
Nota de aula - Decomposição em Grafos - Aula 03

1 Resumo:

Este texto tem por objetivo descrever a aula de Decomposição em Grafos, referente ao curso Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos (2020), oferecido pelo programa de Engenharia de Sistemas e Computação PESC/COPPE - UFRJ e ministrado pela professora Celina de Figueiredo.

1.1 Assuntos abordados:

Decomposição de Grafos por cortes, Árvores de cortes-clique, Grafos Cordais, separadores de vértices, classes de Grafos Separáveis por cliques.

1.2 Problemas propostos:

Além de documentar o conteúdo abordado ao longo da aula, este documento se propõe a resolver as seguintes questões:

1. Construir a árvore de cortes clique para o Exemplo da Figura 13 da referência [1]. (p.7)
2. Provar que cada folha da árvore construída é Tipo 1 ou Tipo 2. (p.7-10)
3. Encontrar os dois parâmetros Número Cromático (p.12) e Clique Máxima (p.4) usando a árvore.

2 Decomposição:

A compreensão do estudo de decomposição de grafos é de grande valor para problemas de coloração de vértices. Essa técnica pode ser aplicada a grafos gerais ou classes específicas e fornece parâmetros importantes como tamanho de clique máxima e número cromático, além de proporcionar uma definição alternativa para grafos cordais.

Apresentamos agora um conceito importante para a técnica de decomposição:

Um conjunto $S \subset V(G)$ é dito um **corte de vértices** se $G \setminus S = G[V \setminus S]$ é desconexo.

Assim, por definição, um corte é um conjunto de vértices cuja sua remoção fornece um grafo desconexo. Essa propriedade garante ao grafo $G \setminus S$ uma série de componentes conexas, denotadas por V_1, V_2, \dots, V_p . Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, definimos o grafo $G_i = G[V_i \cup S]$ como um **filho** de G em relação ao corte S . Dizemos ainda que o grafo G é **pai** dos subgrafos induzidos definidos acima, podendo ser obtido pela identificação de cada filho $G[V_i \cup S]$ em relação ao corte S . A Figura 1 exhibe um grafo G e seus filhos em relação ao corte de vértices $S = \{3, 4\}$.

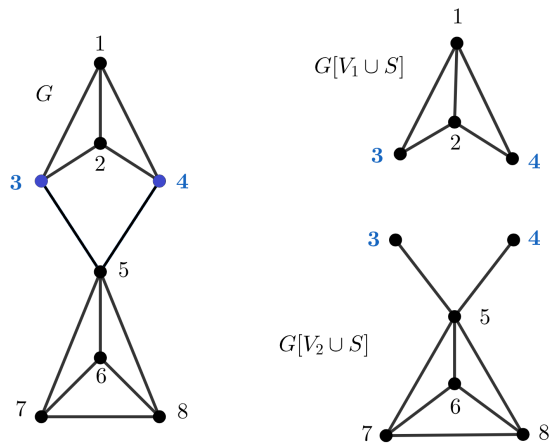


Figura 1: À esquerda, um grafo G e à direita seus filhos em relação ao corte $S = \{3, 4\}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

A identificação de G a partir dos filhos pode ser vista como um processo de composição, enquanto a obtenção de cada $G[V_j \cup S]$ a partir do grafo pai pode ser enxergada como uma decomposição por corte para o grafo G .

A partir de um determinado corte, podemos decompor o grafo recursivamente, de maneira a obter uma **árvore de decomposição**. Essa estrutura se mostra relevante no estudo de problemas que possuem resoluções adequadas à técnica de divisão e conquista e decomposição recursiva, visto que ao realizar a árvore de decomposição, as folhas obtidas constituem soluções triviais.

Em outras palavras, a composição do grafo a partir dos filhos possibilita obter a solução para o grafo G a partir da composição das soluções dos filhos. A Figura 2 ilustra uma árvore de decomposição, onde os cortes de cada iteração estão destacados em azul.

