Universidade Federal do Rio de Janeiro
CPS845 - Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos
Professora: Celina M. Herrera de Figueiredo

Aulas 15.2 e 16.1 - Coloração de Arestas: técnica de decomposição aplicada a grafos split e grafos indiferença

Diego Amaro Ferraz da Costa

Diego Athayde Monteiro

Resumo

Neste trabalho, descreveremos as aulas ministradas pela professora Celina de Figueiredo, para a pós-graduação de Engenharia da Computação, do PESC/COPPE, baseada no material elaborado para um curso apresentado no XVI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação em Brasília em agosto de 1997. O curso ministrado é baseado na introdução à coloração em grafos para estudos da área de ciência da computação.

1 Aulas 15.2 e 16.1

1.1 Introdução

Neste resumo, detalhamos a sexta técnica de coloração de arestas apresentada em aula: a técnica de decomposição. Exibimos também a aplicação desta técnica a duas classes de grafos distintas: a classe dos grafos split e a classe dos grafos indiferença. Por fim, mostramos exemplos de uma coloração de arestas utilizando a técnica de decomposição para um grafo de cada uma destas duas classes (exercícios propostos).

1.2 Decomposição

A técnica de decomposição consiste em particionar um grafo G em subgrafos de um determinado tipo. A variante da técnica de decomposição aqui apresentada consiste em uma partição das arestas de um grafo G em subgrafos G_i de modo que o grau máximo de G seja igual ao somatório dos graus máximos de cada um destes subgrafos. Formalmente, temos: $\Delta(G) = \sum_i \Delta(G_i)$. A motivação para o uso desta técnica é que, se conseguirmos uma $\Delta(G)$-coloração para as arestas de cada um destes subgrafos, então conseguimos uma $\Delta(G)$-coloração para as arestas de G, assim mostrando que G é classe 1.

A seguir, exibimos o funcionamento desta técnica para duas classes de grafos: os grafos split e os grafos indiferença.

1.3 Decomposição nos grafos split

Um grafo é **split** se o seu conjunto de vértices admitir uma partição em uma clique A e um conjunto independente B, esta chamada de partição split. O grafo P_4 é um exemplo de um grafo split, enquanto C_4 não é split. A definição de grafos split gera uma partição em suas arestas em um grafo completo $K_{|A|}$, formado pelas arestas com ambos os extremos em A, e um grafo bipartido, H, formado por arestas com extremos em A e B.

Teorema 1. *Seja G um grafo split e A, B uma partição de $V(G)$ com $|A| = a$. Se $\Delta(G) \geq 2a - 1$, então G é Classe 1.*

Demonstração. Sejam G um grafo split, A, B uma partição de $V(G)$ e $|A| = a$. Suponhamos A maximal e consideremos a partição das arestas de G, K_a, H, gerada por A, B. Analisemos dois casos. Se a é par, então o grafo completo K_a pode ser colorido com $a - 1$ cores. Além disso, o grafo bipartido, H, tem grau máximo $\Delta(H) = \Delta(G) - a + 1$, desde que pelo menos um vértice de A tem este grau em H e para cada $x \in B$ tem-se

$$deg_H(x) = deg_G(x) \geq a - 1 < \Delta(G) - a + 1$$

Sendo bipartido, H pertence a Classe 1 e pode ser colorido com $\Delta(G) - a + 1$ cores. Logo, o número total de cores necessárias é:

$$(a-1)+(\Delta(G)-a+1)=\Delta(G)$$

Se a é ímpar, então o mesmo argumento não poderá ser utilizado, pois K_a precisa de a cores. Mas podemos emprestar uma cor de H da seguinte forma. Pinte H com $\Delta(G)-a+1$ cores. Escolha uma cor e considere o emparelhamento M formado pelas arestas desta cor. As arestas em M incidem em todos os vértices de grau máximo em H. Dessa forma, o grafo $H-M$ pode ser colorido com $\Delta(G)-a$ cores e K_a+M com a cores, desde que em uma coloração com a cores de K_a uma cor falta em cada vértice. Esta cor poderá ser usada para colorir as arestas extras (M). Portanto, usamos $\Delta(G)-a$ cores para $H-M$ e a cores para K_a+M, totalizando $\Delta(G)$ cores para G. □

Considere o grafo split, onde os vértices são particionados numa clique A de tamanho 5 e em um conjunto independente B de tamanho 5, de modo que que 2 vértices de A têm grau 9 e os demais vértices de A têm grau 4. Usando a técnica de decomposição descrita no Teorema 1, vamos apresentar uma coloração de arestas que prova que o grafo split é Classe 1.

