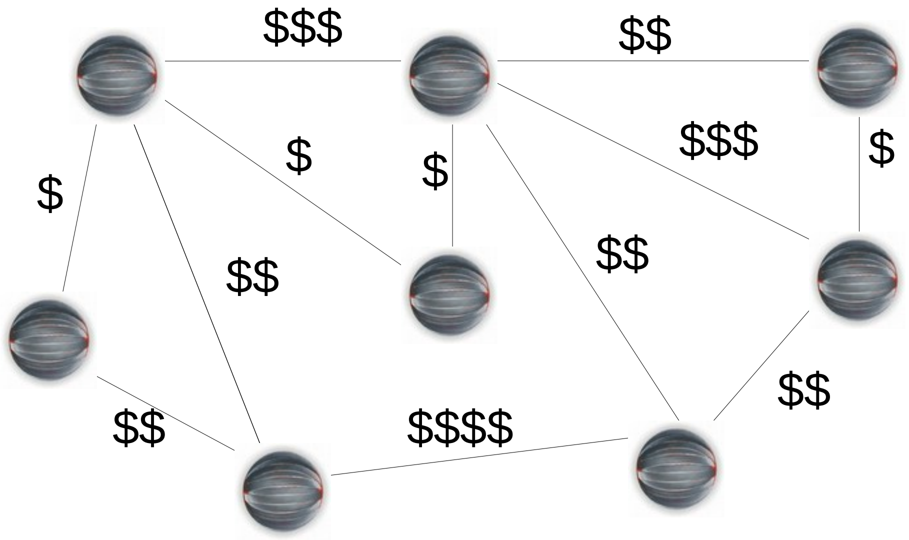
Grafos – Aula 11

Roteiro

- MST
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal
- Propriedades da MST
- Corretude dos algoritmos

Projetando uma Rede



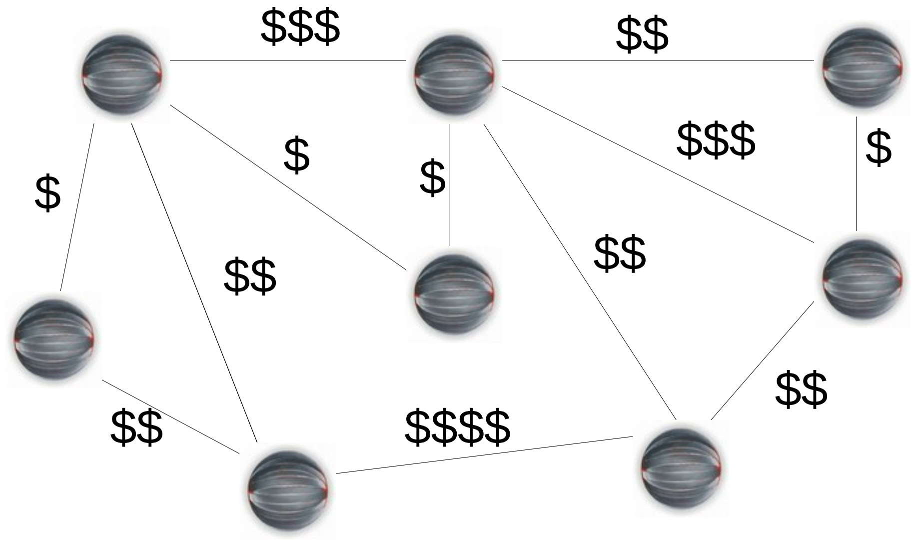
- Conjunto de localidades (ex. cidades)
- Custo para conectá-los diretamente (ex. construir estradas)

- Garantir conectividade
  - de qualquer lugar, chegamos a qualquer outro

- **Problema:** Como conectar as localidades de forma a minimizar o custo total?