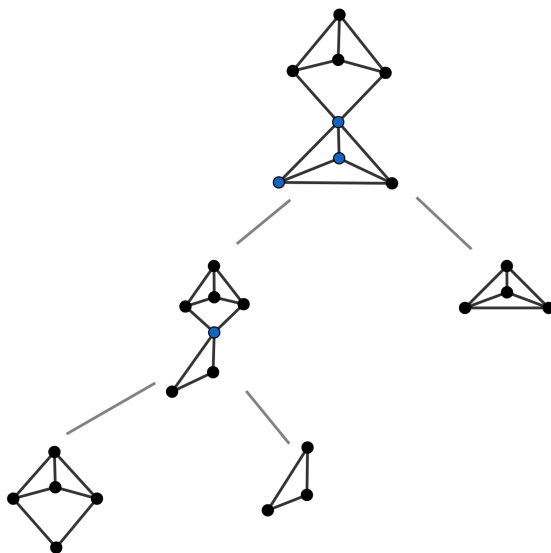


Figura 2: Árvore de decomposição.
Ilustração feita no Geogebra.

Uma pergunta natural em relação a um determinado corte S é a respeito da clique máxima, *número máximo de vértices mutuamente adjacentes*. Seria possível obter a clique máxima de um grafo G a partir da clique máxima de seus filhos em relação a S ?

Vale lembrar: em linhas gerais, se H é subgrafo de G sabemos que o a clique máxima, de H constitui

um limite inferior para a clique máxima de G . O lema abaixo mostra que o corte fornece um resultado mais forte.

Lema 1 (Lema 2 em [1]). *Seja G um grafo com corte S e filhos G_1, G_2, \dots, G_p . Então*

$$\omega(G) = \max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i).$$

Demonstração. Como cada G_i é um subgrafo induzido de G , segue que $\omega(G) \geq \omega(G_i), \forall i \in \{1, \dots, p\}$. Em particular, $\omega(G) \geq \max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i)$. Suponha por absurdo que $\omega(G) > \max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i)$. Considere K uma clique máxima de G . Por hipótese, K não pode ser uma clique em G_i , o que garante a existência de vértices $x_i, x_j \in K$, tais que $x_i \in G_i \setminus S$ e $x_j \in G_j \setminus S$. No entanto, como estes vértices pertencem a K , são mutuamente adjacentes em G , logo, $x_i x_j \in E(G)$, o que contradiz a hipótese de S ser um corte para G . Logo, conclui-se que $\omega(G) = \max_{1 \leq i \leq p} \omega(G_i)$. \square

Por exemplo, considere o grafo da Figura 3.

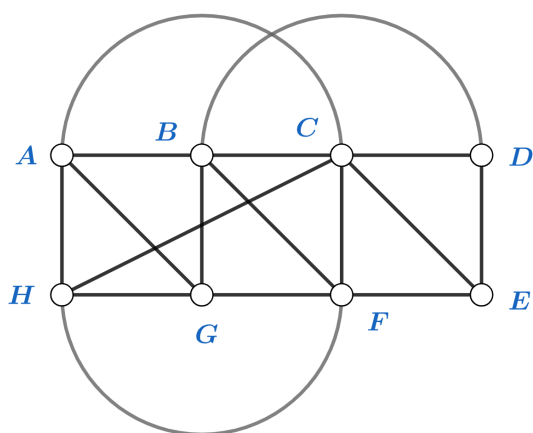


Figura 3: Grafo G .
Ilustração feita no software Geogebra.

Os filhos de G em relação ao corte $S = \{B, C, F\}$ são $G[A, B, C, F, G, H] = G_1$ e $G[B, C, D, E, F] = G_2$, ilustrados na Figura 4 com suas respectivas cliques máximas destacadas em verde, que possuem tamanho 3. Note que ambos possuem mais de uma clique máxima, a saber, podemos também destacar $\{A, B, G\}$ em G_1 e $\{C, E, F\}$ em G_2 .

