Universidade Federal do Rio de Janeiro
CPS845 - Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos
Professora: Celina M. Herrera de Figueiredo

Relatório de Resumo da aula 13

Matheus Nunes Adauto

Resumo

Neste trabalho, descreveremos as aulas ministradas pela professora Celina de Figueiredo, para a pós-graduação de Engenharia da Computação, do PESC/COPPE, baseada no material elaborado para um curso apresentado no XVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação em Brasília em agosto de 1997. O curso ministrado é baseado na introdução à coloração em grafos para estudando da área de ciência da computação.

1 Aula 13

1.1 Introdução

Neste resumo, abordaremos as seções 3.7 e 3.8 da referência utilizada nas aulas. Todas as definições foram retiradas e/ou adaptadas de [1].

1.2 Grafos Regulares

É simples ver que um grafo regular com n ímpar é sobrecarregado. De fato, seja G um grafo regular de grau d com n ímpar. Então,

$$m = \sum_{i=1} gr(v) = \frac{dn}{2} > d\frac{n-1}{2}.$$

O problema torna-se interessante quando n é par, alguns desses grafos são *Classe 2* (Petersen, por exemplo) e outros são *Classe 1* ($C_n, 4 \leq n$).

Dentre os grafos regulares com n par, destaca-se a busca pelos grafos cúbicos. Esta busca foi impulsionada pela equivalência entre o problema das quatro cores e o problema de coloração de arestas de um grafo planar cúbico sem aresta de corte com três cores. O objetivo era verificar a conjectura das quatro cores. Com a conjectura provada, sabemos que grafos cúbicos planares sem aresta de corte pertencem à *Classe 1*. O próximo teorema relaciona esses dois problemas.

Um **mapa** é um grafo planar conexo e sem aresta de corte.

Teorema 1 *O Teorema das Quatro Cores é equivalente à afirmação de que todo mapa cúbico tem* $\chi'(G) = 3$*.*

Uma observação interessante é que grafos cúbicos sobrecarregados possuem aresta de corte. Portanto, a procura passou para grafos cúbicos *Classe 2* que não são sobrecarregados. Essses grafos são conhecidos como **snarks**.

Corolário 1 *Um grafo é sobrecarregado, se, e somente se, possui aresta de corte.*

O primeiro snark conhecido foi o grafo de Petersen. Atualmente, são conhecidas famílias infinitas de snarks.

Conjectura 1 *Seja G um grafo regular com n par tal que $\frac{n}{2} \leq \Delta(G)$. Então G está na Classe 1.*

1.3 Grafos Completos

Na seção anterior, vimos que um grafo completo com n ímpar pertence à *Classe 2*. Assim, para resolver o problema de classificação de crafos completos basta, então, exibirmos uma coloração com $\Delta(G)$ cores para os grafos completos com n par. Antes de enunciarmos o próximo teorema, precisamos de um lema que será enunciado a seguir.

Lema 1 *Seja K_n um grafo completo com n ímpar. Seja $V(G) = \{0, 1, \ldots, \Delta(K_n)\}$. Então, a função $c\colon E(G) \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \Delta(K_n)\}$ tal que $c(ij) = (i+j) \mod (\Delta(K_n)+1)$ é uma coloração para as arestas de K_n com $\Delta(K_n) + 1$ cores.*

Teorema 2 *K_n está na Classe 1, se n é par, e está na Classe 2, se n é ímpar.*

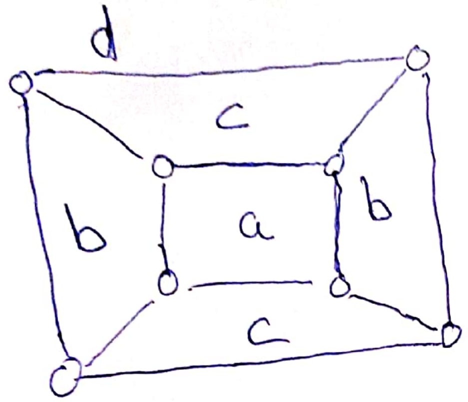
Referências

[1] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Coloração em grafos. *XVI Jornada de Atualização em Informática*, 1997.

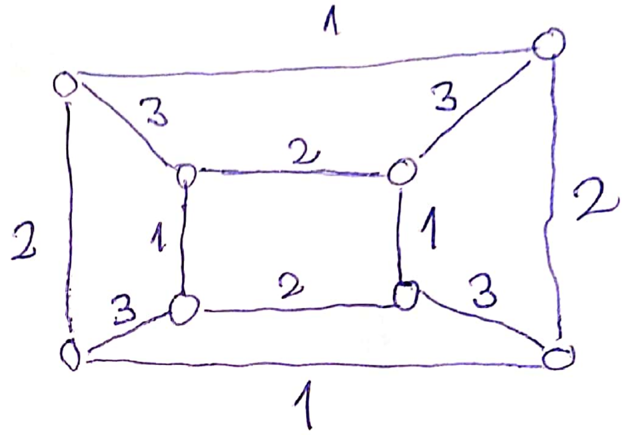
Exercícios A13

1- Cubo

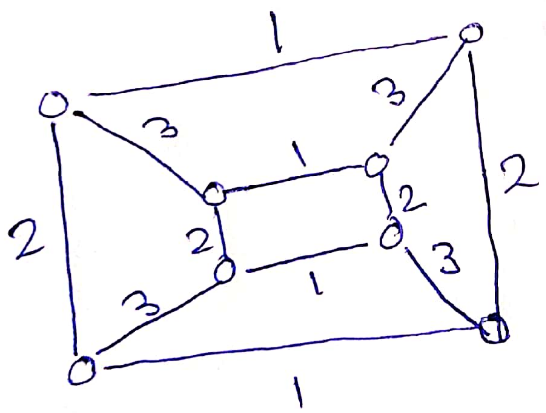
(i) 4-coloração de faces -> 3-coloração de arestas.



