

# A dicotomia polinomial versus NP-completo de problemas desafiadores em teoria dos grafos

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

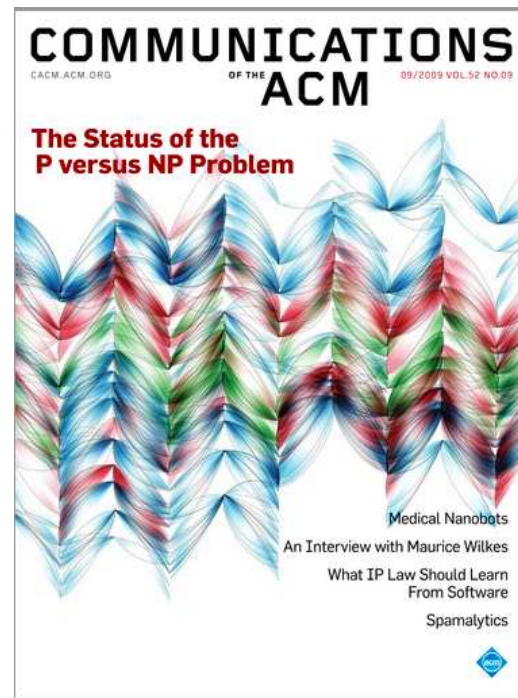
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Outubro 2011

# O Problema do Milênio

Problema central em Teoria da Computação: P versus NP

Existe pergunta cuja resposta pode ser verificada rapidamente, mas cuja resposta requer muito tempo para ser encontrada?



setembro 2009

# RESOLVER OU VERIFICAR?

UMA PERGUNTA QUE VALE UM MILHÃO DE DÓLARES



## RESOLVER É MAIS FÁCIL QUE VERIFICAR?

Em 1903, em um congresso da Sociedade Norte-americana de Matemática, o matemático Frank Cole (1861-1926) provou que o número  $2^{67} - 1 = 147.573.952.589.676.412.927$  não é primo, exibindo a fatora-ção  $193.707.721 \times 761.838.257.287$ . Quando apresentou essa fatoração, Cole fez a multiplicação desses dois números enormes no quadro e em silêncio, sendo ao final aplaudido de pé. É simples – embora tedioso, se feito manualmente – calcular  $2^{67} - 1$ , multiplicar  $193.707.721$  por  $761.838.257.287$  e verificar que dão o mesmo número. Já encontrar essa fatoração é difícil. Cole disse que ele levou três anos trabalhando aos domingos.



# Complexidade computacional

A maioria dos problemas computacionais pertence à classe NP, admitem um certificado polinomial

Em várias e diferentes áreas, procuramos objetos matemáticos: percurso de um caixeiro viajante, atribuição de verdade, emparelhamento máximo, coloração mínima de um grafo

O objeto matemático procurado é o certificado, a prova de que o problema está em NP

O estudo da complexidade computacional de problemas considera principalmente problemas em NP e tenta distinguir os solúveis em tempo polinomial dos não através da classe dos problemas NP-completos

