Universidade Federal do Rio de Janeiro - PESC/COPPE
Professora: Celina M. Herrera de Figueiredo
Disciplina: CPS845 - Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos
Alunos: Mariana Martins Ferreira da Cruz, Rafael Almeida da Costa Schneider

Nota de Aula 14 - The total chromatic number of split-indifference graphs

1 Resumo:

Este texto tem por objetivo descrever a aula intitulada por The total chromatic number of split-indifference graphs, referente ao curso Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos (2020), oferecido pelo programa de Engenharia de Sistemas e Computação PESC/COPPE - UFRJ e ministrado pela professora Celina de Figueiredo.

1.1 Assunto Abordado:

A Conjectura de Coloração Total (TCC), estabelecida por *Vizing* e *Behzad*, afirma que todo grafo simples G tem $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$, e é um problema aberto desafiador na Teoria de Grafos. O TCC é verificado tanto para grafos split quanto para grafos de indiferença, e $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ quando $\Delta(G)$ é par. Para um grafo de indiferença split G com $\Delta(G)$ ímpar, o artigo [2] fornece as condições para $\chi_T(G)$ ser $\Delta(G) + 2$, e exibe uma coloração total $(\Delta(G) + 1)$ em caso contrário.

1.2 Problemas propostos:

Além de documentar o conteúdo abordado ao longo da aula, este documento se propõe a resolver as seguintes questões:

Chame o grafo completo com 8 vértices de K, e use a caracterização do Teorema 1, conhecido como a Condição de Hilton, para estabelecer que:

1. A remoção de duas arestas adjacentes de K produz um grafo P Tipo 2. (p.4)
2. A remoção de duas arestas não adjacentes de K produz um grafo Q Tipo 1. (p.5)
3. Dê colorações totais com o menor número de cores para P (p.5) e para Q. (p.6)

2 Introdução:

A coloração total de um grafo G é um mapa

$$\begin{array}{rccc} \pi: & E(G) \cup V(G) & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & x & \mapsto & \pi(x) \end{array}$$

tal que $\pi(x) \neq \pi(y)$ para quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes $x, y \in E(G) \cup V(G)$. Essencialmente, uma coloração total colore todos os elementos do grafo sem conflitos. O número cromático total de G, simbolizado por $\chi_T(G)$, é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices e arestas de um grafo de forma que nenhum elemento incidente ou adjacente (vértices adjacentes, arestas incidentes ou vértices incidentes a arestas) receba a mesma cor.

Um limite inferior para $\chi_T(G)$ pode ser naturalmente obtido, basta observar que em qualquer Grafo, a coloração de arestas demanda pelo menos $\Delta(G)$ cores e pelo menos uma nova cor é necessária para realizar a coloração de vértices, portanto, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$.

Para exemplificar, utilizaremos como base uma coloração de arestas para o K_5 utilizando o Lema 5 da Seção 3.8 de [4] exibido na Figura 1.

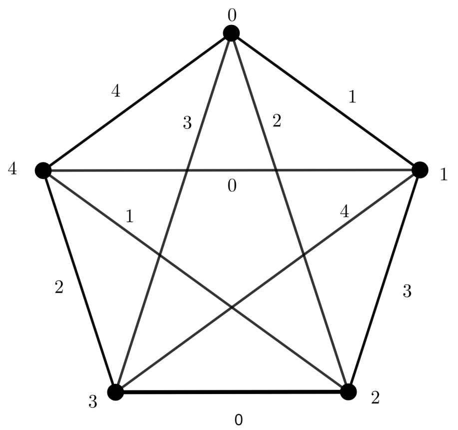
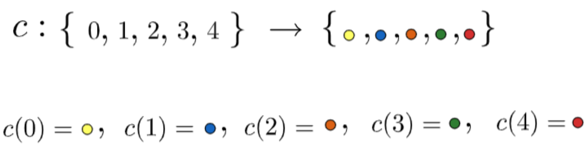


Figura 1: Ilustração feita no software Geogebra.

