

Aula 07 - Coloração de Arestas: teorema de Vizing e cadeias de Kempe

Diego Amaro Ferraz da Costa

Resumo

Neste trabalho, descreveremos as aulas ministradas pela professora Celina de Figueiredo, para a pós-graduação de Engenharia da Computação, do PESC/COPPE, baseada no material elaborado para um curso apresentado no XVI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação em Brasília em agosto de 1997. O curso ministrado é baseado na introdução à coloração em grafos para estudos da área de ciência da computação.

1 Aula 07

1.1 Introdução

Nesta aula, iniciamos o estudo de coloração de arestas. Assim como diversos conceitos na Teoria dos Grafos, o problema de coloração possui sua versão tanto em vértices, como em arestas. Neste resumo, apresentamos as definições básicas sobre a coloração em arestas. Além disso, exibimos dois teoremas que têm como consequência direta, métodos para colorir as arestas de um grafo G qualquer e de um grafo bipartido.

1.2 Coloração de Arestas

Uma k -coloração das arestas de um grafo G é uma associação de k cores às arestas de G de forma que arestas adjacentes (incidentes a um mesmo vértice u) não recebem a mesma cor. Nosso objetivo é determinar qual o menor número de cores possível necessário para colorir todas as arestas de um grafo G , este número é chamado índice cromático e é denotado por $\chi'(G)$. No texto base da disciplina, serão apresentadas sete técnicas para se obter uma coloração de arestas válida para um grafo, sendo estas: teorema de Vizing, cadeias de Kempe, lema da adjacência de Vizing, grafos sobrecarregados, pullback, decomposição e grafo das cores faltantes. Nesta aula, abordamos as duas primeiras técnicas.

1.3 O Teorema de Vizing

Como uma consequência direta da definição da coloração de arestas, temos como limite inferior natural para $\chi'(G)$, o valor de $\Delta(G)$. Vizing, através de seu teorema fundamental acerca da coloração de arestas mostrou que esse limite inferior não difere do índice cromático de um grafo G em mais de uma unidade, ou seja, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Os grafos que apresentam índice cromático igual ao valor de seu maior grau são ditos classe 1, enquanto os demais (que possuem $\chi'(G)$ uma unidade a mais do que seu maior grau) são classe 2.

O Teorema de Vizing possui muitas provas na literatura, algumas por contradição e outras construtivas. Neste texto, discutiremos uma prova construtiva que será ilustrada por meio de diversas imagens e que originará um algoritmo, o qual será detalhado mais a frente.

Esta prova construtiva segue um princípio similar ao de uma prova por indução, onde teremos como hipótese de indução que já fomos capazes de colorir todas as arestas de um grafo, a menos de uma, com $\Delta(G) + 1$ cores. E então, nosso passo de indução será mostrar que conseguimos colorir esta última aresta

sem acrescentar mais nenhuma cor, ou seja, mantendo a quantidade de $\Delta(G) + 1$ cores.

Suponhamos então a primeira possível situação: existe uma aresta uv que ainda não foi colorida em um grafo G e, como estamos utilizando $\Delta(G) + 1$ cores, temos certeza de que existe pelo menos uma cor não usada em u e uma cor não usada em v . Se uma destas cores faltantes em cada um destes dois vértices coincidir, então temos o caso mais direto possível e simplesmente atribuímos à aresta uv uma destas cores faltantes. Porém, é possível que os vértices u e v não possuam uma cor comum faltante, veja a figura abaixo:

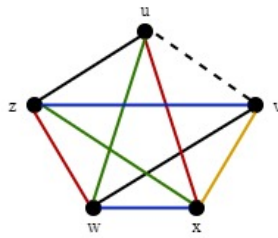


Figura 1: Grafo completo K_5 com seu conjunto de arestas parcialmente colorido. A aresta pontilhada representa a aresta não colorida como descrito no parágrafo acima.

Note que, já estamos utilizando $\Delta(G) + 1$ cores nesta coloração, porém não existe cor faltante comum entre u e v . Neste caso, vamos tentar encontrar algum vértice dentro da adjacência de u que possua tal cor faltante comum. Para melhor visualização, vamos abrir uma estrutura de leque ao redor do vértice u , conforme a figura abaixo:

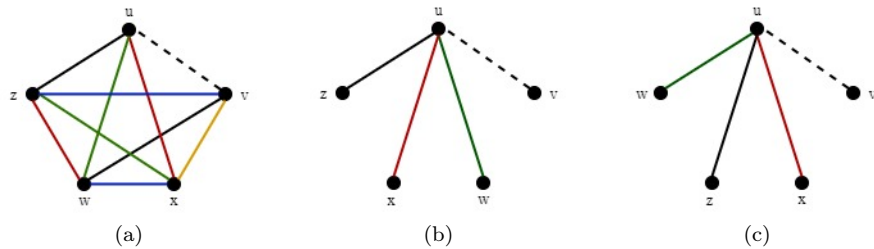


Figura 2: (a) Grafo completo K_5 . (b) e (c) possíveis leques formados ao redor do vértice u .

