Rodrigo Fernandes Souto

Aula 15 - Coloração de arestas por Pullback

Professora: Celina

Pullback

O método de coloração de arestas por Pullback é baseado no seguinte método coloração para grafos diferença.

- Grafo Indiferença: um grafo G é indiferença se é possível ordenar totalmente seus vértices de tal forma que vértices contidos em uma mesma clique maximal sejam consecutivos nessa ordem.

- Ordem indiferença: é a ordenação de vértices do grafo G que o torna indiferença.

FATO: Seja G grafo indiferença com $\Delta(G)$ ímpar, então G é classe 1.

Bom, considere G um grafo indiferença com ordem indiferença

$$v_0\ v_1\ v_2 \dots v_{n-1}$$

Considere $K_{\Delta(G)+1}$ grafo completo, já sabemos colorir as arestas de $K_{\Delta(G)+1}$ com $\Delta(G)$ cores pois K_n é de classe 1 quando n é par.

Então rotulemos $v \in V(K_{\Delta(G)+1})$ com $\{0, \dots, \Delta(G)\}$ e usamos a coloração c.

Considere agora a seguinte função

$$\lambda : V(G) \to \{0, 1, \dots, \Delta(G)\}$$
$$\lambda(v_i) = i \bmod (\Delta(G)+1)$$

Esta função origina sequências consecutivas

$$0 \ 1 \ 2 \dots \Delta(G) \ 0 \ 1 \ 2 \dots \Delta(G) \dots$$

Conseguimos uma coloração para G a partir da coloração de $K_{\Delta(G)+1}$:

A cor de $\lambda(x)\lambda(y)$ em $K_{\Delta(G)+1}$ vai ser a cor de xy em G. Essa coloração é própria:

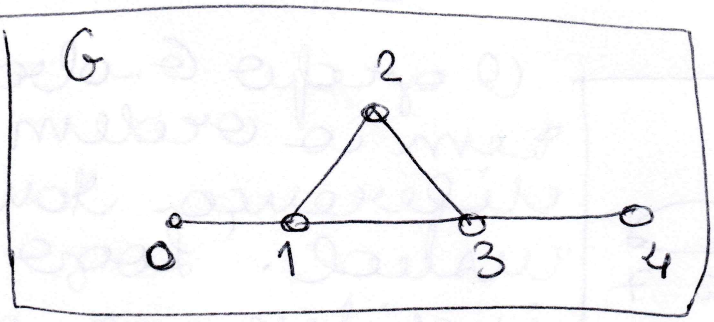
Com efeito, se $K_{\Delta(G)+1}$ empresta a mesma cor para as arestas e_1 e e_2 elas não podem ser adjacentes. Caso fossem, teria um vértice x, de $e_1 = xu$ e $e_2 = xv$, ~~entre m~~ onde $\lambda(u) = \lambda(v)$. Assim x é adjacente a todos os vértices entre eles, por ordem indiferença.

Daí, por Vizing, G é Classe 1 pois tem $\Delta(G)$ coloração de arestas.

• <u>FATO</u>: se G é grafo indiferença e $\Delta(G)$ é par, então existe $\Delta(G)+1$ coloração para G.

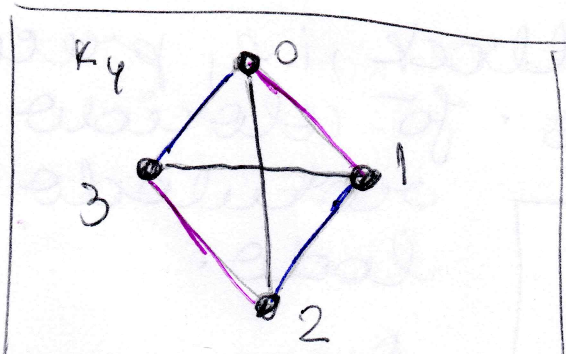
Bom, que existe é óbvio pelo Teorema de Vizing, entretanto o processo anterior <u>exibe</u> tal coloração.

Considere o grafo G da figura 4 e use a técnica de Pullback para obter uma coloração de suas arestas, através de uma 3-coloração das arestas do K_4.

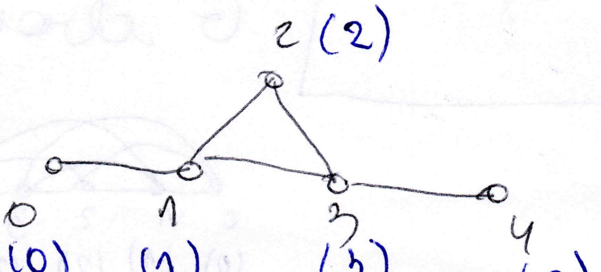


Uma ordem indiferença para G está exposto ao lado, é a mais visual possível.