# Bastam Quatro Cores

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação



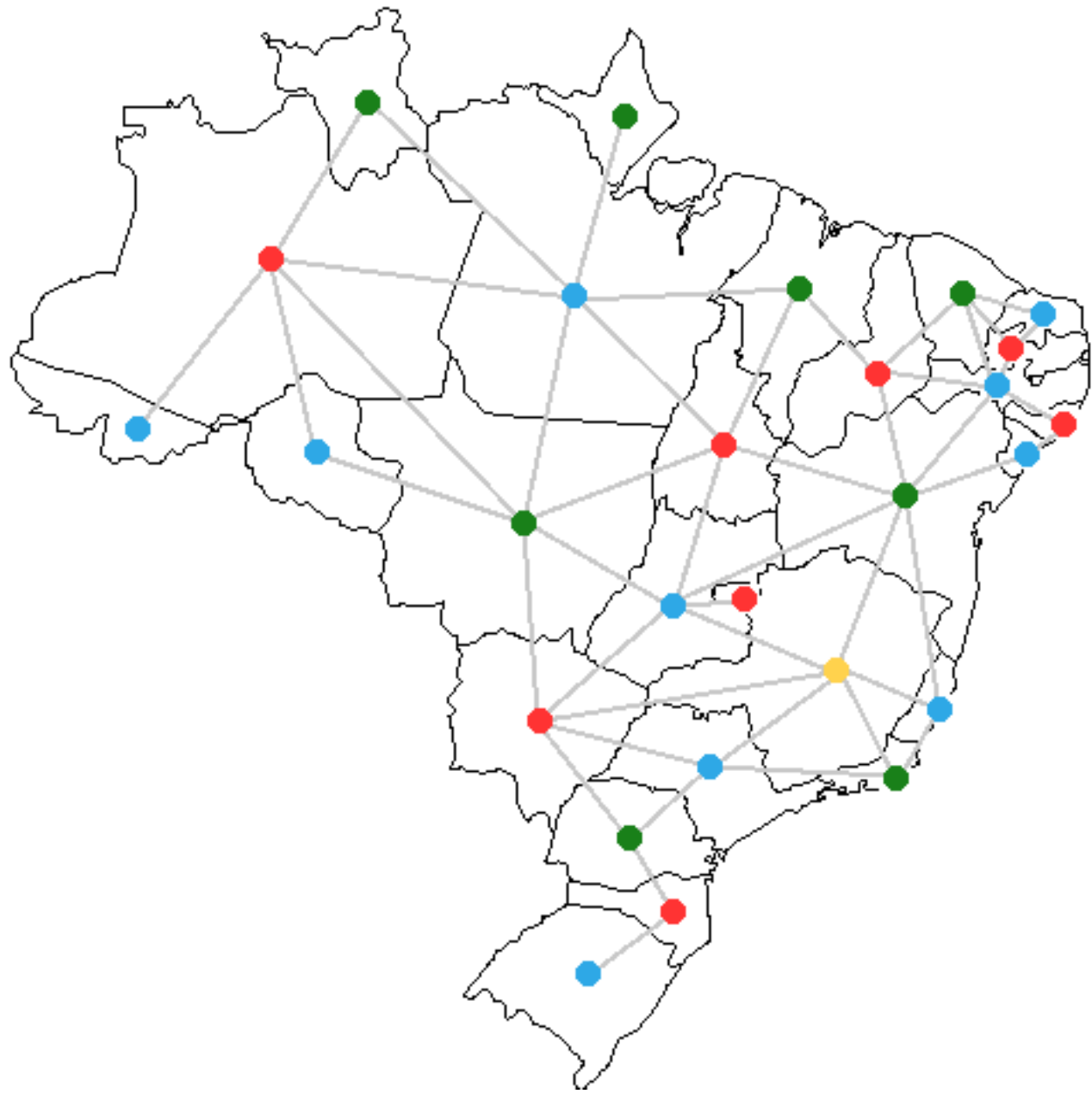


Kenneth Appel

1932–2013







# Minha contribuição

Que característica de um determinado problema o classifica como polinomial ou NP-completo?

Classificação em P ou NP-completo de dois problemas históricos em teoria dos grafos

Problema cuja complexidade separa classes de grafos  
Classe de grafos que separa a complexidade de problemas

Três dicotomias cheias:

todo problema é classificado em P ou NP-completo

“The P vs. NP-complete dichotomy of some challenging problems in graph theory”

*Discrete Appl. Math.* 2011

(plenária no Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium 2009)

