Rodrigo Fernandes Souto
Aula 9 - Lema de Adjacência de Vizing e Grafos Planares
Professora: Celina

---

# Lema de Adjacência de Vizing

Lembremos que, pelo Teorema de Vizing, dado qualquer grafo G temos

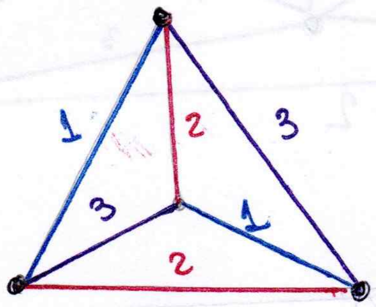
$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\},$$

onde G é de classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$ e de classe 2 caso contrário, para exemplificar, observe a resolução do exercício proposto em aula:

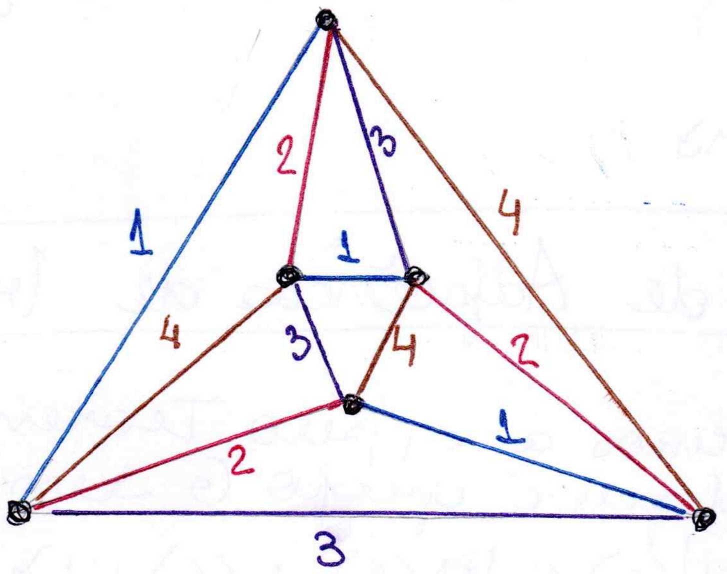
**Prove que o tetraedro, o octaedro e o icosaedro são de classe 1.**

Basta exibir uma coloração para cada grafo:

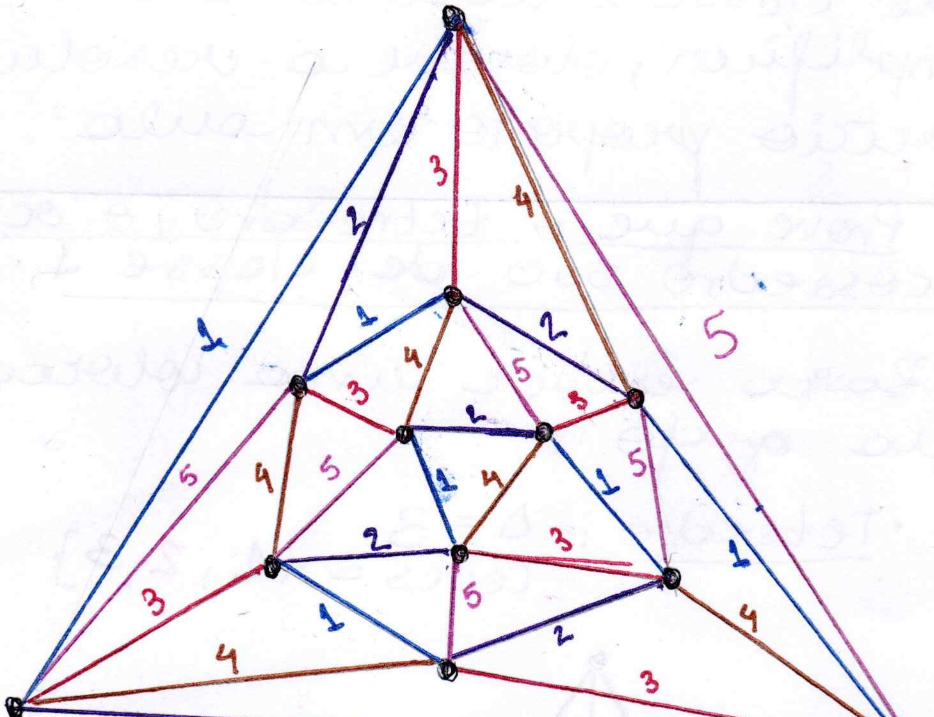
- Tetraedro: $\Delta = 3$
  Cores $= \{1, 2, 3\}$



• <u>Octoedro</u>: $\Delta = 4$
cores $= \{1, 2, 3, 4\}$



• <u>Icosaedro</u>: $\Delta = 5$
cores $= d$



Vamos estudar os grafos críticos de classe 2, segue a definição:

Um grafo $G$, que é classe 2, é dito crítico quando todo subgrafo próprio de $G$ é classe 1.

