Universidade Federal do Rio de Janeiro
CPS845 - Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos
Professora: Celina M. Herrera de Figueiredo

Relatório de Resumo das aulas
Aula 12

Diego Athayde Monteiro

Resumo

Neste trabalho, descreverei a aula ministrada pela professora Celina de Figueiredo, para a pós-graduação de Engenharia da Computação, do PESC/COPPE, baseada no Local Conditions for edge-coloring de Figueiredo, Celina, Meidanis, João e Picinin, Célia [1]. Esse artigo foi apresentado no curso de tópicos especiais em teoria dos grafos.

1 Aula12

1.1 Exercício 1

Apresente exemplos de grafos que representem as diferentes relações entre as classes: NO, SO, O e C2.

1.1.1 Grafo Overfull

Dizemos que um grafo é Overfull quando ele possui um número ímpar de vértices e $\Delta\frac{n-1}{2} < m$, onde m é o número de arestas do grafo. Δ(G) é o grau máximo entre os vértices do grafo. Um grafo overfull tem $\chi\prime(G) = \Delta(G) + 1$.

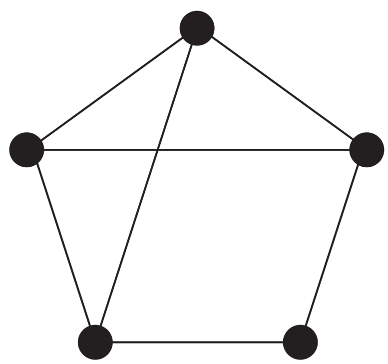

Figura 1: Grafo overfull com n=5

Podemos notar que a mesma verificação não funciona para grafos com a quantidade par de vértices. Para esses casos, a seguinte relação é sempre verdadeira $\Delta\frac{n}{2} \geq m$

1.1.2 Grafo Neighborhood-Overfull

Se um subgrafo overfull H tem uma vizinhança, isto é, ele é induzido por um Δ-vértice e todos os seus vizinhos, então nós chamamos o grafo G como ***neighborhood-overfull***. Vale mencionar que um neighborhood-overfull está em Classe 2.

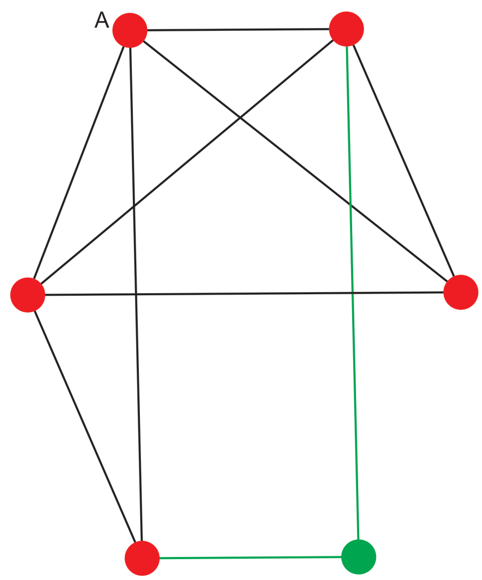

Figura 2: Grafo neighborhood-overfull induzido pela vizinhana do vértice A

1.1.3 Grafo subgrafo-overfull

Um grafo G é subgrafo-overfull se contém um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é overfull. Grafos subgrafo-overfull possui $\chi\prime(G) = \Delta(G) + 1$. O subgrafo-overfull é formado por algumas arestas e vértices do grafo G, porém não precisa ser um subgrafo induzido de G.

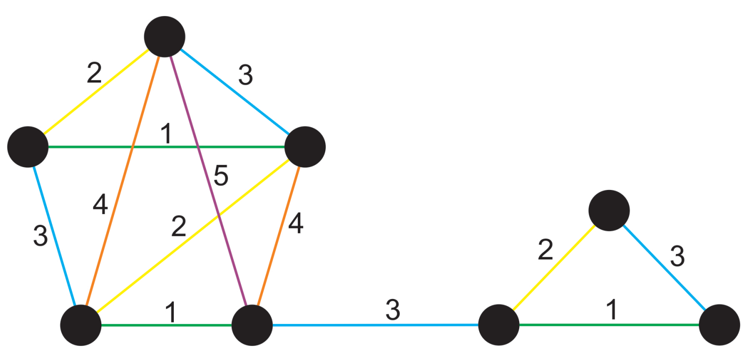

Figura 3: Grafo subgrafo-overfull com $n = 8$

1.1.4 Grafo Classe 2

Dado o grafo H com V(H) =A,B,C,D,E,F,G, dois vértices x e y são adjacentes em H. Temos $n = 7$ e os graus dos vértices são 5,5,5,5,4,4,4. Então, $\Delta(H) = 5$ e $m = 16$. O grafo H é overfull e classe 2, considerando que todo grafo overfull é um grafo Classe 2.