Para obter a coloração total deste grafo a partir desta rotulação deve-se enfatizar a estratégia para colorir os vértices. A saber, a cor atribuída a cada vértice rotulado por j é a cor $2j \pmod 5$. Para exibir a coloração considere a seguinte bijeção:



Assim, obtemos a 5-coloração total de K_5, exibida na Figura 2, mostrando que K_5 é Tipo 1.

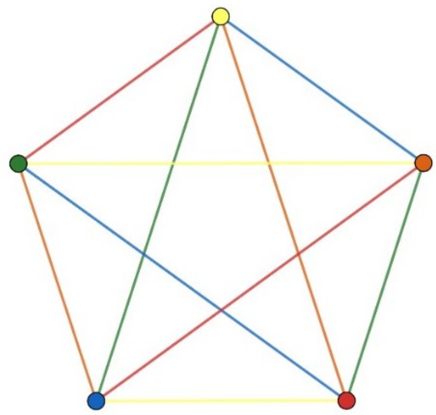


Figura 2: Ilustração feita no software Geogebra.

Um fato surpreendente é que, diferentemente do que ocorre em Coloração de Arestas, não existe um teorema que forneça uma classificação para coloração total de grafos, no entanto, Vizing conjecturou um resultado semelhante. A Conjectura da Coloração Total (TCC), afirma que todo grafo simples G tem uma coloração total com $\Delta(G) + 2$ cores. Provar a conjectura é um problema muito desafiador, já que sua validade foi verificada apenas em algumas classes restritas, como grafos com grau máximo $\Delta(G) \leq 5$ e grafos cúbicos. Por outro lado, não há comprovações que a classe dos grafos regulares satisfazem a conjectura.

Pela TCC, para estabelecer o número de cores necessárias para obter uma coloração total ótima há apenas duas opções:

- $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, e neste caso, G é dito ser um grafo Tipo 1;
- $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, e neste caso, G é dito ser um grafo Tipo 2.

O problema da coloração total é conhecido por ser polinomial apenas para classes de grafos restritas.

De maneira geral, estabelecer a complexidade do problema de coloração total segue em aberto para a classe de grafos cordais, no entanto, alguns resultados para as classes relacionadas a grafos de intervalo, grafos split e grafos duplamente cordais foram obtidos, expondo o interesse no problema de coloração total restrito a grafos de cordais. Determinar se o número cromático total de um grafo arbitrário G é $\Delta(G) + 1$ é um problema NP-completo. A prova original da NP-completude obtida por [9] pode ser vista como uma redução do problema de coloração das arestas. Esse fato sugere que, para a maior parte das classes de grafos, obter a coloração total seria mais difícil do que obter a coloração de arestas. O problema de coloração total permanece NP-completo quando restrito a grafos bipartidos k-regulares, para cada $k \geq 3$ fixo. É um passo natural investigar a complexidade da coloração total restrita às classes para as quais a complexidade da coloração das arestas já foi estabelecida. A motivação para investigar o número cromático total de grafos de indiferença split é dupla. Por um lado, é a interseção de duas classes de grafos para as quais o problema de coloração total ainda está em aberto. Por outro, é uma classe de grafos para a qual o problema de coloração de arestas já foi resolvido.

2.1 Definições Preliminares

Definição 1. *Um grafo é um grafo dividido* ***[split]*** *se seu conjunto de vértices puder ser particionado em uma clique e um conjunto independente.*

Definição 2. *Um intervalo de unidade ou* ***grafo de indiferença*** *é o grafo de interseção de um conjunto de intervalos unitários de uma linha reta.*

Uma ***ordem de indiferença*** *de um grafo G é uma ordenação total em $V(G)$ definida de forma que os vértices de cada clique maximal são consecutivos de acordo com essa ordenação.*

Um grafo G é dito um ***grafo de indiferença*** *se G admite uma ordem de indiferença.*

Utilizando uma caracterização de grafos de indiferença split G, estebelecida por *Ortiz*, o artigo [2] determina $\chi_T(G)$ quando $\Delta(G)$ é ímpar, apresentando condições suficientes para que $\chi_T(G) = \Delta(G)+2$, e construiremos uma $(\Delta(G) + 1)-$coloração total em caso contrário.

