Universidade Federal do Rio de Janeiro
CPS845 - Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos
Professora: Celina M. Herrera de Figueiredo

Aula 11 - Coloração de Arestas: grafos sobrecarregados

Diego Amaro Ferraz da Costa

Resumo

Neste trabalho, descreveremos as aulas ministradas pela professora Celina de Figueiredo, para a pós-graduação de Engenharia da Computação, do PESC/COPPE, baseada no material elaborado para um curso apresentado no XVI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação em Brasília em agosto de 1997. O curso ministrado é baseado na introdução à coloração em grafos para estudos da área de ciência da computação.

1 Aula 11

1.1 Introdução

Nesta aula, continuamos o estudo de coloração de arestas através da quarta técnica apresentada em aula, a técnica relacionada a grafos sobrecarregados. Neste resumo, definimos os grafos sobrecarregados e apresentamos um algoritmo para verificar se um dado grafo G é, de fato, sobrecarregado. Além disso, aplicamos este algoritmo a três grafos distintos (aplicação essa que se trata dos exercícios propostos).

1.2 Grafos Sobrecarregados

Conforme dito nas aulas anteriores, decidir se um grafo é classe 1 ou classe 2 se trata de um problema bem difícil, mesmo havendo apenas duas possibilidades para o índice cromático de um grafo qualquer. O algoritmo derivado do teorema de Vizing nos fornece uma coloração com $\Delta(G) + 1$ cores, e quando o grafo G em questão é classe 2, este algoritmo nos fornece então uma coloração ótima. Entretanto, para provarmos que este grafo é classe 2, precisamos de algum argumento para mostrar que é impossível uma coloração do mesmo com $\Delta(G)$ cores. Um argumento muito utilizado nesse contexto, é o argumento de contagem.

Em qualquer coloração de arestas válida, temos que cada cor equivale a um emparelhamento, portanto, em um grafo com n vértices uma cor colore, no máximo, $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas. Esta afirmação implica que, com $\Delta(G)$ cores, colorimos, no máximo, $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$ arestas. Concluímos então que, seja um grafo G, se existe algum subgrafo $H \subseteq G$, onde $\Delta(H) = \Delta(G)$ cujo número de arestas exceda o número $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$, é impossível uma coloração das arestas com $\Delta(G)$ cores, ou seja, precisaremos de $\Delta(G) + 1$ cores e consequentemente, G é classe 2. Os grafos que se encaixam nesta categoria são chamados de **grafos sobrecarregados**. É imediato notar que o número de vértices deste subgrafo H deve ser ímpar, caso contrário o número de arestas de H nunca excederá $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$, sendo sempre menor ou igual a este valor.

Adaptando então esta definição para um contexto mais geral, de modo que não consideremos os grafos com número par de vértices:

Definição 1. *Um grafo G é sobrecarregado se existir algum subgrafo $H \subseteq G$, onde $\Delta(H) = \Delta(G)$ cujo número de arestas exceda o número $\Delta(G)(n-1)/2$.*

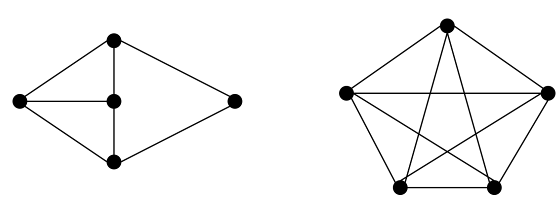


Figura 1: Exemplos de grafos sobrecarregados.

Na figura acima, ilustramos dois exemplos de grafos sobrecarregados. Em ambos os casos

$H = G$. De maneira geral, temos que todos os grafos completos com número ímpar de vértices, todas as potências de ciclo com número ímpar de vértices e todos os grafos regulares com número ímpar de vértices são sobrecarregados.

Porém ser sobrecarregado não é uma condição necessária para que um grafo seja classe 2, é apenas uma condição suficiente. Para justificar esse fato, temos o grafo de Petersen: é um grafo classe 2 que não é sobrecarregado.