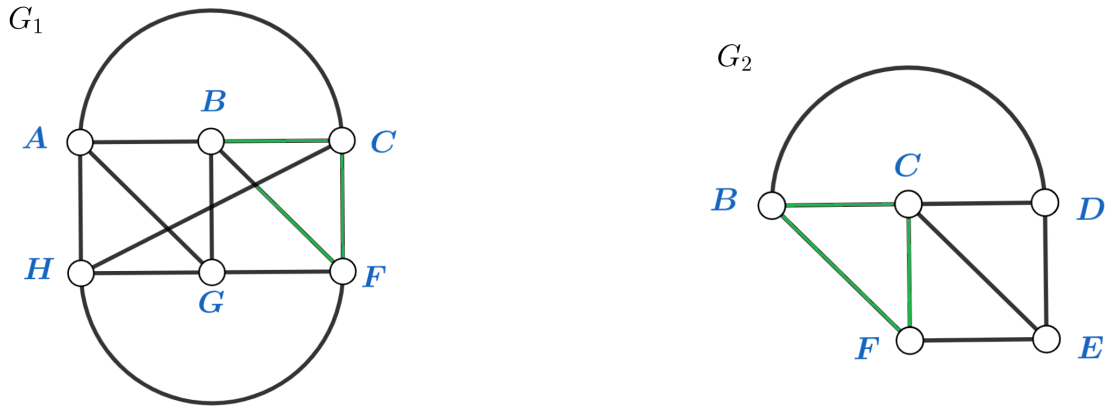


Figura 4: Filhos de G obtidos em relação ao corte $S = \{B, C, F\}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

A partir do Lema 1, pode-se concluir que $\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\} = 3$. A Figura 5 ilustra esse resultado.

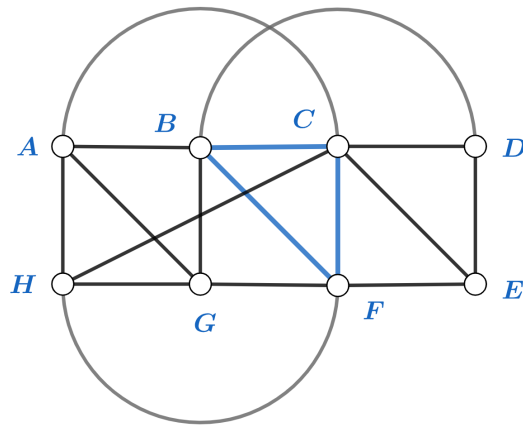


Figura 5: Uma clique máxima de G , destacada em azul.
Ilustração feita no software Geogebra.

Um questionamento natural é se o corte também resolve o problema de coração mínima para um grafo G a partir de seus filhos. No entanto, diferentemente do que ocorre em relação à clique máxima, o número cromático de G não pode ser obtido a partir de seus filhos. Note que ao observarmos o ciclo induzido C_5 ilustrado na Figura 6, os cortes são formados por vértices não adjacentes. Por exemplo, ilustramos o número cromático dos filhos do ciclo C_5 com relação ao corte $S = \{v_2, v_4\}$.

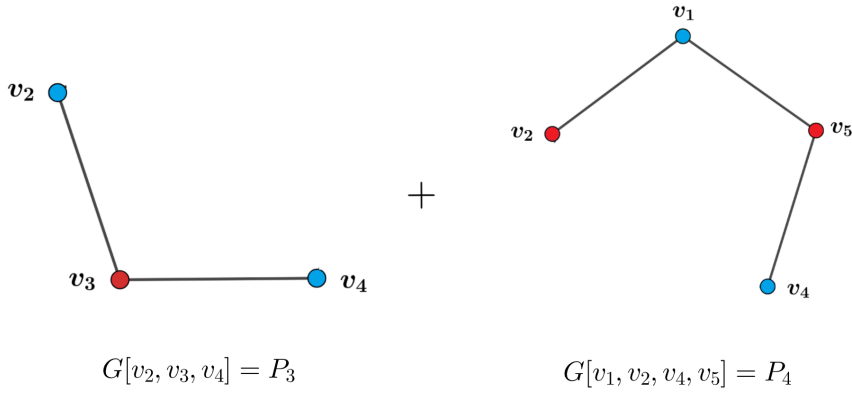


Figura 6: Filhos do ciclo C_5 com relação ao corte $S = \{v_2, v_4\}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

Note que $\chi(P_3) = \chi(P_4) = 2$, pois ambos são bipartidos. Porém, $\chi(C_5) = 3$, como vemos na Figura 7.

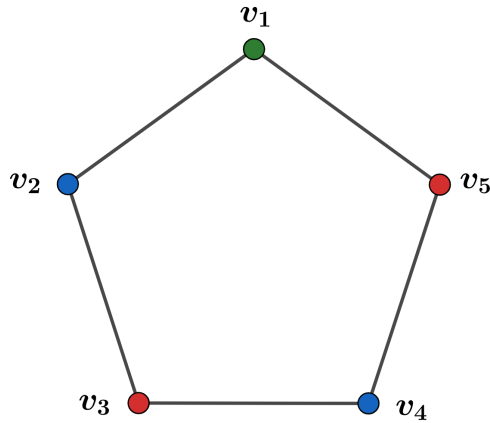


Figura 7: Grafo C_5 e sua 3-coloração.
Ilustração feita no software Geogebra.

