 0 na coordenada 3. Mais ainda, todas as outras linhas horizontais são organizadas levando em conta esta coordenada, mas definem-se pela ocorrência dos valores 1 ou 2. Analogamente, cada classe de linhas paralelas está associada a uma coordenada.

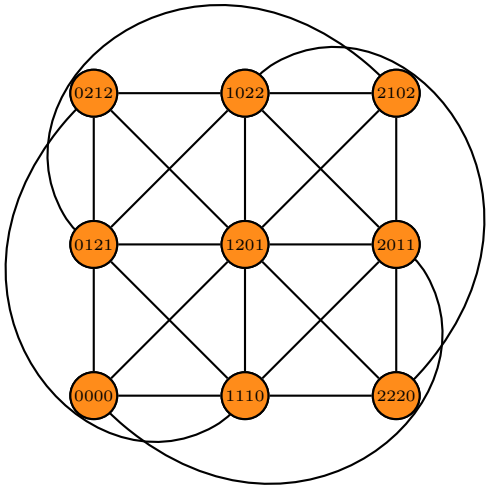

Figura 5.6: Clique K de $T_{3,4,1}$, exibida no Exemplo 60.

Para construir um plano afim de ordem n, nossa ideia é definir subconjuntos dos vértices de uma clique de $T_{n,n+1,1}$ de tal modo que os vértices em cada subconjunto coincidam em uma mesma coordenada. Reciprocamente, vamos utilizar as relações de colinearidade em um plano afim para construir uma clique em $T_{n,n+1,1}$. Para isso, empregamos a definição a seguir.

Definição 69. Sejam $i \in \mathbb{Z}_{n+1}$, $j \in \mathbb{Z}_n$ e K uma clique em $T_{n,k,1}$. Denotamos por $L_K(i,j)$ o conjunto dos vértices de K que possuem o valor j na coordenada i, isto é, $L_K(i,j) = \{v \in K : v_i = j\}$.

Na clique K do Exemplo 60, temos $L_K(0,0) = \{0000, 0121, 0212\}$. Com esse conceito, podemos construir uma correspondência entre cada conjunto $L_K(i,j)$ e uma linha do plano afim.

Lema 70. *Seja K uma clique de $T_{n,n+1,1}$ com n^2 vértices. Então, para todo par $(i,j) \in \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_n$, temos que $|L_K(i,j)| = n$.*

Prova. Seja $i \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Vamos mostrar que a família $L_i = \{L_K(i,j) : j \in \mathbb{Z}_n\}$ é uma partição de K. Primeiramente, note que dois conjuntos $L_K(i,j)$ e $L_K(i,j')$, com $j \neq j'$, não se intersectam, uma vez que cada vértice possui um único valor associado à coordenada i. Ademais, todo vértice de K possui algum valor associado à coordenada i. Portanto, L_i cobre toda a clique K. Assim,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} |L_K(i,j)| = n^2.$$

Note, também, que cada conjunto em L_i está em bijeção com uma clique de $T_{n,n,0}$, uma vez que os vértices em um mesmo conjunto coincidem todos na coordenada i e diferem, dois a dois, em todas as outras coordenadas. Portanto, pela Proposição 49, temos que $|L_K(i,j)| \leq n$. Logo, para que o somatório dos tamanhos das n partes resulte em n^2, é necessário que todas elas possuam exatamente n vértices. ■

Com isso, temos o principal resultado estrutural deste capítulo.

Lema 71. *$\omega(T_{n,n+1,1}) \geq n^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem n.*

Prova. ($\Rightarrow$) Seja K uma clique de $T_{n,n+1,1}$ com n^2 vértices. Vamos analisar a estrutura $\mathbb{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$, em que $\mathfrak{P} = K$, $\mathfrak{L} = \{L_K(i,j) : (i,j) \in \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_n\}$, e um ponto v incide em uma linha $L_K(i,j)$ se, e somente se, $v \in L_K(i,j)$. Mostraremos que $\mathbb{A}$ satisfaz os três axiomas da definição de plano afim.

(AP1) Sejam $u, v \in K$. Sabemos que u e v coincidem em uma única coordenada i, em que está o elemento $j = u_i = v_i$. Desse modo, $L_K(i,j)$ é a única linha que contém ambos os vértices.

(AP2) Seja $L_K(i,j) \in \mathfrak{L}$ e $u \in \mathfrak{P}$ tal que $u \notin L_K(i,j)$. Como já argumentamos, $L_K(i,u_i)$ é a única linha associada à coordenada i que é incidente a u e, mais ainda, que $L_K(i,u_i) \cap L_K(i,j) = \emptyset$. Resta mostrar que não há outras linhas incidentes a u que não intersectam $L_K(i,j)$. Mas veja que, pelo Lema 70, $L_K(i,j)$ possui n vértices. Ademais, os n vértices em $L_K(i,j)$ diferem, dois a dois, em toda coordenada diferente de i. Assim, para todo par $(i',j') \in \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_n$ tal que $i \neq i'$, existe vértice em $L_K(i,j)$ que possui o elemento j' na coordenada i'. Portanto, $L_K(i,j)$ intersecta $L_K(i',j')$. Logo, $L_K(i,u_i)$ é a única linha que é incidente a u e não intersecta $L_K(i,j)$.

(AP3) Como $n \geq 2$, existem ao menos duas linhas $L_K(0,0)$ e $L_K(0,1)$, cada uma com ao menos dois pontos, cada. Se tomarmos dois pontos em $L_K(0,0)$ e um em $L_K(0,1)$, é certo que a linha que intersecta dois deles não intersecta o terceiro e, portanto, os pontos não são colineares.

($\Leftarrow$) Seja $\mathbb{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ um plano afim de ordem n. Sejam $L_0, L_1, \ldots, L_n$ as classes de equivalência de linhas sob a relação de paralelismo em $\mathbb{A}$, e tome uma rotulação das linhas tal que $L_i = \{l_{i0}, l_{i1}, \ldots, l_{i(n-1)}\}$, para cada $i \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Como todo ponto em $\mathfrak{P}$ é incidente a exatamente uma linha em cada classe, podemos denotar por $f_i(P)$ o índice da linha em L_i que é incidente ao ponto P. Deste modo, podemos construir o conjunto $K = \{(f_0(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)) : P \in \mathfrak{P}\}$. Note que, como $f_i(P) \in \mathbb{Z}_n$ e $|\mathfrak{P}| = n^2$, temos que $K \subset \mathbb{Z}_n^{n+1}$ e $|K| = n^2$. Ademais, para cada par de pontos $P, Q \in \mathfrak{P}$, existe uma única linha l_{ij} que é incidente a ambos e, portanto, sabemos que i é o único indice tal que $f_i(P) = f_i(Q)$. Assim, os elementos de K associados a P e Q coincidirão apenas na coordenada i, o que nos permite afirmar que K é uma clique de $T_{n,n+1,1}$ com exatamente n^2 vértices. ■

O Lema 71 nos garante a correspondência entre um plano afim de ordem n e uma clique de $T_{n,n+1,1}$ com n^2 vértices, mas não afirma nada para outros valores de k tais que $k - 1 \leq n < (k-1)^2$. Vamos mostrar que a mesma correspôndencia vale nesses outros casos.

Definição 72. Sejam $i \in \mathbb{Z}_k$ e K uma clique em $T_{n,k,\ell}$. Denotamos por $R_i(K)$ o conjunto dos elementos de $\mathbb{Z}_n$ que aparecem na i-ésima coordenada em alguma palavra em K. Formalmente, temos que $R_i(K) = \{v_i : v \in K\}$. Ademais, se um elemento $a \in \mathbb{Z}_n$ pertence a $R_i(K)$, dizemos que a **está representado** na i-ésima coordenada na clique K.

Para um melhor entendimento, conssideremos a clique $K = \{0000, 2220, 0121\}$, um subconjunto da clique exibida no Exemplo 60. Temos que, por exemplo, $R_0(K) = \{0, 2\}$, pois 0 e 2 são os dois elementos representados na primeira posição. Para as outras coordenadas, temos $R_1(K) = \{0, 1, 2\}$, $R_2(K) = \{0, 2\}$ e $R_3(K) = \{0, 1\}$. Por outro lado, se considerarmos toda a clique mostrada no Exemplo 60, para qualquer coordenada i que se escolha, o conjunto $R_i(K)$ é igual ao conjunto $\mathbb{Z}_n$, uma vez que todos os elementos de $\mathbb{Z}_n$ estão representados em todas as coordenadas da clique em questão.