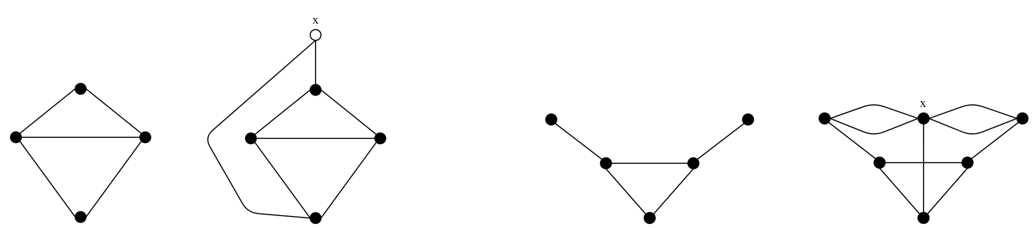
O conceito de grafos sobrecarregados é um conceito muito importante no estudo de coloração de arestas. Temos até uma conjectura a respeito dos mesmos:

Conjectura 1. *[1] Seja G um grafo simples com $\Delta(G) > 1/3|V(G|$. Então G é classe 2 se, e somente se, é sobrecarregado.*

1.3 Algoritmo polinomial para a identificação de um grafo sobrecarregado

É possível decidir se um grafo G é sobrecarregado em tempo polinomial e, inclusive, encontrar qual subgrafo H que possui um número de arestas que exceda $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$.

Este algoritmo se baseia em uma construção que será detalhada a seguir. Dado um grafo G que será a entrada deste algoritmo, iremos construir um novo grafo, denotaremos esta estrutura auxiliar por $\hat{G}$. O grafo $\hat{G}$ possui um vértice a mais em seu conjunto, denotaremos este vértice com o rótulo x. A etapa seguinte é, para cada $v \in V(G)$, serão adicionadas $\Delta(G) - deg(v)$ arestas conectando x a v. É imediato notar que $\hat{G}$ pode ser um multigrafo e que todos os vértices de G possuirão grau $\Delta(G)$ em $\hat{G}$. Os vértices de $\hat{G}$ serão divididos em duas categorias: vértices pretos e brancos. Caso G possua uma quantidade par de vértices, todos eles estarão na primeira categoria e o vértice x na segunda. Caso a quantidade de vértices de G seja ímpar, todos os vértices de $\hat{G}$, incluindo x estarão na primeira categoria. Ao fazermos a construção desta forma, garantimos que sempre existirá um número par de vértices pretos. A figura abaixo ilustra este processo nos dois casos:



(a) (b)

Figura 2: (a) Grafo diamante e o grafo $\hat{G}$ relacionado a ele. (b) Bull graph e o grafo $\hat{G}$ relacionado a ele.

Em 2a, temos uma quantidade par de vértices, portanto o vértice x assume o rótulo branco. Em 2b, o grafo G possui uma quantidade ímpar de vértices, logo $\hat{G}$ só possui vértices pretos.

Voltando ao nosso propósito aqui neste algoritmo, queremos verificar se um grafo G é sobrecarregado e determinar qual subgrafo H de G que possui $m(H) > \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$, onde m é o número de arestas. Usaremos a notação $E(S)$ para indicar o conjunto de arestas que têm ambos os extremos no conjunto S. O subgrafo H que satisfaz a desigualdade $m(H) > \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$, sempre corresponderá a um conjunto S de vértices tal que: $|E(S)| > \Delta(G)\frac{(n-1)}{2}$, onde n é o número de vértices de G.

O passo seguinte deste algoritmo é reduzir o problema de determinar se um grafo é sobrecarregado ao problema de encontrar um corte mínimo $[S, \overline{S}]$. Um corte de arestas determinado por um conjunto S de vértices se trata de um conjunto de arestas que possuem uma extremidade em S e outra fora de S. Como uma forma de mostrar do porquê o algoritmo que descrevemos aqui funciona, temos o seguinte teorema:

Teorema 1. *Para um grafo G qualquer e um subconjunto S de vértices de G, temos que $G[S]$ satisfaz $m(H) > \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$ e $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$ se, e somente se, S possui um número ímpar de vértices pretos em $\hat{G}$ e $|[S, \overline{S}]| < \Delta(G)$ em $\hat{G}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Neste caso, $|S|$ é ímpar e seus vértices são todos pretos, isto acontece pois o único vértice que pode não ser preto (x) não está em $V(G)$. Como dito anteriormente, todos os vértices de G em $\hat{G}$ possuem grau $\Delta(G)$ e também, todos os vértices de S têm grau $\Delta(G)$. A soma dos graus dos vértices de S pode ser escrita como:

$$\Delta(G)|S| = 2|E(S)| + |[S, \overline{S}]| \tag{1}$$

As arestas de $E(S)$ contribuem com duas unidades pois seus dois extremos estão dentro de S, enquanto que, as arestas do corte contribuem com apenas uma unidade, pois seu outro extremo está em $\overline{S}$.