Por outro lado, se G for k -colorível, é possível colorir cada subgrafo induzido com no máximo k cores. Dessa forma, obtemos a relação $\max \chi(G_i) \leq k = \chi(G)$.

Portanto, é desejável estabelecer um tipo especial de corte, onde a igualdade $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ é satisfeita; o **corte clique** é definido como um corte cujos vértices são uma clique.

Este tipo de corte define uma classe de grafos na qual o cálculo do número cromático pode ser obtido a partir do dos filhos do grafo em relação ao corte, conforme descreve a seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja G um grafo com um corte clique \mathcal{C} e filhos G_1, G_2, \dots, G_p . Então*

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq p} \chi(G_i).$$

Demonstração. Considere $k = \max_{1 \leq i \leq p} \chi(G_i)$. Como \mathcal{C} é uma clique, cada vértice de G_i deve receber uma cor diferente. Dessa forma, o número de cores distintas nos vértices correspondentes a \mathcal{C} é o mesmo em cada G_i .

Como estamos tomando $k = \max \chi(G_i)$, cada grafo G_i admite uma k -coloração. Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ considere $c_i : V(G_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ uma coloração de G_i . Podemos assumir, a partir de uma bijeção, que cada vértice de \mathcal{C} tem as mesmas cores atribuídas em cada função de coloração c_i , isto é, $c_1(x) = c_2(x) = \dots = c_p(x)$ para todo $x \in V(\mathcal{C})$. Considere a coloração $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ definida por

$$\begin{cases} c(v) = c_1(v), & \text{se } v \in G_1 \\ c(v) = c_2(v), & \text{se } v \in G_2 \\ \quad \cdot & \quad \cdot \\ \quad \cdot & \quad \cdot \\ c(v) = c_p(v), & \text{se } v \in G_p \end{cases}$$

Como para cada par de filhos G_i, G_j temos que cada vértice de $V(G_i) \setminus V(\mathcal{C})$ é não adjacente a nenhum vértice de $V(G_j) \setminus V(\mathcal{C})$, então c é uma k -coloração de G .

Logo, conclui-se que $\chi(G) \leq k = \max_{1 \leq i \leq p} \chi(G_i)$, e portanto, $\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq p} \chi(G_i)$. □

Dado um grafo G define-se recursivamente a árvore de cortes cliques $T(G)$ a partir do seguinte procedimento:

1. Cada vértice $v \in V(G)$ é rotulado com um subgrafo induzido de G . A raiz da árvore $T(G)$ é rotulada com o grafo G .
2.
 - Se G não possui corte clique, a árvore $T(G)$ será trivial.
 - Se G possui corte clique, encontramos um corte clique C de G e os filhos do vértice G em $T(G)$ serão os filhos G_1, G_2, \dots, G_p do grafo G em relação ao corte clique C . Agora, a sub-árvore $T(G_i)$ rotulada por G_i é uma árvore de cortes clique para o grafo G_i .

Cabe ressaltar que a árvore de decomposição da Figura 2 é também uma árvore de cortes clique, pois os cortes selecionados em cada iteração são cliques.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado um separador de vértices u e v se $V(G) \setminus S$ desconecta u de v . Um separador S é dito minimal se nenhum subconjunto próprio de S é também um separador.

O teorema abaixo fornece uma nova definição para grafos cordais:

Teorema 3 (Teorema 3 em [1]). *Seja G um grafo que não é clique. G é cordal, se e somente se, todo separador minimal é uma clique.*

Demonstração. (\implies) Considere G um grafo cordal que não é clique. Portanto, existem pelo menos dois vértices em $v, w \in V(G)$ que não são adjacentes. Considere S um separador minimal de v e w com G_v e G_w componentes de $G \setminus S$ contendo v e w , respectivamente.

Se S contém apenas um vértice de G , então claramente S é uma clique.