# Guia de NP-completude

Identificação de problema interessante, de classe de grafos interessante

Classificação da complexidade de um problema: P ou NP-completo

**Problema** que separa classes de grafos

**Classe de grafos** que separa problemas

D. Johnson – *J. Algorithms* 1985, *ACM Trans. Algorithms* 2005

M. Golumbic, H. Kaplan, R. Shamir – *J. Algorithms* 1995

J. Spinrad – *Efficient Graph Representations* 2003

# Problemas separadores e Classes de grafos separadoras

	VERTEXCOL	EDGECOL	MAXCUT
perfect	P	N	N
chordal	P	O	N
split	P	O	N
strongly chordal	P	O	O
comparability	P	N	O
bipartite	P	P	P
permutation	P	O	O
cographs	P	O	P
indifference	P	O	O
split-indifference	P	P	P

N: NP-completo    P: polinomial    O: aberto

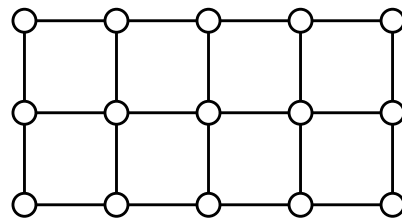
D. Johnson – *J. Algorithms* 1985

J. Spinrad – *Efficient Graph Representations* 2003

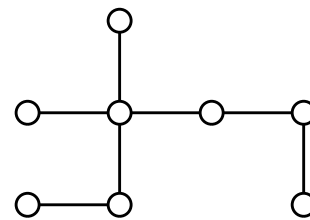
# Imersão em grades

Teoria dos grafos: Reconhecimento das grades parciais é problema aberto

Desenho de grafos: Decidir se um grafo admite um VLSI layout com arestas unitárias é NP-completo



a grade  $G_{3,5}$



imersão para  $\{1, 2, 4\}$ -árvore

A. Brandstädt, V.B. Le, et al. – Information system on graph class inclusions.

<http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci/>, 2002, atualizado 2010

S. N. Bhatt, S. S. Cosmadakis – *Inform. Process. Lett.* 1987

# P vs. N dicotomia para grades parciais restritas por graus

D	D-grafos	D-árvores
{1}	P	P
{2}	P	—
{3}	P	—
{4}	P	—
{1,2}	P	P
{1,3}	N	<b>N</b>
{1,4}	P	P
{2,3}	N	—

D	D-grafos	D-árvores
{2,4}	N	—
{3,4}	P	—
{1,2,3}	N [G89]	N [G89]
{1,2,4}	N [BC87]	N [BC87]
{1,3,4}	N	N
{2,3,4}	N	—
{1,2,3,4}	N [BC87]	N [BC87]

Não há conjunto D que defina problema separador

S. N. Bhatt, S. S. Cosmadakis – *Inform. Process. Lett.* 1987

A. Gregori – *Inform. Process. Lett.* 1989

“Complexity dichotomy on partial grid recognition”

*Theoret. Comput. Sci.* 2011 (com Vinícius Sá, Guilherme Fonseca, Raphael Machado)

# Referências

“On edge-colouring indifference graphs”

*Theoret. Comput. Sci.* 1997 (com João Meidanis, Célia Mello)

“Finding skew partitions efficiently”

*J. Algorithms* 2000 (com Sulamita Klein, Yoshiharu Kohayakawa, Bruce Reed)

“Optimizing bull-free perfect graphs”

*SIAM J. Discrete Math.* 2004 (com Frédéric Maffray)

“The complexity of clique graph recognition”

*Theoret. Comput. Sci.* 2009 (com Liliana Alcon, Luerbio Faria, Marisa Gutierrez)

“The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems”

*Discrete Appl. Math.* 2009 (com Rafael Teixeira, Simone Dantas)

“Chromatic index of graphs with no cycle with a unique chord”

*Theoret. Comput. Sci.* 2010 (com Raphael Machado, Kristina Vušković)

“Complexity dichotomy on partial grid recognition”

*Theoret. Comput. Sci.* 2011 (com Vinícius Sá, Guilherme Fonseca, Raphael Machado)