A condição imposta sobre o número de arestas de H na hipótese implica que:

$$\Delta(G[S])(|S| - 1) < 2|E(S)| \tag{2}$$

Ao combinarmos as equações 1 e 2 com o fato de $\Delta(G) = \Delta(G[S])$ temos:

$$|[S, \overline{S}]| < \Delta(G) \tag{3}$$

($\Leftarrow$) Agora, assumamos que a desigualdade 3 é válida e que S seja um conjunto de vértices de $\hat{G}$ que contenha um número ímpar de vértices pretos. Podemos então assumir, sem perda de generalidade, que S não contém o vértice x (se não for o caso, trocamos S por $\overline{S}$), ou seja, $S \subseteq V(G)$. Como consequência disso, todos os vértices de S possuem grau $\Delta(G)$ e vale novamente a Equação 1 que, combinada com a Equação 3, nos dá:

$$\Delta(G)(|S| - 1) < 2|E(S)|$$

Pela hipótese aqui assumida, temos que $\Delta(G) \geq \Delta(G[S])$, visto que $S \subseteq V(G)$. Portanto, nos resta mostrar que $\Delta(G) = \Delta(G[S])$. Se $\Delta(G[S]) \leq \Delta(G) - 1$, então a soma dos graus em $G[S]$ seria:

$$2|E(S)| \leq \Delta(G)[S] \leq (\Delta(G) - 1)|S|;$$

donde (combinando as duas equações anteriores)

$$\Delta(G)(|S| - 1) < (\Delta(G) - 1)|S|,$$

Simplificando a equação acima, chegamos em:

$$|S| < \Delta(G) \tag{4}$$

Também sempre temos a seguinte desigualdade:

$$2|E(S)| \leq |S|(|S| - 1),$$

ou seja, o número de arestas com os dois extremos em S não pode ultrapassar o número de arestas do grafo completo. Combinando então esta relação com uma das desigualdades anteriores, temos:

$$(\Delta(G))(|S| - 1) < |S|(|S| - 1),$$

Como $|S| \geq 1$, a igualdade não é possível pois levaria a $0 < 0$, portanto temos que:

$$\Delta(G) < |S|,$$

isto contradiz a Equação 4. Logo, $\Delta(G[S])$ deve ser igual a $\Delta(G)$ e isto conclui a prova.

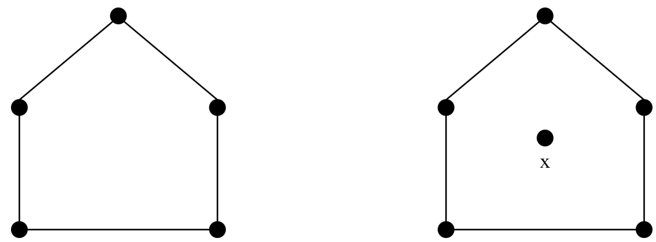
$\square$

Este resultado nos fornece um algoritmo para testar se qualquer grafo G é sobrecarregado:

Algoritmo 1 Algoritmo SO

Entrada: Grafo G
Saída: subgrafo sobrecarregado de G, com o mesmo Δ, se existir
1: Construir $\hat{G}$
2: Achar S, tal que $|S|$ seja ímpar e $|[S, \overline{S}]|$ seja mínimo
3: Retornar $G[S]$ se $|[S, \overline{S}]| < \Delta(G)$

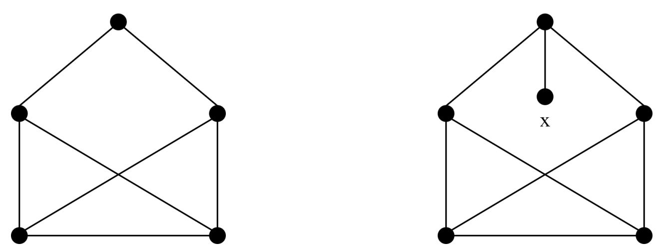
1.4 Exemplos de Aplicação do algoritmo SO