Projetando uma Rede

- Abstração via grafos
  - Vértices: localidades
  - Arestas com pesos: custo de conexão direta entre localidades



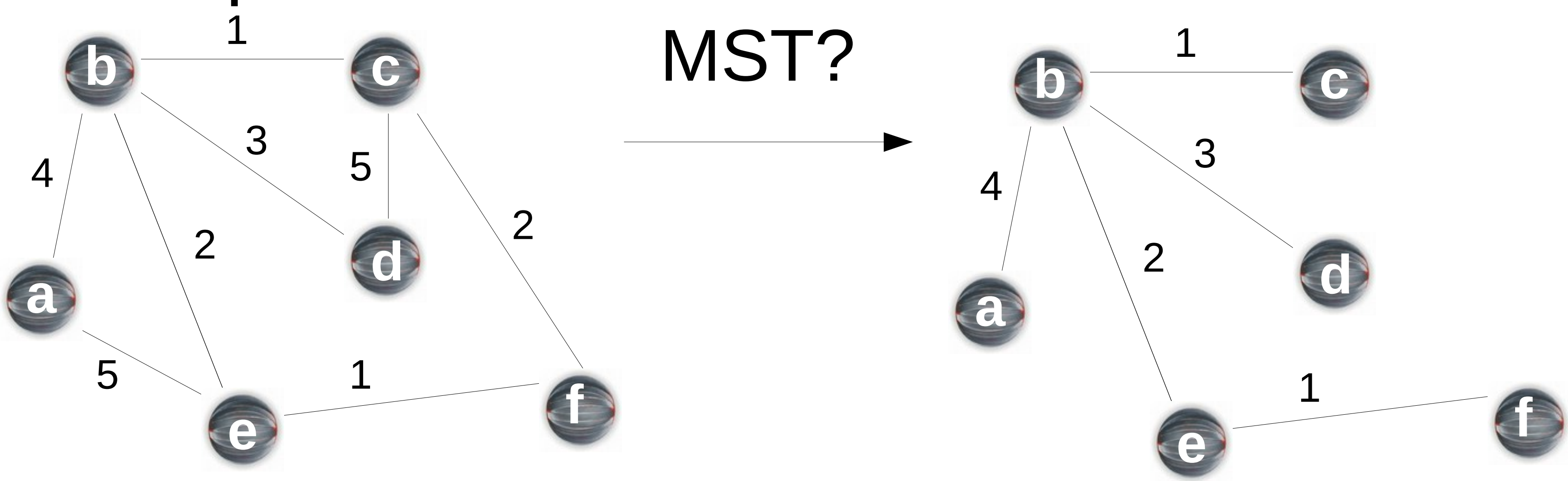
- Que tipo de rede (grafo) é o resultado?
- Subgrafo de G, uma árvore geradora

- Qualquer árvore?

Árvore Geradora de Custo Mínimo!

MST

- Minimum Spanning Tree (MST)
  - árvore geradora de custo mínimo
  - custo = soma dos pesos das arestas
- Exemplo



Custo desta MST? **11**

- MST é única?

Descobrindo a MST

- **Problema:** Obter uma MST de um grafo
- Grafo com pesos idênticos? ← *BFS to the rescue!*
  - qualquer árvore geradora tem custo mínimo
- Grafo com pesos diferentes?

Idéias?

Descobrindo a MST – Idéias I

- BFS constrói uma árvore geradora
- Dado vértice inicial *s*, construir árvore geradora mínima
- **Ideia:** expandir fronteira na direção correta

Qual é a direção correta?