O próximo resultado foi o generalizado por Vizing:

Se $G$ é crítico de classe 2, então para quaisquer $vw \in E(G)$ temos $d(v)+d(w) \geq \Delta(G)+2$.

Tome $vw \in E(G)$, $G$ crítico de classe 2. Assim $\chi'(G-vw) = \Delta(G-vw) \leq \Delta(G)$, logo podemos exibir $\Delta(G)$ coloração das arestas de $G-vw$.
Caso a cor $i$ falte em $v$, então $w$ tem aresta de cor $i$, caso contrário pintaríamos $vw$ com a cor $i$ e $\chi'(G) = \Delta(G)$, um absurdo pois $G$ é classe 2.
Como faltam $\Delta(G) - (d(v)-1)$ cores em $v$ na coloração de $G-vw$, da tais cores existem em $w$, portanto

$$d(w)-1 \geq \Delta(G)-(d(v)-1)$$
$$d(v)+d(w) \geq \Delta(G)+2$$

Vizing provou o seguinte Teorema:

Teorema: Seja $G$ um grafo crítico, sejam $v, w \in V(G)$ tal que $vw \in E(G)$. Então:

1. Se $d(v) < \Delta(G)$, então $d^*(w) + d(v) \geq \Delta(G)+1$.

2. Se $d(v) = \Delta(G)$, então $d^*(w) \geq 2$.

Onde $d^*(w)$ é o número de vértices de grau $\Delta(G)$ que são adjacentes a $w$.

Vizing demonstrou tal Teorema utilizando os leques; segue a definição:
Dada uma coloração das arestas de um grafo, um leque $L$ no vértice $w$, com aresta inicial $wa_1$, é uma sequência de arestas distintas $wa_1, wa_2, \ldots$, onde para cada $i \geq 1$ aresta $wa_{i+1}$ tem como cor alguma ausente no vértice $a_i$.

Os duas importantes propriedades sobre leques são:

1º FATO) se $L$ e $L'$ são dois leques em $w$ no grafo $G-vw$, e se as arestas iniciais de $L$ e $L'$ são coloridas com cores que não aparecem em $v$, então $L$ e $L'$ não tem arestas em comum.

2º FATO) se $L = (wa_1, wa_2, \ldots, wa_s)$ é um leque com tamanho máximo em $w$, começando com a aresta $wa_1$ cuja cor não aparece em $v$, então o vértice $a_s$ tem grau $\Delta(G)$.

Daí basta aplicar tudo sobre leque e o resultado inicial para provar o Teorema. O qual, resumidamente, garante que se $G$ é crítico, então todo $v \in V(G)$ tem pelo menos dois vizinhos com grau $\Delta(G)$.

Esse resultado é aplicado para grafos Planares.

# Grafos Planares

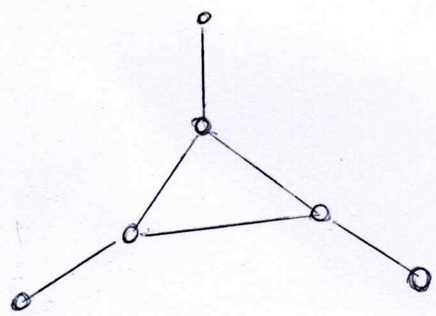
Um grafo G é planar quando admite um desenho no plano sem cruzamento de arestas.

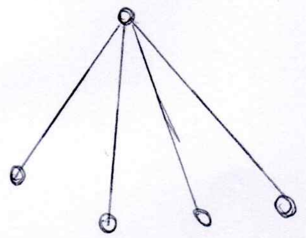
Um grafo G é periplanar, quando G é planar, e mais: na representação planar de G, todo vértice de G faz fronteira com a face externa (infinita).

Vamos a outro exercício:

Todo grafo periplanar possui vértice de grau 2.