Lema 73. *Seja $(k-1) \leq n < (k-1)^2$. Se K é uma clique com $(k-1)^2$ vértices em $T_{n,k,1}$, então $|R_i(K)| = k - 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}_k$.*

Prova. Seja K uma clique de $T_{n,k,1}$ com $(k-1)^2$ vértices, seja $u \in K$ e $i \in \mathbb{Z}_k$. Para efeito de simplicidade, consideramos que $K_j = K_{\{j\}}(u)$, de acordo com a Definição 59. Vamos usar o fato de que $K \setminus \{u\}$ é a união dos K_j, para $j \in \mathbb{Z}_k$, para determinar o tamanho de $R_i(K)$ a partir da relação entre suas partes. Primeiramente, mostramos que todo conjunto K_j possui exatamente $k - 2$ vértices. Para tal, observemos que $|\mathcal{P}_K(u)| \geq 2$ pois, caso contrário, o Lema 63 forçaria que $|K| \leq n$. Daí, pelo Lema 65, sabemos que todo K_j possui no máximo $k - 2$

vértices. Adicionalmente, como cada vértice em K coincide com u em exatamente uma coordenada, temos que

$$|K| = 1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} |K_j|.$$

Esse somatório, entretanto, possui k parcelas, todas menores ou iguais a $k-2$. O maior valor possível para o lado direito da equação, portanto, é $k(k-2)+1$, que é igual a $(k-1)^2$, resultado que só é atingido quando todo K_j possui exatamente $k-2$ vértices. Nesse caso, para todo $j \neq i$, o conjunto $R_i(K_j)$ também possui exatamente $k-2$ elementos, uma vez que os elementos de K_j diferem, dois a dois, em todas as coordenadas diferentes de j. Agora, vamos demonstrar que esses $k-2$ elementos são os mesmos para todo $j \neq i$, e, unidos com o conjunto $\{u_i\} = R_i(K_i)$, constituem os $k-1$ elementos representados na i-ésima coordenada em K. Para tal, sejam j e j' dois elementos distintos em $\mathbb{Z}_k \setminus \{i\}$, que certamente existem, pois $2 \leq n < (k-1)^2$ e, então, $k \geq 3$. Observemos que os vértices em K_j diferem dos vértices em $K_{j'}$ em ambas as coordenadas j e j'. Assim, ao escolhermos um vértice $v \in K_j$ é certo que haverá um vértice $w \in K_{j'}$ para o qual $v_i = w_i$, já que temos $k-2$ vértices em $K_{j'}$ para $k-2$ coordenadas disponíveis, e os vértices em $K_{j'}$ coincidem apenas na coordenada j'. Portanto, para cada elemento representado na i-ésima coordenada em K_j há um vértice em $K_{j'}$ que também possui esse elemento na i-ésima coordenada. Em outras palavras, $R_i(K_j) = R_i(K_{j'})$. Por fim, voltemos à observação de que

$$R_i(K) = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}_k} R_i(K_h).$$

Como mostramos, $R_i(K_h)$ é igual para todo $h \neq i$, e possui $k-2$ elementos, diferentes de u_i. Ademais, $R_i(K_i) = \{u_i\}$. Assim, temos que $|R_i(K)| = k-2+1 = k-1$, como queríamos. ■

Com a afirmação no Lema 73, é suficiente reunir os resultados e mostrar que é possível obter uma clique com $(k-1)^2$ vértices em $T_{k-1,k,1}$ a partir de uma clique com esse mesmo tamanho em $T_{n,k,1}$, quando $(k-1) \leq n < (k-1)^2$.

Lema 74. *Seja $k-1 \leq n < (k-1)^2$. Então, $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k-1)^2$ se, e somente se, $\omega(T_{k-1,k,1}) \geq (k-1)^2$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Seja K uma clique de $T_{n,k,1}$ com $(k-1)^2 = k(k-2)+1$ vértices e seja $u \in K$. Relembrando nosso estudo dos automorfismos dos grafos timbrais no Capítulo 2, vamos construir uma sequência $\Sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$ de permutações de $\mathbb{Z}_n$, em que, para todo $i \in \mathbb{Z}_k$, a imagem de $R_i(K)$ por σ_i é o conjunto $\mathbb{Z}_{k-1}$, isto é, $\sigma_i[R_i(K)] = \mathbb{Z}_{k-1}$. Pelo Lema 73, sabemos que $|R_i(K)| = k-1$, para todo $i \in \mathbb{Z}_k$, o que nos garante que é possível construir Σ dessa forma. Além disso, pela

Proposição 15, a função f_Σ, como especificada na Definição 14, é um automorfismo de $T_{n,k,1}$. Portanto, $f_\Sigma[K] \subset \mathbb{Z}_{k-1}^k$ é uma clique de $T_{k-1,k,1}$ com $(k-1)^2$ vértices. Logo, a existência de uma clique de $T_{n,k,1}$ com $(k-1)^2$ vértices implica na existência de uma clique de $T_{k-1,k,1}$ com $(k-1)^2$ vértices.

($\Leftarrow$) Como $T_{k-1,k,1}$ é subgrafo de $T_{n,k,1}$, sabemos que toda clique em $T_{k-1,k,1}$ também é uma clique de $T_{n,k,1}$.

Desse modo, temos que $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k-1)^2 \iff \omega(T_{k-1,k,1}) \geq (k-1)^2$. ■

Agora, temos o suficiente para demonstrarmos o principal resultado do capítulo.

Teorema 75. *Seja $k-1 \leq n < (k-1)^2$. Então, $\omega(T_{n,k,1}) = (k-1)^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem $k-1$.*

Prova. Sabemos, pelo Teorema 67, que $\omega(T_{n,k,1}) \leq (k-1)^2$. Pelo Lema 74, temos que $\omega(T_{n,k,1}) \geq (k-1)^2$ se, e somente se, $\omega(T_{n,n+1,1}) \geq (k-1)^2$. Por outro lado, o Lema 71 estipula que $\omega(T_{n,n+1,1}) \geq (k-1)^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem $k-1$. Logo, por transitividade, $\omega(T_{n,k,1}) = (k-1)^2$ se, e somente se, existe um plano afim de ordem $k-1$. ■

Por fim, é sabido que existe um plano afim de ordem $k-1$ sempre que $k-1$ é uma potência de primo, isto é, $k-1 = p^q$, em que p é primo e q é um natural qualquer [17]. Este plano, por sua vez, deriva do corpo finito $\mathbb{F}_{k-1}$. Daí, obtemos o resultado que segue.

Corolário 76. *Seja $k-1 \leq n < (k-1)^2$. Se $k-1$ é uma potência de primo, então $\omega(T_{n,k,1}) = (k-1)^2$.*

Notamos que $T_{n,k,1}$ é isomorfo a um subgrafo de $T_{n,k+a,1+a}$, para todo $a \in \mathbb{N}$. De fato, dado $u \in V(T_{n,k+a,1+a})$, como já argumentamos anteriormente, o conjunto de vértices que coincidem com u nas a primeiras coordenadas induz um subgrafo em que os vértices podem ser identificados apenas pelas suas últimas k coordenadas, em que estes coincidem, dois a dois, em uma única posição.

Corolário 77. *Seja $k-\ell \leq n < (k-\ell)^2$. Se $k-\ell$ é uma potência de primo, então $\omega(T_{n,k,\ell}) \geq (k-\ell)^2$.*

Por fim, vamos organizar nossos resultados e observações acerca de $\omega(T_{n,k,1})$ em uma tabela, para um melhor entendimento do que ainda resta a ser feito. A tabela mostraa variação de n em relação a k, considerando os três intervalos tratados. Para cada intervalo, ela contém os limites obtidos, cada um relacionado a um dos resultados apresentados. Como comentamos, alguns destes limites deixam margens para investigação ou por não serem justos ou por estarem associados a existência de planos afins.

Tabela 5.1: Resumo dos casos para $\omega(T_{n,k,1})$

Caso	**Restrição sobre** $\omega(T_{n,k,1})$	
$n < k-1$	$n \leq \omega(T_{n,k,1}) \leq n^2$	
$k-1 \leq n < (k-1)^2$	**Subcaso**	**Restrição**
	$k-1 = p^q$	$\omega(T_{n,k,1}) = (k-1)^2$
	Caso contrário	$n \leq \omega(T_{n,k,1}) \leq (k-1)^2$
$(k-1)^2 \leq n$	$\omega(T_{n,k,1}) = n$	

Algo que pode despertar curiosidade na listagem de casos exibida na Tabela 5.1 é a situação em que $k-1 \leq n < (k-1)^2$ e $k-1$ não é uma potência de primo. Uma possível questão é: sob quais circunstâncias o limite superior de $(k-1)^2$ é justo? Relacionado a isso, vale destacar que a existência de um plano afim cuja ordem não é uma potência de primo é desconhecida no momento [17, 36]. Desta forma, não sabemos determinar se existem outros valores de k para os quais $\omega(T_{n,k,1}) = (k-1)^2$, quando $k-1 \leq n < (k-1)^2$.

Capítulo 6

Aplicação musical

Após o estudo das propriedades estruturais dos grafos timbrais, que viemos conduzindo até aqui, nos encaminhamos para o final do texto oferecendo uma perspectiva de aplicação para esta classe de grafos. Tal como proposto por Akhmedov e Winter [2], nos debruçamos sobre o uso dessas estruturas na música, como forma de modelar as transições entre elementos musicais. Diferentemente da proposta original, entretanto, sugerimos outras interpretações musicais para os vértices dessas estruturas, possibilitando o manejo de ritmo, melodia e harmonia no fragmento musical correspondente.

Para um melhor entendimento da motivação para as interpretações propostas, a Seção 6.1 apresenta uma revisão das relações mais tradicionais entre grafos e música, resgatando algumas aplicações comuns e destacando a ideia de proporcionar transições suaves e parcimoniosas como um dos principais motivadores da modelagem musical através da estrutura de grafos.