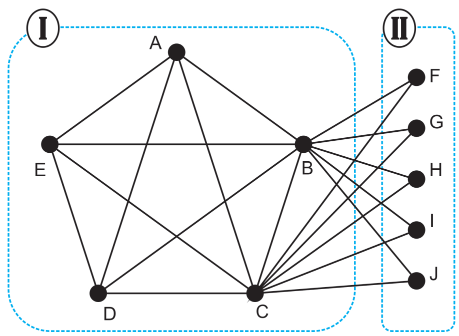


Figura 1: Um grafo split com 1 clique de tamanho 5 (A, B, C, D, E) - representados pelo grafo I -, 3 vértices com grau igual a 4 (A, D, E), 2 vértices de grau igual a 9 (B, C), um conjunto independente de tamanho 5 (F, G, H, I, J) - representado pelo grafo II.

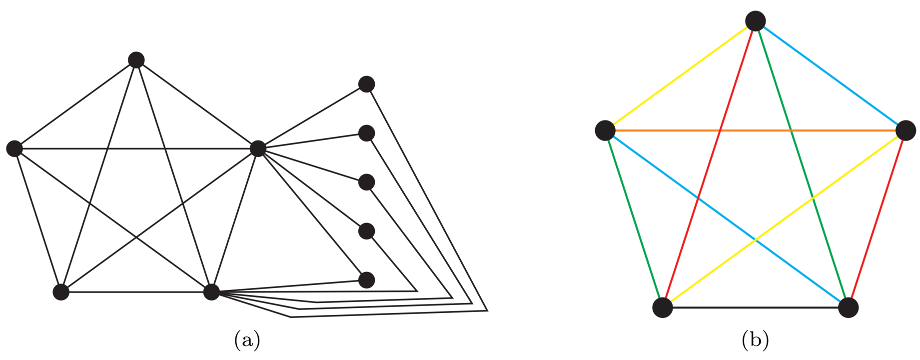
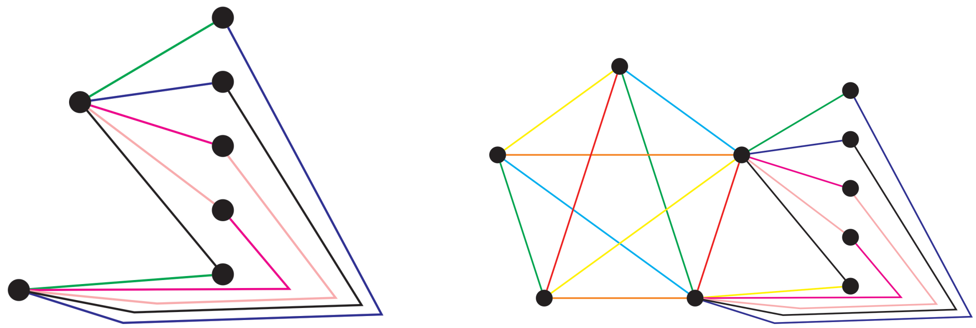


Figura 2: (a) Grafo G split com $|A|=|B|=5$, onde dois vértices de A têm grau 9 e os restantes têm grau 4. (b) $(\Delta(G)+1)$-coloração das arestas de A.



(a) (b)

Figura 3: (a) $\Delta(G)$-coloração das arestas de H. (b) Coloração das arestas de G com $\Delta(G)$ cores.

Para a coloração deste grafo split (Figura 2a), primeiramente tomamos o subgrafo H induzido pelas arestas que possuem um extremo em A e o outro em B, conforme Teorema 1 este grafo é bipartido e, portanto, pode ter suas arestas coloridas com $\Delta(H)$ cores. Na etapa seguinte, realizamos a coloração da clique A, que por ser um grafo sobrecarregado, exige $\Delta(G) + 1$ cores, de acordo com a figura 2b. Consideremos agora um emparelhamento M de H induzido por qualquer uma de suas cores, como por exemplo a cor verde, identificada na Figura 3a. Cada vértice de A carece de uma das $\Delta(G) + 1$ cores utilizadas para a coloração das arestas de A. Temos então, que esta cor pode ser atribuída a cada uma das arestas de M e assim eliminamos uma das cores utilizadas na coloração de H previamente e conseguimos então colorir o grafo com $\chi'(H) + \chi'(A) - 1$ cores, ou seja, $\Delta(G)$ cores, logo G é classe 1, de acordo com o demonstrado na Figura 3b.

