

1. Enumere todas as árvores não isomorfas de ordem  $n = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .
2. Mostre que se  $G$  é árvore, e  $v$  é um vértice que não é uma folha de  $G$ , então  $G - v$  é desconexo.
3. A palavra árvore está presumivelmente relacionada com o formato que estes grafos possuem, e está ligada ao uso tradicional da palavra ao descrever árvores genealógicas. O primeiro matemático a usar este termo por escrito foi Arthur Cayley (1821 – 1895) em seu trabalho *On the theory of the analytical forms called trees*, de 1857. Porém o conceito já havia sido empregado antes por G. K. C. von Staudt e por G. R. Kirchhoff em suas pesquisas sobre redes elétricas. Cayley fazia analogia a botânica ao descrever árvores, referindo-se aos vértices de uma árvore como *nós* e as arestas como *galhos* ou *ramos*.

As técnicas de enumeração de árvores desenvolvidas por Cayley foram aplicadas por ele mesmo ao problema da existência e contagem de substâncias que têm a mesma composição química e propriedades químicas diferentes, chamadas de *isômeros*.

Se temos uma molécula consistindo de átomos de carbono e hidrogênio, então podemos representá-la como um grafo no qual cada átomo de carbono corresponde a um vértice de grau 4 e cada átomo de hidrogênio corresponde a um vértice de grau 1.

(a) Dê dois exemplos de moléculas com a fórmula química  $C_4H_{10}$ .

(b) Seja  $G$  o grafo da molécula cuja fórmula química é  $C_nH_m$ . Prove que  $G$  é árvore se, e somente se,  $m = 2n + 2$ .

Obs. Compostos químicos com fórmula do tipo  $C_nH_{2n+2}$  são conhecidos como *parafinas* ou *alcanos*.

4. Prove que se  $g(v) \geq 3, \forall v \in V(G)$ , então  $G$  contém um ciclo par.
5. Prove que se  $G$  tem ao menos 5 vértices, então  $G$  ou  $\overline{G}$  tem ciclo. E mostre que a afirmação acima não é verdadeira se  $G$  tem ordem 3 ou 4.
6. Qual é o número cromático dos (a) grafos platônicos (b) grafos  $k$ -cubo  $Q_k$  (c) grafo de Petersen.
7. Suponha que em um laboratório de química devam ser armazenados 5 produtos químicos  $a, b, c, d$  e  $e$  em várias áreas de seu depósito. Alguns destes produtos reagem violentamente quando em contato e, portanto, devem ser guardados em áreas diferentes do depósito. Na tabela abaixo, um asterisco indica que aquele par de produtos químicos deve estar separado. Quantas áreas são necessárias?

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	-	*	*	*	-
$b$	*	-	*	*	*
$c$	*	*	-	*	-
$d$	*	*	*	-	*
$e$	-	*	-	*	-