3 Principais Resultados

Em 1967, *Behzad et al.* [1] provou que os grafos completos com um número par de vértices são Tipo 2 e grafos completos com um número ímpar de vértices são Tipo 1.

Seja G um grafo com vértices universais. Se G possui um número ímpar de vértices, então é Tipo 1, uma vez que G é um subgrafo gerador de um grafo completo K_n, n ímpar. Caso contrário, o Teorema 1 estabelece as condições necessárias e suficientes para que um grafo G seja Tipo 2.

O Teorema 1, formulado por Hilton [7] fornece uma condição suficiente para determinar se grafos que tem número par de vértices e pelo menos um vértice universal são Tipo 2. Podemos observar que essa caracterização se assemelha à formulação de grafos sobrecarregados no contexto de coloração total, uma vez que a condição para que um grafo que atenda as condições do Teorema seja Tipo 2 é verificar se há poucas arestas “faltando“ em G, isto é, o número de arestas em seu complemento somado à cardinalidade o emparelhamento máximo de seu complemento é pequeno.

Teorema 1 (Hilton [7])**.** *Seja G um grafo simples com um número par de vértices. Se G tem um vértice universal, então G é Tipo 2 se e somente se*

$$|E(\overline{G})| + \alpha^{'}(\overline{G}) < \frac{|V(G)|}{2},$$

onde $\alpha^{'}(\overline{G})$ é a cardinalidade de um conjunto independente máximo de arestas de $\overline{G}$.

Observe que os grafos com vértices universais e um número par de vértices satisfazem a TCC porque são subgrafos geradores de um grafo Tipo 2. O Teorema 1 de fato caracteriza os casos em que os grafos com números pares de vértices e vértices universais são Tipo 1 ou 2. Na verdade, o Teorema 1 pode ser aplicado a uma vizinhança fechada de um vértice de grau máximo para determinar casos para os quais um grafo G não pode ser Tipo 1. Portanto, dizemos que um grafo G satisfaz a condição de Hilton se o subgrafo $G[H]$, onde $H = N[v]$ e $d(v) = \Delta(G)$, for Tipo 2.

Além disso, podemos enxergar o Teorema 1 como uma generalização para grafos completos, já que esta classe de Grafos satisfaz a condição de Hilton trivialmente, visto que, se G é um grafo completo qualquer, $|E(\overline{G})| = \alpha^{'} = 0$.

Iremos apresentar uma aplicação deste Teorema resolvendo os exercícios propostos. Primeiramente, seja K o grafo completo com 8 vértices, exibido na Figura 3.

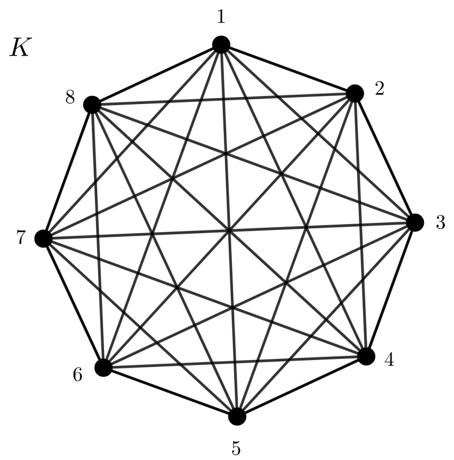


Figura 3: Ilustração feita no software Geogebra.

Ao removermos duas arestas adjacentes, obtemos um grafo P. A Figura 4 é obtida a partir da remoção de $(1, 8)$ e $(7, 8)$. Vale ressaltar, que quaisquer dois grafos formados após a retirada de duas arestas adjacentes de K podem ser identificados a partir de isomorfismos. Dessa forma, a análise feita para o grafo P da Figura 4 infere uma construção análoga para qualquer outro par de arestas adjacentes que seja removido.