Em seguida, na Seção 6.2, apresentamos nossas propostas para ampliar a noção de suavidade para além de suas aplicações mais tradicionais, que se concentram, principalmente, nas transições entre progressões harmônicas. Assim, descrevemos interpretações dos grafos timbrais que associam seus vértices a ritmos e melodias, além de estender a interpretação original para permitir movimento harmônico.

Algumas das interpretações propostas foram utilizadas na composição da peça *Amálgama* [19], de autoria de Pauxy Gentil-Nunes, Luan Simões e Petrúcio Viana – que é o tema da Seção 6.3. Nela, fazemos um relato do processo de criação da obra, que envolve uma descrição de sua estrutura, das interpretações adotadas para os grafos timbrais e do programa utilizado para a geração aleatória de fragmentos musicais a partir de caminhos nos respectivos grafos. Além disso, analisamos alguns trechos de *Amálgama*, que destacam os efeitos da utilização dos grafos timbrais em seu processo composicional.

6.1 Grafos e música

Embora a relação entre grafos e música pareça distante à primeira vista, não é necessário se aprofundar muito nos estudos musicais para encontrar representações visuais que se utilizem da estrutura de grafo. Um primeiro e simples exemplo está no chamado *ciclo de quintas*, exibido na Figura 6.1. Essa estrutura consiste precisa-

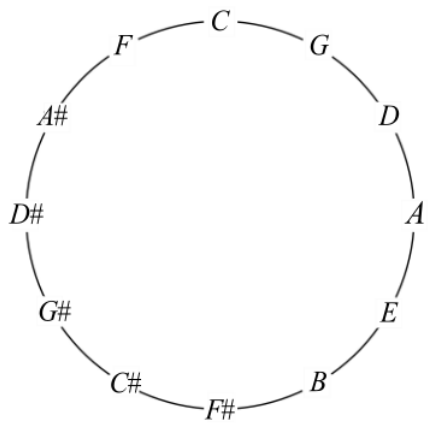

Figura 6.1: Ciclo de quintas

mente em um grafo ciclo com 12 vértices — um C_{12} — onde cada vértice representa uma altura musical. Além disso, duas alturas são adjacentes no ciclo se, e somente se, constituem um intervalo de quinta justa, isto é, estão a 7 semitons de distância uma da outra. Na prática, o ciclo de quintas é utilizado, principalmente, como um mnemônico para o ensino de teoria musical.

Outra representação por grafos que aparece com frequência em estudos de teoria musical é a *tonnetz*, exibida na Figura 6.2, que consiste em uma representação em grade triangular das 12 alturas musicais, de modo que alturas que distam 3, 4 ou 7 semitons estão conectadas por uma aresta. Introduzido por Leonhard Euler em 1726 — o que, por si só, já sugere seu caráter matemático — esse diagrama desempenha um importante papel na *teoria musical Neo-Riemanniana* [16]. Uma observação mais atenta nos leva a perceber que o grafo correspondente à *tonnetz* neo-Riemanniana é isomorfo ao grafo de Cayley $Cay(\mathbb{Z}_{12}, \{3, 4, 7\})$. Do ponto de vista musical, esse grafo representa as relações harmônicas que fundamentam a formação das tríades perfeitas, acordes formados por três alturas, intercalando-se intervalos de 3 e 4 semitons — terças menor e maior, respectivamente. Na formação dessas tríades, tem-se uma altura como a fundamental, que dá nome ao acorde, enquanto as outras duas são obtidas por meio de dois intervalos de terça, um maior e o outro menor. A junção desses intervalos de terça dá origem a um intervalo de quinta justa entre as extremidades do acorde. Desse modo, as tríades perfeitas são representadas por triângulos na *tonnetz*.

Por exemplo, considere a tríade maior de sol, formada pelas alturas sol, si e ré

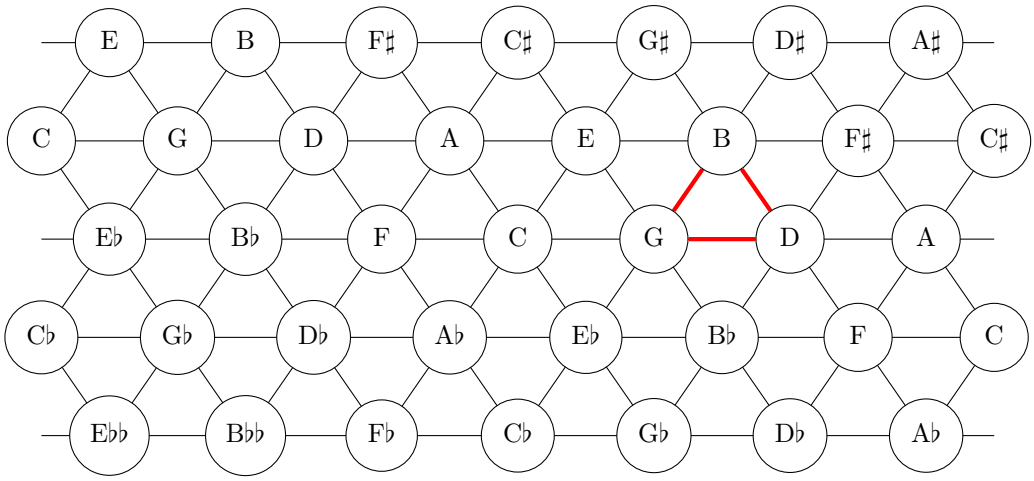

Figura 6.2: Tonnetz Neo-Riemanniana, com a tríade GBD em destaque.

— o triângulo contendo os vértices G, B e D, na *tonnetz*. Nesse acorde, G atua como a altura fundamental. A partir dela, ao aplicar um intervalo de 4 semitons, obtemos B. Em seguida, a aplicação de um intervalo de 3 semitons sobre B resulta na altura D, que dista 7 semitons de G, completando o acorde.

Um dos pontos centrais da teoria Neo-Riemanniana, que salienta a importância da *tonnetz*, é a análise de progressões de acordes sob a ótica de transformações triádicas "suaves", que maximizam o número de alturas invariantes e minimizam o movimento entre as alturas que variam [16]. Essas transformações, que representam um movimento harmônico parcimonioso, são representadas pelo compartilhamento de uma aresta entre triângulos na *tonnetz*, uma vez que triângulos "adjacentes" compartilham ao menos duas alturas, e a única altura que varia transforma-se por apenas 1 ou 2 semitons.

As duas representações que exibimos são estruturas que desempenham um papel importante na caracterização das relações melódicas e harmônicas na tradição musical europeia. Mesmo em trabalhos que avaliam a possibilidade de se fazer música com mais do que as 12 alturas convencionais, como o de Gerald Balzano [5], a existência de estruturas equivalentes a esses dois grafos é apontada como um elemento importante para preservar a base sobre a qual se fundamenta grande parte da teoria musical no sistema de 12 alturas.

Os exemplos do ciclo de quintas e da *tonnetz* são provavelmente as representações por grafos mais comuns em teoria musical, mas não são as únicas. Robert Morris [31] analisa algumas representações de estruturas musicais por digrafos, observando a importância do que ele chama de ciclos "minimais" nesses grafos, dentro do contexto musical. O autor apresenta exemplos de digrafos obtidos a partir de séries dodecafônicas, fragmentos melódicos e conjuntos de alturas.

Generalizando a construção da *tonnetz* Neo-Riemanniana, Albini e Bernardi [3]

também formalizam os sistemas de alturas e intervalos musicais através de grafos, definindo dois tipos: as *redes de tons* e as *redes de acordes*. Nesse trabalho, os autores avaliam a hamiltonicidade desses grafos — além de grafos derivados deles — com o objetivo de que sirvam como modelos para a construção e análise de progressões harmônicas.

Diante dos exemplos que vimos, podemos perceber que a ideia de um movimento suave entre elementos musicais tocados consecutivamente é recorrente em teoria musical. De fato, a maior parte dos grafos descritos nos parágrafos anteriores codifica a ideia de uma transição harmônica suave. A *tonnetz*, por exemplo, representa as possibilidades de movimento entre triângulos — acordes — adjacentes no grafo, e que, portanto, contêm duas alturas em comum. Por outro lado, como fez o próprio Winter em *maximum change* [40], um compositor pode querer subverter essa ideia de suavidade ao criar uma música em que elementos tocados em sequência são diametralmente distintos, em uma transição mais disruptiva. Nos dois casos, há um critério de encadeamento dos elementos musicais baseado em uma medida de semelhança entre eles. Este, por sua vez, é o mesmo princípio implementado pelos grafos timbrais, que utilizam o índice de coincidência como critério para o encadeamento de orquestrações.

6.2 Interpretações musicais para grafos timbrais

Como descrito na Seção 1.1, o grafo timbral $T_{n,k,\ell}$ foi apresentado por Akhmedov e Winter [2] com o objetivo de modelar orquestrações de um acorde fixo, com k alturas, em um conjunto fixo de n instrumentos, de modo que exatamente ℓ alturas coincidam entre orquestrações consecutivas.