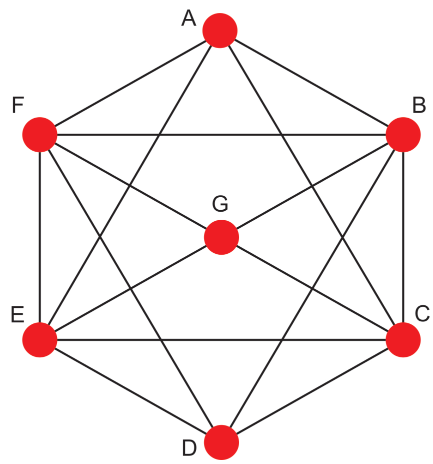

Figura 4: Grafo classe 2 com $n = 7$

1.1.5 Correlações

Temos as seguintes correlações para os grafos citados acima:

$$O \subset SO \subset C2 \text{ e } NO \subset SO \subset C2$$

Onde O é grafo overfull, SO é subgrafo-overfull, C2 é grafo Classe 2 e NO é Grafo Neighborhood-overfull. Os tipos de grafo O e NO são incomparáveis.

1.2 Exercício 2

Usamos a notação Kp1, p2, ..ps para um grafo multipartido completo com s partes, onde cada parte é um conjunto independente de cardinalidade respectivamente p1, p2, ...ps, e temos uma aresta entre cada par de vértices em partes diferentes.Considere quatro grafos multipartidos completos: $K_{1,1,3}$; $K_{1,2,2}$; $K_{2,2,3}$; $K_{2,3,4}$.

1.2.1 Grafos Multipartidos Completos

Um grafo é multipartido se seu conjunto de vértices pode ser particionado em subconjuntos (ou partes) onde os vértices são dois a dois não-vizinhos. Todo grafo simples é um grafo multipartido, pois é possível particionar o conjunto de vértices em subconjuntos compostos de um único vértice. Quando quaisquer dois vértices u e v pertencentes a partes diferentes são vizinhos, o grafo é chamado de multipartido completo. Um grafo k-partido completo é um grafo multipartido completo com k partes.

Vimos na sessão anterior que todos os grafo overfull são grafos classe 2, para os grafos classe 1, podemos ingenuamente tentar uma coloração com Δ cores das arestas. Outra informação importante, que vale ressaltar novamente, que todo grafo overfull deve ter um número ímpar de vértices.

Abaixo temos alguns exemplos de grafos tripartidos completos $K_{1,1,3}$; $K_{1,2,2}$; $K_{2,2,3}$; $K_{2,3,4}$, onde identificamos uma coloração viável para cada um deles e analisamos se pertence a classe 1 ou 2.

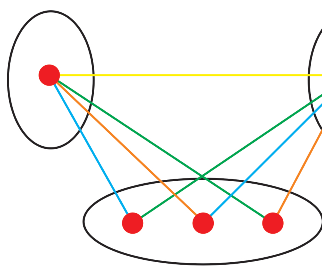

Figura 5: Grafo Triparido completo $k_{1,1,3}$ - Nesse exemplo mostramos que para o $\Delta = 4$, conseguimos uma coloração de 4 cores no grafo, que é um grafo classe 1.

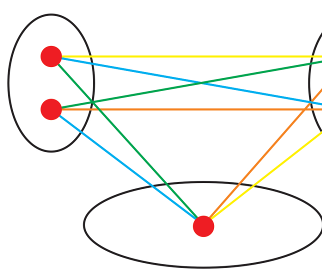

Figura 6: Grafo Triparido completo $k_{1,2,2}$ - Nesse exemplo mostramos que para o $\Delta = 4$, com uma coloração viável no grafo de 4 cores, que é um grafo classe 1.

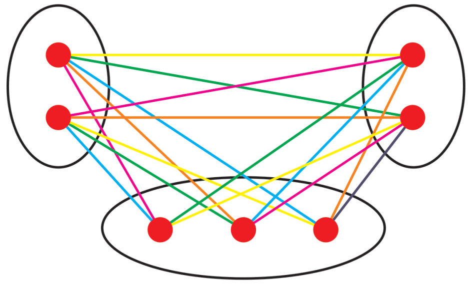

Figura 7: Grafo Triparido completo $k_{2,2,3}$ - Nesse exemplo mostramos que para o $\Delta = 5$, porém uma coloração viável no grafo, seria de 6 cores.

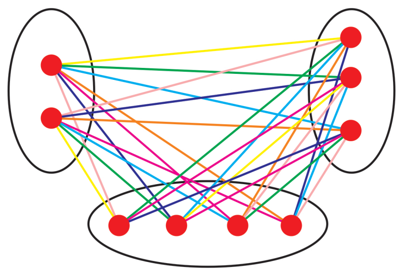

Figura 8: Grafo Triparido completo $k_{2,3,4}$ - Nesse exemplo mostramos que para o $\Delta = 7$, com uma coloração viável no grafo de 7 cores, que é um grafo classe 1.

Referências

[1] Celina Figueiredo, Joao Meidanis, and Celia Mello. Local conditions for edge-coloring. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 32, 01 2000.