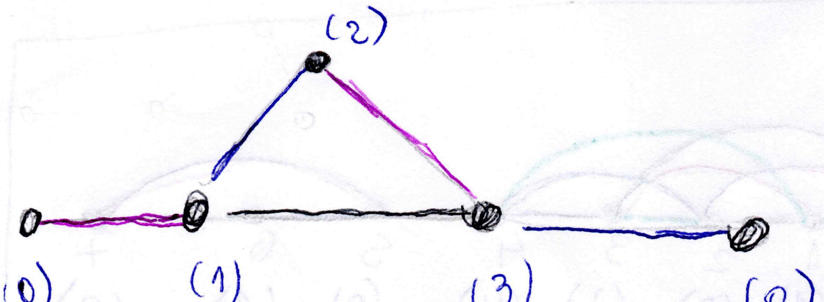
Como $\Delta(G) = 3$, obtemos $K_{\Delta(G)+1} = K_4$, com vértices rotulados e arestas coloridas ao lado.



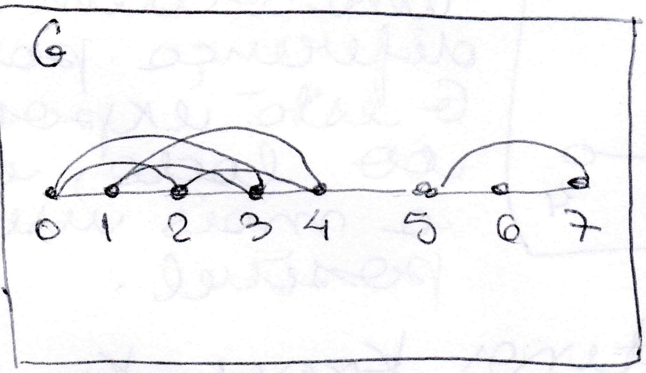
Agora utilizando a função α, re-rotulamos os vértices de G:



E colorimos de acordo com a nova rotulação, copiado do K_4:

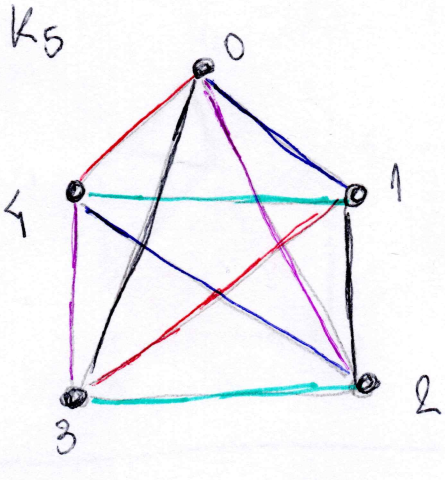


Considere o grafo G da figura 24 sem o vértice auxiliar x (pintado de branco). Use a técnica Pullback para obter uma coloração das arestas de G.

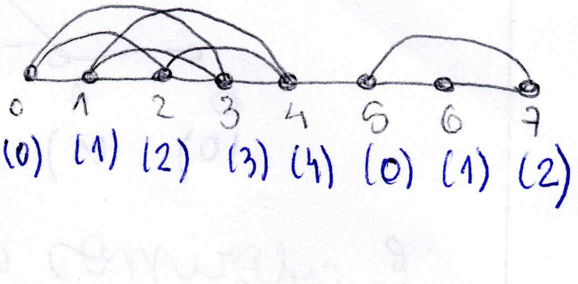


O grafo G abaixo tem a ordem indiferença também usual. Logo G é indiferença com $\Delta(G) = 4$.

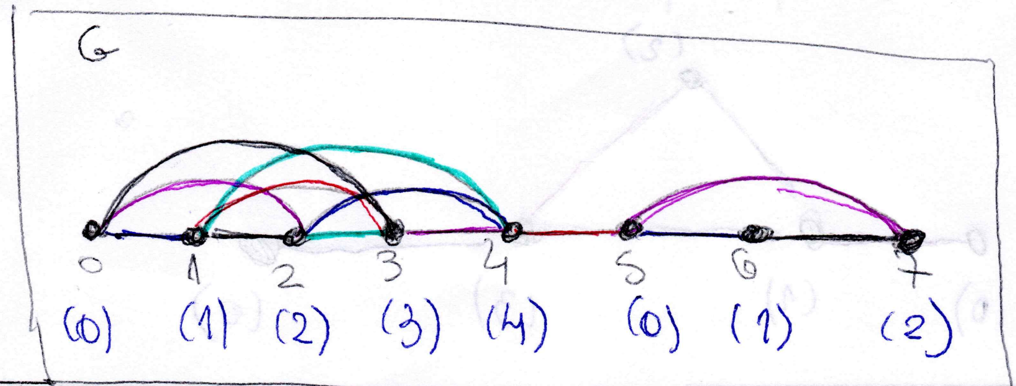
Vamos usar o Pullback, i.e, precisamos colorir $K_{\Delta(G)+1} = K_5$. Já colorido e rotulado ao lado.