Para retomar esse pensamento, relembramos a situação exibida no início deste texto, na Figura 1.1, que apresenta uma sequência de orquestrações de um acorde de $C7M$ — cujas alturas são dó, mi, sol e si — para piano e contrabaixo. Observemos a

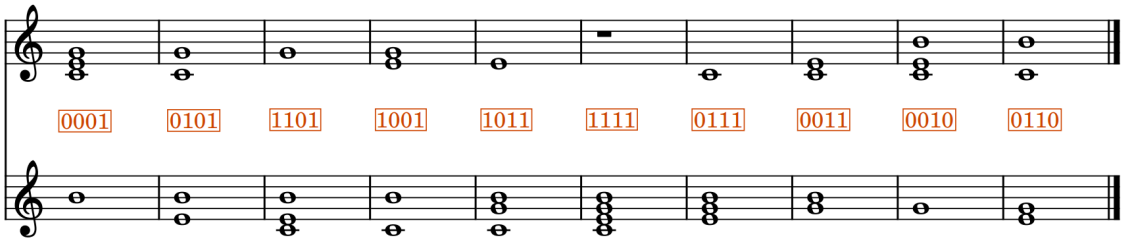

Figura 6.3: Partitura alternativa para o trecho inicial exibido na Figura 1.1.

Figura 6.3, que ilustra uma realização mais simples para as dez primeiras orquestrações da partitura exibida na Figura 1.1, considerando um conjunto genérico de dois instrumentos. Nela, as orquestrações estão indicadas pelas sequências marcadas em

vermelho, em cada compasso. No primeiro compasso, as três primeiras alturas do acorde estão alocadas na pauta superior, enquanto a altura restante foi alocada na pauta inferior — o que é indicado pela sequência 0001, marcada em vermelho.

Essa *interpretação timbral* dos grafos timbrais os coloca como ferramentas úteis para auxiliar o processo composicional de músicas que explorem diferentes texturas para um mesmo acorde, como em *maximum change* [40], composição que corresponde a um ciclo hamiltoniano no grafo $T_{4,4,0}$. Por outro lado, as composições criadas a partir dessa interpretação carecem de movimento harmônico, uma vez que o acorde tocado é o mesmo ao longo de toda a música, como podemos observar na Figura 6.3.

Do ponto de vista matemático, entretanto, os vértices de um grafo timbral são simplesmente funções de $\mathbb{Z}_k$ em $\mathbb{Z}_n$, o que permite que se dê outras interpretações musicais para esses objetos. Nesta seção, apresentamos propostas de interpretação musical para os grafos timbrais, avaliando os impactos de cada interpretação em composições que as utilizem.

6.2.1 Interpretação harmônico-timbral

Para dar movimento harmônico a fragmentos compostos a partir de um grafo timbral, podemos assumir a possibilidade de que as alturas não sejam obrigatoriamente tocadas em toda orquestração, transformando o acorde orquestrado em uma escala. Dessa forma, passamos a orquestrar acordes selecionados dentre as alturas da escala — subconjuntos da escala — e não mais um acorde fixo referente a todo o conjunto de alturas.

Consideremos um conjunto A com k alturas musicais $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ e um conjunto B com $n-1$ instrumentos $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, além de um símbolo b_0, que representa o ato de silenciar uma altura, isto é, de não tocá-la. Na *interpretação harmônico-timbral* dos $T_{n,k,\ell}$, cada vértice $x \in \mathbb{Z}_n^k$ simboliza a orquestração de um acorde selecionado dentre as alturas de A, com a instrumentação definida por B, de tal modo que a presença de um elemento $x_i = 0$ indica que a altura a_i está ausente no acorde orquestrado. Para $x_i \neq 0$, interpretamos que a altura a_i é tocada pelo instrumento b_{x_i}, como na interpretação timbral.

A Figura 6.4 exibe uma sequência de acordes escolhidos dentre o conjunto de alturas {*dó, mi, sol, si*}, o mesmo utilizado no Exemplo 2, cuja sequência de orquestrações foi ilustrada na Figura 1.1. Além disso, os acordes são orquestrados para um conjunto de dois instrumentos. Observemos que enquanto, na Figura 1.1, o mesmo acorde de $C7M$ aparecia em todos os compassos, a sequência exibida na Figura 6.4 contém orquestrações de acordes variados, como as tríades de mi menor e dó maior.

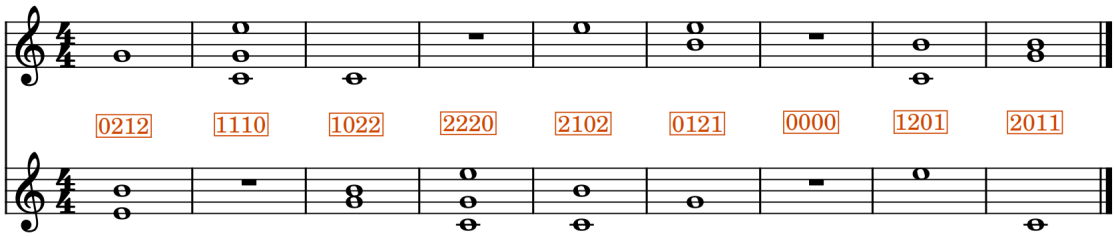

Figura 6.4: Sequência de acordes orquestrados para dois instrumentos.

Para permitir que algumas alturas não sejam tocadas, em linha com a interpretação proposta, representamos cada acorde orquestrado por um elemento de $\mathbb{Z}_3^4$, isto é, uma atribuição de um "instrumento" — possivelmente a ação de silêncio — para cada altura no conjunto. Na situação exibida na Figura 6.4, estamos preservando a atribuição para exatamente uma altura em cada compasso, o que faz com que essa sequência de acordes orquestrados represente um caminho no grafo timbral $T_{3,4,1}$.

Observando os vértices correspondentes a cada acorde orquestrado na partitura exibida na Figura 6.4, chama a atenção o sétimo compasso, em que o "acorde degenerado" com zero alturas é tocado. De fato, a interpretação que estamos propondo admite orquestrações de "acordes" com menos de duas alturas, o que é um efeito colateral de se permitir que alturas sejam omitidas. Outra característica dessa interpretação é que ela não permite que alturas sejam dobradas na orquestração, isto é, que dois instrumentos toquem a mesma altura — algo que já acontecia na interpretação original.

Além disso, vale destacar que o movimento harmônico para acordes escolhidos em um conjunto de quatro alturas é bastante restrito, o que torna o fragmento exibido na Figura 6.4 apenas um pequeno exemplo de aplicação da interpretação harmônico-timbral que estamos propondo. Esse exemplo, entretanto, não foi escolhido ao acaso, já que o conjunto dos acordes orquestrados exibidos na Figura 6.4 corresponde à clique em $T_{3,4,1}$ que exibimos no Exemplo 60. Por conta disso, qualquer permutação dos compassos na partitura corresponderá a um caminho válido no grafo e, portanto, esse conjunto de acordes orquestrados traz uma certa liberdade ao compositor.

6.2.2 Interpretação melódica

As interpretações anteriores identificam os elementos de $\mathbb{Z}_n^k$ com orquestrações de um acorde, deixando os aspectos rítmicos e melódicos a cargo do compositor. Poderíamos, entretanto, fornecer uma *interpretação melódica* do grafo ao identificar o conjunto $\mathbb{Z}_k$ com um intervalo de tempo discretizado em k pontos, isto é, com um conjunto de k instantes de tempo $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$. Os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_n$, nesse caso, representam alturas $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, além de um elemento a_0 que indica

a ausência de altura, em uma ideia análoga à da interpretação harmônico-timbral. Assim, uma k-upla $x \in \mathbb{Z}_n^k$ simboliza que a altura a_{x_i} — ou ausência de altura — é tocada no instante t_i.

A Figura 6.5 mostra um trecho que utiliza uma divisão de compasso em 6 instantes de tempo e o conjunto de alturas da escala de tons inteiros, isto é, o conjunto {*dó, ré, mi, fá#, sol#, lá#*}. O trecho exibido foi criado a partir de um ciclo

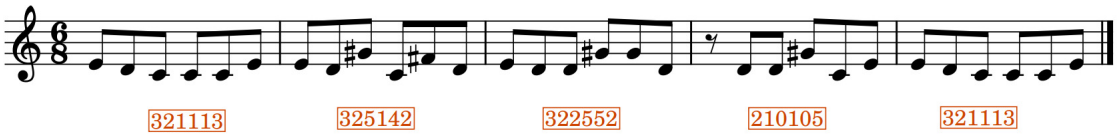

Figura 6.5: Melodia gerada por um C_4 induzido em $T_{7,6,3}$.

no grafo $T_{7,6,3}$, de modo que, para quaisquer dois compassos consecutivos, há exatamente três instantes cuja altura atribuída a eles é preservada. Assim, o vértice 321113 indica a melodia *mi-ré-dó-dó-dó-mi*, cuja semelhança com a melodia do compasso seguinte, *mi-ré-sol#-dó-fá#-ré*, se dá apenas nos dois primeiros e no quarto instante do compasso.

6.2.3 Interpretação rítmica

Mudando sutilmente a interpretação melódica que descrevemos, podemos utilizar o grafo $T_{2,k,\ell}$ para construir ritmos. Essa *interpretação rítmica* dos grafos timbrais, então, considera dois estados possíveis para cada instante de tempo, indicando se há ou não alguma nota articulando naquele instante. Assim, por exemplo, o vértice 001101 representa um ritmo formado pelos instantes t_2, t_3 e t_5 do compasso.