1.4 Decomposição nos grafos indiferença

Um grafo G é chamado de grafo **indiferença** se, e somente se, G admite uma ordem indiferença. Tal ordem consiste em dispor o conjunto de vértices de G de tal forma que os vértices de cada clique maximal são consecutivos na ordem. Veja a Figura 4. A classe dos grafos indiferença constitui uma subclasse dos grafos de intervalo. Os grafos de intervalo são os grafos de interseção de intervalos em uma reta. No caso dos grafos indiferença, todos estes intervalos são unitários, ou seja, a classe dos grafos de intervalo é uma superclasse dos grafos indiferença.

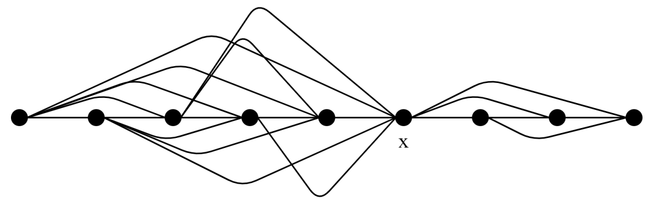


Figura 4: Um grafo indiferença com duas cliques maximais. Uma com 6 vértices e outra com 4. Note que o vértice x aparece em ambas as cliques e toda a sua vizinhança (assim como a de todos os vértices) aparece em sequência na ordem estabelecida, assim respeitando a definição de ordem indiferença.

O problema da coloração de arestas é um problema bem desafiador, mesmo existindo apenas duas opções para $\chi'(G)$. Decidir se um grafo G é classe 1 ou classe 2 é um problema NP-difícil. E, surpreendentemente, até para uma classe restrita como a classe dos grafos indiferença, não sabemos condições necessárias e suficientes para dizer se um grafo G indiferença é classe 1 ou 2. Então, nesta subseção restringimos mais ainda esta classe, para que assim consigamos uma decomposição que nos fornecerá uma $\Delta(G)$-coloração das arestas de G. Detalharemos esta subclasse mais a frente.

Primeiramente, vamos definir como procede a técnica de decomposição que será aplicada nos grafos indiferença. Dado um grafo G com sua ordem indiferença especificada, rotulemos cada vértice da ordem $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ com rótulos de 1 a n. Vamos decompor o grafo em dois subgrafos com base na paridade dos vértices incidentes a cada aresta de G. Estes dois subgrafos serão induzidos, cada um, por um conjunto de arestas: o conjunto M consiste nas arestas que possuem extremos com a mesma paridade, enquanto o conjunto D consiste nas arestas que possuem extremos com paridade diferente. Veja a figura abaixo, onde aplicamos este procedimento para o grafo da Figura 4:

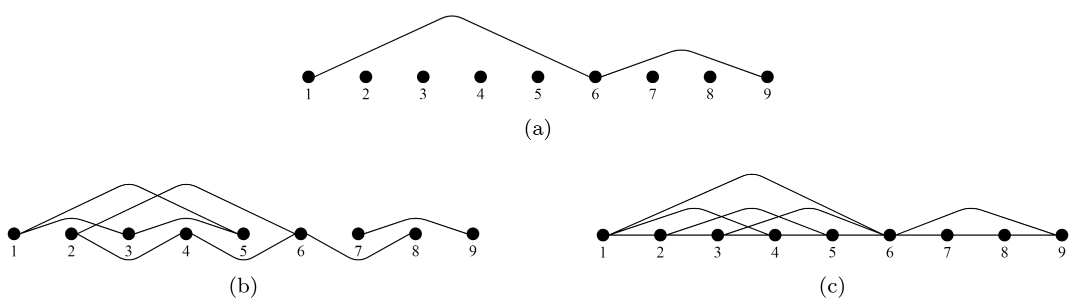


Figura 5: (a) Forma alternativa de representação de ordem indiferença. A aresta $\{1, 6\}$ representa a mútua adjacência entre todos os vértices com rótulos de 1 a 6, enquanto que a aresta $\{6, 9\}$ representa a mútua adjacência entre todos os vértices com rótulos de 6 a 9. (b) $G[M]$: subgrafo induzido pelas arestas entre vértices com a mesma paridade. (c) $G[D]$: subgrafo induzido pelas arestas entre vértices com paridade diferente.