Podemos ver pela Figura 2 que existem dois possíveis leques que podemos construir para efetuar uma recoloração das arestas do K_5 mantendo $\Delta(G) + 1$

cores. Na Figura 2b, encontramos uma cor comum entre os vértices u e w , sendo esta a cor amarela. Portanto, efetuamos a recoloração da aresta uw com a cor amarela e deixamos a cor verde livre para a mesma poder ser usada na aresta uv , assim terminando a coloração do grafo. O procedimento é o mesmo em 2c, porém neste caso, temos que efetuar duas recolorações. Desta a vez a cor comum faltante é entre u e z , sendo esta a cor amarela, atribuímos esta cor à aresta uz , liberamos a cor preta que será então atribuída à aresta ux , assim liberando a cor vermelha, que por fim será utilizada na aresta uv .

Este caso tratado através deste exemplo é bem simples e pode ser facilmente resolvido conforme explicitado nos exemplos acima, entretanto, existe a possibilidade de percorrermos toda a adjacência do vértice u (incidente à aresta pendente de coloração) e não encontrarmos nenhuma cor comum faltante em nenhum de seus vizinhos. O que acontece neste segundo caso é que encontramos alguma aresta incidente a u que possui uma cor não utilizada que já foi usada para colorir uma outra aresta também incidente a u . Observe a figura abaixo:

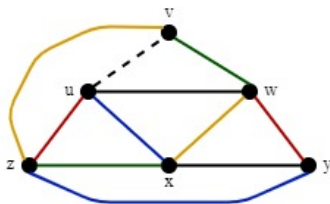


Figura 3: Grafo G que é um subgrafo do octaedro generalizado O_3 com uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração a menos de uma aresta.

Note que, não existe cor faltante comum entre o vértice u e nenhum de seus vizinhos, porém ao analisarmos o vértice z , vemos que o mesmo não possui a cor preta, que por sua vez já foi utilizada em uma aresta incidente a u . Neste caso, vamos "descolorir" a aresta que já possui tal cor, a aresta uw e vamos atribuir a cor preta à aresta uv . Continuamos com uma aresta não colorida, porém não mais a mesma.

Agora, temos dois vértices que carecem da cor preta em suas arestas: z e w . Tomemos agora o subgrafo induzido H por uma das cores que faltam em u , digamos a amarela, e a cor comum faltante nos vértices z e w , a cor preta. Como a coloração que aplicamos é válida, todos os vértices em H terão grau 1 ou 2, ou seja, só teremos ciclos e caminhos como componentes.

A partir deste momento, temos duas possibilidades: o vértice u e o novo vértice que recebeu uma aresta não colorida (neste exemplo, o vértice w) estão em componentes distintos ou o vértice u e o vértice que carecia de uma cor já utilizada (neste exemplo, o vértice z) estão em componentes distintos. Para a

primeira possibilidade, basta realizarmos uma troca das cores na componente que contém o vértice w e atribuirmos a cor que falta em u à aresta ainda não colorida. A Figura 4 demonstra todo esse procedimento:

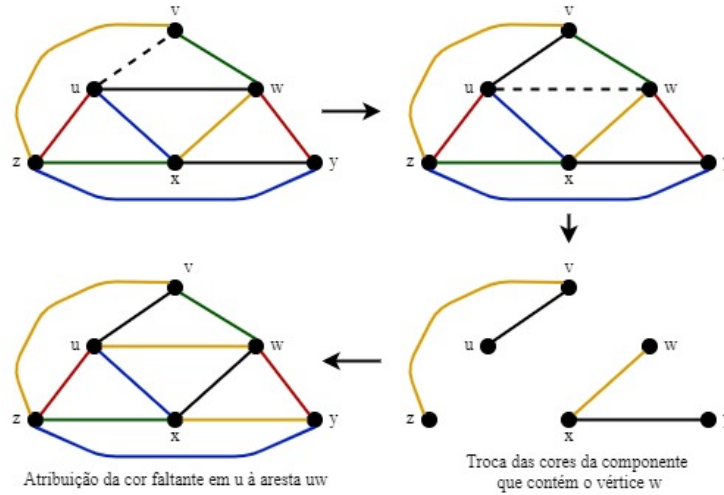


Figura 4: Esquema ilustrando todo o procedimento acima descrito no grafo da Figura 3.