Agora, usando a função f re-rotulamos G abaixo

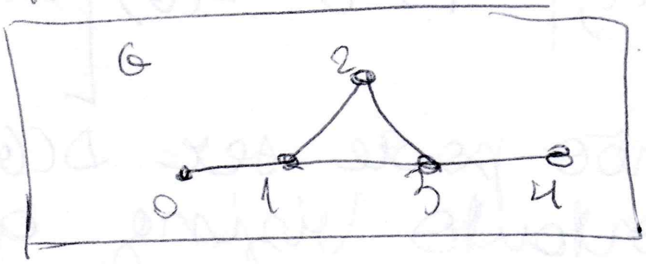


Recolorindo ...



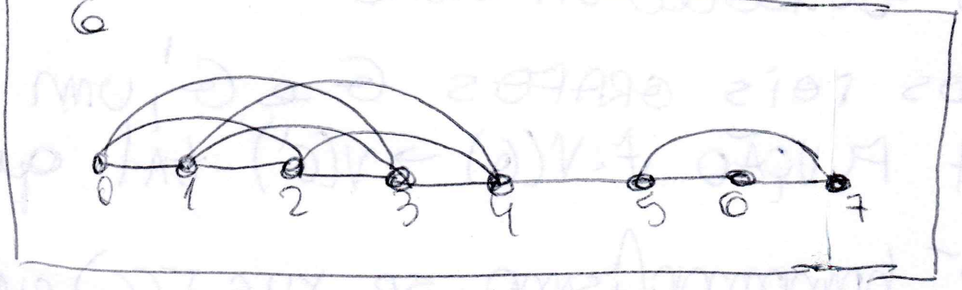
Prove que as duas colorações que foram obtidas são ótimas.

Bom, para o primeiro grafo G:



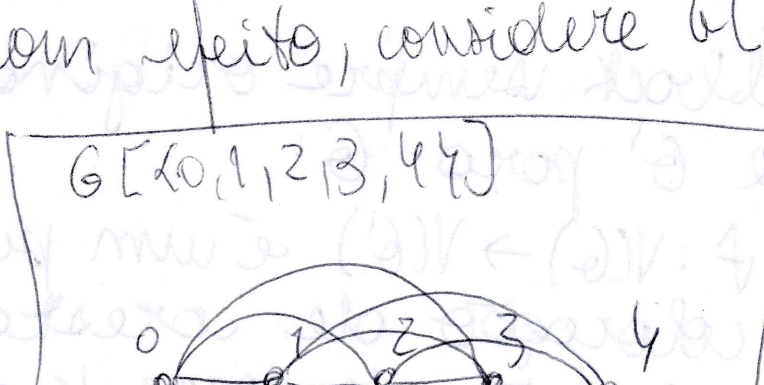
obtemos uma 3-coloração onde $\Delta(G)=3$. O Teorema de Vizing nos garante que a coloração é ótima.

Para o segundo grafo G:



obtemos 5-coloração, i.e, $\Delta(G)+1$. Precisamos provar que não existe $\Delta(G)$-coloração (4-coloração).

Com efeito, considere $G[\{0,1,2,3,4\}]$



onde $G[\{0,1,2,3,4\}] < G$ e $\Delta(G[\{0,1,2,3,4\}]) = \Delta(G) = 4$.

onde $G[\{0,1,2,3,4\}]$ é sobrecarregado:

$$|E(G[\{0,1,2,3,4\}])| = 9 > 8 = \Delta(G) \left\lfloor \frac{V(G[\{0,1,2,3,4\}])}{2} \right\rfloor$$

Logo G não pode ser $\Delta(G)$-colorível, e portanto Vizing garante que a $\Delta(G)+1$-coloração obtida anteriormente é ótima.

O pullback, de fato, é uma ideia mais geral do que o algoritmo apresentado anteriormente:

DADOS DOIS GRAFOS G e G', UM PULLBACK É UMA FUNÇÃO $f: V(G) \to V(G')$ TAL que:

f é homomorfismo, se $xy \in E(G)$ então $f(x)f(y) \in E(G')$.

f é injetora quando restrita A $N(v)$, pARA qualquer $v \in V(G)$.

E um pullback sempre origina uma coloração de G' para G:

• <u>FATO</u>: se $f: V(G) \to V(G')$ é um pullback e k' é uma coloração de arestas de G', então a atribuição de cores k definida por

$$k(xy) = k'(f(x)f(y))$$

é uma coloração de arestas de G.

Agora, analisemos quando podemos aplicar um pullback. O seguinte teorema nos dá uma caracterização de existência:

<u>Teorema</u>: Existe um pullback $f: V(G) \to V(K_\ell)$ se e somente se $\chi(G^2) \leq \ell$.

Onde G^2 é o grafo obtido através do grafo G, adicionando as arestas entre vértices de distância 2.

O pullback que utilizamos foi para colorir grafos indiferença. Mas a técnica é bem utilizada para colorir arestas de grafos duplamente cordais (que contém os grafos intervalo e os fortemente cordais).