Por outro lado, suponha que S é formado por pelo menos dois vértices, isto é, $|S| \geq 2$. Considere x e y dois vértices não adjacentes de S . Pela minimalidade, nenhum subconjunto próprio de S desconecta G , isto é, a remoção de apenas o vértice x (ou y) mantém G conexo. Assim, pode-se concluir que cada vértice de S é adjacente a algum vértice de G_v e G_w . Sejam x_1, y_1 em G_v e x_2, y_2 em G_w vértices adjacentes a x e y respectivamente. Então o conjunto de vértices formado por $x, x_1, V(P_v), y_1, y, y_2, V(P_w), x_2$, onde P_v e P_w são respectivamente o caminho de x_1 a y_1 em G_v e o caminho de x_2 a y_2 em G_w é um ciclo induzido de tamanho maior ou igual a 4, o que contradiz a definição de um grafo cordal. Portanto, concluímos que S é uma clique.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha por hipótese que todo separador minimal de G é uma clique. Suponha que G contenha um ciclo \mathcal{C} com $|\mathcal{C}| \geq 4$ e vértices $v, t, w, u_1, u_2, \dots, u_k, k \geq 1$. Todo separador que desconecta os vértices v e w contém algum u_i . Logo, \mathcal{C} tem cordas, e portando G é cordal. \square

Um resultado particular decorrente do Teorema 3 é o seguinte:

Se G é um grafo cordal que não é completo, então todo corte minimal é uma clique. Assim, as folhas de uma árvore de cortes clique para um grafo cordal são cliques.

Dizemos que um grafo G é **Tipo 1** quando seu conjunto de vértices, $V(G)$ pode ser biparticionado nos em $V(G) = (V_1, V_2)$, onde V_1 e V_2 são tais que $|V_1| \geq 3$, $G[V_1]$ é bipartido e conexo e, $G[V_2]$ é uma clique e cada vértice em V_1 é adjacente a todo o vértice de V_2 .

Dizemos que um grafo G é **Tipo 2** quando G é p -partido completo para algum inteiro positivo p .

Grafos **separáveis por cliques** são aqueles cuja árvore de cortes clique admite apenas folhas do Tipo 1 ou do Tipo 2.

Para verificarmos se um grafo G é de fato Tipo 1, analisamos o seu complemento \overline{G} e vemos se este é composto por um conjunto independente de vértices e um subgrafo conexo que contém pelo menos três vértices. Já para verificarmos que um grafo é Tipo 2, verificamos se \overline{G} é composto por p subgrafos completos.

O grafo da Figura 3 é separável por cliques [2]. Exibiremos sua árvore de cortes clique na Figura 8.

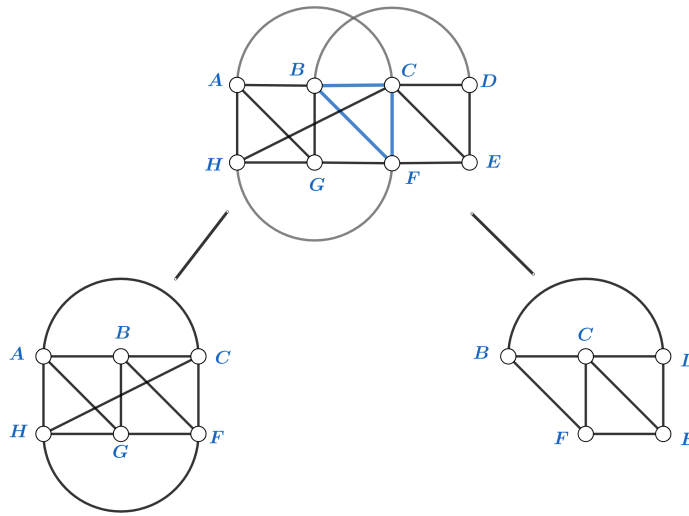


Figura 8: Grafo G .
Ilustração feita no software Geogebra.

Para mostrar que de fato este grafo é separável por cliques, provaremos que suas folhas são Tipo 1 ou Tipo 2. Primeiramente, analisaremos $G[A, B, C, F, G, H] = G_1$ através de seu complemento, exibido na Figura 9. Note que podemos reorganizar \overline{G}_1 de modo que tenhamos três partições completas (K_2). Assim, conclui-se que G_1 é **Tipo 2**.