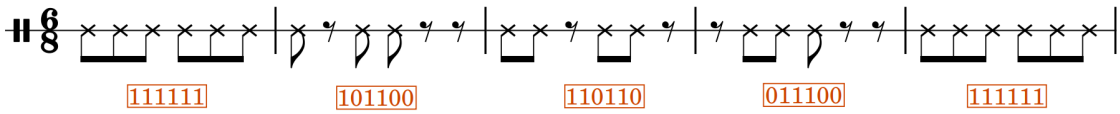

Figura 6.6: Fragmento rítmico gerado por um C_4 induzido em $T_{2,6,3}$.

A vantagem dessa interpretação é que, com ela, podemos avaliar o índice de coincidência apenas entre ritmos, construindo um trecho musical em que a alteração rítmica entre compassos consecutivos respeite o índice de coincidência escolhido. Com a interpretação melódica, por outro lado, duas melodias que não coincidem em nenhuma nota, mas possuem o mesmo ritmo, correspondem a vértices com índice de coincidência 0 entre si, ainda que, do ponto de vista rítmico, essas melodias sejam idênticas. Na Figura 6.5, por exemplo, as melodias dos três primeiros compassos possuem o mesmo ritmo — todos os seis instantes estão sendo tocados — embora as

alturas tocadas se alterem de acordo com o índice de coincidência estabelecido. A Figura 6.6 mostra um fragmento construído a partir do grafo $T_{2,6,3}$, utilizando esta interpretação rítmica.

6.2.4 Interpretação harmônico-rítmica

Uma última proposta de interpretação, que também lida com instantes de tempo em um compasso, é a *interpretação harmônico-rítmica*, que associa $\mathbb{Z}_k$ com um conjunto de alturas e $\mathbb{Z}_n$ com um conjunto de instantes. Nesse caso, estamos atribuindo um instante de tempo para cada altura, o que faz com que mais de uma altura possa ser tocada no mesmo instante. Podemos ver um exemplo dessa interpretação na Figura 6.7, em que utiliza-se a mesma escala de tons inteiros usada no exemplo ilustrado pela Figura 6.5. Além disso, os compassos também estão divididos igual-

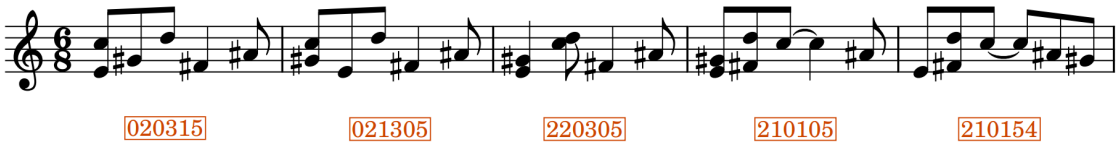

Figura 6.7: Fragmento gerado a partir de $T_{6,6,4}$.

mente em seis instantes, atribuindo a cada altura um ponto de ataque dentro do compasso. Observemos que, nesse caso, apesar de permitir que se toque mais de uma nota simultânea — o que sugere, novamente, a ideia de harmonia — estamos obrigando que cada altura seja tocada uma única vez no compasso, o que restringe consideravelmente os fragmentos musicais obtidos a partir desta interpretação dos grafos timbrais. Apesar disso, a interpretação harmônico-rítmica possibilita a construção de fragmentos que combinam aspectos rítmicos, melódicos e harmônicos, uma vantagem com relação às outras interpretações propostas.

6.3 Processo composicional de *Amálgama*

Algumas das ideias que abordamos neste capítulo foram aplicadas no processo composicional da peça *Amálgama*, para sexteto com madeiras e cordas dedilhadas [19]. Os instrumentos escolhidos para o sexteto foram flauta, clarineta, fagote, bandolim, guitarra elétrica e harpa. A obra consiste em três movimentos, representando três diferentes graus de parcimônia ou suavidade. Por sua vez, cada movimento é subdividido em três seções, cada uma delas utilizando um conjunto de alturas distinto. Além disso, cada seção também é composta por três módulos, com diferentes escolhas de instantes de tempo para os compassos.

6.3.1 Estrutura geral

Como descrevemos, cada tipo de unidade estrutural — movimento, seção e módulo — determina um parâmetro da composição. Vamos descrever melhor o papel de cada uma delas na estrutura geral de *Amálgama*.

Movimentos: Os movimentos estão associados a um nível de suavidade e possuem, cada um, um conjunto de instrumentos de maior protagonismo. O primeiro movimento representa uma transição mais suave entre os compassos, o que é refletido na escolha do índice de coincidência $k-2$ para a criação dos fragmentos que o compõem, e também no uso das madeiras — uma instrumentação mais tradicional na música de concerto — como instrumentos de destaque. O segundo movimento, por sua vez, representa uma transição disruptiva entre elementos adjacentes, utilizando um índice de coincidência igual a zero e os três instrumentos de cordas como protagonistas. Por fim, o terceiro movimento não utiliza diretamente os grafos timbrais para sua geração mas, ao invés disso, foi composto a partir de fragmentos presentes nos dois movimentos anteriores, com destaque para todos os seis instrumentos.

Seções: As seções determinam o conjunto de alturas utilizadas na criação de cada módulo. A transição entre seções em um mesmo movimento também respeita o grau de suavidade associado a ele, isto é, os conjuntos de alturas utilizados no primeiro movimento são mais parecidos entre si, enquanto aqueles utilizados no segundo movimento são mais distantes.

Módulos: Cada módulo está relacionado a uma escolha de instantes de tempo dentro do compasso. Os módulos são a unidade básica de *Amálgama*, correspondendo a caminhos em grafos timbrais gerados aleatoriamente por um programa de computador que auxiliou a criação da peça. A junção entre módulos gerados por parâmetros distintos, unidos de maneira suave ou abrupta, a depender do movimento em que se inserem, dá um aspecto de colagem à obra. É essa característica, agravada pelo reaproveitamento dos fragmentos no terceiro movimento, que inspira o título.

6.3.2 Interpretações utilizadas

Para a geração dos módulos, combinamos as interpretações harmônico-timbral e harmônico-rítmica, propostas na Seção 6.2. Como o parâmetro n se refere a elementos musicais distintos em cada uma das interpretações, utilizamos dois grafos distintos, cada um para modelar um aspecto do trecho gerado. A vantagem dessa abordagem é que, assim, não precisamos que o número de instrumentos seja igual

ao número de instantes de tempo, em cada módulo. Dessa forma, passamos a considerar dois parâmetros n_1 e n_2, relativos ao número de instrumentos e ao número de instantes de tempo no compasso, respectivamente. O parâmetro n_1 é sempre igual a 4, que corresponde aos três instrumentos protagonistas de cada movimento, além da ação de silêncio. O parâmetro n_2 assume um valor diferente em cada módulo.

A interpretação harmônico-timbral, então, foi usada para gerar fragmentos a partir do grafo $T_{4,k,k-2}$, para o primeiro movimento, e $T_{4,k,0}$, para o segundo. Dos vértices desse grafo, obtemos o conjunto de alturas que são tocadas, de fato, em cada compasso, além dos instrumentos que as tocam. A interpretação harmônico-rítmica, por sua vez, é aplicada no grafo $T_{n_2,k,k-2}$, no primeiro movimento, e $T_{n_2,k,0}$, no segundo. Cabe a esta interpretação definir em que momento do compasso cada altura é articulada.

Como mencionamos na Seção 6.2, ambas as interpretações possuem a desvantagem de atribuir a cada altura um único instrumento ou instante de tempo. Esse fato, na prática, impõe certas restrições às melodias e orquestrações geradas, uma vez que é comum que se deseje dobrar alguma altura do acorde ou construir melodias que repitam uma altura, como na Figura 6.5. Para compensar essa desvantagem, admitimos a possibilidade de que o conjunto de alturas, de tamanho k, possua alguma redundância, isto é, que exista mais de um elemento do conjunto que representa a mesma altura. O efeito colateral dessa adaptação é que permitimos que vértices distintos do grafo sejam interpretados da mesma forma. Se a_1 e a_2 representam a mesma altura, então uma orquestração que determina que o instrumento b_1 toca a altura a_1 e o instrumento b_2 toca a altura a_2 será equivalente à orquestração em que b_1 toca a_2 e b_2 toca a_1.

6.3.3 Geração dos módulos

Para gerar os fragmentos musicais que serviram de matéria prima para a criação dos módulos de *Amálgama*, desenvolvemos o programa de computador *Gerador de Fragmentos Timbrais* [11], em *Python*, cuja principal funcionalidade é a geração aleatória de caminhos em grafos timbrais e a transformação desses caminhos em trechos musicais. Esses trechos musicais podem ser reproduzidos durante a execução do programa ou exportados como partitura no formato *MusicXML*. Ambas as tarefas são realizadas com o auxílio da biblioteca *SCAMP* [18], que fornece uma série de métodos para a composição musical assistida por computadores. Além disso, o programa também permite a exportação, em formato *JSON*, das sequências de vértices nos grafos correspondentes ao material gerado, juntamente com os parâmetros de geração.