(a) (b)

Figura 3: (a) Grafo G. (b) Grafo $\hat{G}$

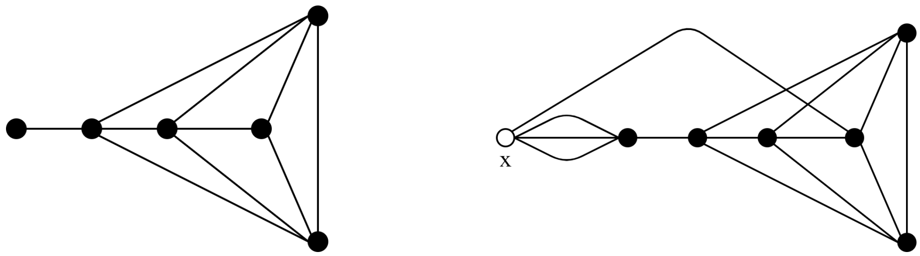
Neste primeiro exemplo, temos um ciclo C_5, ou seja, um grafo regular de grau 2 com um número ímpar de vértices. Pelo que foi descrito anteriormente, se o grafo G submetido ao algoritmo SO tiver um número ímpar de vértices, todos estes serão pretos e o vértice extra x também será, veja a Figura 3b. Como todos os vértices já possuem o mesmo grau, não adicionamos nenhuma aresta de x para algum vértice $v \in V(G)$. Portanto a saída que o algoritmo nos fornecerá é o próprio C_5, neste caso $|S| = 5$, que é ímpar e $|[S, \overline{S}]| = 0 < \Delta(G) = 2$.



(a) (b)

Figura 4: (a) Grafo G. (b) Grafo $\hat{G}$

Neste segundo exemplo, novamente precisamos colocar o vértice extra x na categoria dos vértices pretos, por causa da cardinalidade ímpar de vértices de G. Entretanto, diferente do primeiro caso, não temos um grafo regular, portanto faz-se necessário adicionar arestas em cada vértice $v \in V(G)$ a fim de que todos os vértices de G em $\hat{G}$ possuam grau $\Delta(G)$. Novamente o conjunto S de vértices será o próprio G e o corte de arestas $[S, \overline{S}]$ será composto por apenas uma aresta, que é justamente a única aresta incidente a x. Portanto a saída que o algoritmo nos fornecerá é o próprio G, neste caso $|S| = 5$, que é ímpar e $|[S, \overline{S}]| = 1 < \Delta(G) = 3$.



(a) (b)

Figura 5: (a) Grafo G. (b) Grafo $\hat{G}$

O conjunto de vértices do grafo G da Figura 5 possui cardinalidade par, logo o vértice x será da categoria branca. Desta vez, o próprio grafo G não é sobrecarregado, visto que possui um número par de vértices. Ao aplicarmos o algoritmo SO, temos que o corte $[S, \overline{S}]$ mínimo possui duas arestas, sendo estas a aresta que conecta x ao vértice de G cujo grau anterior era 3 e a única aresta (de G) que é incidente ao vértice de G cujo grau anterior era 1. O algoritmo nos fornece como saída então um subgrafo com 5 vértices e $|[S, \overline{S}]| = 2 < \Delta(G) = 4$. A figura abaixo ilustra $G[S]$ que será a saída do algoritmo SO:

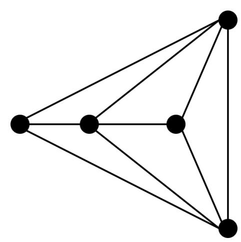


Figura 6: Grafo $G[S]$ com $m(G[S]) = 9 > \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor = 8$

Todo o texto aqui apresentado foi baseado no material [2] de onde, foram retirados e/ou adaptados os conceitos aqui exibidos.

Referências

[1] A. J. W. Hilton. Two conjectures on edge-colouring. *Discrete Mathematics*, 74:61–64, 1989.

[2] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Coloração em grafos. *XVI Jornada de Atualização em Informática*, 1997.