Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos: grafos de interseção

Novembro de 2025 – Prof.ª Márcia

Terceira Lista de Exercícios

Propriedade Helly e Cordais

---

1. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

   Todo grafo é grafo de interseção de uma família Helly.

2. Dê uma caracterização para um grafo G ter $E(G)$ como uma família que satisfaz a propriedade Helly.

3. Seja T uma árvore e $\mathcal{T}$ uma família de caminhos em T. Mostre que $\mathcal{T}$ é Helly se a interseção dos caminhos for tomada pelo conjunto de seus vértices.

   Dê um exemplo para mostrar que $\mathcal{T}$ pode não ser Helly se a interseção for feita em arestas.

4. Mostre que, para cada $n \geq 5$, o grafo $\overline{C_n}$ não é cordal.

5. Um grafo G é *split* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos (K, S) em que K é uma clique e S é um conjunto independente.

   Mostre que:

   (a) G é split se e somente se $\overline{G}$ é split.

   (b) G é split se e somente se G e $\overline{G}$ são ambos cordais.

6. Mostre que G é um grafo split se e somente se G não contém como subgrafo induzido $2K_2$, C_4 e nem C_5.

7. Prove que G é split se e somente se G é grafo de interseção de subestrelas distintas de uma estrela.

8. O *quadrado* de G, denotado por G^2, é o grafo tal que $V(G^2) = V(G)$ e $uv \in E(G^2)$ se e somente se $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$ em G. Isto é, o quadrado de um grafo é o grafo de interseção da família das vizinhanças fechadas de seus vértices.

   (a) Prove que o quadrado de G também é o grafo definido como $V(G^2) = V(G)$ e $uv \in E(G^2)$ se e somente se $d(u, v) \leq 2$.

   (b) Prove que se G é cordal, então $L(G)^2$ é cordal.