No processo de geração, o usuário pode controlar uma coleção de parâmetros,

que são passados para o método de geração dos módulos, dos quais destacamos:

- O conjunto de instrumentos utilizados na geração, que determina n_1.
- Os pesos atribuídos a cada instrumento, que influenciam a escolha aleatória dos caminhos no grafo.
- A escala utilizada, obtida através de sua estrutura intervalar e de sua tônica.
- O número de alturas admitidas, que determina k.
- O grau de suavidade na geração, correspondente a ℓ.
- O número de compassos gerados.
- A coleção de instantes de tempo selecionados em cada compasso, que determina n_2. Essa coleção é obtida a partir da determinação do número de tempos fortes no compasso e na divisão de cada tempo em instantes igualmente espaçados, ambos definidos pelo usuário.

Com os parâmetros definidos e os caminhos nos grafos timbrais selecionados, o processo de geração torna-se simplesmente uma "tradução" entre os i-ésimos vértices dos caminhos e o i-ésimo compasso do material gerado, como explicaremos a seguir. Além disso, vale destacar que os fragmentos gerados sofreram modificações no processo de composição da peça, tanto para solucionar problemas de ordem prática quanto para corresponder melhor ao gosto dos compositores. Ainda assim, essas modificações respeitaram a modelagem por grafos timbrais que deu origem aos módulos, preservando os critérios de encadeamento estipulados.

6.3.4 Análise de alguns fragmentos

Vejamos os efeitos da modelagem por grafos timbrais na composição final. A Figura 6.8 mostra as pautas de flauta, clarineta e fagote nos seis primeiros compassos de *Amálgama*. Nesse compasso, usa-se o conjunto de alturas referente à escala diatônica maior na tonalidade de sol, admitindo a repetição das alturas sol, lá e si. Assim, o conjunto de alturas utilizado está representado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Conjunto de alturas utilizado nos primeiros compassos de *Amálgama*.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
sol	lá	si	dó	ré	mi	fá#	sol	lá	si

Além disso, subdividimos o compasso em quatro instantes igualmente espaçados, isto é, em quatro colcheias. Assim, obtemos esses primeiros compassos a partir de

caminhos em duas cópias do grafo $T_{4,10,8}$ — pois o número de instantes n_2 coincide com o número de instrumentos n_1.

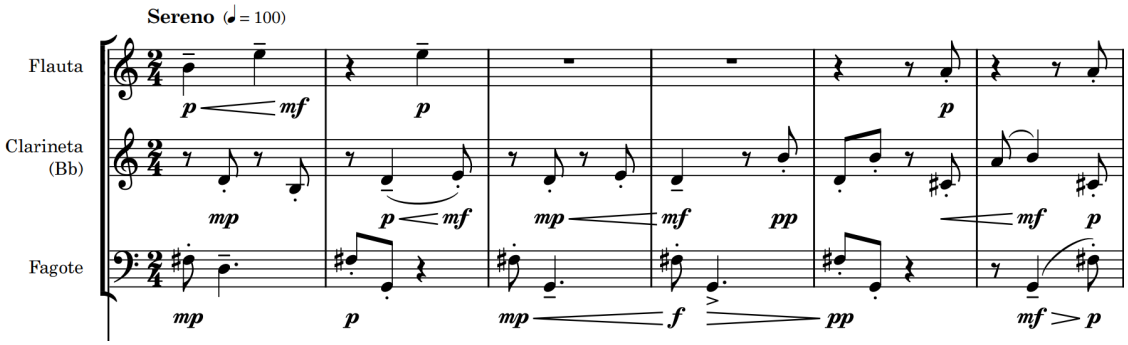

Figura 6.8: Primeiros compassos das madeiras em *Amálgama*.

O primeiro compasso na Figura 6.8 é obtido pelos vértices $u = 1232131000$ e $v = 1301120300$. Vamos entender melhor o que esses vértices significam.

- O vértice u indica, por exemplo, que a flauta, representada por 3, toca as alturas $a_2 =$ si e $a_5 =$ mi, enquanto o vértice v indica que essas alturas devem ser tocadas na primeira e na terceira colcheia, respectivamente.

- Algo semelhante ocorre com a clarineta, instrumento b_2. O vértice u atribui a clarineta às alturas $a_1 =$ lá e $a_3 =$ dó, enquanto v indica que essas alturas são tocadas nos instantes t_3 e t_1, isto é, na quarta e na segunda colcheia, respectivamente.

- O vértice u atribui o fagote, instrumento b_1, às alturas $a_0 =$ sol, $a_4 =$ ré e $a_6 =$ fá#, enquanto v indica que essas alturas são tocadas nos instantes t_1, t_1 e t_0, respectivamente. A partitura, entretanto, só mostra o fagote tocando as alturas fá# e ré no compasso. Isso ocorre porque o fagote, assim como flauta e clarineta, é um instrumento melódico, incapaz de tocar duas notas simultâneas. Esse fato é compensado pelo uso dos outros instrumentos na composição, como explicamos mais à frente.

- As alturas a_7, a_8 e a_9, referentes à repetição das alturas a_0, a_1 e a_2, estão atribuídas ao elemento 0 e, portanto, não são tocadas, de acordo com a descrição da interpretação harmônico-timbral, apresentada na Seção 6.2.

Os instrumentos de cordas dedilhadas, que não têm destaque no primeiro movimento da música, são utilizados para amenizar problemas de nível prático, principalmente nos casos em que mais de uma altura é atribuída para o mesmo instrumento melódico no mesmo instante de tempo. Nesse caso, atribuímos a eles as alturas excedentes, mantendo uma correspondência entre as cordas dedilhadas e as madeiras.

Como podemos ver na Figura 6.9, as notas excedentes do fagote foram passadas para a harpa, enquanto guitarra e bandolim ficaram com as notas excedentes de clarineta e flauta, respectivamente. Outro aspecto de nossa interpretação que pode

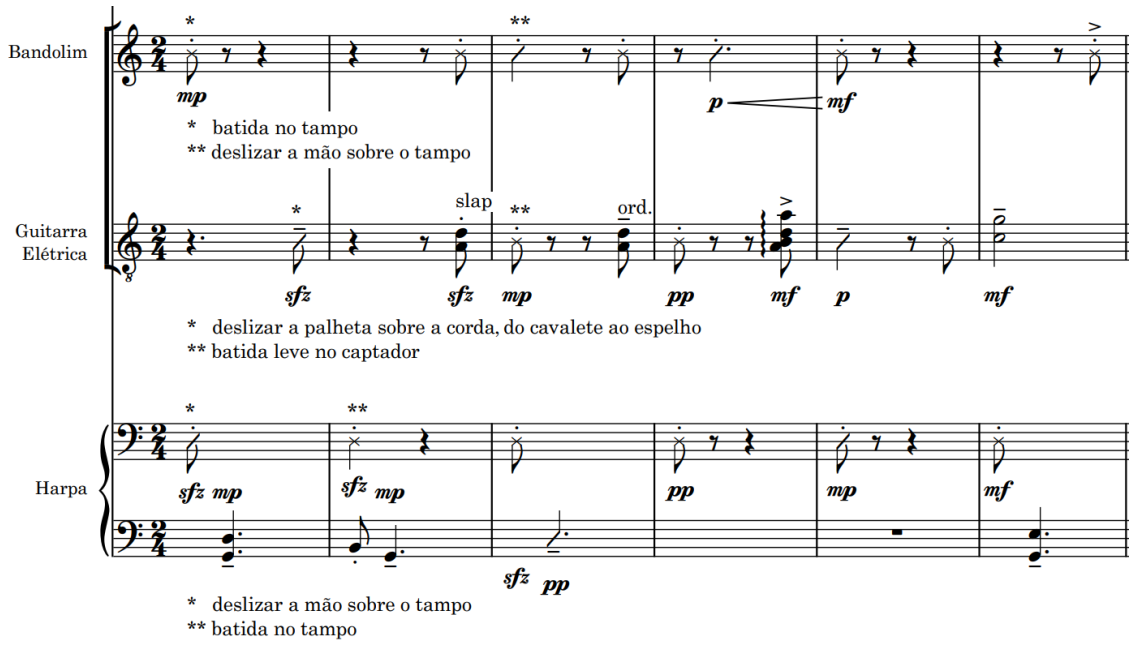

Figura 6.9: Primeiros compassos das cordas dedilhadas em *Amálgama*.

causar estranhamentos é o fato de que instantes de tempo são atribuídos a todas as alturas, mesmo as que não são tocadas. Isso permite, por exemplo, que as mudanças ocorridas entre dois vértices consecutivos não sejam percebidas na partitura, por estarem relacionadas a alturas que não estão sendo tocadas. Para dar sentido a esses casos, incluímos alguns efeitos percussivos para os instrumentos não-protagonistas, que representam as alturas associadas ao silêncio. Assim, as três alturas não tocadas, de acordo com o vértice u, foram distribuídas nos efeitos percussivos da harpa, guitarra e bandolim, de acordo com os instantes determinados pelo vértice v.