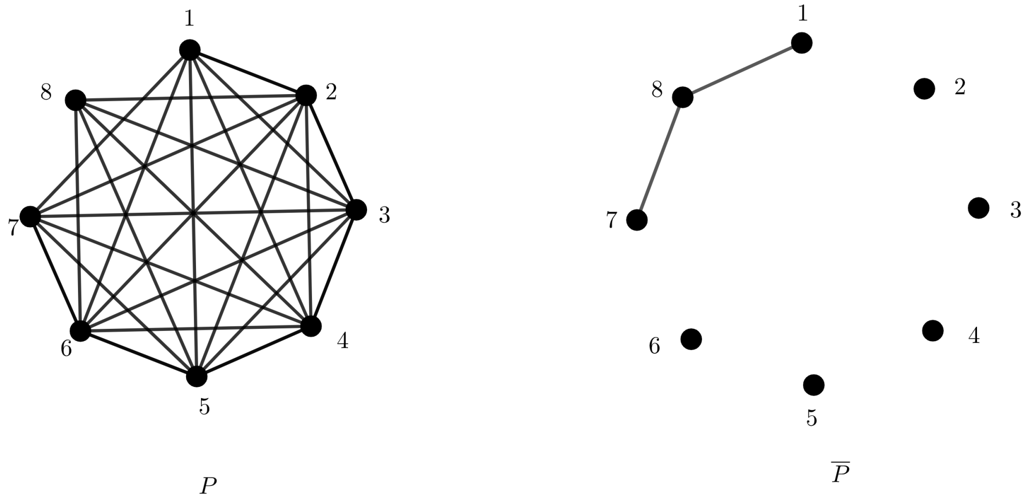


Figura 4: Ilustração feita no software Geogebra.

Claramente P atende às condições do Teorema de Hilton, visto que $|V(P)| = 8$ e todos os vértices pertencentes a $V(P) \setminus \{1, 7, 8\}$ são universais. Ao analisarmos o complemento $\overline{P}$, também exibido na Figura 4, notamos que $|E(\overline{P})| = 2$ e $\overline{P}$ não possui conjunto independente de arestas, visto que $(1, 8)$ e $(7, 8)$ constituem um caminho. Assim, $\alpha'(\overline{P}) = 0$ e o Teorema de Hilton é satisfeito, uma vez que

$$2 + 0 < \frac{8}{2} \Longrightarrow 2 < 4.$$

Portanto, P é Tipo 2. Ilustramos na Figura 5 uma 9-coloração de P, visto que $\Delta(P) = 7$.

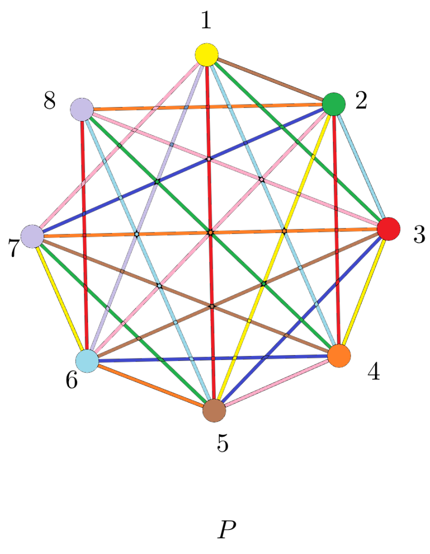


Figura 5: Ilustração feita no software Geogebra.

Por outro lado, se retirarmos duas arestas não adjacentes obtemos um grafo Q. A Figura 6 é obtida a partir da remoção de $(2, 3)$ e $(5, 6)$. Vale ressaltar, que quaisquer dois grafos formados após a retirada de duas arestas não adjacentes de K podem ser identificados a partir de isomorfismos. Dessa forma, a análise feita para o grafo Q da Figura 6 infere uma construção análoga para qualquer outro par de arestas não adjacentes que seja removido.