- Direção de menor custo do ponto de vista da árvore

Descobrindo a MST – Idéias I

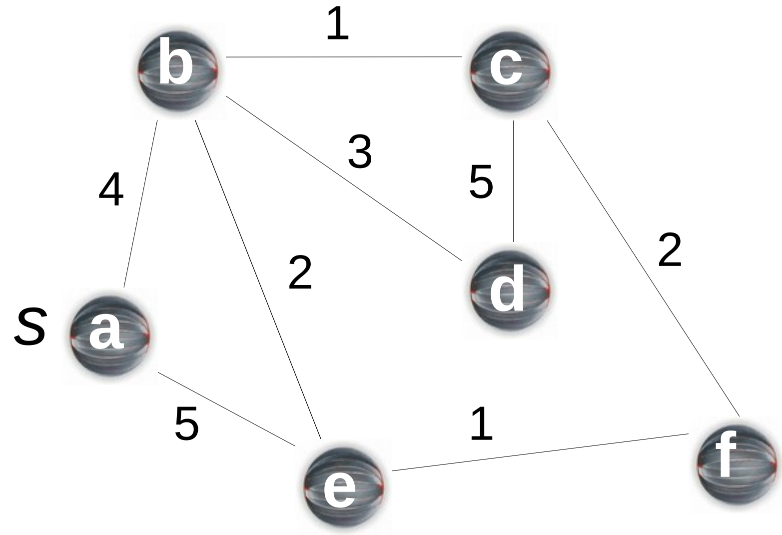
- Dado G=(V, E), construir MST, T=(S, E')
- Inicialmente S e E' estão vazios
- Selecionar *s* qualquer, vértice inicial
- Adicionar vértices em T na ordem mais barata possível
  - próximo vértice aumenta custo da árvore o mínimo possível

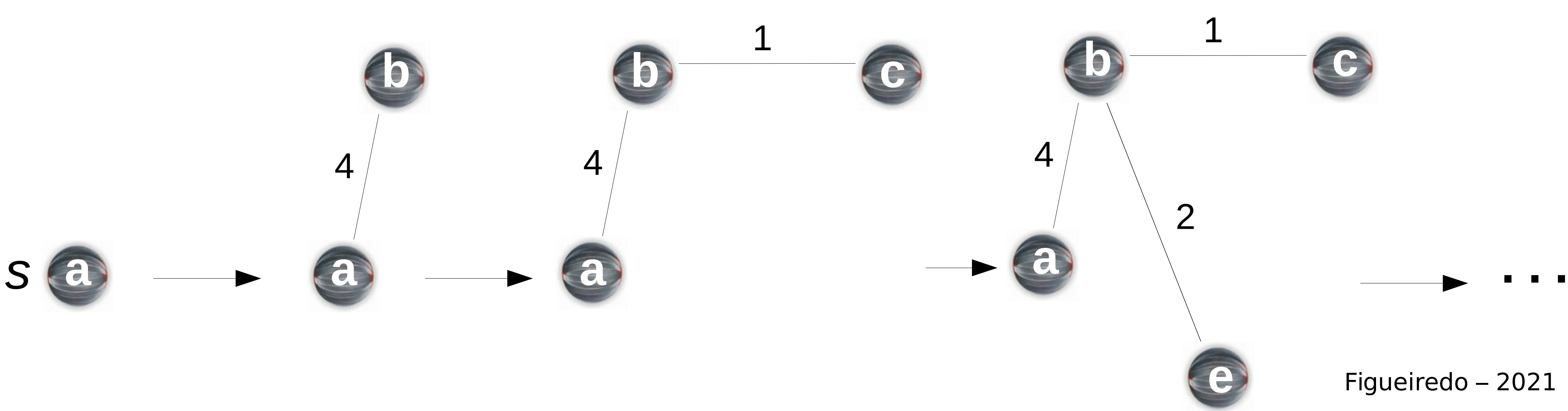
Algoritmo de *Prim*

- Muito parecido com algoritmo de Dijkstra

Algoritmo de *Prim*

- **Idéia:** crescer T de forma mais barata possível
- Exemplo





Algoritmo de *Prim*

- Como tornar a idéia em algoritmo (eficiente)?
  - adicionar o vértice que aumenta o custo da árvore o menos possível