Temos então o seguinte resultado quando é feita essa decomposição das arestas de um grafo indiferença:

Lema 1. *Seja G um grafo indiferença. então $G[M]$ é indiferença e $G[D]$ é bipartido.*

Demonstração. É imediato verificar que $G[D]$ é bipartido, como não existem arestas com ambos os extremos de igual paridade, então não existem ciclos ímpares, o que implica que $G[D]$ é bipartido. Para verificar a condição em $G[M]$ também ser indiferença, tomemos a ordem indiferença de G e a rotulação que fora atribuída como descrito anteriormente. Modifiquemos a ordem da seguinte forma: vértices com rótulo par serão consecutivos na ordem e logo após os vértices com rótulos pares, colocamos os vértices de rótulo ímpar, obtendo assim uma ordem indiferença da seguinte forma: $v_2, v_4, ..., v_{2i}, v_1, v_3, ..., v_{2i-1}$, $i \geq 1$. Agora seja $v_iv_j \in M$, onde v_j é o vizinho mais à direita de v_i na ordem dos vértices definida para $G[M]$. Então, $i \neq j$, $v_iv_j \in E(G)$ e i e j têm a mesma paridade. Portanto, para todo v_k tal que $v_i \leq v_k \leq v_j$, com k de mesma paridade de i e j, tem-se v_iv_j são arestas de G e também de $G[M]$, por definição e conclui-se que a ordem definida para os vértices de $G[M]$ é uma ordem diferença. $G[M]$ é desconexo e cada uma de suas componentes conexas é um grafo indiferença. □

Como foi mencionado anteriormente, o objetivo da decomposição é encontrar subgrafos G_i cujos $\Delta(G_i)$ somados igualam $\Delta(G)$. No grafo da Figura 5, conseguimos atender esta exigência. O vértice com rótulo 6 em G possui grau $8 = \Delta(G)$. No subgrafo $G[M]$, temos $\Delta(G[M]) = 3$ e no subgrafo $G[D]$, temos $\Delta(G[D]) = 5$. Mas nem sempre conseguiremos atingir esta igualdade. Veja a Figura 6.

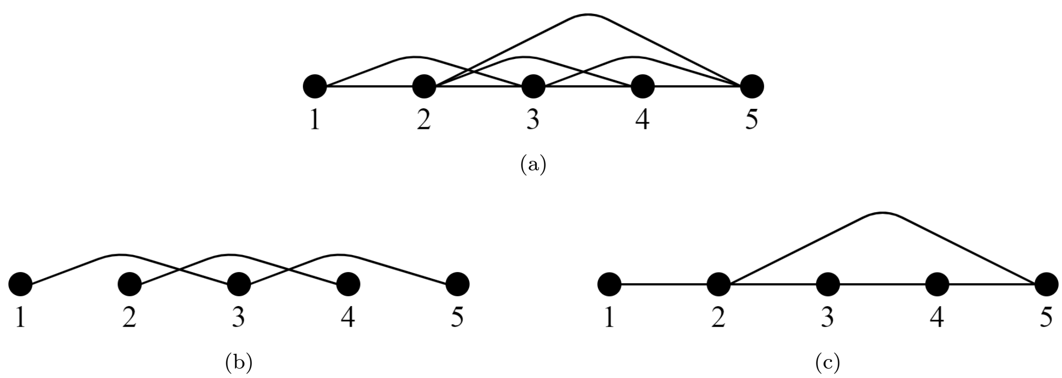


Figura 6: (a) Grafo G cujo $\Delta(G) = 4$. (b) Subgrafo induzido $G[M]$, cujo $\Delta(G[M]) = 2$. (c) Subgrafo induzido $G[D]$, cujo $\Delta(G[D]) = 3$