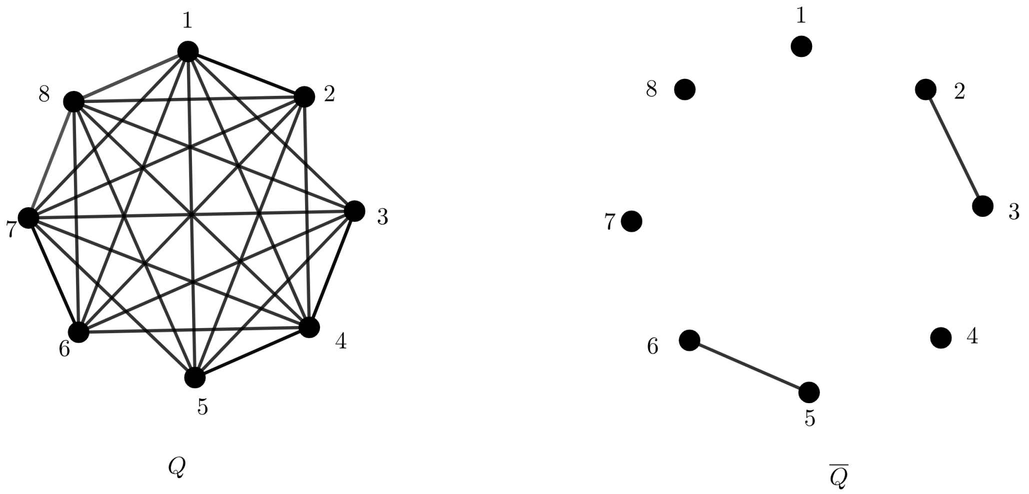


Figura 6: Ilustração feita no software Geogebra.

Claramente Q atende às condições do Teorema de Hilton, visto que $|V(Q)| = 8$ e todos os vértices pertencentes a $V(Q) \setminus \{2, 3, 5, 6\}$ são universais. Ao analisarmos o complemento $\overline{Q}$, também exibido na Figura 6, notamos que $|E(\overline{Q})| = 2$ e $\overline{Q}$ possui um conjunto independente máximo de arestas de cardinalidade 2. Assim, $\alpha'(\overline{Q}) = 2$ e o Teorema de Hilton não é satisfeito, uma vez que

$$2 + 2 \geq \frac{8}{2} \Longrightarrow |E(\overline{Q})| + \alpha^{'}(\overline{Q}) \geq \frac{|V(Q)|}{2},$$

que representa a contrapositiva do Teorema. Portanto, Q é Tipo 1. Ilustramos na Figura 7 uma 8-coloração de Q, visto que $\Delta(Q) = 7$.

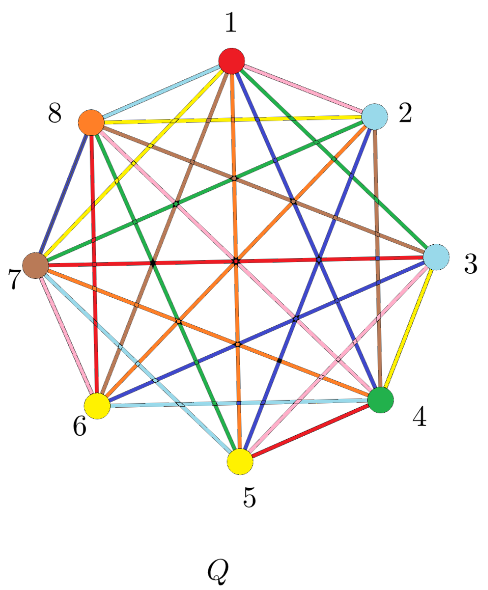


Figura 7: Ilustração feita no software Geogebra.