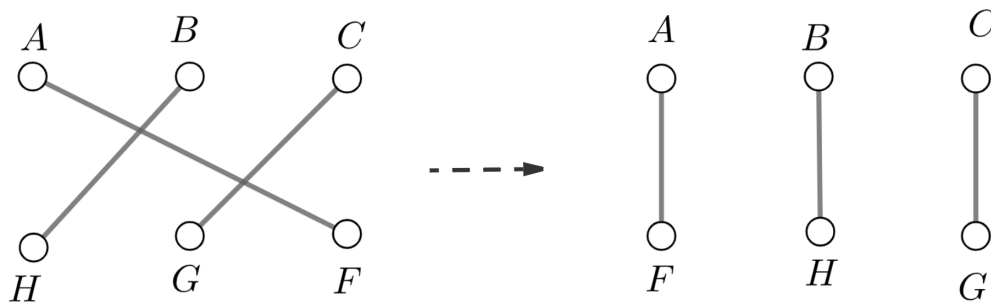


Figura 9: $\overline{G_1}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

Observação 4. O grafo filho G_1 não é um grafo Tipo 1. Para verificar essa afirmação, suponha que G_1 é de Tipo 1. Nesse caso, deveríamos ser capazes de obter uma bipartição do conjunto de vértice de G_1 , $V(G) = (V_1, V_2)$, de tal forma que V_1 tenha cardinalidade pelo menos 3, $G[V_1]$ é um grafo bipartido conexo e $G[V_2]$ é clique.

A estratégia que empregada para mostrar que é impossível obter tal bipartição é a seguinte:

1. Definimos primeiro os candidatos a V_2 respeitando a condição que essas cliques devem ter no máximo 3 vértices (caso contrário, não seria possível formar V_1 , já que haveriam menos de 3 vértices restantes).
2. A escolha dos candidatos a V_2 é feita a partir de conjuntos independentes no grafo complementar $\overline{G_1}$.
3. Após definir V_2 , retornamos a análise em G_1 e construímos $G_1[V_1] = G_1[V \setminus V_2]$, verificando se este subgrafo é bipartido e conexo.

Após analisar todos os possíveis candidatos a V_2 , concluímos que o subgrafo $G_1[V_1]$ não pode ser bipartido, e por conseguinte G_1 não é um grafo classificado como Tipo 1.

Abaixo seguem ilustrações de alguns subgrafos induzidos $G_1[V_1]$ a partir da escolha de uma clique V_2 :

A Figura 10 traz a representação de $G[V_1]$ para dois casos onde V_2 foi considerado como um conjunto unitário.

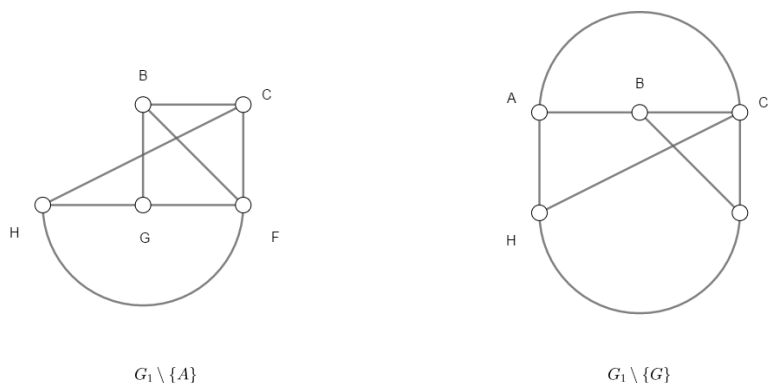


Figura 10: $\overline{G_1}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

A Figura 11 traz a representação de $G[V_1]$ para dois casos onde V_2 foi considerado como uma clique formada por 2 vértices.

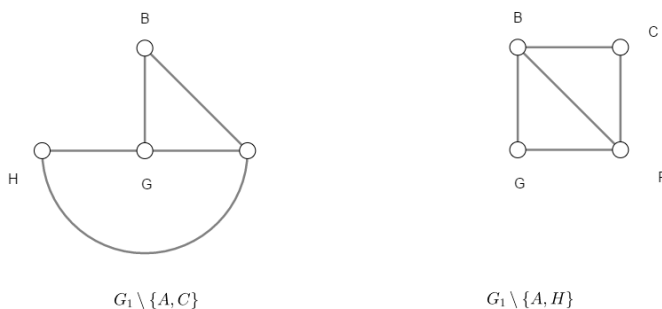


Figura 11: $\overline{G_1}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

A Figura 12 traz a representação de $G[V_1]$ para dois os casos onde V_2 foi considerado como uma clique formada por 3 vértices.