Na transição para o segundo compasso, podemos ver que apenas as alturas $a_2 =$ si e $a_4 =$ ré trocaram de instrumento. O si estava na flauta e, em seguida, foi transferido para a harpa, isto é, tornou-se uma nota excedente do fagote. O ré estava no fagote e passou para a clarineta, cujas notas excedentes agora passaram a ser tocadas pela guitarra. Além disso, o ré estava sendo tocado na segunda colcheia no fagote e passou para a quarta colcheia, na clarineta. O efeito percussivo do bandolim estava na primeira colcheia e passou para a quarta colcheia. Assim, tivemos apenas duas alterações nas atribuições de instrumentos e mais duas alterações nas atribuições de instantes de tempo, respeitando o critério de adjacência do $T_{4,10,8}$. Os vértices que representam o segundo compasso são $u' = 1212231000$ e $v' = 1301320330$.

Vamos observar mais um exemplo, ilustrado pela Figura 6.10. Nela, temos as partes de harpa e bandolim no trecho entre os compassos 117 e 120, no segundo

movimento da peça.

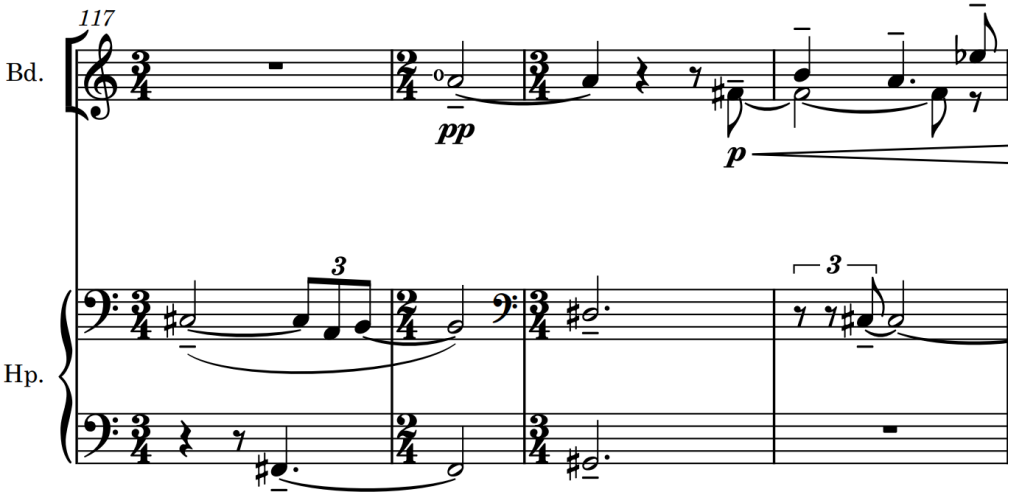

Figura 6.10: Trecho entre os compassos 117 e 120 de *Amálgama*.

O conjunto de alturas considerado nesse trecho é {fá#, sol#, lá, si, dó#, ré#}, com 6 elementos. O compasso também está dividido em 6 instantes de tempo e, portanto, os grafos que modelam essa situação são o $T_{4,6,0}$ e o $T_{6,6,0}$. Esses instantes de tempo, entretanto, não estão igualmente espaçados no compasso, diferentemente dos casos anteriores. Além disso, foi necessário adaptar a divisão dos compassos na partitura para facilitar a leitura, o que faz com que alguns vértices do grafo de referência correspondam a mais de um compasso na partitura. Mais especificamente, cada vértice corresponde à duração de três semínimas na partitura.

No trecho exibido, começamos pelos vértices $u = 303330$ e $v = 204504$. Assim, as alturas fá#, lá, si e dó# estão sendo tocadas pela harpa nos instantes t_2, t_4, t_5 e t_0, que foram distribuídos no compasso de forma desigual. Em especial, o instante t_0 é a cabeça do compasso, os instantes t_1 e t_2 são uma divisão pela metade do segundo tempo do compasso, e os instantes t_3, t_4 e t_5 são uma divisão do último tempo do compasso em três partes iguais, que dá origem às quiálteras na partitura. Durante este trecho, nenhuma altura foi atribuída à guitarra elétrica e, portanto, omitimos esse instrumento na partitura.

Nesse segundo movimento, o objetivo foi que compassos consecutivos fossem totalmente diferentes com relação à associação entre alturas e instrumentos ou instantes de tempos — o que se traduz em $\ell = 0$ no processo de geração dos módulos. Embora a seleção dos instantes de tempo possibilite o surgimento de um certo padrão no uso das quiálteras, o trecho exibido na Figura 6.10 não contém temas, acordes ou outros padrões rítmicos claros, cumprindo o objetivo proposto.

De modo geral, *Amálgama* foi, dentro do escopo deste trabalho, uma primeira experiência com relação à aplicação de grafos timbrais no controle de transições suaves ou disruptivas entre elementos musicais. Nesse sentido, o resultado final

satisfaz as expectativas presentes no início do processo composicional, com grande parte das passagens correspondendo ao grau de suavidade pretendido.

Entretanto, ainda há algumas possibilidades de avanço, do ponto de vista musical. Por exemplo, outras interpretações dos grafos timbrais podem ser pensadas, possibilitando uma interpretação única para cada vértice, sem a necessidade de combinar duas interpretações, como na abordagem utilizada. Além disso, no processo de geração de fragmentos, observamos que a escolha de alguns parâmetros pode prejudicar o controle de suavidade pretendido pela escolha do índice de coincidência. Por exemplo, se tivermos um conjunto de alturas muito maior do que o conjunto de instantes de tempo, há grande probabilidade de que todo instante de tempo seja tocado, na maioria dos compassos. Esse fator faz com que, musicalmente, os compassos gerados apresentem uma certa similaridade, independentemente do índice de coincidência escolhido.

Por fim, *Amálgama* nos oferece um exemplo prático do uso de grafos em composição musical, que vai além das características presentes nas conexões mais comuns entre as duas áreas. A modelagem da peça, baseada em grafos timbrais, possibilitou um controle da suavidade das transições entre elementos musicais, tanto no domínio harmônico quanto em relação a ritmos, melodias e orquestrações. Assim, ao mesmo tempo que se assemelha a algumas aplicações mais tradicionais de grafos em música, que modelam encadeamentos de acordes com base em critérios de "proximidade", essa versatilidade presente nas diferentes interpretações musicais dos grafos timbrais nos permite explorar exemplos mais diversos de aplicação musical dessas estruturas. Além disso, o processo de composição da peça, auxiliado por computadores, ainda revela um caminho para o desenvolvimento de métodos de composição algorítmica, propondo uma nova ótica sobre as relações de suavidade e parcimônia entre elementos musicais.

Capítulo 7

Perspectivas

Quando em face de um objeto ainda pouco estudado, pode ser difícil escolher um tópico para que se inicie uma pesquisa sobre ele. Nesse sentido, é comum que se passem despercebidas as relações existentes entre esse objeto e outros mais conhecidos na literatura, o que gera o risco de se redescobrir resultados já estabelecidos e, muitas vezes, aumentar o esforço necessário para alcançar o resultado que se quer. Ao longo deste trabalho, abordamos aspectos dos grafos timbrais que revelam conexões entre essas estruturas e diversos outros objetos, sobretudo relacionados à teoria da informação e às geometrias finitas.

Nos Capítulos 2 e 3, analisamos algumas características do grupo de automorfismos dos grafos timbrais, motivados pela relação entre essa classe de grafos e os grafos de Hamming, cujo grupo de automorfismos apresenta características interessantes, do ponto de vista da teoria algébrica de grafos. Nesse sentido, caracterizamos os grafos timbrais como grafos de Cayley, além de demonstrar que seu grupo de automorfismos age transitivamente no conjunto de pares de vértices à distância d no grafo, para todo $d \in \mathbb{Z}_k$, o que garante que os grafos timbrais são arco-transitivos. Além disso, também determinamos os únicos valores dos parâmetros n, k e ℓ para os quais os grafos timbrais são distância-transitivos.

No Capítulo 4, resgatamos o estudo da existência de ciclos hamiltonianos realizado por Akhmedov e Winter no trabalho que introduziu os grafos timbrais [2], utilizando as propriedades algébricas estudadas no Capítulo 2 para demonstrar que os únicos grafos timbrais não hamiltonianos são os $T_{2,k,0}$ e os $T_{2,k,k-2m}$. Relacionamos a busca por ciclos hamiltonianos em grafos timbrais, também, ao estudo dos códigos de Gray combinatórios, de onde surgem novas perspectivas de pesquisa.

No Capítulo 5, estudamos o número clique dos grafos timbrais, motivados pela relação entre os grafos timbrais e os grafos de Hamming-distância, para os quais a determinação do tamanho de uma clique máxima é um problema em aberto na teoria dos códigos. Os resultados apresentados nesse capítulo definem limites para o número clique de $T_{n,k,\ell}$, além de investigar mais a fundo o caso de $T_{n,k,1}$, com

$(k-1) \leq n < (k-1)^2$, que revela uma correspondência entre uma clique de tamanho $(k-1)^2$ e um plano afim de ordem $k-1$.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta algumas possíveis interpretações musicais para os grafos timbrais, além de exibir um relato composicional da peça *Amálgama*, que foi criada a partir de uma colagem de fragmentos musicais gerados por caminhos em grafos timbrais.