Para a segunda possibilidade, vamos considerar o grafo roda W_5 como mostrado na figura abaixo:

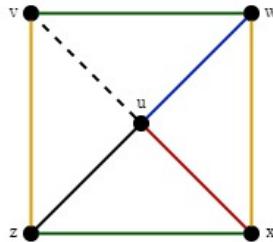


Figura 5: Grafo roda W_5 com uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração a menos de uma aresta.

Note que o vértice x não possui a cor azul, que por sua vez já foi utilizada na aresta uw e, além disso, o vértice u não possui cor comum faltante com nenhum de seus vizinhos. Logo, como no subcaso anterior, descolorimos a aresta uw e aplicamos a cor azul à aresta uw . Tomemos então o subgrafo H , induzido pela cor amarela (faltante em u) e pela cor azul (cor faltante em x que já havia sido utilizada). Em H , u e x estão em componentes distintos, o que nos leva a tomar uma rotina de procedimentos diferente.

Vamos tomar a cor da aresta ux e aplicá-la na aresta anterior, deixando a cor seguinte livre e vamos repetindo este processo até alcançarmos a nova aresta descolorida (neste exemplo, a aresta uw). Por ser um exemplo pequeno, só efetuamos este procedimento uma vez e agora a aresta ux está descolorida. Finalmente, basta trocarmos as cores que faltam em u e em x no componente de H que contém x e aplicarmos a cor que falta em u à aresta ux .

A Figura 6 ilustra todo esse procedimento:

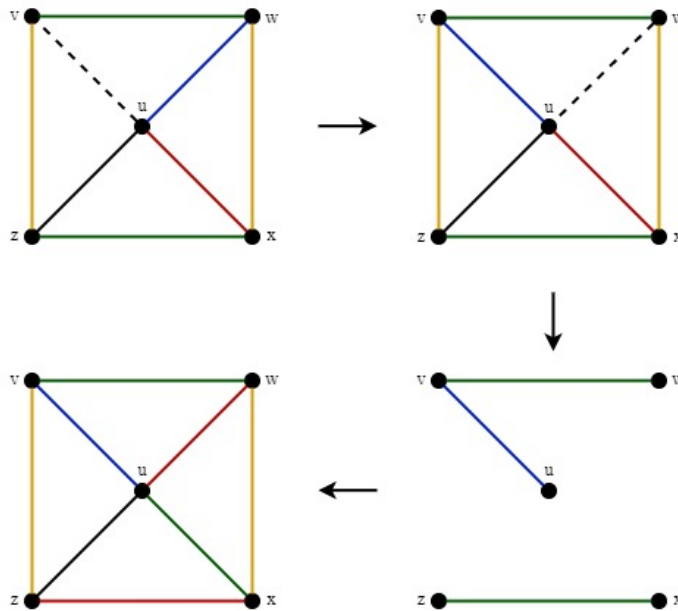


Figura 6: Esquema ilustrando todo o procedimento acima descrito no grafo da Figura 5.

Este algoritmo que é derivado da prova construtiva do teorema de Vizing apresenta a seguinte característica: para grafos classe 2, sempre teremos o ótimo e para grafos classe 1, teremos $\chi'(G)$ uma unidade acima do ótimo. Porém, como apresentado em aula, decidir se um grafo é classe 1 ou classe 2 é um problema NP-difícil. O algoritmo colore uma aresta de cada vez e a cada iteração precisamos verificar a adjacência de cada vértice a procura de cores faltantes comuns para assim, realizar recolorações e isto produz então um algoritmo de complexidade $O(|E|.|V|)$, onde E é o conjunto de arestas do grafo em questão e V o conjunto de vértices do grafo em questão.

1.4 Cadeias de Kempe

A segunda técnica apresentada em aula para coloração de arestas é chamada de Cadeias de Kempe. Até aqui somente utilizamos de notações mais comuns como subgrafos induzidos usados para recoloração das arestas de um grafo, porém este procedimento de tomar um grafo bicolorível onde será efetuado a recoloração é justamente o método das cadeias de Kempe.