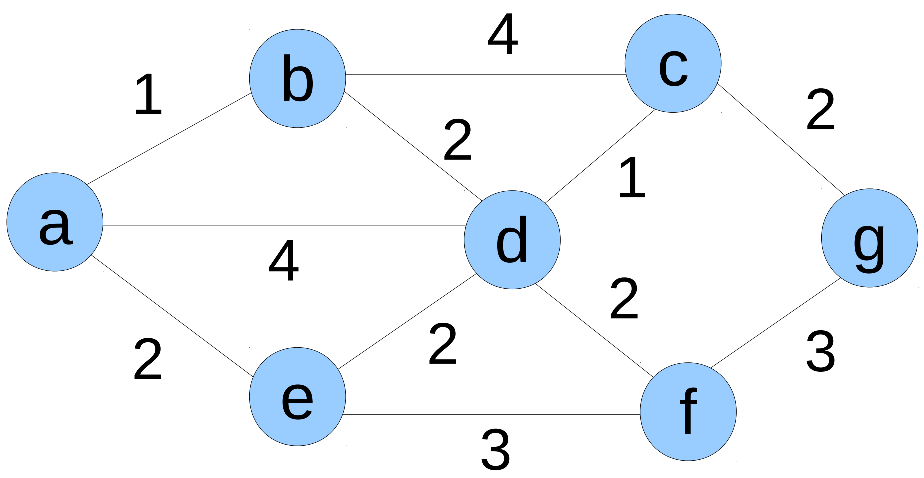
- **Idéias:**
  - Manter um conjunto de vértices da árvore (vértices explorados)
  - Manter custo para adicionar cada vértice até o momento
  - Adicionar o vértice de menor custo
  - Atualizar custos

Algoritmo de *Prim*

```
Prim(G,o)
  Para cada vértice v
    custo[v] = infinito
  Define conjunto S = 0 // vazio
  custo[o] = 0
  Enquanto S != V
    Selecione u em V-S, tal que custo[u] é mínimo
    Adicione u em S
    Para cada vizinho v de u faça
      Se custo[v] > w(u,v) então
        custo[v] = w(u,v)
```

Custo do vértice depende apenas
do peso da aresta incidente a ele

Executando o Algoritmo



- Manter tabela com passos e custos

c(u) é igual ao custo[u] no algoritmo

Passo	Conjunto S	c(a)	c(b)	c(c)	c(d)	c(e)	c(f)	c(g)
0	{}	0	inf	inf	inf	inf	inf	inf
1	{a}	-	1	inf	4	2	inf	inf
2	{a,b}		-	4	2	2	inf	inf
3	{a,b,e}			4	2	-	3	inf
4	{a,b,e,d}			1	-		2	inf
5	{a,b,e,d,c}			-			2	2
6	{a,b,e,d,c,f}						-	2
7	{a,b,e,d,c,f,g}							-

Complexidade

- Mesmo funciomento que algoritmo de Dijkstra
  - mesma complexidade

```
Prim(G,o)
  Para cada vértice v
    custo[v] = infinito
  Define conjunto S = 0 // vazio
  custo[o] = 0
  Enquanto S != V
    Selecione u em V-S, tal que custo[u] é mínimo
    Adicione u em S
    Para cada vizinho v de u faça
      Se custo[v] > w(u,v) então
        custo[v] = w(u,v)
```

- Usando filas de prioridade baseada em heap
  - n operações de remoção, m de atualização
- $O((m+n)\log n) = O(m \log n)$

Descobrindo a MST – Idéias II

- Outra abordagem, diferente de *BFS*
  - mas também gulosa
- Observações
  - aresta de menor peso sempre está na MST
  - aresta de segundo menor peso sempre está na MST
  - aresta de terceiro menor *pode* estar na MST
    - vai estar se não formar um ciclo

Cuidado para não formar ciclos!