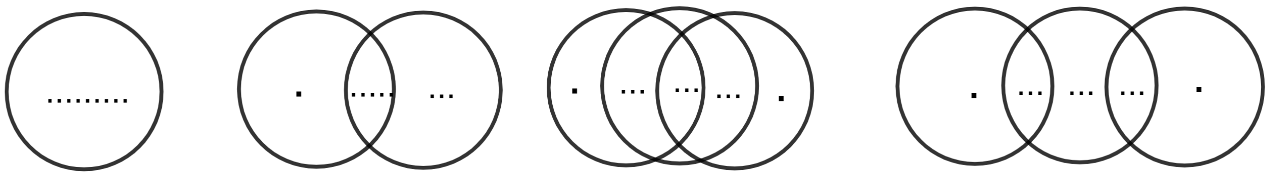
O Teorema 2 caracteriza grafos que são simultaneamente divididos e indiferentes em termos de cliques máximos.

Teorema 2 (Ortiz)**.** *Seja G um grafo conexo, e sejam A, B e C conjuntos de vértices. O grafo G é indiferença por divisão se e somente se*

1. *G é um grafo completo;*
2. *é a união de dois grafos completos $G[A]$ e $G[B]$, de modo que $G[A] \setminus G[B] \cong K_1$;*
3. *é a união de três grafos completos $G[A]$, $G[B]$ e $G[C]$, de modo que $G[A] \setminus G[B] \cong K_1$, $G[C] \setminus G[B] \cong K_1$ e $A \cup C = V(G)$ ou $A \cap C = \emptyset$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [8]. □

A Figura 8 ilustra todos os casos alcançados pelo Teorema 2. Um grafo de indiferença split sem vértice universal deve satisfazer o Caso (iii) quando $A \cap C = \emptyset$. Portanto, pelo Teorema 1, para determinar o número cromático total de toda a classe de grafos de indiferença split, resta considerar o caso ilustrado na Figura 8 (d). A TCC foi estabelecida para grafos split [3] e para grafos de indiferença [6]. De fato, o número cromático total é conhecido para ambas as classes quando o grau máximo , Δ, é par, mas permanece desconhecido para Δ ímpar. Logo, para grafos de indiferença split resta apenas estabelecer $\chi_T(G)$ quando G não tem vértices universais e tem grau máximo ímpar. Os números cromáticos totais para grafos divididos e para grafos de indiferença com grau máximo ímpar são desconhecidos.



$(a)\,Caso\,(i)$ $(b)\,Caso\,(ii)$ $(c)\,Caso\,(iii)$ $(d)\,Caso\,(iii)$

Figura 8: Ilustração feita no software Geogebra.

Seguindo a notação do Teorema 2, o grafo G tem três cliques máximos, A, B e C, tais que $A \cap C = \emptyset$.

Considere os seguintes conjuntos:

- $A' = A \setminus B$,
- $B' = B \setminus (A \cup C)$,
- $C' = C \setminus B$,
- $AB = A \cap B$,
- $BC = B \cap C$.

Observe que $|A'| = |C'| = 1$. Portanto, os vértices de grau máximo de G estão no conjunto $AB \cup BC$ e, sem perda de generalidade, assumimos que $|AB| \geq |BC|$. Denominamos (A', AB, B', BC, C') uma pseudo-partição padrão de $V(G)$.

Teorema 3. *Seja G um grafo de indiferença split sem vértices universais e com grau máximo ímpar. Seja $(A^{'}, AB, B^{'}, BC, C^{'})$ uma pseudo-partição padrão. Se $|AB| > |B^{'}| + |BC| + 1$, então G é Tipo 2.*

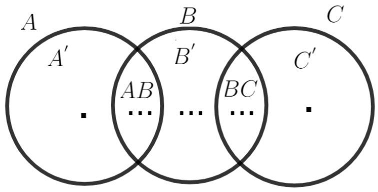


Figura 9: Ilustração feita no software Geogebra.