Esta afirmação no exercício não é satisfazível, tanto para grafos com pares ou ímpares ~~o total de~~ vértices:





Ambos são periplanares sem vértices de grau 2.

O resultado que podemos provar é o seguinte:

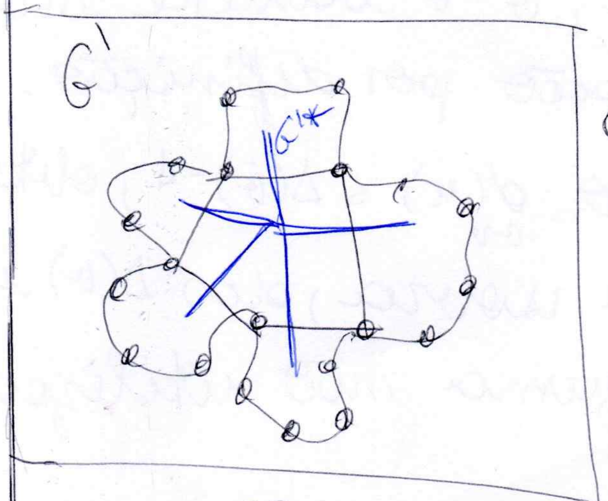
Se G é grafo periplanar de Classe 2, então tem pelo menos um vértice de grau 2.

Vamos demonstrar este resultado a partir de dois fatos:

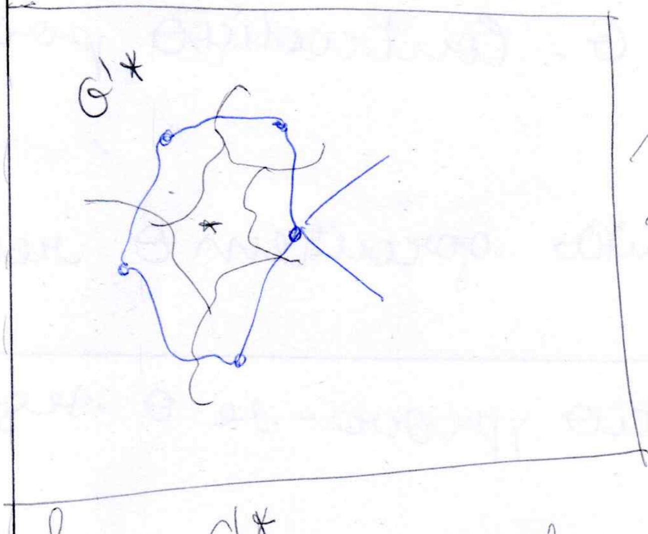
1º FATO) Todo grafo periplanar tem vértice de grau no máximo 2.

Seja $G$ grafo periplanar.

Note que podemos obter $G'$ periplanar, a partir de $G$, adicionando arestas até que não seja mais possível $G'$ ser periplanar. ($G'$ é chamado periplanar maximal).




22




Consideremos $G'^*$ dual de $G$ restrito às faces internas.

$G'^*$ tem de ser árvore, caso contrário, $G'^*$ teria um ciclo $C$.

Mas cada vértice $C$ representa faces, e no meio de $C$ deve haver $v \in V(G')$ tal que $v$ não faz fronteira com a face externa (ilimitada).

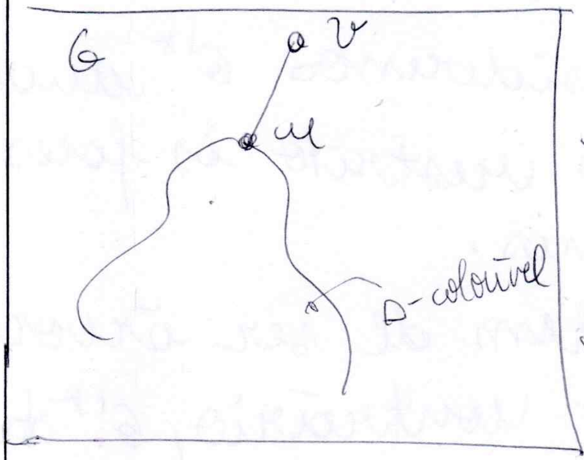
Logo $G'^*$ tem pelo menos duas folhas (por ser árvore), daí tais folhas são ciclos em $G'^*$ ou caminhos. Isto é, existem vértices de grau 2.

Retirando as arestas adicionadas de $G$ em $G'$, obtemos o enunciado.

2º Fato) Todo grafo Classe 2 crítico não admite folha.