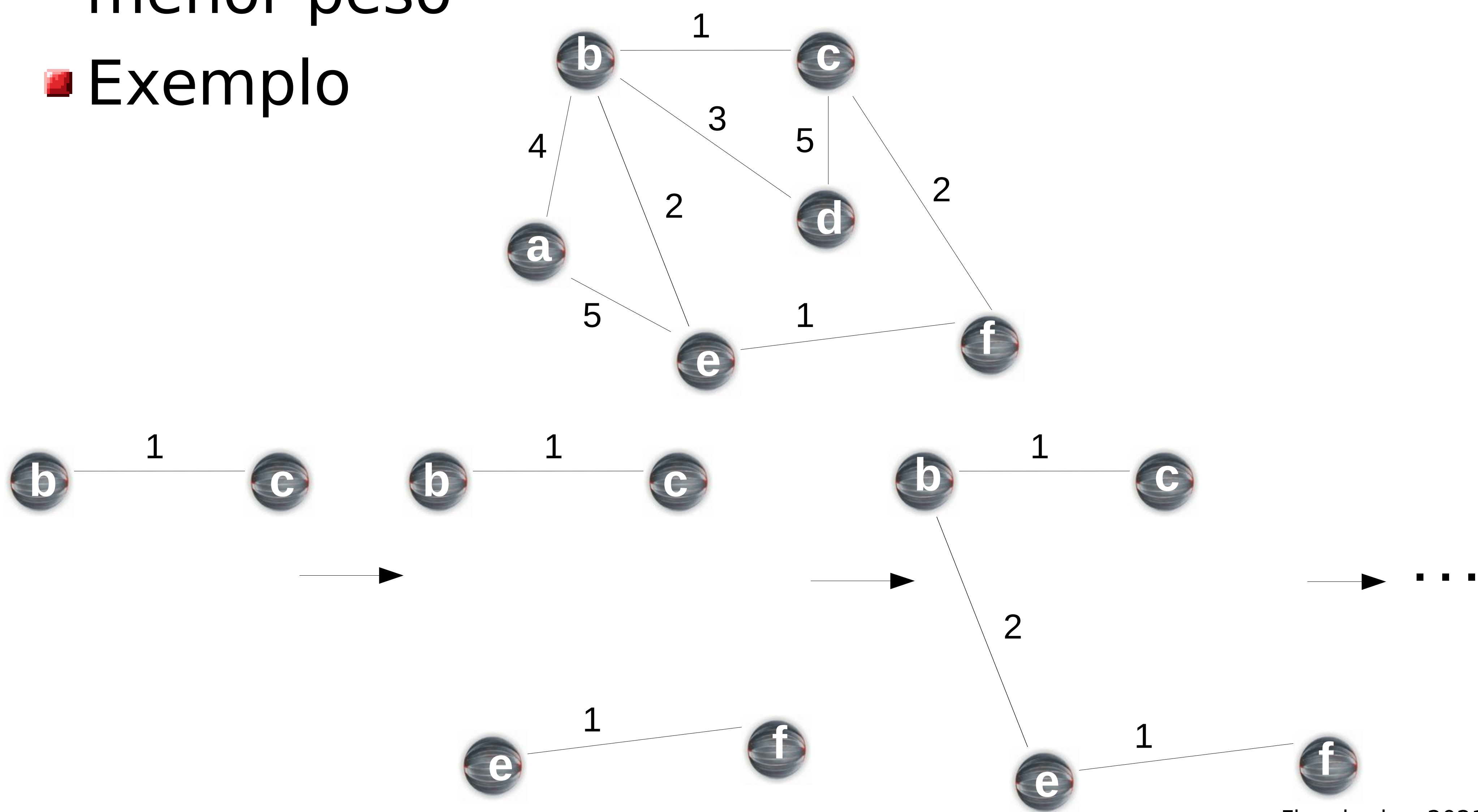
Descobrindo a MST – Idéias II

- Dado G=(V, E), construir MST, T=(V, E')
- Ordernar arestas por peso
- Inicialmente E' está vazio
- Adicionar arestas em ordem crescente de peso
- Se aresta formar um ciclo em T, então descarte e continue