Entretanto, conseguimos atingir esta igualdade para algumas subclasses dos grafos indiferença. Vamos exibir uma destas subclasses e como obter uma $\Delta(G)$-coloração das arestas de G utilizando este procedimento de decomposição descrito para grafos indiferença em geral. A subclasse aqui abordada será a dos grafos indiferença **linha vermelha**. Um grafo indiferença é linha vermelha quando o vizinho mais à direita de cada v_i na ordem indiferença é v_{i+x}, onde x é constante, $x \geq 0$ e $1 \leq i \leq n - x$. Este x é chamado comprimento da linha vermelha e uma aresta de comprimento x, tal que $x \geq 0$, é máxima. Em uma linha vermelha todas as cliques maximais possuem tamanho $x + 1$. Para que um grafo linha vermelha G admita arestas de comprimento x, temos que $|V(G)| \geq 2x+1$. A figura abaixo ilustra um exemplo de grafo indiferença linha vermelha:

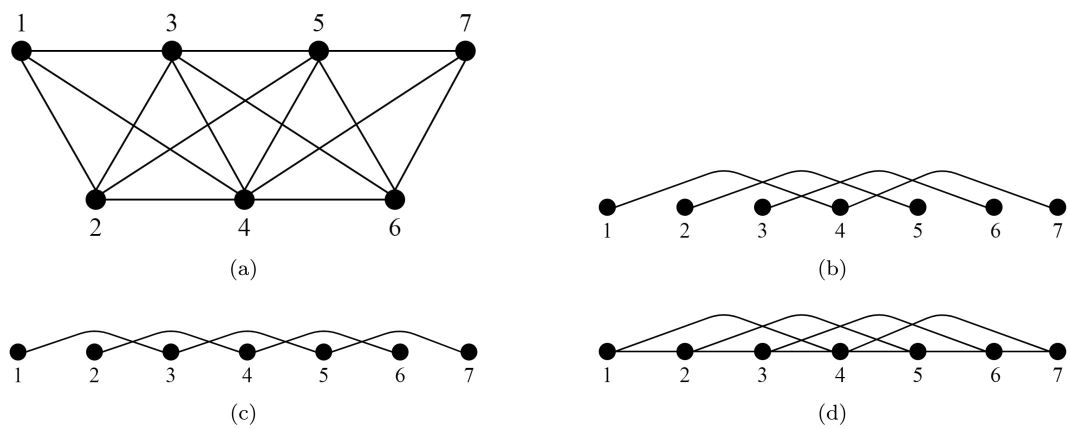


Figura 7: (a) Grafo G linha vermelha, que é isomorfo à potência de caminho P_7^3. $\Delta(G) = 6$. G possui 4 cliques maximais, todas de tamanho 4. (b) Maneira alternativa de representação de G. (c) Subgrafo induzido $G[M]$, cujo $\Delta(G[M]) = 2$. (d) Subgrafo induzido $G[D]$, cujo $\Delta(G[D]) = 4$.

Corolário 1. *Seja G uma linha vermelha com aresta máxima de comprimento $x = 2i$ ou $x = 2i+1$, $i \geq 1$. Então $G[M]$ é uma linha vermelha com aresta máxima de comprimento i.*

Demonstração. Seja G uma linha vermelha, sabemos que $G[M]$ é indiferença pelo Lema 1, pois G também é indiferença. Consideremos então as ordens indiferença para G e $G[M]$ definidas no Lema 1.
Se $x \leq 1$, então o conjunto M é vazio e $G[M]$ é linha vermelha.
Caso contrário, temos dois casos: $x = 2i$ ou $x = 2i+1$, $i \geq 1$.
Para o primeiro, temos que $v_j v_{j+x} \in E(G)$, $1 \leq j \leq n-x$. Logo, as arestas máximas em G possuem ambos os extremos com a mesma paridade. Portanto, $v_j v_{j+x}$ é aresta máxima de $G[M]$, $1 \leq j \leq n-x$. Como existem $i+1$ vértices v_k com rótulo par (ímpar) tal que $j \leq k \leq j+x$, o comprimento da aresta $v_j v_{j+x}$ é i em $G[M]$.
Para o segundo caso, temos que as arestas máximas em G possuem extremos de paridade distintas. Logo, para cada $v_j \in G$, temos que v_{j+x-1} é o vértice de mesma paridade de v_j mais à direita na ordem indiferença de G, Logo $v_j v_{j+x-1} \in E(G[M])$, $1 \leq j \leq n-x$ e seu comprimento é i. $\square$

