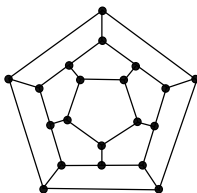


## Lista 0 - Tópicos Especiais em Algoritmos e Grafos

1. Prove que existe apenas um caminho entre cada par de vértices de uma árvore.
2. Prove que um grafo e seu complemento não podem ser ambos desconexos.
3. Seja  $G$  um grafo com tamanho da clique máxima  $\omega(G)$  e grau máximo igual a  $\Delta(G)$ . Prove que  $\chi(G)$ , o número cromático de  $G$ , é tal que  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .
4. Dê exemplos de grafos  $G$  tais que  $\chi(G) = 4$  e  $\omega(G) = 2$ .
5. Prove que um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se,  $G$  não tem ciclos ímpares. Prove que toda árvore é um grafo bipartido.
6. Um grafo é *periplanar* se é planar e tem uma representação plana em que todos os seus vértices estão na face externa.
  - (a) Prove ou dê contraexemplo: toda árvore é periplanar.
  - (b) Prove que se  $G$  é periplanar, então  $\chi(G) \leq 3$ ;
  - (c) Compare as classes de grafos BIPARTIDO e PERIPLANAR, isto é, verifique se há inclusão entre as classes e, mostre um exemplo de um grafo em cada região do diagrama das classes.
7. No contexto de coloração de vértices, um grafo  $G$  é *crítico* se a remoção de qualquer de seus vértices reduz o seu número cromático, isto é, se  $\chi(G - v) < \chi(G) \forall v \in V(G)$ . Dê exemplos de grafos críticos. Determine se a seguinte afirmação é correta: a remoção de um conjunto independente máximo de um grafo  $G$  pode reduzir o seu número cromático em duas ou mais unidades.
8. Considere o problema CAMINHO HAMILTONIANO (CICLO HAMILTONIANO) que tem como instância um grafo  $G$  e como pergunta se  $G$  tem um subgrafo caminho (ciclo) de tamanho igual ao seu número de vértices. Determine se a seguinte afirmação é correta: se CAMINHO HAMILTONIANO tem solução polinomial para uma classe  $\mathcal{F}$ , então CICLO HAMILTONIANO também o terá quando for restrito a grafos nessa mesma classe.
9. O *índice cromático*, ou também chamado *número aresta-cromático*, de um grafo  $G$  é denotado por  $\chi'(G)$ . Mostre que para todo grafo  $G$ ,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .  
Prove que todo grafo bipartido  $G$  tem uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores.
10. Prove que o Grafo de Petersen tem número cromático 3, índice cromático 4, não tem um ciclo hamiltoniano e não tem uma trilha euleriana.
11. Um jogo matemático feito por Hamilton se chamava *Icosian Game*. Ele tinha uma representação planar do dodecaedro (poliedro regular de 12 faces, onde cada face é um pentágono) e uma de suas variantes consistia em perguntar se era possível percorrer todos os vértices (extremos das faces) sem repetição, formando um ciclo. Encontre um ciclo hamiltoniano nesse grafo. Determine também,  $\chi$ ,  $\chi'$  e  $\Delta$  do dodecaedro.



12. Descreva detalhadamente um algoritmo para fazer um queijo quente.  
(Ex., **Entrada:** queijo, pão, manteiga, prato, faca, fogão, ..., **Saída:** queijo quente; **Passos do algoritmo**).