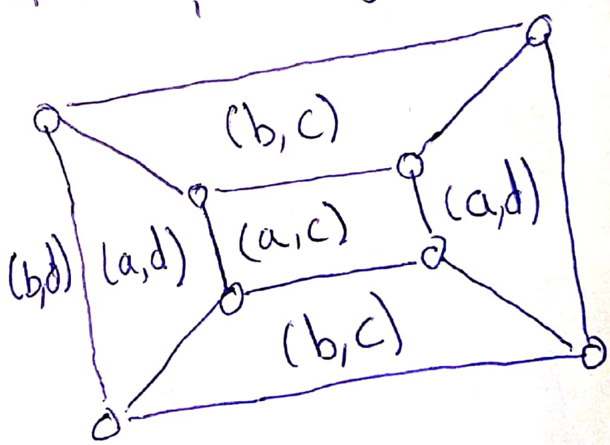
->



(ii) 3-coloração de arestas -> 4-coloração de faces.

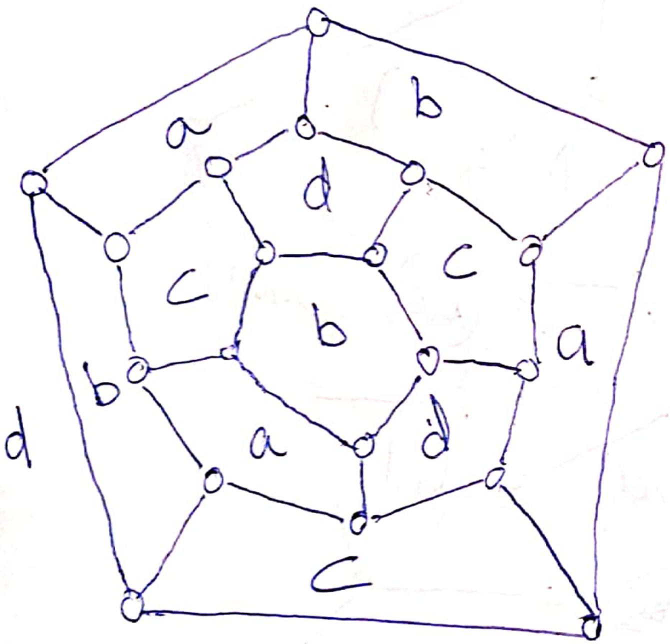


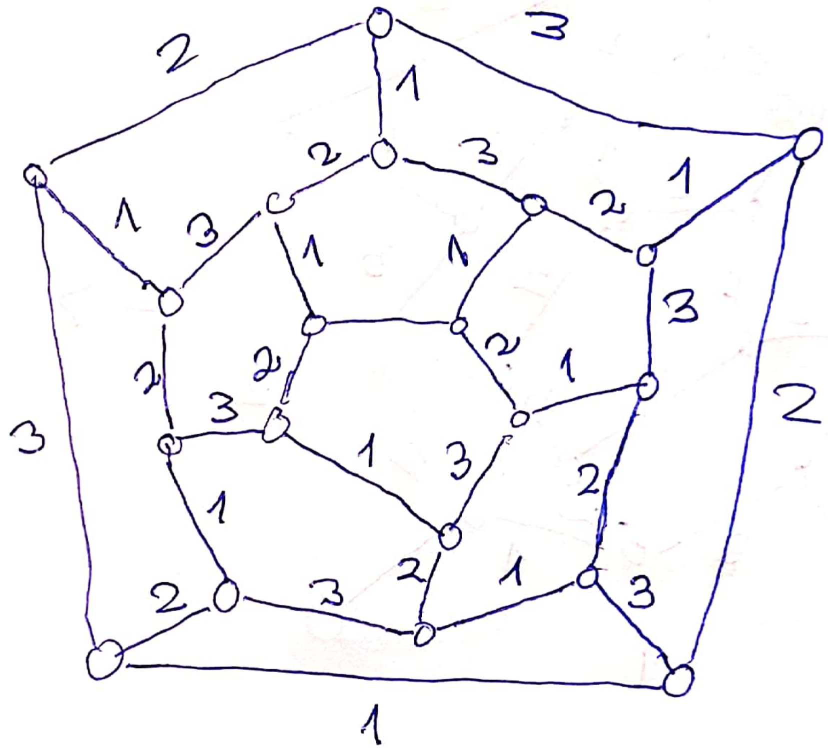
->



2 - Dodecaedro

(i) 4-coloração de faces -> 3-coloração de arestas





iii) 3-coloração de arestas ⟶ 4-coloração de faces.