Algoritmo de *Kruskal*

Algoritmo de *Kruskal*

- **Idéia:** construir T adicionado arestas de menor peso
- Exemplo

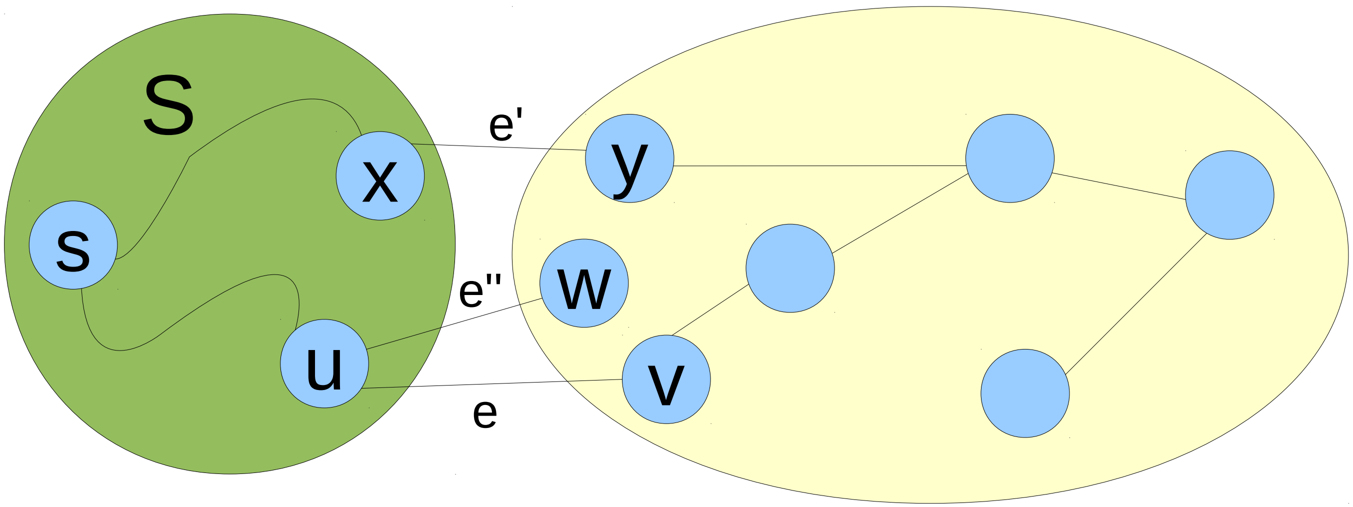


Analizando o Algoritmo

- Algoritmos de *Prim* e *Kruskal* sempre retornam uma MST
  - mas isto é óbvio?
- Como provar que algoritmo sempre produz resultado desejado – uma MST?
- Duas propriedades de uma MST
  - Propriedade do Corte (*cut property*)
  - Propriedade do Ciclo (*cycle property*)

Propriedade do Corte

- Considere um conjunto de vértices S e a aresta e=(u, v) de menor peso com uma ponta em S e outra em V-S. Então **toda MST** contém e=(u,v).
- O que isto está dizendo?



Se c(*e*) < c(*e'*), c(*e''*)
Então *e* está em toda MST

- Como provar isto?

Por contradição

Propriedade do Corte

- **Prova por contradição**: assumir que o oposto é verdade, e mostrar que nova afirmação não é verdadeira

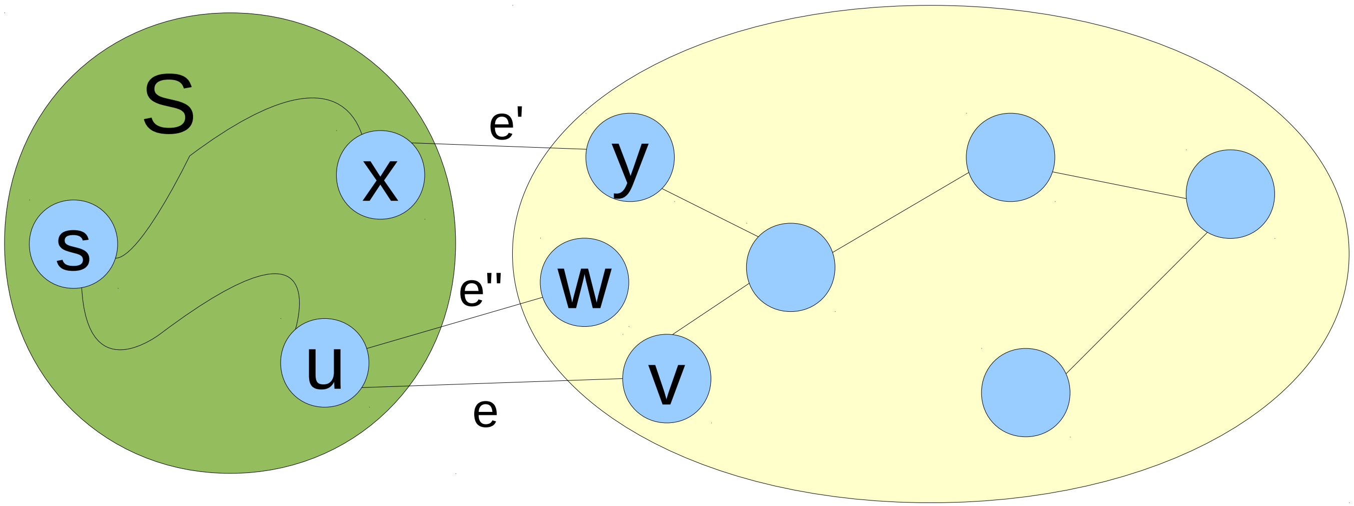
- **Oposto**: Existe MST que não possui aresta *e*
- Como provar que isto não é verdade?