Podemos observar, pelo corolário acima, que em uma linha vermelha G de comprimento x, $\Delta(G) = 2x$. Segue-se também do Corolário 1 que o comprimento de $G[M]$ é $\lfloor x/2 \rfloor$ (comprimento este verificado após ordenarmos $G[M]$ através da ordem indiferença definida no Lema 1). Se x é par, temos que $\Delta(G[M]) = \Delta(G[D]) = \Delta(G)/2$. Se x é ímpar, $\Delta(G[M]) = (\Delta(G)/2) - 1$ e $\Delta(G[D]) = (\Delta(G)/2) + 1$. Portanto, em ambos os casos, $\Delta(G) = \Delta(G[M]) + \Delta(G[D])$.
Então, como já sabemos colorir as arestas de grafos bipartidos com $\Delta(G)$ cores, apenas nos resta colorir também as arestas de $G[M]$ com $\Delta(G)$ cores para mostrar que uma linha vermelha é classe 1. A seguir, este resultado é exibido formalmente.

Teorema 2. *Se G é uma linha vermelha, então G é Classe* 1.

Demonstração. Por indução no comprimento x de G.
Se $x \leq 1$, então $G \cong G[D]$. Logo, G é Classe 1.
Seja G então uma linha vermelha com comprimento $x \geq 2$.
Construamos $G[M]$ e $G[D]$. Pelo Lema 1, $G[M]$ é uma linha vermelha de comprimento $\lfloor x/2 \rfloor$.
Logo, por hipótese de indução, $G[M]$ é colorida com $\Delta(G[M])$ cores.
Sendo que, novamente pelo Lema 1, $G[D]$ é bipartido e que $\Delta(G) = \Delta(G[M]) + \Delta(G[D])$, tem-se que G possui uma $\Delta(G)$-coloração.

□

Vamos aplicar a demonstração deste teorema para o grafo linha vermelha abaixo:

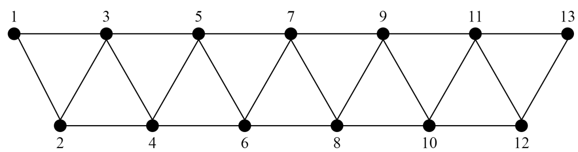


Figura 8: Linha vermelha com 13 vértices e comprimento x igual a 2.

Inicialmente, realizamos a partição das arestas através dos subgrafos $G[M]$ e $G[D]$. Sabemos que $G[D]$ é bipartido e portanto fácil de atribuir uma $\Delta(G)$-coloração das arestas. Temos ainda que neste caso, este grafo é um caminho, então só utilizamos duas cores. Pelo Teorema 2, se G é linha vermelha, então é classe 1 e neste caso é uma união de dois caminhos, logo conseguimos conseguir colori-lo com 2 cores também. Portanto para o grafo G, utilizamos $4 = \Delta(G)$ cores, comprovando assim que G é classe 1. Todo este procedimento é ilustrado na figura abaixo:

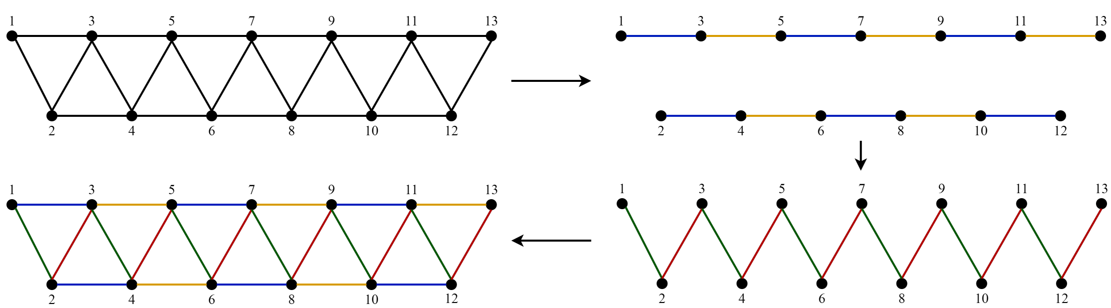


Figura 9: Procedimento para se obter uma coloração das arestas com $\Delta(G)$ cores de uma linha vermelha.

Todo o texto aqui apresentado foi baseado no material [1] de onde, foram retirados e/ou adaptados os conceitos aqui exibidos.

Referências

[1] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Coloração em grafos. *XVI Jornada de Atualização em Informática*, 1997.