Demonstração. A Figura 9 exibe a pseudo-partição padrão para a classe de grafos avaliada pelo Teorema, ilustrada pela Figura 8 (d). Lembre-se de que $|A'| = |C'| = 1$. Considere $H = G[A \cup B]$. A estratégia empregada nessa demonstração consiste mostrar que G é Tipo 2, uma vez que H Tipo 2. Podemos observar que $|V(H)|$ é par, pois H tem vértices universais, $\Delta(H) = \Delta(G)$ e $\Delta(G)$ é ímpar.

Para verificar se H é Tipo 2 encontraremos os paramêtros $|E(\overline{H})|$ e $\alpha^{'}(\overline{H})$ para aplicar o Teorema 1.

Observe que $|V(H)| = 1 + |AB| + |B^{'}| + |BC|$. Como todas as arestas de $\overline{H}$ são formadas entre o único vértice de $A^{'}$ e os vértices de $B' \cup BC$, então

$$|E(\overline{H})| = |B^{'}| + |BC| \text{ e } \alpha^{'}(\overline{H}) = 1.$$

Portanto, se $|AB| > |B^{'}| + |BC| + 1$, então H satisfaz o Teorema de Hilton, e portanto é Tipo 2. Por fim, ao recorrer ao fato de que o grafo G satisfaz o TCC, podemos concluir que

$$\Delta(G) + 2 = \Delta(H) + 2 = \chi_T(H) \leq \chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

□

Teorema 4. *Seja G um grafo de indiferença split sem vértices universais e com grau máximo ímpar. Seja $(A^{'}, AB, B^{'}, BC, C^{'})$ uma pseudo-partição padrão. Se $|AB \leq |B^{'}| + |BC| + 1$, então G é Tipo 1.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [2]. □

Corolário 1. *Um grafo de indiferença split é Tipo 2 se e somente se satisfizer a condição de Hilton.* □

A partir dos resultados obtidos em [2], pudemos estabelecer o número cromático total para grafos de indiferença split cujo grau máximo é ímpar. Desta forma, com os resultados já apresentados em outros estudos, podemos construir a Tabela 1, que sintetiza os resultados conhecidos para algumas classes de grafos, de acordo com a paridade do grau máximo.

Classe de Grafos	Δ par	Δ ímpar
Completo	Tipo 1	Tipo 2 (Condição de Hilton)
Vértice Universal	Tipo 1	Condição de Hilton
Split	Tipo 1	Em aberto
Indiferença	Tipo 1	Em aberto
Split-Indiferença	Tipo 1	Condição de Hilton
3-clique	Tipo 1	Em aberto

Tabela 1: Coloração total e sua relação com a condição de Hilton

Referências

[1] Behzad, M., Chartrand, G., and Cooper, J. The colour numbers of complete graphs. *Journal of the London Mathematical Society 1*, 1 (1967), 226–228.

[2] Campos, C. N., de Figueiredo, C., Machado, R., and de Mello, C. P. The total chromatic number of split-indifference graphs. *Discrete Mathematics 312*, 17 (2012), 2690–2693.

[3] Chen, B.-L., Fu, H.-L., Ko, M., et al. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17 (1995).

[4] C.M.H. de Figueiredo, J. Meidanis, C. M. *Coloração em Grafos*. XVI Jornada de Atualização em Informática, 1997.

[5] De Figueiredo, C. M., Meidanis, J., and de Mello, C. P. On edge-colouring indifference graphs. *Theoretical Computer Science 181*, 1 (1997), 91–106.

[6] De Figueiredo, C. M., Meidanis, J., and de Mello, C. P. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information processing letters 70*, 3 (1999), 147–152.

[7] Hilton, A. J. A total-chromatic number analogue of plantholt's theorem. *Discrete mathematics 79*, 2 (1990), 169–175.

[8] Ortiz, Z. C., Maculan, N., and Szwarcfiter, J. L. Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. *Discrete applied mathematics 82*, 1-3 (1998), 209–217.

[9] Sánchez-Arroyo, A. Determining the total colouring number is np-hard. *Discrete Mathematics 78*, 3 (1989), 315–319.