  1) T' possui aresta *e*' e algum peso total

  2) Mostrar que *e* pode substituir *e*' em T'

  3) Peso da árvore com *e* é menor, logo T' com *e*' não é mínima, e não pode ser MST

Propriedade do Corte



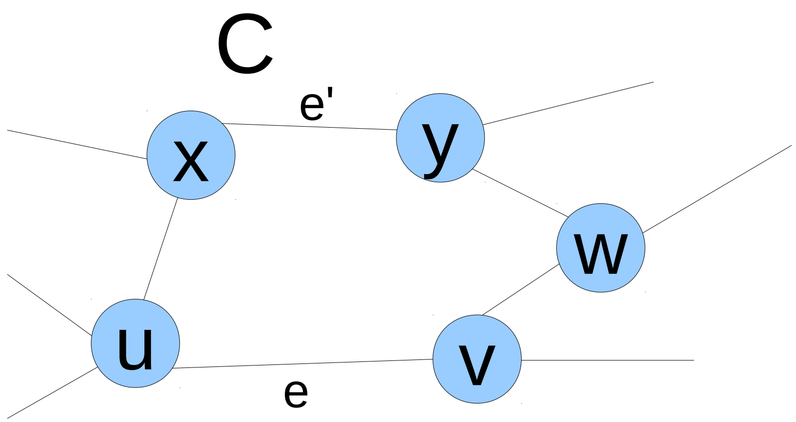
- Assumir árvore T' sem e
- Existe caminho P em T' entre u e v
- Seguir caminho P até encontrar vértice x em S e y em V-S, chamar e'=(x,y)
- Trocar *e'* por *e* cria nova árvore geradora T
- Nova T tem peso menor que T'
- Logo T' não é MST

Corretude de *Prim*

- Algoritmo de Prim
  - a cada passo, adiciona aresta de menor peso entre S e V-S (corte)
- Pela Propriedade do Corte, aresta faz parte de qualquer MST
- Prim só inclui arestas em T que fazem parte de qualquer MST
- Prim gera uma MST!

Propriedade do Ciclo

- Seja C um ciclo em G e *e*=(u,v) a aresta de maior custo de C. Então *e*=(u,v) **não** faz parte de nenhuma MST.
- O que isto está dizendo?



• Considere ciclo C = x,y,w,v,u,x
• Consdere aresta *e*=(u,v) de maior peso neste ciclo
• Então aresta *e* não está em nenuma MST

- Como mostrar isto é verdade?
  - por contradição

Corretude de *Kruskal*

- Algoritmo de Kruskal
  - processa arestas em ordem crescente de peso, não inclui aresta que fecha ciclo
- Pela Propriedade do Ciclo, aresta deixada de fora não pertence a nenhuma MST
- Kruskal não inclui arestas que não pertencem a nenhuma MST
- Kruskal gera uma MST!