No decorrer da dissertação, restaram algumas questões a responder, que indicam perspectivas de trabalhos futuros. Encerraremos o texto listando-as.

- Caracterizar $Aut(T_{n,k,\ell})$, buscando determinar que outros grafos timbrais, além dos $T_{n,k,k-1}$, possuem $S_n \wr S_k$ como grupo de automorfismos. Nesse sentido, a busca por uma descrição algébrica dos automorfismos encontrados para $T_{3,4,1}$, $T_{4,3,1}$, $T_{2,5,2}$ e $T_{2,7,3}$ pode ser um ponto de partida para um melhor entendimento sobre $Aut(T_{n,k,\ell})$.

- Determinar propriedades mais fortes relativas à hamiltonicidade dos grafos timbrais, como a Hamilton-conexidade e o número de ciclos hamiltonianos a menos de isomorfismo.

- Avaliar propriedades de ciclos hamiltonianos em $T_{n,k,\ell}$, à luz dos critérios adotados para a classificação de códigos de Gray, como os descritos em [33].

- Estudar a relação entre $\omega(T_{n,k,\ell})$ e $\omega(H_n(k,d))$, aplicando os resultados obtidos no Capítulo 5 em um estudo voltado para os grafos Hamming-distância.

- Determinar $\omega(T_{n,k,1})$, com $n < k-1$, caso não-resolvido na Seção 5.4.

- Determinar $\omega(T_{n,k,1})$, quando $k-1 \leq n < (k-1)^2$ e $k-1$ não é uma potência de primo. Como mencionamos na Seção 5.4, essa tarefa implica em determinar a existência de um plano afim cuja ordem não é uma potência de primo, um problema em aberto que pode ser, agora, visto sob a ótica dos grafos timbrais.

- Avaliar a contrapartida musical das propriedades estudadas no grafo timbral, como por exemplo na comparação entre músicas distintas construídas a partir de subgrafos isomorfos de um grafo timbral, pelos isomorfismos estudados no Capítulo 2.

Referências Bibliográficas

[1] AHMADI, B., ALINAGHIPOUR, F., 2019, "New upper bounds on the size of binary codes", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, v. 43, n. 3, pp. 923–928.

[2] AKHMEDOV, A., WINTER, M., 2014, "Chordal and timbral morphologies using Hamiltonian cycles", *Journal of Mathematics and Music*, v. 8, n. 1, pp. 1–24.

[3] ALBINI, G., BERNARDI, M. P., 2017, "Hamiltonian graphs as harmonic tools". In: Agustín-Aquino, O., Lluis-Puebla, E., Montiel, M. (Eds.), *Proceedings of the Mathematics and Computation in Music: 6th International Conference, MCM 2017*, v. 10527, *Lecture Notes in Computer Science (LNAI)*, pp. 215–226.

[4] BABAI, L., 1995, "Automorphism groups, isomorphism, reconstruction". In: Graham, R., Grötschel, M., Lovász, L. (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, v. 2, cap. 27, Elsevier.

[5] BALZANO, G. J., 1980, "The group theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems", *Computer Music Journal*, v. 4, n. 4, pp. 66–84.

[6] BATTEN, L. M., 1997, *Combinatorics of Finite Geometries.* 2 ed. , Cambridge University Press.

[7] BIGGS, N., 1993, *Algebraic Graph Theory.* 2 ed. , Cambridge University Press.

[8] BIGGS, N., LLOYD, E. K., WILSON, R. J., 1976, *Graph Theory, 1736-1936.* Oxford University Press.

[9] BONDY, A., MURTY, U. S. R., 1976, *Graph Theory with Applications.* MacMillan.

[10] BROUWER, A. E., COHEN, A. M., NEUMAIER, A., 1989, *Distance-Regular Graphs.* Springer.

[11] CARDOSO, L. S., 2025. "Gerador de Fragmentos Timbrais". Disponível em: `https://github.com/luansimoes/gerador_de_fragmentos_timbrais`. Acesso em: 25 fev. 2025.

[12] CERIOLI, M. R., CARDOSO, L. S., VIANA, P., 2024, "Clique-number of timbral graphs". In: *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, pp. 58–62. SBC.

[13] CHEN, C. C., QUIMPO, N. F., 1981, "On strongly hamiltonian abelian group graphs". In: McAvaney, K. L. (Ed.), *Combinatorial Mathematics VIII*, v. 884, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, pp. 23–34.

[14] COHN, M., 1963, "Affine m-ary Gray codes", *Information and Control*, v. 6, n. 1, pp. 70–78.

[15] COHN, R., 1996, "Maximally smooth cycles, hexatonic systems, and the analysis of late-romantic triadic progressions", *Music Analysis*, v. 15, n. 1, pp. 9–40.

[16] COHN, R., 1998, "Introduction to Neo-Riemannian theory: a survey and a historical perspective", *Journal of Music Theory*, v. 42, n. 2, pp. 167–180.

[17] DOUGHERTY, S. T., 2020, *Combinatorics and Finite Geometry*. Springer.

[18] EVANSTEIN, M. P., 2019, *SCAMP: suite for computer-assisted music in Python*. Tese de Mestrado, University of California.

[19] GENTIL-NUNES, P., CARDOSO, L. S., VIANA, P., *Amálgama*. Partitura (flauta, clarineta em si bemol, fagote, bandolim, guitarra elétrica, harpa). Rio de Janeiro. PArtiMus, 2023. Disponível em: <`https://partimus.art/wp-content/uploads/2025/04/gentil-nunes-simoes-e-viana-amalgama-partitura.pdf`>. Acesso em: 10 abr. 2025.

[20] GILBERT, E. N., 1958, "Gray codes and paths on the n-cube", *Bell System Technical Journal*, v. 37, n. 3, pp. 815–826.

[21] GODSIL, C., ROYLE, G., 2001, *Algebraic Graph Theory*. Springer.

[22] GU, J., FUJA, T., 1993, "A generalized Gilbert-Varshamov bound derived via analysis of a code-search algorithm", *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 39, n. 3, pp. 1089–1093.

[23] HARARY, F., NORMAN, R. Z., 1953, *Graph Theory as a Mathematical Model in Social Science*. University of Michigan, Institute for Social Research.

[24] HARNEY, I., 2017, *Colorings of Hamming-Distance Graphs*. Tese de D.Sc., University of Kentucky.

[25] JOHNSON, T., 1986. "The Chord Catalogue". Editions 75. Partitura disponível online em `https://www.editions75.com/catalogue-piano.html`.

[26] KUCHTA, M., STASIAK, J., 2006, "Maximal binary cliques", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 24, pp. 237–241.

[27] MACWILLIAMS, F. J., SLOANE, N. J. A., 1977, *The Theory of Error-Correcting Codes*. North-Holland.

[28] MARUŠIČ, D., 1983, "Hamiltonian circuits in Cayley graphs", *Discrete Mathematics*, v. 46, n. 1, pp. 49–54.

[29] MASON, O., VERWOERD, M., 2007, "Graph theory and networks in biology", *IET Systems Biology*, v. 1, n. 2, pp. 89–119.

[30] MIRAFZAL, S. M., ZIAEE, M., 2021, "A note on the automorphism group of the Hamming graph", *Transactions on Combinatorics*, v. 10, n. 2, pp. 129–136.

[31] MORRIS, R., 2010, "Some musical applications of minimal graph cycles", *Theory and Practice*, v. 35, pp. 95–117.

[32] ROUAYHEB, S. E., GEORGHIADES, C. N., 2012, "Graph theoretic methods in coding theory". In: Cohen, L., Poor, H., Scully, M. (Eds.), *Classical, Semi-Classical and Quantum Noise*, pp. 53–62, Springer.

[33] SAVAGE, C., 1997, "A survey of combinatorial Gray codes", *SIAM Review*, v. 39, n. 4, pp. 605–629.

[34] SHARIFIYAZDI, E., 2007, *The Clique Number of Generalized Hamming Graphs*. Tese de D.Sc., Clausthal University of Technology.

[35] SHARMA, B. D., KHANN, R. K., 1978, "On m-ary Gray codes", *Information Sciences*, v. 15, n. 1, pp. 31–43.

[36] SHULT, E., 2011, *Points and Lines: characterizing the classical geometries*. Springer.

[37] SLOANE, N. J. A., 1989, "Unsolved problems in graph theory arising from the study of codes", *Graph Theory Notes of New York*, v. 18, pp. 11–20.

[38] TOLHUIZEN, L., 1997, "The generalized Gilbert-Varshamov bound is implied by Turán's theorem", *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 43, n. 5, pp. 1605–1606.

[39] VAN LINT, J. H., 1995, "Codes". In: Graham, R., Grötschel, M., Lovász, L. (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, v. 1, cap. 16, Elsevier.

[40] WINTER, M., 2007. "maximum change". Unbounded Press. Partitura disponível online em `https://www.unboundedpress.org/`.

[41] WINTER, M., 2009. "gray codes". Unbounded Press. Partitura disponível online em `https://www.unboundedpress.org/`.

[42] WINTER, M., 2017, "On minimal change musical morphologies". In: Pareyon, G., Pina-Romero, S., Agustin-Aquino, O., et al. (Eds.), *The Musical-Mathematical Mind*, Springer, pp. 309–327.