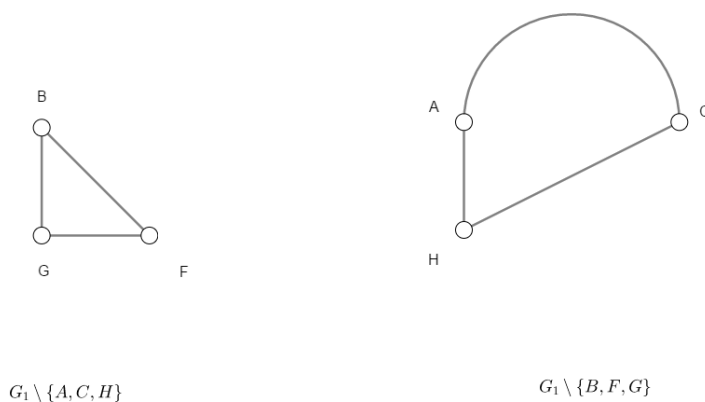


Figura 12: $\overline{G_1}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

Ao analisarmos a folha $G[B, C, D, E, F] = G_2$, notamos que seu complemento possui um conjunto independente de vértices cuja cardinalidade é 1 (a saber, o vértice C) e um subgrafo cujo complemento é um C_4 (ou seja, um grafo bipartido conexo), como ilustra a Figura 13. Desta forma, temos que G_2 é **Tipo 1**.

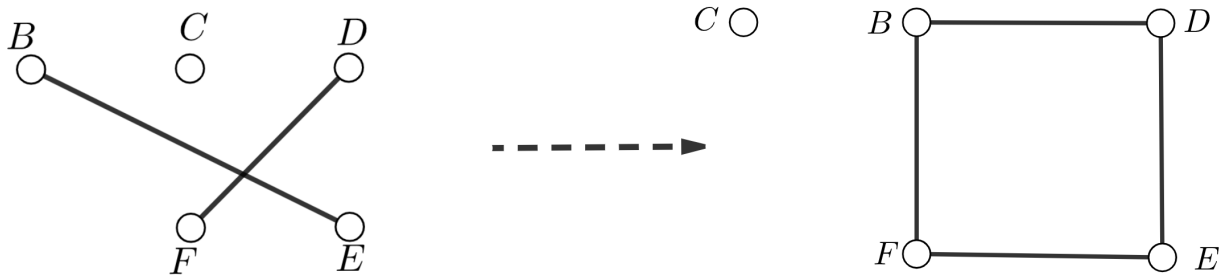


Figura 13: $\overline{G_2}$.
Ilustração feita no software Geogebra.

Note também que ao analisarmos G_2 , podemos reorganizá-lo em três partições completas (um K_1 e dois grafos K_2), ilustrados na Figura 14. Desse modo, G_2 também é **Tipo 2**.

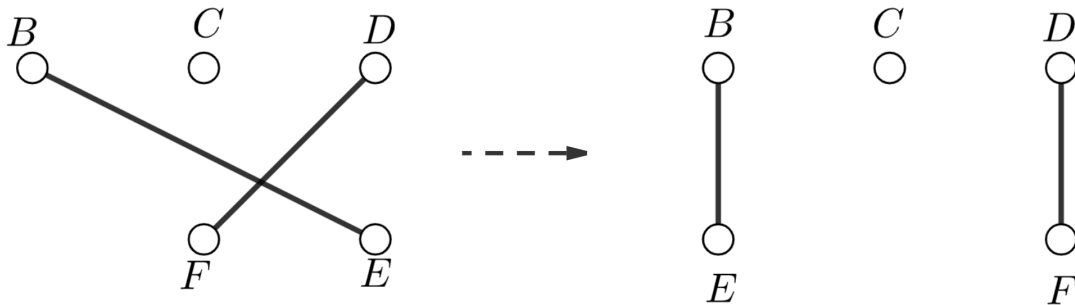


Figura 14: $\overline{G_2}$.
Ilustração Feita no software Geogebra.

Observação 5. *Esse exemplo elucidada que a classificação da folha em Tipo 1 ou Tipo 2 não são propriedades mutuamente excludentes.*

Dito isso, já podemos colorir os vértices desta classe de grafos de maneira eficiente. Observe que uma coloração mínima para grafos que são Tipo 1 utilizam $|V_2|$ cores para colorir a clique e outras duas cores, que são utilizadas para colorir o grafo bipartido conexo resultante da partição V_1 . E para obter uma coloração mínima de vértices de grafos Tipo 2, basta usarmos p cores, uma para cada partição em que o grafo se decompõe. A coloração mínima de vértices tanto em grafos Tipo 1 quanto Tipo 2 são obtidas em tempo polinomial.