Supomos crítico sem perda de generalidade.

Supomos também, para uma contradição, que G classe 2 crítico tenha folha em v, aresta uv.




Daí, G−v admite Δ(G)-coloração por definição. Como $d_{G-v}(u) \leq \Delta(G)-1$, obtemos que sobra, das Δ(G) cores, alguma não utilizada em u.

Basta utilizá-la em G e obter uma Δ(G)-coloração para G. Contradição pois G é Classe 2 crítico.

Os dois fatos juntos garantem o resultado inicial.

Usando o exercício, prova-se o seguinte Teorema.

<u>Teorema</u>: Os únicos grafos periplanares que são Classe 2 são os ciclos induzidos ímpares.

Prova-se do seguinte modo: uma direção, a volta, é trivial. Já a ida, dividimos em dois casos, |V(G)| par ou ímpar.

Um problema ainda aberto na literatura matemática é quanto a caracterização de grafos planares ~~e~~ em relação às classes (Classe 1 ou Classe 2).

O que sabemos é o seguinte:

Teorema: Todo grafo planar $G$ com $\Delta(G) \geq 10$ é Classe 1.

Prova: Seja $G$ planar com $\Delta(G) \geq 10$ e Classe 2 crítico, sem perda de generalidade.

Como $G$ é planar, obtemos

$$S = \{v \in V(G) : d(v) \leq 5\} \neq \emptyset$$

e o grafo $G - S$ também é planar.

Daí, existe $w \in V(G-S)$ tal que

$$|N_{G-S}(w)| \leq 5.$$

Como $w \notin S$, $d_G(w) > 5$, isto é, existe $v \in V(G)$ onde $vw \in E(G)$.

Assim $d(v) \leq 5$, pois $v \in S$ e

$$d(v) + d^*(w) \leq 5 + 5 = 10 < 10 + 1 = \Delta(G) + 1$$

Contradição, pois $G$ é crítico e tem de obedecer o Teorema generalizado por Vizing. ■

Este Teorema pode ser melhorado para mostrar que: se $G$ é planar com $\Delta(G) \geq 8$, en-

~~tão~~ G é de Classe 1.

Para $\Delta(G) \in \{6, 7\}$ o problema continua sem solução.

Para $\Delta(G) \leq 5$ podemos obter grafos tanto de Classe 1 quanto de Classe 2, veja:

$\Delta(G) = 2$

Ciclos pares: classe 1

Ciclos ímpares: classe 2

$\Delta(G) \in \{3, 4, 5\}$ veja o exercício abaixo

Prove que o grafo obtido ao inserirmos um vértice em uma aresta qualquer do tetraedro é Classe 2. O que você pode dizer se inserirmos um vértice em uma aresta qualquer do octaedro? E do icosaedro?

Considere G grafo Classe 1 com $|V(G)| = n$. Tome M emparelhamento de G, claro que

$$|M| \leq \frac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par}$$

$$|M| \leq \frac{n-1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

Como G é $\Delta(G)$-colorível, existem $C_1, C_2, \ldots, C_{\Delta(G)}$ classes de cores, onde cada uma define um emparelhamento $M_i$ distinto, pela definição de coloração.

Daí

$$|E(G)| = |M_1| + \dots + |M_\Delta| \leq \Delta \frac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par}$$

$$|E(G)| \leq \Delta \frac{(n-1)}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

Vamos agora caso a caso:

Tetraedro: ao colocar um vértice no meio de uma aresta, obtemos $G'$ com $|V(G')| = 5$ e $|E(G')| = 7$.

Daí, se $G'$ é classe 1, então

$$|E(G')| \leq \frac{\Delta(n-1)}{2} = \frac{3\cdot(5-1)}{2} = 6$$

Contradição.

Conclui-se: $G'$ é classe 2, i.e, o tetraedro com um vértice no meio de suas arestas é de classe 2.

Octaedro: analogamente, obtemos $H'$ tal que $|V(H')| = 7$ e $|E(H')| = 13$.

Se $H'$ é de classe 1, então

$$|E(H')| \leq \frac{\Delta(n-1)}{2} = \frac{4\cdot(7-1)}{2} = 12.$$

Contradição novamente.

Icosaedro: $|V(F')| = 13$ e $|E(F')| = 31$, onde

$$|E(F')| = 31 > \frac{5\cdot(13-1)}{2} = \frac{\Delta(n-1)}{2}.$$