Para melhor exemplificar, vamos fazer mais uma prova de um teorema de maneira ilustrativa da mesma forma anterior: vamos ter como hipótese de indução um grafo com suas arestas coloridas a menos de uma, digamos vw . Entretanto, dessa vez vamos nos restringir aos grafos bipartidos, e dentro de nossa hipótese, também vamos assumir que foram utilizadas $\Delta(G)$ cores até o momento. O passo de indução será mostrar que podemos colorir esta aresta restante utilizando uma das cores já presentes, mantendo assim o número de cores em $\Delta(G)$ unidades, ou seja, vamos provar que grafos bipartidos são Classe 1.

Consideremos o grafo G abaixo:

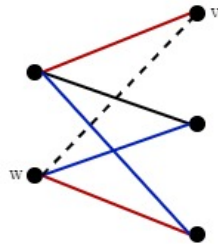


Figura 7: Grafo bipartido completo $K_{2,3}$ com suas arestas coloridas a menos da aresta vw .

Vamos chamar de α a cor faltante no vértice v e β a cor faltante no vértice w . Temos duas possibilidades para colorir a aresta vw , se escolhermos a cor preta, o problema está resolvido, pois é uma cor faltante em ambos os vértices.

Então, vamos tomar $\alpha = \text{azul}$ e $\beta = \text{preto}$. Tomemos também o subgrafo induzido pelas arestas de cor α de cor β , e que contenha o vértice w , ou seja um grafo bicolorível, onde utilizaremos o método das cadeias de Kempe. Como o grafo G da Figura 7 é bipartido, este subgrafo H não pode conter o vértice v , pois isso contrariaria nossa hipótese de que a cor α falta no vértice v . Portanto basta trocarmos as cores neste componente que contém o vértice w e colorir a aresta vw com a cor α .

A figura abaixo ilustra todo o processo:

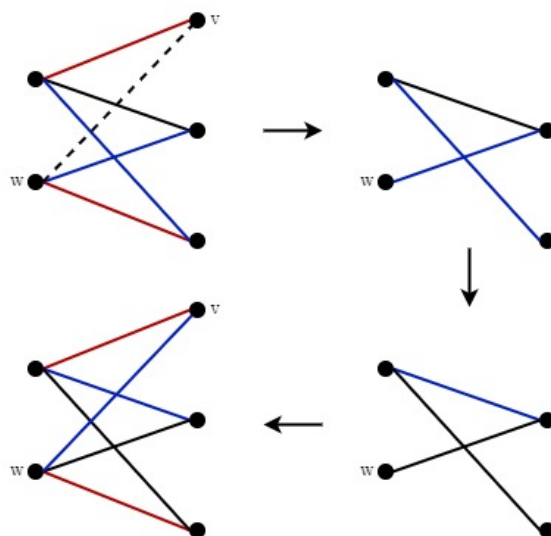


Figura 8: Esquema ilustrando todo o procedimento acima descrito no grafo da Figura 7.

Novamente, temos um algoritmo derivado desta prova construtiva. Este algoritmo, assim como o anterior, colore uma aresta a cada iteração e, no pior caso, precisa verificar todos os vértices vizinhos ao vértice que possui a aresta que desejamos colorir e, também como o anterior, determina essa coloração com $\Delta(G)$ cores para um grafo bipartido em tempo $O(|E| \cdot |V|)$, onde E é o conjunto de arestas do grafo em questão e V o conjunto de vértices do grafo bipartido em questão. Porém, existe uma ressalva que devemos nos atentar entre esses dois algoritmos. Embora possuam a mesma complexidade computacional, o algoritmo derivado do teorema de Vizing pode receber qualquer grafo como entrada, inclusive grafos completos K_n , que possuem um número quadrático de arestas nos levando a uma complexidade cúbica. No caso do algoritmo para grafos bipartidos, também podemos ter os bipartidos completos $K_{n,m}$, porém estes tem um número de arestas consideravelmente menor se o compararmos ao grafo completo com $n+m$ vértices. Concluímos então que o segundo algoritmo é mais eficiente em tempo computacional e também em sua saída, já que o mesmo nos fornece uma coloração ótima. Em compensação, ficamos restringidos aos grafos bipartidos.

Todo o texto aqui apresentado foi baseado no material [1] de onde, foram retirados e/ou adaptados os conceitos aqui exibidos.

Referências

- [1] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Coloração em grafos. *XVI Jornada de Atualização em Informática*, 1997.