Dessa forma, exibiremos a coloração mínima de vértices dos filhos do Grafo da Figura 3, de modo que possamos obter o número cromático deste grafo a partir deles e utilizando a Proposição 2.

Observe: A coloração de G_1 demanda 3 cores, pois é Tipo 2 e está particionado em 3 partições completas. Esta coloração é exibida na Figura 15. Assim, $\chi(G_1) = 3$.

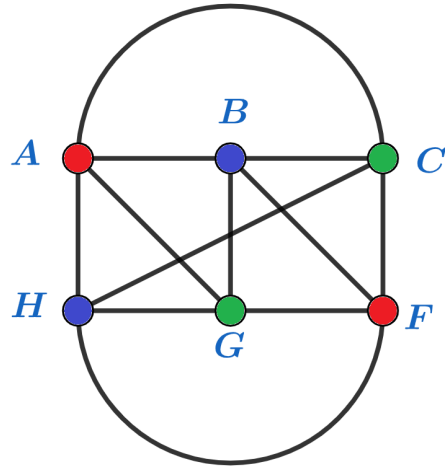


Figura 15: 3-coloração de G_1 .
Ilustração feita no software Geogebra.

Por outro lado, para determinar o número cromático de G_2 , devemos fazer duas considerações, já que esse grafo é simultaneamente Tipo 1 e Tipo 2. Em ambos os casos, obtemos uma coloração ótima com 3 cores, conforme descrito abaixo:

- Análise da classificação de Tipo 1: G_2 utilizará uma cor para o conjunto independente unitário e duas cores para colorir o grafo bipartido conexo.
- Análise da classificação de Tipo 2: São demandadas três cores, uma para cada partição completa em que se decompõe.

Assim, $\chi(G_2) = 3$, como ilustramos na Figura 16.

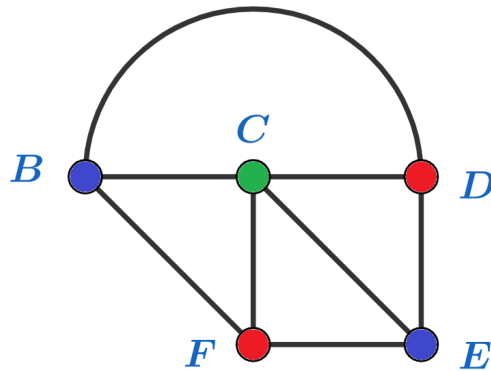


Figura 16: 3-coloração de G_2 .
Ilustração feita no software Geogebra.

Por fim, a Proposição 2, garante a existência de uma coloração ótima para G que utiliza $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} = \max\{3, 3\} = 3$ cores. A Figura 17 exibe uma 3-coloração de G .

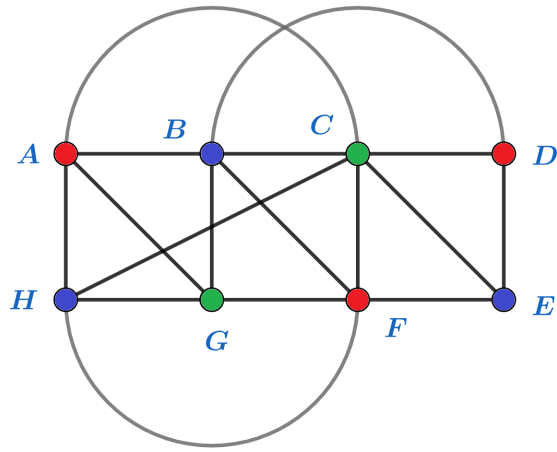


Figura 17: 3-coloração de G .
Ilustração feita no software Geogebra.

Referências

- [1] C.M.H. DE FIGUEIREDO, J. MEIDANIS, C. M. *Coloração em Grafos*. XVI Jornada de Atualização em Informática, 1997.
- [2] GAVRIL, F. Algorithms on clique separable graphs. *Discrete Mathematics* 19, 2 (1977), 159–165.
- [3] SZWARCFITER, J. *Teoria Computacional de Grafos*. Elsevier, 2018.